

Spełniając miły obowiązek pragnę złożyć  
serdeczne podziękowanie

Panu Prof.dr hab.inż. Jerzemu Stanisławowi  
Zielińskiemu za naukową opiekę i merytorycz-  
ną pomoc w trakcie pisania pracy.

# S P I S   T R E S C I

	Strona
1. W S T Ę P . . . . .	5
2. OPIS UKŁADÓW W PRZESTRZENI STANÓW . . . . .	9
2.1. Zastosowanie metody zmiennych stanu do analizy jednowymiarowych / 1 - D / układów liniowych dyskretnych . . . . .	10
2.2. Dwuwymiarowy model Roessera / 2 - D / . . . . .	12
2.2.1. Równania modelu Roessera . . . . .	12
2.2.2. Rozwiązanie układu równań modelu Roessera . . . . .	13
3. UWAGI OGÓLNE DOTYCZĄCE RÓWNAŃ TELEGRAFISTÓW ORAZ ICH ROZWIĄZANIA . . . . .	16
4. RÓWNAŃ TELEGRAFISTÓW A MODEL ROESSERA . . . . .	21
4.1. Równania różniczkowe cząstkowe typu hiperbolicznego a model Roessera . . . . .	21
4.2. Przekształcenie macierzowej postaci równań telegrafistów do postaci modelu Roessera . . . . .	25
4.2.1. Pierwszy wariant przekształcenia . . . . .	26
4.2.2. Drugi wariant przekształcenia . . . . .	31
4.2.3. Trzeci wariant przekształcenia . . . . .	34
4.3. Macierz tranzycyjna trzeciego wariantu przekształcenia . . . . .	36
4.4. Wykorzystanie rozwiązania układu równań modelu Roessera dla uzyskania rozwiązania równań telegrafistów . . . . .	43
5. ZASTOSOWANIE OPRACOWANEJ METODY DO ANALIZY STANÓW NIEUSTALONYCH W DWUPRZEWODOWEJ LINII ELEKTROENERGETYCZNEJ . . . . .	50

5.1. Dwuprzewodowa linia elektroenergetyczna bezstratna przy warunkach początkowych zerowych . . . . .	50
5.2. Dwuprzewodowa linia elektroenergetyczna stratna . . . . .	68
6. ZASTOSOWANIE MODELU ROESSERA DO ANALIZY STANÓW NIEUSTALONYCH W WIELOPRZEWODOWEJ LINII ELEKTROENERGETYCZNEJ . . . . .	71
6.1. Uogólnienie rozwiązania równań telegrafistów na przypadek jednorodnej linii elektroenergetycznej n - przewodowej stratnej . . . . .	71
6.2. Uwagi o możliwości zastosowania opracowanej metody do analizy stanów nieustalonych w trójfazowej linii elektroenergetycznej .	79
7. W N I O S K I . . . . .	81
8. LITERATURA . . . . .	82
8.1. Wykaz literatury cytowanej w pracy . . .	82
8.2. Wykaz literatury uzupełniającej związanej z tematyką pracy . . . . .	83
9. ZAŁĄCZNIK . . . . .	85

## 1. W S T E P

Jednym z najważniejszych problemów związanych z prawidłową pracą układu elektroenergetycznego jest analiza stanów niustalonych powodujących przepięcie i przetężenia w poszczególnych częściach systemu. Złożoność analizy stanów niustalonych w systemie elektroenergetycznym wynika przede wszystkim z [1,5,6,10,14,15]

a/ dużej liczby wzajemnie oddziałujących na siebie urządzeń, przy czym własności tych urządzeń są różne,

b/ odmienności własności fizycznych elementów układu elektroenergetycznego w stanach niustalonych od ich własności w normalnym stanie pracy.

Do najważniejszych elementów systemu elektroenergetycznego należą linie przesyłowe, a ich własności fizyczne decydują o przebiegu większości zjawisk niustalonych w pozostałych jego częściach. Analiza zjawisk niustalonych w liniach przesyłowych napotyka na szereg trudności spowodowanych m.in.

a/ istnieniem wielu przewodów o różnych własnościach fizycznych / przewody fazowe, przewody odgromowe/,

b/ występowaniem zjawiska ulotu w momencie przekroczenia normalnych warunków pracy linii,

c/ wpływem ziemi,

d/ zmiennością warunków fizycznych wzdłuż linii,

e/ występowaniem wymuszeń, których kształt nie zawsze można w ścisły sposób opisać funkcjami analitycznymi,



f/ koniecznością uwzględnienia warunków początkowych i brzegowych w badanej linii,

g/ znacznie różniącą się długością odcinków linii.

Trudności powyższe doprowadziły do rozwoju różnych metod badania stanów nieustalonych w układach elektroenergetycznych. Metody te, często uzupełniające się wzajemnie, można najogólniej sklasyfikować w dwóch następujących grupach [14,15] :

a/ metody modelowania matematycznego / w tym metody analityczne/ i fizycznego,

b/ metody bezpośrednich pomiarów w układach elektroenergetycznych.

Stany nieustalone w liniach elektroenergetycznych opisywane są za pomocą tzw. równań telegrafistów będących przedmiotem szerszych rozważań przedstawionych w dalszej części pracy. Spośród analitycznych metod rozwiązywania równań telegrafistów stosowanych w badaniach przepięć można wyróżnić: [14]

1/ metody przekształceń operatorowych,

2/ metody falowe, w tym:

a/ metoda fal wędrownych /metoda Bewleya, metoda charakterystyk/,

b/ metoda fal stojących,

3/ metody numeryczne stosujące:

a/ bezpośrednie rozwiązywanie równań telegrafistów,

b/ sprowadzenie równań telegrafistów do równań różniczkowych zwyczajnych i rozwiązanie uzyskanych równań jedną z metod numerycznych.

W niniejszej rozprawie podjęto próbę opracowania metody analizy stanów nieustalonych w liniach elektroenergetycznych wykorzystującej znany w teorii automatyki i sterowania dwuwymiarowy model Roessera [12].

Wektory stanu, sterowania i odpowiedzi występujące w równaniach opisujących model Roessera są funkcjami dwóch zmiennych niezależnych. Ponieważ przebiegi napięcia i prądu w liniach o parametrach rozłożonych są także funkcjami dwóch zmiennych niezależnych; odległości od krańca linii  $x$  oraz czasu  $t$ , postanowiono wykorzystać tę analogię do opracowania metody analizy stanów nieustalonych w liniach stosującej rozwiązanie modelu Roessera. Wobec powyższego sformułowano następującą tezę pracy :

ISTNIEJE MOŻLIWOŚĆ WYKORZYSTANIA MODELU ROESSERA DO ANALIZY STANÓW NIEUSTALONYCH W ELEKTROENERGETYCZNYCH LINIACH PRZESYŁOWYCH.

Celem pracy jest :

OPRACOWANIE METODY ANALIZY STANÓW NIEUSTALONYCH W LINIACH ELEKTROENERGETYCZNYCH WYKORZYSTUJĄCEJ MODEL ROESSERA.

Mając na uwadze tezę oraz cel pracy w rozprawie przedstawiono sposób przekształcenia równań telegrafistów do postaci modelu Roessera. Dokonano tego zarówno dla skalarnej jak i macierzowej postaci równań telegrafistów / rozdziały 4.1, 4.2 /. Spośród trzech możliwych wariantów przekształcenia do modelu Roessera macierzowej postaci równań wybrano jeden, przedstawiony w rozdz. 4.2.3, który w dalszej części pracy posłużył jako podstawa do opracowania metody analizy stanów

nieustalonych w liniach przesyłowych. W opracowanej metodzie, rozdział 4.4, wykorzystuje się znane [12] rozwiązania równania stanu modelu Roessera przy określonych warunkach początkowych i brzegowych. W rozdziale 5 rozprawy opracowaną metodę zastosowano do rozwiązania kilku przypadków stanu pracy linii dwuprzewodowej zarówno stratnej jak i bezstratnej. Otrzymane wyniki zweryfikowano z rezultatami uzyskanymi w wyniku zastosowania innych znanych metod analizy stanów nieustalonych. Całość rozważań przeprowadzonych dla linii dwuprzewodowych uogólniono następnie na przypadek linii  $n$  - przewodowej.

W załączniku do pracy zamieszczono program obliczania macierzy tranzycyjnej a także przykład programu służącego do obliczania przebiegu napięcia na końcu linii, w stanie nieustalonym, spowodowanym dołączeniem jej do źródła napięcia przemiennego.

Rozprawę kończą wnioski oraz wykaz literatury.

## 2. OPIS UKŁADÓW W PRZESTRZENI STANÓW

Zasadnicze znaczenie we współczesnej teorii sterowania ma pojęcie stanu, którego definicję podano między innymi w pracach [2, 7, 8] .

Stanem układu nazywa się najmniej liczny zbiór liczb, który należy określić w chwili  $t = t_0$  aby można było przewidzieć jednoznacznie zachowanie się układu w każdej chwili  $t > t_0$ , dla każdego sygnału wymuszającego należącego do danego zbioru sygnałów wymuszających, przy założeniu, że wszystkie elementy zbioru wymuszeń są znane dla  $t \geq t_0$ .

Z powyższej definicji wynika, że stan układu w dowolnej chwili, określony wektorem stanu  $x(t)$  , jest funkcją wektora stanu  $x / t_0 /$  w chwili początkowej  $t_0$  oraz wektora wymuszeń w przedziale czasu  $(t_0, t]$  ,  $u(t_0, t]$  :

$$\dot{x}(t) = \Phi \left[ x(t_0), u(t_0, t) \right] \quad / 2.1 /$$

przy czym  $\Phi$  jest jednoznaczna funkcją wektorową swoich argumentów. Równanie / 2.1 / nazywamy równaniem stanu układu. Wektor stanu  $x / t /$  stanowi w danej chwili sumę informacji przeszłej, potrzebnej do przewidywania przyszłych stanów i odpowiedzi układu. Zbiór wszystkich możliwych wektorów stanu  $x / t /$  w chwili  $t$  stanowi przestrzeń stanów układu. Wektor odpowiedzi  $y / t /$  w chwili  $t$  jest również zależny od  $x / t_0 /$  oraz  $u(t_0, t]$

$$y(t) = \Psi \left[ x(t_0), u(t_0, t) \right] \quad / 2.2 /$$

przy czym  $\Psi$  jest jednoznaczna funkcją wektorową swoich argumentów. Równanie / 2.2 / nazywamy równaniem wyjścia układu. Zbiór wszystkich możliwych wektorów odpowiedzi

$y / t /$  w chwili  $t$  stanowi przestrzeń odpowiedzi układu, natomiast zbiór wszystkich możliwych wektorów wymuszeń  $u / t /$  w chwili  $t$  tworzy przestrzeń wymuszeń układu.

### 2.1 Zastosowanie metody zmiennych stanu do analizy jednowymiarowych / 1 - D / układów liniowych dyskretnych.

Układami dyskretnymi nazywamy układy, w których informacja przekazywana jest za pomocą sygnałów dyskretnych / nieciągłych /.

Analogicznie jak dla układów ciągłych, dynamikę układów dyskretnych można opisać równaniami różnicowymi w ogólnym przypadku nieliniowymi o postaci : [ 7, 8 ]

$$x(k+1) = f \left[ x(k), u(k) \right] \quad / 2.1.1 /$$

$$y(k) = g \left[ x(k), u(k) \right] \quad / 2.1.2 /$$

gdzie

$f$  i  $g$  są funkcjami wektorowymi.

Dla układu liniowego funkcje  $f$  i  $g$  są funkcjami liniowymi względem  $x$  i  $u$  .

W przypadku dyskretnego układu liniowego stacjonarnego / o parametrach niezależnych od czasu / równania stanu i wyjścia układu przyjmują postać :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad / 2.1.3 /$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad / 2.1.4 /$$

przy czym  $x / k_0 / = x_0 \quad k = k_0, k_0+1, k_0+2 \dots / 2.1.5 /$

W powyższych równaniach mamy :

$x(k) = x(kT_i) \in \mathbb{R}^n$  - wektor stanu w chwili  $t = kT_i$   
/  $T_i$  - okres dyskretyzacji /,

$u(k) = u(kT_i) \in \mathbb{R}^m$  - wektor wymuszeń w chwili  $t = kT_i$ ,

$y(k) = y(kT_i) \in \mathbb{R}^l$  - wektor odpowiedzi w chwili  $t = kT_i$ ,

**A** - macierz układu o wymiarach  $n \times n$ ,

**B** - macierz sterowania o wymiarach  $n \times m$ ,

**C** - macierz odpowiedzi o wymiarach  $l \times n$ ,

**D** - macierz transmisyjna o wymiarach  
 $l \times m$ .

Elementy wszystkich macierzy są stałe i niezależne od czasu, a występujące w równaniach wektory są funkcjami jednej zmiennej niezależnej  $k$  / układy jednowymiarowe  $l = D$ /. Rozwiązanie układu równań różnicowych / 2.1.3 / spełniające warunek początkowy / 2.1.5 / posiada następującą postać :

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i) \quad / 2.1.6 /$$

Występującą w rozwiązaniu macierz

$$\Phi(k) = A^k \quad / 2.1.7 /$$

nazywamy macierzą podstawową /transzycyjną / rozwiązań układu równań różnicowych.

Wymienione w tym punkcie określenia dotyczące układów jednowymiarowych zostaną bezpośrednio przeniesione na omawiane w dalszej części pracy układy dwuwymiarowe / 2 - D /, w których wektor stanu jest funkcją dwóch zmiennych niezależnych.

## 2.2 Dwuwymiarowy model Roessera / 2 - D /

### 2.2.1 Równania modelu Roessera

Modelem Roessera/2 - D/nazywamy układ liniowy opisany w dyskretnej przestrzeni stanów następującymi równaniami

[12] :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} f(i, j)$$

/ 2.2.1 /

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D f(i, j)$$

gdzie :

$x^h / i, j /$  - horyzontalny wektor stanu o wymiarze  $n_1 \times 1$ ,

$x^v / i, j /$  - wertykalny wektor stanu o wymiarze  $n_2 \times 1$ ,

$f / i, j /$  - wektor sterowania o wymiarze  $p \times 1$ ,

$y / i, j /$  - wektor odpowiedzi o wymiarze  $m \times 1$ ,

$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$  - macierz układu o wymiarach  $/n_1 + n_2/ \times /n_1 + n_2/$ ,

$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$  - macierz sterowania o wymiarach  $/n_1 + n_2/ \times p$ ,

$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$  - macierz odpowiedzi o wymiarach  $m \times /n_1 + n_2/$ ,

$D$  - macierz transmisyjna o wymiarach  $m \times p$ .

Pierwsze z równań, analogicznie jak w przypadku układu jednowymiarowego nazywany równaniem stanu układu, drugie zaś równaniem wyjścia układu. Występujące w równaniach wektory stanu, sterowania i wyjścia są jednak obecnie funkcjami dwóch zmiennych niezależnych  $i$  oraz  $j$ .

W konsekwencji zamiast równań różnicowych mamy w układzie / 2.2.1 / równania różnicowe cząstkowe. Omawiany model opublikowano w [12] tam też podano i udowodniono rozwiązanie układu równań / 2.2.1 / przy znanych warunkach początkowych i brzegowych.

### 2.2.2 Rozwiązanie układu równań modelu Roessera

Twierdzenie o rozwiązaniu układu równań modelu Roessera zostanie poprzedzone kilkoma definicjami [12]

#### Definicja 2.2.1

Mówimy, że pomiędzy parami liczb naturalnych  $/h, k/$  oraz  $/i, j/$  zachodzą relacje  $\ll, =, <$  jeżeli spełnione są następujące warunki

$$/h, k/ \ll /i, j/ \iff \text{gdy } h \ll i, k \ll j$$

$$/h, k/ = /i, j/ \iff \text{gdy } h = i, k = j$$

$$/h, k/ < /i, j/ \iff \text{gdy } /h, k/ \ll /i, j/$$

$$\text{oraz } /h, k/ \neq /i, j/ \quad /2.2.2/$$



Definicja 2.2.2

Macierzą tranzycyjną dwuwymiarowego modelu Roessera nazywamy macierz określoną następującą zależnością :

$$A^{i,j} = A^{1,0} A^{i-1,j} + A^{0,1} A^{i,j-1} \quad (i,j) \gg (0,0) \quad / 2.2.3 /$$

$$A^{0,0} = 1 \quad - \text{macierz jednostkowa} \quad / 2.2.4 /$$

$$A^{-i,j} = A^{i,-j} = 0 \quad - \text{macierz zerowa} \quad / i,j \gg / 1,1 / \quad / 2.2.5 /$$

przy czym

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad / 2.2.6 /$$

stąd wynika, że macierz układu

$$A = A^{1,0} + A^{0,1} \quad / 2.2.7 /$$

własności macierzy tranzycyjnej

$$1. \quad A^{i,0} = (A^{1,0})^i \quad \text{oraz} \quad A^{0,j} = (A^{0,1})^j \quad / 2.2.8 /$$

$$2. \quad 1^{1,0} A = A^{1,0} \quad \text{oraz} \quad 1^{0,1} A = A^{0,1} \quad / 2.2.9 /$$

gdzie

$$1^{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad / 2.2.10 /$$

$$3. \quad 1^{0,1} A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad / 2.2.11 /$$

$$\text{podobnie} \quad 1^{1,0} A^{0,1} = 0$$

Uwaga 2.2.1

Jeżeli wymuszenie  $f(i,j) = 0$  dla każdej pary  $/ i, j /$ , natomiast warunki początkowe i brzegowe są równe zero dla  $/ i, j / \neq / 0,0 /$ , to :

$$\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} = A^{i,j} \begin{bmatrix} x^h(0,0) \\ x^v(0,0) \end{bmatrix} \quad (i,j) \geq (0,0) \quad / 2.2.12 /$$

Twierdzenie 2.2.1

Dla każdego  $(i, j) \geq (0,0)$  rozwiązanie układu równań / 2.2.1 / przy warunkach początkowych  $x^v(i,0)$  oraz brzegowych  $x^h(0,j)$  ma postać

$$\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=0}^j A^{i,j-\alpha} \begin{bmatrix} x^h(0,\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{\beta=0}^i A^{i-\beta,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(\beta,0) \end{bmatrix} + \sum_{(0,0) \leq (\beta,\alpha) < (i,j)}$$

$$\cdot \left( A^{i-\beta-1,j-\alpha} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-\beta,j-\alpha-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) f(\beta,\alpha) \quad / 2.2.13 /$$

Dowód powyższego twierdzenia podano w pracy [12].

W dalszej części pracy udowodniono możliwość przekształcenia równań telegrafistów opisujących stany nieustalone w linii długiej do postaci modelu Roessera. Można więc tym samym, wykorzystując rozwiązanie modelu określone wzorem / 2.2.13 / podać rozwiązanie równań telegrafistów i zastosować je do analizy stanów nieustalonych w liniach elektroenergetycznych.



Inf

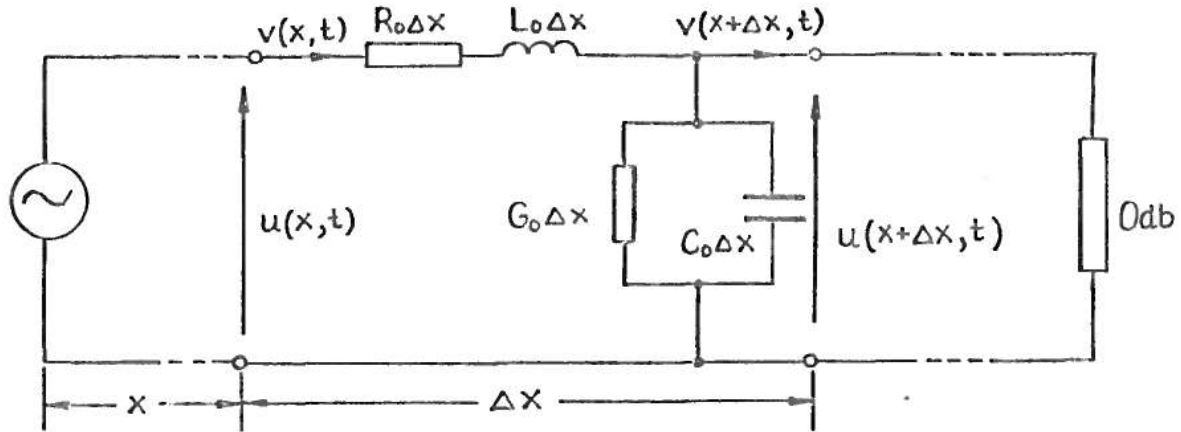
### 3. UWAGI OGÓLNE DOTYCZĄCE RÓWNAŃ TELEGRAFISTÓW ORAZ ICH ROZWIĄZANIA.

Linia elektroenergetyczna stanowi obwód o parametrach rozłożonych i dlatego zjawiska w niej zachodzące opisywane są za pomocą równań różniczkowych cząstkowych.

Analiza stanów nieustalonych w linii elektroenergetycznej sprowadza się do określenia zmian napięcia  $u(x,t)$  lub natężenia prądu  $v(x,t)$ . Określenie funkcji  $u(x,t)$  lub  $v(x,t)$  odbywa się na drodze rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu / lub układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu / przy odpowiednich warunkach granicznych / początkowych i brzegowych /. Istnieją także metody / np. metoda zmiennych stanu w połączeniu z przekształcaniem Laplace'a / umożliwiające jednoczesne badanie zmienności zarówno  $u(x,t)$  jak i  $v(x,t)$  [3,4] .

Weźmy pod uwagę jednorodną, liniarną dwuprzewodową linię elektroenergetyczną, w ogólnym przypadku stratną, o parametrach jednostkowych  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$ ,  $C_0$  rozłożonych wzdłuż linii. Niech  $u(x,t)$  oraz  $v(x,t)$  będą napięciem między przewodami i natężeniem prądu w linii w chwili  $t$  w odległości  $x$  od początku linii. Dostatecznie krótki odcinek rozważanej linii o długości  $\Delta X$  możemy zastąpić układem o parametrach skupionych  $R_0\Delta X$ ,  $L_0\Delta X$ ,  $G_0\Delta X$  oraz  $C_0\Delta X$  .  
Układając równania bilansu napięć w oczku oraz bilansu prądów w węźle przedstawionego na rysunku 3.1 czwórnik,

można w rezultacie kilku przekształceń ustalić równania wiążące ze sobą wielkości  $u(x,t)$  oraz  $v(x,t)$  w linii o rozłożonych parametrach.



Rys. 3.1. Sekcja elementarna linii.

Równania te w przypadku jednorodnej linii elektroenergetycznej będą miały postać / odległość  $x$  jest mierzona od początku linii /

$$\begin{aligned} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= R_0 v(x,t) + L_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \\ - \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= G_0 u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad / 3.1 /$$

Układ równań /3.1/ można łatwo sprowadzić do dwóch równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. W każdym z nich występuje tylko jedna niewiadoma  $u(x,t)$  lub  $v(x,t)$ .

Są to równania różniczkowe cząstkowe typu hiperbolicznego

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - R_0 G_0 u(x,t) = 0 \quad / 3.2 /$$

oraz

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - R_0 G_0 v(x,t) = 0 \quad / 3.3 /$$

Rozważane są różne przypadki linii / rozwiązań powyższych równań / w zależności od jej parametrów jednostkowych [9] .

1. Linia bez indukcyjności / $L_0=0$ /. W tym przypadku równania /3.2/, /3.3/ przyjmą następującą postać :

$$\frac{\partial^2 u/x,t/}{\partial x^2} - R_0 C_0 \frac{\partial u/x,t/}{\partial t} - R_0 G_0 u/x,t/ = 0 \quad /3.4/$$

$$\frac{\partial^2 v/x,t/}{\partial x^2} - R_0 C_0 \frac{\partial v/x,t/}{\partial t} - R_0 G_0 v/x,t/ = 0 \quad /3.5/$$

2. Linia bez indukcyjności oraz bez upływności / $L_0=0, G_0=0$ /  
tzw. kabel Thompsona

$$\frac{\partial^2 u/x,t/}{\partial x^2} - R_0 C_0 \frac{\partial u/x,t/}{\partial t} = 0 \quad /3.6/$$

$$\frac{\partial^2 v/x,t/}{\partial x^2} - R_0 C_0 \frac{\partial v/x,t/}{\partial t} = 0 \quad /3.7/$$

Równanie /3.4/, /3.5/, /3.6/, /3.7/ są typu parabolicznego. Przypadkami 1 oraz 2 w niniejszej pracy nie będziemy się zajmować, przedmiotem rozważań będą bowiem jedynie równania typu hiperbolicznego.

3. Linia bez strat / $R_0=0, G_0=0$ /

$$\frac{\partial^2 u/x,t/}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u/x,t/}{\partial t^2} = 0 \quad /3.8/$$

$$\frac{\partial^2 v/x,t/}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 v/x,t/}{\partial t^2} = 0 \quad /3.9/$$

Równania /3.8/ i /3.9/ typu hiperbolicznego zwane są równaniami fali płaskiej.

Wszystkie podane wyżej równania posiadają jednoznaczne rozwiązania przy odpowiednich warunkach granicznych.

W przypadku gdy poszukujemy rozwiązania równań linii o ograniczonej długości musimy podać dwa warunki początkowe oraz

dwa warunki brzegowe. Jeżeli poszukujemy rozwiązania równań linii nieskończenie długiej to warunki graniczne składają się jedynie z warunków początkowych. Warunki początkowe bywają formułowane w dwojaki sposób :

a/ dany jest rozkład napięcia i natężenia prądu wzdłuż linii w chwili początkowej  $t = 0$ , tzn.

$$\begin{aligned} u/x,0/ &= \varphi /x/ \\ v/x,0/ &= \Psi /x/ \end{aligned} \quad \text{dla } x \in /a,b/ \quad /3.10/$$

gdzie :

$x = a$  początek linii oraz  $x = b$  koniec linii

b/ dany jest rozkład napięcia  $\varphi_1 /x/$  lub natężenia prądu  $\Psi_1 /x/$  oraz szybkość zmian napięcia  $\varphi_2 /x/$  lub prądu  $\Psi_2 /x/$  wzdłuż linii w chwili początkowej  $t = 0$ , tzn.

$$\begin{aligned} u/x,0/ &= \varphi_1 /x/ \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} &= \varphi_2 /x/ \end{aligned} \quad \text{dla } x \in /a,b/ \quad /3.11/$$

lub

$$\begin{aligned} v/x,0/ &= \Psi_1 /x/ \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t=0} &= \Psi_2 /x/ \end{aligned} \quad \text{dla } x \in /a,b/ \quad /3.12/$$

Rodzaj warunków brzegowych dla równań linii uzależniony jest od sposobu zasilania oraz obciążenia linii na jej końcach. Mogą to być dwa warunki dotyczące napięcia lub prądu, z których jeden odnosi się do jednego końca linii  $x = a$ , drugi zaś do drugiego końca  $x = b$ . Jeżeli  $f /t/$  jest przebiegiem zmian napięcia zasilającego linię na krańcu  $x = a$  dla  $t \geq 0$  to fakt ten zapisujemy w postaci następującego warunku brzegowego

$$u/a, t/ = f /t/ \quad \text{dla } t \geq 0 \quad /3.13/$$

Jeżeli linia znajduje się w stanie jałowym tzn. jest otwarta na końcu  $x = b$  dla  $t \geq 0$ , to zapisujemy ten fakt w postaci warunku

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=b} = 0 \quad \text{dla } t \geq 0 \quad /3.14/$$

$$\text{lub } v/b, t/ = 0 \quad \text{dla } t \geq 0$$

W przypadku gdy linia jest na końcu zwarta warunek brzegowy ma postać

$$u/b, t/ = 0 \quad \text{dla } t \geq 0 \quad /3.15/$$
$$\text{lub } \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=b} = 0 \quad \text{dla } t \geq 0$$

Jeżeli linia obciążona jest na końcu pewnym odbiornikiem to warunek brzegowy zależy od układu połączeń elementów R, L, C, tego odbiornika [ 9 ] .

#### 4. ROWNANIA TELEGRAFISTOW A MODEL ROESSERA

##### 4.1 Równania różniczkowe cząstkowe typu hiperbolicznego a model Roessera.

Weźmy pod uwagę równanie typu hiperbolicznego w następującej postaci :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u = 0 \quad /4.1.1/$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia :

$$a_1 = L_0 C_0, \quad a_2 = G_0 L_0 + R_0 C_0, \quad a_3 = R_0 G_0 \quad /4.1.2/$$

wtedy z /4.1.1/ otrzymujemy :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_2 \frac{\partial u}{\partial t} - a_3 u = 0 \quad /4.1.3/$$

Dokonyjmy aproksymacji pochodnych cząstkowych ilorazami różnicowymi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u/i,j/ - 2u/i-1,j/ + u/i-2,j/}{\Delta x^2} \quad /4.1.4/$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u/i,j/ - 2u/i,j-1/ + u/i,j-2/}{\Delta t^2} \quad /4.1.5/$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u/i,j/ - u/i,j-1/}{\Delta t} \quad /4.1.6/$$

gdzie

$$u/i,j/ = u/i \Delta x, j \Delta t / \quad /4.1.7/$$

Podstawiając wyrażenia /4.1.4/, /4.1.5/ oraz /4.1.6/ do równania /4.1.3/ otrzymamy



$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\Delta x^2} \left[ u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j} \right] + \\ & - \frac{a_1}{\Delta t^2} \left[ u_{i,j} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2} \right] + \\ & - \frac{a_2}{\Delta t} \left[ u_{i,j} - u_{i,j-1} \right] - a_3 u_{i,j} = 0 \quad /4.1.8/ \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{a_1}{\Delta t^2} - \frac{a_2}{\Delta t} - a_3 \right] u_{i,j} = \frac{2}{\Delta x^2} u_{i-1,j} + \\ & - \frac{1}{\Delta x^2} u_{i-2,j} - \left[ \frac{2a_1}{\Delta t^2} + \frac{a_2}{\Delta t} \right] u_{i,j-1} + \\ & + \frac{a_1}{\Delta t^2} u_{i,j-2} \quad /4.1.9/ \end{aligned}$$

Wprowadzając w równaniu /4.1.9/ następujące oznaczenia

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{a_1}{\Delta t^2} - \frac{a_2}{\Delta t} - a_3$$

$$B = \frac{2}{\Delta x^2}$$

$$C = \frac{1}{\Delta x^2}$$

/ 4.1.10/

$$D = \frac{2a_1}{\Delta t^2} + \frac{a_2}{\Delta t}$$

$$E = \frac{a_1}{\Delta t^2}$$

otrzymany

$$A u_{i,j} = B u_{i-1,j} - C u_{i-2,j} - D u_{i,j-1} + E u_{i,j-2}$$

skąd

$$u_{i,j} = \frac{B}{A} u_{i-1,j} - \frac{C}{A} u_{i-2,j} - \frac{D}{A} u_{i,j-1} +$$

$$+ \frac{E}{A} u_{i,j-2}$$

/4.1.11/

Przyjmijmy, że

$$X^h(i,j) = \begin{bmatrix} x_1^h(i,j) \\ x_2^h(i,j) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad X^v(i,j) = \begin{bmatrix} x_1^v(i,j) \\ x_2^v(i,j) \end{bmatrix} \quad /4.1.12/$$

gdzie

$$x_1^h /i,j/ = Bu/i-1,j/ - Cu/i-2,j/$$

$$x_2^h /i,j/ = u/i-2,j/ \quad /4.1.13/$$

oraz

$$x_1^v /i,j/ = - Du/i,j-1/ + Eu/i,j-2/ \quad /4.1.14/$$

$$x_2^v /i,j/ = u/i,j-2/$$

Podstawiając /4.1.13/ i /4.1.14/ do /4.1.11/ otrzymamy

$$u/i,j/ = \frac{1}{A} \left[ x_1^h /i,j/ + x_1^v /i,j/ \right] \quad /4.1.15/$$

Wykorzystując równania /4.1.13/, /4.1.14/ oraz

/4.1.15/ określimy wektory  $x^h/i+1,j/$  oraz  $x^v/i,j+1/$ .

$$x_1^h /i+1,j/ = \frac{B}{A} \left[ x_1^h /i,j/ + x_1^v /i,j/ \right] +$$

$$- \frac{C}{B} \left[ x_1^h /i,j/ + C x_2^h /i,j/ \right]$$

skąd

$$x_1^h /i+1,j/ = \left( \frac{B}{A} - \frac{C}{B} \right) x_1^h /i,j/ - \frac{C^2}{B} x_2^h /i,j/ +$$

$$+ \frac{B}{A} x_1^v /i,j/ \quad /4.1.16/$$

oraz

$$x_2^h /i+1,j/ = \frac{1}{B} x_1^h /i,j/ + \frac{C}{B} x_2^h /i,j/ \quad /4.1.17/$$

Zapisując równanie /4.1.16/ i /4.1.17/ w postaci

macierzowej otrzymamy :

$$x^h(i+1, j) = \begin{bmatrix} \frac{B}{A} - \frac{C}{B} & -\frac{C^2}{B} \\ \frac{1}{B} & \frac{C}{B} \end{bmatrix} x^h(i, j) + \begin{bmatrix} \frac{B}{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^v(i, j) \quad /4.1.18/$$

Podobnie

$$x_1^v / i, j+1 / = -\frac{D}{A} \left[ x_1^h / i, j / + x_1^v / i, j / \right] +$$

$$- \frac{E}{D} \left[ x_1^v / i, j / - E x_2^v / i, j / \right]$$

skąd

$$x_1^v / i, j+1 / = \left( -\frac{D}{A} - \frac{E}{D} \right) x_1^v / i, j / +$$

$$+ \frac{E^2}{D} x_2^v / i, j / - \frac{D}{A} x_1^h / i, j / \quad /4.1.19/$$

oraz

$$x_2^v / i, j+1 / = -\frac{1}{D} x_1^v / i, j / + \frac{E}{D} x_2^v / i, j / \quad /4.1.20/$$

Zapisując równania /4.1.19/ i /4.1.20/ w postaci macierzowej otrzymamy :

$$x^v(i, j+1) = \begin{bmatrix} -\frac{D}{A} - \frac{E}{D} & \frac{E^2}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{E}{D} \end{bmatrix} x^v(i, j) + \begin{bmatrix} -\frac{D}{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^h(i, j) \quad /4.1.21/$$

Złączny zapis równań /4.1.18/ i /4.1.21/ przy użyciu macierzy ma następującą postać :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad /4.1.22/$$

gdzie

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{B}{A} - \frac{C}{B} & -\frac{C^2}{B} \\ \frac{1}{B} & \frac{C}{B} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{B}{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.1.23/$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{D}{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{D}{A} - \frac{E}{D} & \frac{E^2}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{E}{D} \end{bmatrix} \quad /4.1.24/$$

Równanie /4.1.22/ ma identyczną postać jak równanie stanu modelu Roessera /2.2.1/ przy wymuszeniu  $f_{i,j} = 0$ . Elementy macierzy układu  $A_1, A_2, A_3, A_4$  zależą od parametrów  $R_0, L_0, C_0, G_0$  oraz od wybranego kroku dyskretyzacji czasu  $\Delta t$  i długości linii  $\Delta x$ .

#### 4.2. Przekształcenie macierzowej postaci równań telegrafistów do postaci modelu Roessera.

Układ równań telegrafistów analogiczny do układu /3.1/ lecz dla przypadku, w którym odległość  $x$  jest mierzona od końca linii, będzie miał postać :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= R_0 v(x,t) + L_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= G_0 u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad /4.2.1/$$

Powyższy układ równań możemy zapisać w postaci jednego równania macierzowego

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_0 \\ G_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L_0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} \quad /4.2.2/$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia, niech

$$V(x,t) = \begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & R_0 \\ G_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & L_0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.2.3/$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia równanie /4.2.2/  
zapiszemy w postaci

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x,t) = A_0 V(x,t) + B_0 \frac{\partial}{\partial t} V(x,t) \quad /4.2.4/$$

Powyższe równanie zapiszemy w postaci przybliżonej zastępując pochodne cząstkowe ilorazami różnicowymi. Podane zostaną trzy warianty przekształcenia w zależności od rodzaju przyjętych do aproksymacji ilorazów różnicowych. Ostatni z podanych niżej wariantów posłuży w dalszej części pracy jako podstawa do opracowania metody analizy stanów nieustalonych w liniach elektroenergetycznych [13] .

#### 4.2.1 Pierwszy wariant przekształcenia

W pierwszym wariantcie przekształcenia obydwie pochodne cząstkowe zarówno względem czasu jak i odległości zastępowujemy ilorazami różnicowymi wstecznymi

$$\frac{\partial V/x,t/}{\partial x} \approx \frac{V/i,j/ - V/i-1,j/}{\Delta x} \quad /4.2.5/$$

$$\frac{\partial V/x,t/}{\partial t} \approx \frac{V/i,j/ - V/i,j-1/}{\Delta t}$$

Podstawiając zależności /4.2.5/ do równania /4.2.4/  
otrzymamy

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ V /i,j/ - V /i-1,j/ \right] = A_0 V /i,j/ + \quad /4.2.6/  
+ \frac{1}{\Delta t} B_0 \left[ V /i,j/ - V /i,j-1/ \right]$$

stąd

$$\begin{aligned} & / 1 - \Delta x A_0 - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 / V / i, j / = & /4.2.7/ \\ & = V / i-1, j / - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V / i, j-1 / \end{aligned}$$

niech

$$K = 1 - \Delta x A_0 - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 \quad /4.2.8/$$

Przy takim oznaczeniu mamy

$$K V / i, j / = V / i-1, j / - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V / i, j-1 / \quad /4.2.9/$$

stąd otrzymamy

$$V / i, j / = K^{-1} \left[ V / i-1, j / - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V / i, j-1 / \right] \quad /4.2.10/$$

Przyjmijmy, że

$$x^h / i, j / = V / i-1, j / \quad /4.2.11/$$

$$x^v / i, j / = - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V / i, j-1 / \quad /4.2.12/$$

Wprowadzając zależności /4.2.11/ i /4.2.12/ do równania /4.2.10/ otrzymamy

$$V / i, j / = K^{-1} \left[ x^h / i, j / + x^v / i, j / \right] \quad /4.2.13/$$

Wykorzystując oznaczenia /4.2.11/, /4.2.12/ oraz równanie /4.2.13/ możemy napisać następujące zależności

$$x^h / i+1, j / = K^{-1} x^h / i, j / + K^{-1} x^v / i, j / \quad /4.2.14/$$

oraz

$$x^v / i, j+1 / = - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 K^{-1} x^h / i, j / - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 K^{-1} x^v / i, j / \quad /4.2.15/$$

Wykorzystując zapis macierzowy możemy równania /4.2.14/ oraz /4.2.15/ zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^y(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{-1} & K^{-1} \\ -\frac{\Delta X}{\Delta t} B_0 K^{-1} & -\frac{\Delta X}{\Delta t} B_0 K^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^y(i, j) \end{bmatrix}$$

/4.2.16/

Powyższe równanie ma identyczną postać jak równanie opisujące model Roessera przy wymuszeniu  $f(i, j) = 0$ .  
Macierz układu  $A$  o wymiarze  $4 \times 4$  ma następującą postać

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^{-1} & K^{-1} \\ -\frac{\Delta X}{\Delta t} B_0 K^{-1} & -\frac{\Delta X}{\Delta t} B_0 K^{-1} \end{bmatrix}$$

/4.2.17/

Z powyższej zależności wynika, że

$$A_1 = A_2 = K^{-1}$$

$$A_3 = A_4 = -\frac{\Delta X}{\Delta t} B_0 K^{-1}$$

Obliczamy macierz odwrotną  $K^{-1}$ .

Zgodnie z zależnością /4.2.8/ mamy

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Delta X R_0 \\ \Delta X G_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta X}{\Delta t} L_0 \\ \frac{\Delta X}{\Delta t} C_0 & 0 \end{bmatrix} =$$

/4.2.18/

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta X R_0 - \frac{\Delta X}{\Delta t} L_0 \\ -\Delta X G_0 - \frac{\Delta X}{\Delta t} C_0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczony wyznacznik macierzy

$$\begin{aligned} \det K &= 1 - / - \Delta x G_0 - \frac{\Delta x}{\Delta t} C_0 / / - \Delta x R_0 - \frac{\Delta x}{\Delta t} L_0 / = \\ &= 1 - / \Delta x^2 R_0 G_0 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} L_0 G_0 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} R_0 C_0 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} L_0 C_0 / \quad /4.2.19/ \end{aligned}$$

W przypadku linii bezstratnej  $/R_0 = 0, G_0 = 0 /$

$$\det K = 1 - \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 L_0 C_0 \quad /4.2.20/$$

Oczywiście w obu powyższych przypadkach wyznacznik macierzy  $K$  nie może być równy zero, co w przypadku linii bezstratnej sprowadza się do warunku aby

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \neq v \quad /4.2.21/$$

gdzie  $v$  jest prędkością rozprzestrzenienia się fali wzdłuż badanej linii.

Macierz odwrotna  $K^{-1}$  będzie więc miała postać - w przypadku ogólnym

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det K} & \frac{\Delta x R_0 + \frac{\Delta x}{\Delta t} L_0}{\det K} \\ \frac{\Delta x G_0 + \frac{\Delta x}{\Delta t} C_0}{\det K} & \frac{1}{\det K} \end{bmatrix} \quad /4.2.22/$$

- w przypadku linii bezstratnej

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det K} & \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} L_0}{\det K} \\ \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} C_0}{\det K} & \frac{1}{\det K} \end{bmatrix} \quad /4.2.23/$$

Aby określić macierz układu  $A$  należy określić postać iloczynu  $-\frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 K^{-1}$



$$\begin{aligned}
 -\frac{\Delta X}{\Delta t} B_0 K^{-1} &= -\frac{\Delta X}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & L_0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\det K} \begin{bmatrix} 1 & \Delta X R_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} L_0 \\ \Delta X G_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} C_0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\Delta X}{\Delta t} \frac{1}{\det K} \begin{bmatrix} L_0 (\Delta X G_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} C_0) & L_0 \\ C_0 & C_0 (\Delta X R_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} L_0) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{-\frac{\Delta X^2}{\Delta t} L_0 G_0 - \frac{\Delta X^2}{\Delta t^2} L_0 C_0}{\det K} & \frac{-\frac{\Delta X}{\Delta t} L_0}{\det K} \\ \frac{-\frac{\Delta X}{\Delta t} C_0}{\det K} & \frac{-\frac{\Delta X^2}{\Delta t} R_0 C_0 - \frac{\Delta X^2}{\Delta t^2} L_0 C_0}{\det K} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Na podstawie powyższych rozważań, macierze składowe  $A^{1,0}$  oraz  $A^{0,1}$  macierzy układu  $A$  będą miały w przypadku ogólnym następującą postać

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det K} & \frac{\Delta X R_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} L_0}{\det K} & \frac{1}{\det K} & \frac{\Delta X R_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} L_0}{\det K} \\ \frac{\Delta X G_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} C_0}{\det K} & \frac{1}{\det K} & \frac{\Delta X G_0 + \frac{\Delta X}{\Delta t} C_0}{\det K} & \frac{1}{\det K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.2.24/$$

oraz

$$\Lambda^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\frac{\Delta x^2}{\Delta t} L_0 G_0 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} L_0 C_0}{\det K} & -\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} L_0}{\det K} & -\frac{\frac{\Delta x^2}{\Delta t} L_0 G_0 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} L_0 C_0}{\det K} & -\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} L_0}{\det K} \\ -\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} C_0}{\det K} & -\frac{\frac{\Delta x^2}{\Delta t} R_0 C_0 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} L_0 C_0}{\det K} & -\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} C_0}{\det K} & -\frac{\frac{\Delta x^2}{\Delta t} R_0 C_0 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} L_0 C_0}{\det K} \end{bmatrix} \quad /4.2.25/$$

#### 4.2.2 Drugi wariant przekształcenia

W tym wariacie pochodną cząstkową  $\frac{\partial}{\partial x} V /x, t/$  zastępujemy ilorazem różnicowym wstecznym, natomiast pochodną  $\frac{\partial}{\partial t} V /x, t/$  ilorazem różnicowym przednim

$$\frac{\partial}{\partial x} V /x, t/ \approx \frac{V /i, j/ - V /i-1, j/}{\Delta x} \quad /4.2.26/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V /x, t/ \approx \frac{V /i, j+1/ - V /i, j/}{\Delta t} \quad /4.2.27/$$

Podstawiając zależność /4.2.26/ oraz /4.2.27/ do równania /4.2.4/ otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left[ V(i, j) - V(i-1, j) \right] &= A_0 V(i, j) + \\ + \frac{1}{\Delta t} B_0 \left[ V(i, j+1) - V(i, j) \right] & \quad /4.2.28/ \end{aligned}$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymamy :

$$V(i,j) - V(i-1,j) = \Delta x A_0 V(i,j) + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V(i,j+1) + \\ - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V(i,j)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V(i,j+1) = V(i,j) - \Delta x A_0 V(i,j) + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V(i,j) + \\ - V(i-1,j)$$

stąd

$$B_0 V(i,j+1) = B_0 V(i,j) - \Delta t A_0 V(i,j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} V(i,j) + \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} V(i-1,j)$$

$$V(i,j+1) = V(i,j) - \Delta t B_0^{-1} A_0 V(i,j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} B_0^{-1} V(i,j) + \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} B_0^{-1} V(i-1,j)$$

$$V(i,j+1) = \left( 1 - \Delta t B_0^{-1} A_0 + \frac{\Delta t}{\Delta x} B_0^{-1} \right) V(i,j) + \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} B_0^{-1} V(i-1,j)$$

/4.2.29/

Wprowadźmy następujące oznaczenie, niech

$$V / i-1, j / = K / i, j / \quad /4.2.30/$$

stąd

$$K / i+1, j / = V / i, j / \quad /4.2.31/$$

Układ równań /4.2.29/ oraz /4.2.31/ możemy zapisać  
w postaci macierzowej następująco :

$$\begin{bmatrix} K(i+1, j) \\ V(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\Delta x}{\Delta t} B_0^{-1} & 1 - \Delta t B_0^{-1} A_0 + \frac{\Delta t}{\Delta x} B_0^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K(i, j) \\ V(i, j) \end{bmatrix} \quad /4.2.32/$$

Podobnie jak w wariancie pierwszym uzyskaliśmy równanie opisujące model Roessera przy wymuszeniu  $f /i, j/ = 0$ . Macierz układu o wymiarze  $4 \times 4$  będąca podstawą do obliczenia macierzy tranzycyjnej rozwiązań układu równań /4.2.32/ posiada następującą postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x} B_0^{-1} & 1 - \Delta t B_0^{-1} A_0 + \frac{\Delta t}{\Delta x} B_0^{-1} \end{bmatrix} \quad /4.2.33/$$

Zgodnie z /4.2.3/ macierz  $B_0$  posiada następującą postać

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & L_0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby istniała do niej macierz odwrotna musi być ona macierzą niesobliwą, a więc konieczne jest spełnienie warunku

$$\det B_0 = -L_0 C_0 \neq 0 \quad /4.2.34/$$

Macierz odwrotna  $B_0^{-1}$  posiada postać

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_0} \\ \frac{1}{L_0} & 0 \end{bmatrix} \quad /4.2.35/$$

Macierze składowe  $A^{1,0}$  oraz  $A^{0,1}$  macierzy układu  $A$  będą posiadały następujące postacie

$$A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{C_0} & 1 - \Delta t \frac{G_0}{C_0} & \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{C_0} \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{L_0} & 0 & \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{L_0} & 1 - \Delta t \frac{R_0}{L_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad /4.2.36/$$

oraz

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.2.37/$$

Z postaci macierzy  $A^{1,0}$  wynika, że jej dowolna naturalna potęga z wyjątkiem pierwszej jest macierzą zerową

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N} - \{1\}} (A^{1,0})^k = A^{k,0} = 0 \quad /4.2.38/$$

Z powyższego stwierdzenia wynika, że

$$A^{n,k} = 0 \quad \text{dla } n > k+1 \quad /4.2.39/$$

#### 4.2.3 Przeciwny wariant przekształcenia.

Pochodną cząstkową  $\frac{\partial}{\partial x} V(x,t)$  zastępujemy ilorazem różnicowym przednim natomiast pochodną  $\frac{\partial}{\partial t} V(x,t)$  ilorazem różnicowym wstęcznym

$$\frac{\partial}{\partial x} V /x,t/ \cong \frac{V /i+1,j/ - V /i,j/}{\Delta x} \quad /4.2.40/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V /x,t/ \cong \frac{V /i,j/ - V /i,j-1/}{\Delta t} \quad /4.2.41/$$

Podstawiając zależności /4.2.40/ oraz /4.2.41/ do równania /4.2.4/ otrzymamy

$$\frac{1}{\Delta x} [V(i+1,j) - V(i,j)] = A_0 V(i,j) + \frac{1}{\Delta t} B_0 [V(i,j) - V(i,j-1)] \quad /4.2.42/$$

Dokonując prostych przekształceń algebraicznych równania /4.2.42/ dojdziemy do następującej zależności

$$V(i+1,j) = \left(1 + \Delta x A_0 + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0\right) V(i,j) - \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 V(i,j-1) \quad /4.2.43/$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie, niech

$$V /i,j-1/ = K /i,j/ \quad /4.2.44/$$

Układ równań /4.2.43/ oraz /4.2.44/ możemy zapisać w postaci macierzowej następująco

$$\begin{bmatrix} V(i+1,j) \\ K(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta x A_0 + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(i,j) \\ K(i,j) \end{bmatrix} \quad /4.2.45/$$

Powyższe równanie ma w sensie zapisu matematycznego identyczną postać jak równanie opisujące model Rosslera przy wymuszeniu  $f /i,j/ = 0$ . Macierz układu o wymiarze  $4 \times 4$  posiada następującą postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \Delta x A + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.2.46/$$

Powyższa macierz stanowi podstawę do obliczania macierzy tranzycyjnej rozwiązań układu równań /4.2.45/.

Jej rozwinięta postać jest następująca

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x(R_0 + \frac{1}{\Delta t} L_0) & 0 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} L_0 \\ \Delta x(G_0 + \frac{1}{\Delta t} C_0) & 1 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} C_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.2.47/$$

Z macierzy układu  $A$  możemy wyodrębnić macierze składowe  $A^{1,0}$  oraz  $A^{0,1}$ . Będą one miały następujące postacie

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x(R_0 + \frac{1}{\Delta t} L_0) & 0 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} L_0 \\ \Delta x(G_0 + \frac{1}{\Delta t} C_0) & 1 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} C_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.2.48/$$

oraz

$$A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad /4.2.50/$$

#### 4.3 Macierz tranzycyjna trzeciego wariantu przekształcenia.

Z podanej w rozdziale /2.2.2/ definicji macierzy tranzycyjnej /2.2.2/ wynika, że każdą macierz  $A^{n,k}$  można przedstawić jako pewną kombinację macierzy  $A^{1,0}$  oraz  $A^{0,1}$ ,

np.

$$\begin{aligned} A^{2,1} &= A^{1,0} A^{1,1} + A^{0,1} A^{2,0} = A^{1,0} (A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0}) + A^{0,1} (A^{1,0})^2 = \\ &= (A^{1,0})^2 A^{0,1} + A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} + A^{0,1} (A^{1,0})^2 \end{aligned}$$

Z postaci /4.2.50/ macierzy  $A^{0,1}$  wynika, że jej dowolna naturalna potęga, z wyjątkiem pierwszej, jest równa macierzy zerowej, czyli

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N} - \{1\}} (A^{0,1})^k = A^{0,k} = 0 \quad /4.3.1/$$

Z powyższego stwierdzenia wynika, że

$$A^{n,k} = 0 \quad \text{dla } k > n+1 \quad /4.3.2/$$

Przykładowo obliczymy macierz  $A^{2,4}$

$$\begin{aligned} A^{2,4} &= A^{1,0} A^{1,4} + A^{0,1} A^{2,3} = A^{1,0} (A^{1,0} A^{0,4} + A^{0,1} A^{1,3}) + A^{0,1} (A^{1,0} A^{1,3} + \\ &+ A^{0,1} A^{2,2}) = A^{1,0} A^{0,1} A^{1,3} + A^{0,1} A^{1,0} A^{1,3} = A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,3} + A^{0,1} A^{1,2}) + \\ &+ A^{0,1} A^{1,0} (A^{1,0} A^{0,3} + A^{0,1} A^{1,2}) = A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,2} + A^{0,1} A^{1,1}) = 0 \end{aligned}$$

Powyższy fakt posiada istotne znaczenie z punktu widzenia obliczeń przeprowadzanych na maszynie cyfrowej.

Wykorzystując zależność /4.3.1/ oraz definicję macierzy tranzycyjnej /2.2.2/ możemy wyprowadzić wzory służące do obliczania macierzy  $A^{n,k}$  w zależności od relacji między indeksami  $n$  oraz  $k$ .

I tak mamy

$$1. \quad A^{n,k} = A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,1})^n \quad \text{dla } k = n+1 \quad /4.3.3/$$



Przykładowo obliczymy macierz  $A^{2,3}$

$$\begin{aligned} A^{2,3} &= A^{1,0} A^{1,3} + A^{0,1} A^{2,2} = A^{1,0} (A^{1,0} A^{0,3} + A^{0,1} A^{1,2}) + A^{0,1} (A^{1,0} A^{1,2} + A^{0,1} A^{2,1}) = \\ &= A^{1,0} A^{0,1} A^{1,2} + A^{0,1} A^{1,0} A^{1,2} = A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,2} + A^{0,1} A^{1,1}) + A^{0,1} A^{1,0} \\ &\cdot (A^{1,0} A^{0,2} + A^{0,1} A^{1,1}) = A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0}) = \\ &= A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} = A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,1})^2 \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest zgodny ze wzorem /4.3.3/.

$$2. A^{n,k} = \sum_{k=0}^n (A^{0,1} A^{1,0})^k (A^{1,0} A^{0,1})^{n-k} \quad \text{dla } k = n \quad /4.3.4/$$

Przykładowo obliczymy macierz  $A^{2,2}$

$$\begin{aligned} A^{2,2} &= A^{1,0} A^{1,2} + A^{0,1} A^{2,1} = A^{1,0} (A^{1,0} A^{0,2} + A^{0,1} A^{1,1}) + A^{0,1} (A^{1,0} A^{1,1} + A^{0,1} A^{2,0}) = \\ &= A^{1,0} A^{0,1} A^{1,1} + A^{0,1} A^{1,0} A^{1,1} = A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0}) + A^{0,1} A^{1,0} \\ &\cdot (A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0}) = A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0} A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} = \\ &= (A^{1,0} A^{0,1})^2 + (A^{0,1} A^{1,0}) (A^{1,0} A^{0,1}) + (A^{0,1} A^{1,0})^2 \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest zgodny ze wzorem /4.3.4/

$$\begin{aligned} 3. A^{n,k} &= \sum_{r_1=0}^{n-k+1} \left( \sum_{r_2=1}^{n-k+2-r_1} \left( \sum_{r_3=1}^{n-k+3-r_1-r_2} \left( \dots \left( \sum_{r_k=1}^{n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}} \right. \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \left. (A^{1,0})^{r_1} A^{0,1} (A^{1,0})^{r_2} A^{0,1} (A^{1,0})^{r_3} \dots A^{0,1} (A^{1,0})^{r_k} A^{0,1} (A^{1,0})^{n-r_1-r_2-\dots-r_k} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

dla  $k < n$

Jako przykład obliczymy macierz  $A^{3,2}$

$$\begin{aligned} A^{3,2} &= A^{1,0} A^{2,2} + A^{0,1} A^{3,1} = A^{1,0} (A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0} A^{1,0} A^{0,1} + \\ &+ A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0}) + A^{0,1} (A^{1,0} A^{2,1} + A^{0,1} A^{3,0}) = (A^{1,0})^2 A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} + \\ &+ A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0})^2 A^{0,1} + A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} + A^{0,1} A^{1,0} (A^{1,0} A^{1,1} + A^{0,1} A^{2,0}) = \\ &= (A^{1,0})^2 A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} + A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0})^2 A^{0,1} + A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} A^{1,0} + \\ &+ A^{0,1} (A^{1,0})^3 A^{0,1} + A^{0,1} (A^{1,0})^2 A^{0,1} A^{1,0} + A^{0,1} A^{1,0} A^{0,1} (A^{1,0})^2 \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest zgodny ze wzorem /4.3.5/. Przy obliczeniu macierzy  $A^{5,2}$  skorzystano z podanej wcześniej zależności /4.3.4/. Słuszność powyższych wzorów można sprawdzić posługując się schematem przedstawionym na rys. 4.1.

Jak wiadać z zależności /4.3.3 - 4.3.5/ obliczanie macierzy tranzycyjnsj  $A^{n,k}$  sprowadza się do obliczenia pewnych potęg macierzy składowych macierzy układu  $A$ . Niech dla ogólności rozważań macierze  $A^{1,0}$  oraz  $A^{0,1}$  mają następujące postacie

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.3.6/$$

gdzie macierze  $A_1$  i  $A_2$  określone są przez parametry linii  $R_0, L_0, G_0, C_0$  oraz krok dyskretyzacji długości linii  $\Delta x$  i czasu  $\Delta t$ . Przyjmując powyższe oznaczenia wyprowadzimy zależności ogólne na obliczanie potęg naturalnych macierzy występujących we wzorach /4.3.3 - 4.3.5/, tzn.

$$(A^{1,0} A^{0,1})^q, (A^{0,1} A^{1,0})^s \quad \text{oraz} \quad (A^{1,0})^p$$

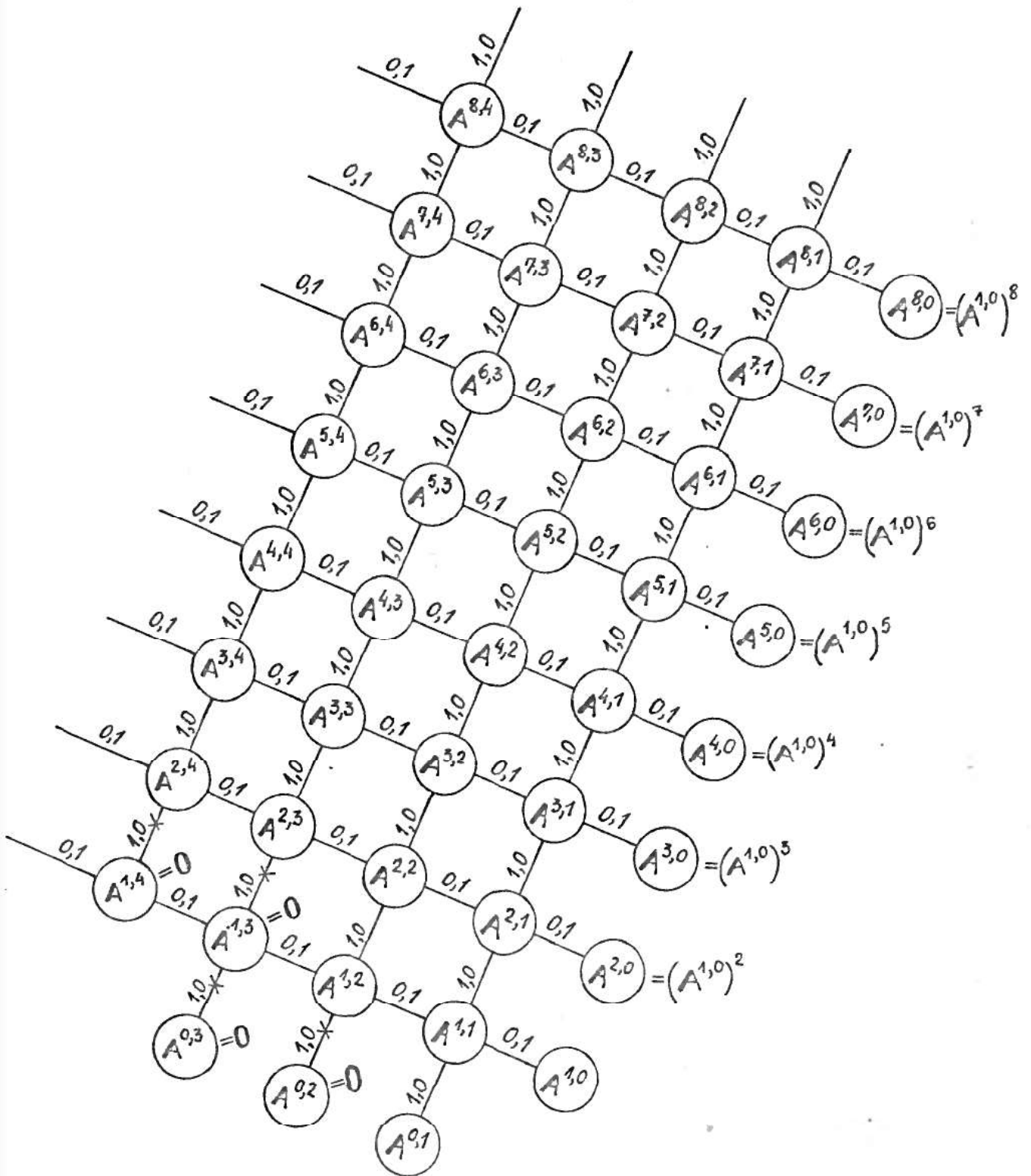
mamy więc

$$A^{1,0} A^{0,1} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

stąd wynika, że

$$(A^{1,0} A^{0,1})^q = \begin{bmatrix} A_2^q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.3.7/$$

Podstawiając powyższą zależność do równania /4.3.3/ otrzymamy



Rys. 4.1. Rysunek pomocniczy do obliczenia macierzy tranzycyjnej  $A^{n,k}$ .

$$A^{n,k} = A^{0,1} (A^{1,0} A^{0,1})^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_2^k & 0 \end{bmatrix} \quad /4.3.8/$$

Widać stąd, że dla określenia macierzy tranzycyjnej w przypadku gdy  $k = n+1$  wystarczy określić  $k$  - tą potęgę macierzy  $A_2$ .

Dalej mamy

$$A^{0,1} A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

stąd wynika, że

$$(A^{0,1} A^{1,0})^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_2^{s-1} A_1 & A_2^s \end{bmatrix} \quad /4.3.9/$$

Podstawiając zależność /4.3.7/ oraz /4.3.9/ do wzoru /4.3.4/ otrzymamy

$$\begin{aligned} A^{n,k} &= \sum_{k=0}^n (A^{0,1} A^{1,0})^k (A^{1,0} A^{0,1})^{n-k} = (A^{1,0} A^{0,1})^n + \sum_{k=1}^n (A^{0,1} A^{1,0})^k (A^{1,0} A^{0,1})^{n-k} = \\ &= \begin{bmatrix} A_2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_2^{k-1} A_1 & A_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2^{n-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_2^{k-1} A_1 A_2^{n-k} & 0 \end{bmatrix} \quad /4.3.10/ \end{aligned}$$

Widać stąd, że dla określenia macierzy tranzycyjnej w przypadku gdy  $n = k$  wystarczy określić  $n$  - tą potęgę macierzy  $A_2^n$  oraz wartość sumy  $\sum_{k=1}^n A_2^{k-1} A_1 A_2^{n-k}$ .

Obliczymy następnie naturalną potęgę macierzy  $A^{1,0}$

$$(A^{1,0})^p = \begin{bmatrix} A_1^p & A_1^{p-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /4.3.11/$$

We wzorze /4.3.5/ występują iloczyny macierzy  $A^{0,1}$  oraz  $(A^{1,0})^T$ . Iloczyn taki będzie miał następującą postać

$$A^{0,1}(A^{1,0})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T & A_1^{T-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1^T & A_1^{T-1} A_2 \end{bmatrix} \quad /4.3.12/$$

Jeżeli macierz określoną zależnością /4.3.12/ pomnożymy lewostronnie przez macierz  $(A^{1,0})^{T_1}$  /równanie /4.3.11/ / to w rezultacie otrzymamy

$$\begin{aligned} (A^{1,0})^{T_1} A^{0,1} (A^{1,0})^T &= \begin{bmatrix} A_1^{T_1} & A_1^{T_1-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1^T & A_1^{T-1} A_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_1^{T_1-1} A_2 A_1^T & A_1^{T_1-1} A_2 A_1^{T-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad /4.3.13/$$

Biorąc pod uwagę postacie wzorów /4.3.12/, /4.3.13/ oraz fakt, że zależność /4.3.5/ jest sumą stwierdzamy, że w ogólnym przypadku przy warunku  $n > k$  macierz  $A^{n,k}$  będzie miała postać

$$A^{n,k} = \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{bmatrix}$$

Przy czym macierze  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  nie są w ogólności macierzami zerowymi. Dla wszystkich  $n$  oraz  $k$  wymiar macierzy tranzycyjnej w przypadku linii dwuprzewodowej jest  $4 \times 4$ .

4.4. Wykorzystanie rozwiązania układu równań modelu

Procesora dla uzyskania rozwiązania równań telegrafistów.

Zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w punkcie /2.2.2/ rozwiązanie równania /4.2.45/ przy warunkach początkowych  $K(\beta, 0)$  oraz brzegowych  $V(l, \alpha)$  /odległość  $x$  mierzona jest od końca linii/ będzie miało postać [13]

$$\begin{bmatrix} V(i, j) \\ K(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=0}^j A^{i, j-\alpha} \begin{bmatrix} V(l, \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{\beta=0}^i A^{i-\beta, j} \begin{bmatrix} 0 \\ K(\beta, 0) \end{bmatrix} \quad /4.4.1/$$

Podstawą do obliczenia macierzy tranzycyjnej  $A^{i, j-\alpha}$ ,  $A^{i-\beta, j}$  jest macierz układu  $A$  określona wzorem /4.2.46/.

Wprowadźmy następujące oznaczenia, niech

$$A^{i, j-\alpha} = \begin{bmatrix} A_1^{i, j-\alpha} & A_2^{i, j-\alpha} \\ A_3^{i, j-\alpha} & A_4^{i, j-\alpha} \end{bmatrix} \text{ oraz } A^{i-\beta, j} = \begin{bmatrix} A_1^{i-\beta, j} & A_2^{i-\beta, j} \\ A_3^{i-\beta, j} & A_4^{i-\beta, j} \end{bmatrix} \quad /4.4.2/$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia wyodrębnimy z równania /4.4.1/ interesujący nas wektor  $V /i, j /$ .

$$V(i, j) = \begin{bmatrix} u(i, j) \\ v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=0}^j A_1^{i, j-\alpha} V(l, \alpha) + \sum_{\beta=0}^i A_2^{i-\beta, j} K(\beta, 0) \quad /4.4.3/$$

W powyższym rozwiązaniu możemy wyodrębnić dwa człony.

Pierwszy zależy jest od parametrów linii i warunków brzegowych /napięcia i prądu na końcu linii/, drugi zaś zależy od parametrów linii i warunków początkowych.

Mając na uwadze równanie /4.2.44/ założmy, że

$$V / i, 0 / \cong K / i, 0 / \quad /4.4.4/$$

stąd

$$V(\beta, 0) \cong K(\beta, 0) \quad /4.4.5/$$

Przy zerowych warunkach początkowych oraz w przypadku gdy linia zasilana jest napięciem stałym powyższe równości są dokładne; w innych przypadkach są przybliżeniem.

Uwzględniając założenie /4.4.5/ możemy równanie /4.4.3/ napisać w następującej postaci

$$V(i, j) = \begin{bmatrix} u(i, j) \\ v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=0}^j A_1^{i, j-\alpha} V(l, \alpha) + \sum_{\beta=0}^i A_2^{i-\beta, j} V(\beta, 0) \quad /4.4.6/$$

Dla ogólności rozważań wprowadzmy następujące oznaczenia elementów macierzy  $A_1^{i, j-\alpha}$  oraz  $A_2^{i-\beta, j}$ , niech

$$A_1^{i, j-\alpha} = \begin{bmatrix} a_1^{i, j-\alpha} & a_2^{i, j-\alpha} \\ a_3^{i, j-\alpha} & a_4^{i, j-\alpha} \end{bmatrix}$$

oraz

$$A_2^{i-\beta, j} = \begin{bmatrix} a_1^{i-\beta, j} & a_2^{i-\beta, j} \\ a_3^{i-\beta, j} & a_4^{i-\beta, j} \end{bmatrix}$$

Korzystając z powyższych oznaczeń oraz z zależności /4.4.6/ możemy napisać wzory na dyskretne wartości prądu oraz napięcia wzdłuż linii /przy odległości  $i \Delta x$  mierzonej od końca linii/ w następującej postaci

$$u(i, j) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_1^{i, j-\alpha} u(l, \alpha) + a_2^{i, j-\alpha} v(l, \alpha) \right) + \\ + \sum_{\beta=0}^i \left( a_1^{i-\beta, j} u(\beta, 0) + a_2^{i-\beta, j} v(\beta, 0) \right) \quad /4.4.7/$$

oraz

$$v(i, j) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_3^{i, j-\alpha} u(l, \alpha) + a_4^{i, j-\alpha} v(l, \alpha) \right) + \\ + \sum_{\beta=0}^i \left( a_3^{i-\beta, j} u(\beta, 0) + a_4^{i-\beta, j} v(\beta, 0) \right) \quad /4.4.8/$$

Dla większej przejrzystości rozważań założymy wstępnie zerowe warunki początkowe. Przy takim założeniu równania /4.4.7/ i /4.4.8/ uproszczą się do postaci

$$u(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_1^{i, j-\alpha} u(l, \alpha\Delta t) + a_2^{i, j-\alpha} v(l, \alpha\Delta t) \right) \quad /4.4.9/$$

oraz

$$v(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_3^{i, j-\alpha} u(l, \alpha\Delta t) + a_4^{i, j-\alpha} v(l, \alpha\Delta t) \right) \quad /4.4.10/$$

Zgodnie z prawem Ohma, napięcie i prąd na końcu linii związane są zależnością

$$u(l, \alpha\Delta t) = Z_2 v(l, \alpha\Delta t) \quad /4.4.11/$$

gdzie

$Z_2$  - moduł impedancji obciążenia.



Wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} u/l, \alpha \Delta t / &= u_2 / \alpha \Delta t / \\ v/l, \alpha \Delta t / &= v_2 / \alpha \Delta t / \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{napięcie i prąd na} \\ \text{końcu linii} \end{array} \quad /4.4.12/$$

$$\left. \begin{aligned} u/0, \alpha \Delta t / &= u_1 / \alpha \Delta t / \\ v/0, \alpha \Delta t / &= v_1 / \alpha \Delta t / \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{napięcie i prąd} \\ \text{na początku linii} \end{array}$$

Przy tych oznaczeniach równania /4.4.9/ i /4.4.10/ będą miały postać

$$u(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_1^{i,j-\alpha} u_2(\alpha\Delta t) + a_2^{i,j-\alpha} v_2(\alpha\Delta t) \right) \quad /4.4.13/$$

oraz

$$v(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_3^{i,j-\alpha} u_2(\alpha\Delta t) + a_4^{i,j-\alpha} v_2(\alpha\Delta t) \right) \quad /4.4.14/$$

Podstawiając w równaniu /4.4.13/ 1 zamiast  $i\Delta x$  otrzymamy zależność na napięcie na początku linii

$$u_1(j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_1^{\frac{l}{\Delta x}, j-\alpha} u_2(\alpha\Delta t) + a_2^{\frac{l}{\Delta x}, j-\alpha} v_2(\alpha\Delta t) \right) \quad /4.4.15/$$

Korzystając ze wzoru /4.4.11/ możemy ostatnią zależność napisać w postaci

$$u_1(j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j u_2(\alpha\Delta t) \left( a_1^{\frac{l}{\Delta x}, j-\alpha} + \frac{a_2^{\frac{l}{\Delta x}, j-\alpha}}{Z_2} \right) \quad /4.4.16/$$

Ostatnie równanie możemy napisać w następującej rozwiniętej postaci

$$u_1(j\Delta t) = u_2(0\Delta t)b_j + u_2(1\Delta t)b_{j-1} + u_2(2\Delta t)b_{j-2} + \dots$$

$$\dots + u_2((j-1)\Delta t)b_1 + u_2(j\Delta t)b_0 \quad /4.4.17/$$

gdzie

$$b_m = a_1 \frac{l}{\Delta x} \cdot m + \frac{a_2 \frac{l}{\Delta x} \cdot m}{Z_2} \quad /4.4.18/$$

$$/ m = 0, 1, 2 \dots j /$$

Z równania /4.4.17/ wynika, że napięcie na końcu linii w chwili czasowej  $j$  możemy wyrazić wzorem

$$u_2(j\Delta t) = \frac{u_1(j\Delta t) - \sum_{k=0}^{j-1} u_2(k\Delta t) b_{j-k}}{b_0} \quad /4.4.19/$$

Podstawiając do zależności /4.4.13/ oraz /4.4.14/ równanie /4.4.19/ oraz wykorzystując związek /4.4.11/ otrzymamy

$$u(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \frac{u_1(\alpha\Delta t) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} u_2(k\Delta t) b_{\alpha-k}}{b_0} \cdot \left( a_1^{i, j-\alpha} + \frac{a_2^{i, j-\alpha}}{Z_2} \right) \quad /4.4.20/$$

oraz

$$v(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \frac{u_1(\alpha\Delta t) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} u_2(k\Delta t) b_{\alpha-k}}{b_0} \cdot \left( a_3^{i, j-\alpha} + \frac{a_4^{i, j-\alpha}}{Z_2} \right) \quad /4.4.21/$$

Są to równania określające dyskretne wartości prądu i napięcia wzdłuż linii przy zerowych warunkach początkowych oraz przy odległości  $i \Delta x$  mierzonej od końca linii.

Jeżeli chcemy rozpatrywać odległość interesującego nas punktu w linii od źródła dołączonego na jej początku wystarczy w równaniach /4.4.20/ oraz /4.4.21/ podstawić zamiast  $i$  wyrażenie  $\left(\frac{l}{\Delta x} - i\right)$ . Przy odległości mierzonej od początku linii ostatnie równania będą miały postać

$$u(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \frac{u_1(\alpha\Delta t) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} u_2(k\Delta t) b_{\alpha-k}}{b_0} \cdot \left( a_1 \frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha + \frac{a_2}{Z_2} \right) \quad /4.4.22/$$

$$v(i\Delta x, j\Delta t) = \sum_{\alpha=0}^j \frac{u_1(\alpha\Delta t) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} u_2(k\Delta t) b_{\alpha-k}}{b_0} \cdot \left( a_3 \frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha + \frac{a_4}{Z_2} \right) \quad /4.4.23/$$

Uwzględniając niezerowe warunki początkowe możemy ostateczną postać równań określających napięcia i prądy wzdłuż linii napisać następująco :

$$u(i, j) = \sum_{\alpha=0}^j \frac{u_1(\alpha\Delta t) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} u_2(k\Delta t) b_{\alpha-k}}{b_0} \left( a_1 \frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha + \frac{a_2}{Z_2} \right) + \sum_{\beta=0}^{\frac{l}{\Delta x} - i} \left( a_1 \frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j u(\beta, 0) + a_2 \frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j v(\beta, 0) \right) \quad /4.4.24/$$

oraz

$$\begin{aligned}
 v(i,j) = & \sum_{\alpha=0}^j \frac{u_1(\alpha\Delta t) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} u_2(k\Delta t) b_{\alpha-k}}{b_0} \left( a_3^{\frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha} + \frac{a_4}{Z_2} a_3^{\frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha} \right) + \\
 & + \sum_{\beta=0}^{\frac{l}{\Delta x} - i} \left( a_3^{\frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j} u(\beta, 0) + a_4^{\frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j} v(\beta, 0) \right)
 \end{aligned}$$

/4.4.25/

Powyższe równania pozwalają na określenie dyskretnych wartości napięcia oraz prądu w poszczególnych oczkach linii.

Zostaną one w dalszej części pracy wykorzystane do obliczeń stanów nieustalonych w dwuprzewodowej linii elektroenergetycznej.

## 5. ZASTOSOWANIE OPRACOWANEJ METODY DO ANALIZY STANÓW NIEUSTALONYCH W DWUPRZEWODOWEJ LINII ELEKTROENERGETYCZ- NEJ.

W niniejszym rozdziale, na kilku prostych przykładach, zilustrowano zastosowanie opracowanej w punkcie 4.4 metody do badania stanów nieustalonych w dwuprzewodowych liniach elektroenergetycznych, zarówno stratnych jak i bezstratnych. Wskazano na warunki eksploatacji programów stosowanych do obliczeń, według rozważanej metody, z zastosowaniem mikrokomputera IBM PC/XT.

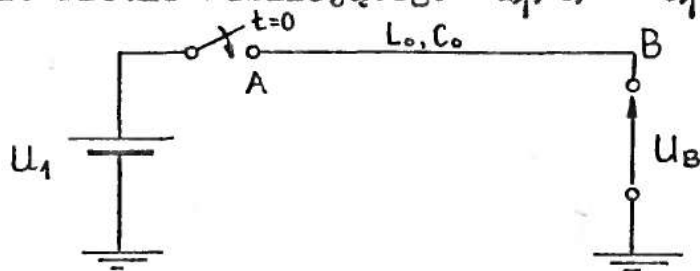
### 5.1. Dwuprzewodowa linia elektroenergetyczna bezstratna przy warunkach początkowych zerowych.

#### 1. Dołączenie napięcia stałego do bezstratnej linii otwartej.

Obliczmy przebieg napięcia w punkcie B, w linii przedstawionej na rysunku 5.1, w stanie nieustalonym, wywołanym dołączeniem napięcia stałego do bezstratnej linii otwartej o następujących parametrach :

- indukcyjność jednostkowa  $L_0 = 1,67 \cdot 10^{-3}$  H/km
- pojemność jednostkowa  $C_0 = 6,7 \cdot 10^{-9}$  F/km
- długość linii  $l = 75$  km

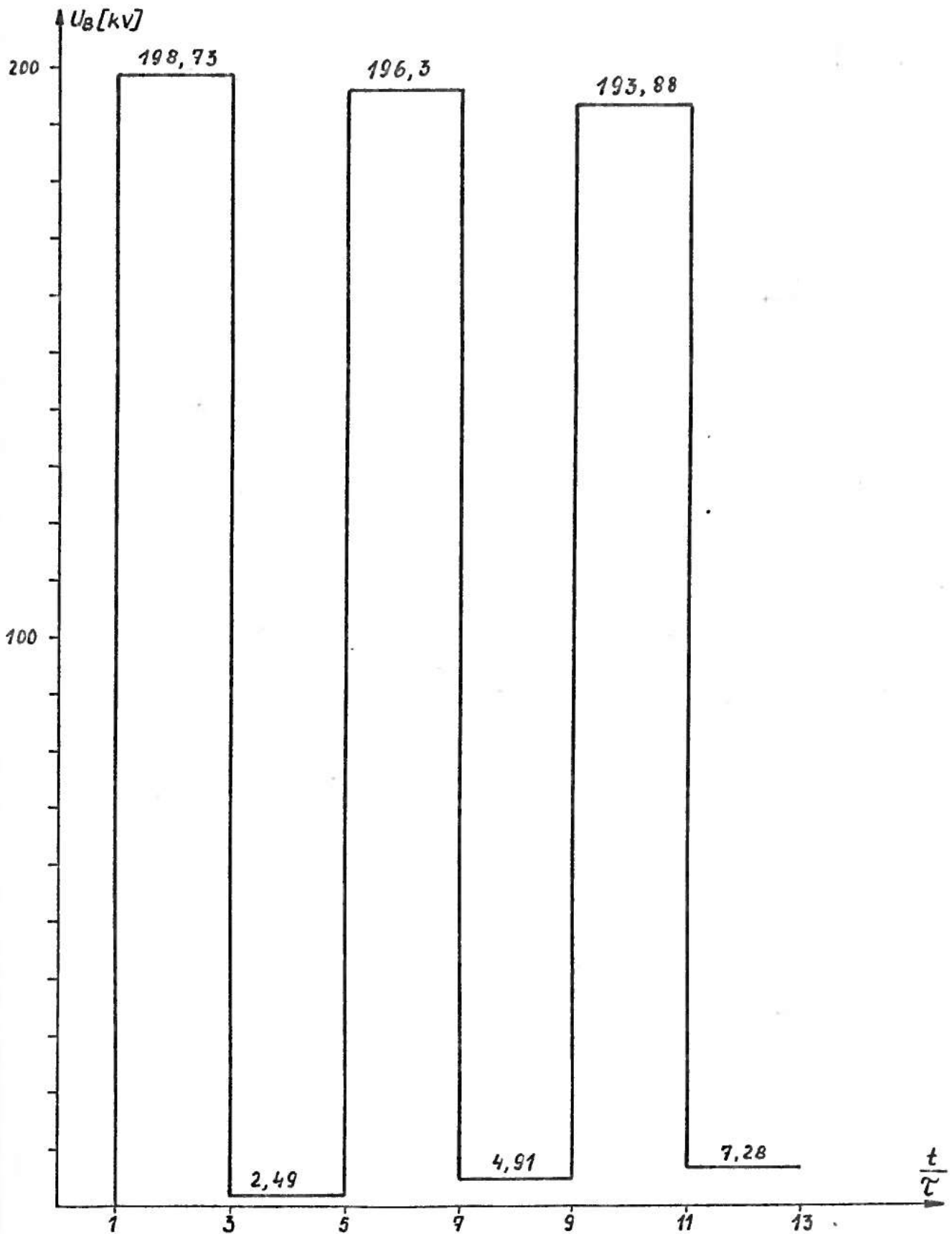
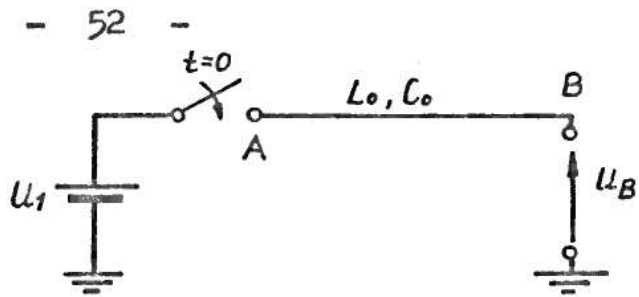
Napięcie źródła zasilającego  $u_1/t/ = U_1 = 100 \text{ kV}$ .



Rys.5.1 Dołączenie napięcia stałego do bezstratnej linii otwartej.

Wyniki obliczeń przeprowadzonych wg opisanej metody przedstawiono na rysunku 5.2, z którego wynikają następujące wnioski :

1. Uzyskany przebieg napięcia ma charakter zgodny ze zjawiskami zachodzącymi w stanie nieustalonym w układzie z rysunku 5.1. Należy jednak zwrócić uwagę na malenie wartości napięć w kolejnych przedziałach czasowych określonych przebiegiem fali napięciowej co nie pokrywa się z wynikami teorii przebiegów falowych w nieobciążonej linii bezstratnej.
2. Jak wspomniano we wniosku pierwszym w obliczeniach wg rozważanej metody pojawia się błąd narastający w kolejnych cyklach. W związku z powyższym przeprowadzono szereg obliczeń, w których zmieniano krok  $\Delta x$  i  $\Delta t$ ; przedstawione na rysunku 5.2 wyniki uzyskano przy dużym kroku  $\Delta x / N = 2, N = 1 / \Delta x /$  oraz małym kroku  $\Delta t / \Delta t = \tau / 250, \tau$  - czas propagacji fali napięcia wzdłuż linii /. Podział linii na większą liczbę odcinków przy badaniu zmian napięcia na końcu linii nieobciążonej zmniejsza jedynie dokładność uzyskanych wyników.



Rys. 5.2. Przebieg napięcia na końcu linii otwartej dołączonej w chwili  $t=0$  do źródła napięcia stałego  $U_1=100$  kV ( $N=2$ ,  $\Delta t=\tau/250$ ).

Skolei zmniejszenie kroku  $\Delta t$  przy ustalonym  $N$  powoduje wzrost dokładności wyników, wydłuża jednak bardzo znacznie czas ich uzyskania.

Ilustrują to dane zestawione w tabelicy 5.1.

Przedstawione wyżej rozważania będące wynikiem zastosowania różnych kroków obliczeniowych  $\Delta t$  i  $\Delta x$  w zestawieniu ze stwierdzeniem podanym we wniosku pierwszym uzasadniają wniosek, że rozważana metoda badania stanu nieustalonego w linii wynikająca z modelu Roessera prowadzi do błędu narastającego w trakcie obliczeń.

Błąd ten wynika, jak się wydaje, z wykonywania wielu działań arytmetycznych / przy obliczaniu macierzy  $A^{n,k}$  / przy zastosowaniu mikrokomputera o słowie 16 - bitowym i może ulec zdecydowanemu zwiększeniu w przypadku obliczeń na mikrokomputerze 8 - bitowym oraz zmniejszyć się w obliczeniach na komputerze o dłuższym słowie.

3. Obliczenia, których wyniki przedstawiono na rys. 5.2 wymagały ok. 14 godzin pracy mikrokomputera IBM PC/XT co stanowi czas wielokrotnie dłuższy od czasu obliczeń tego samego zjawiska przy zastosowaniu metody charakterystyk /czas praktycznie niemierzalnie krótki/. Poza wymienionym praktycznym ograniczeniem czasowym pojawia się również inne, nie mniej ważne, związane z zastosowaną metodą. Jak wspomniano wyżej we wniosku drugim, w obliczeniach tego przykładu zastosowano  $\Delta t = \tau/250$ . Wartość ta jest praktycznie wartością graniczną, /tzn. jest to minimalne  $\Delta t$ / dla danego typu maszyny ;



próba zmniejszenia  $\Delta t$  powoduje przekroczenie dostępnego zakresu pamięci operacyjnej maszyny wynoszącego 64 k B.

Tablica 5.1. Wpływ długości kroku dyskretyzacji czasu  $\Delta t$  na czas uzyskiwania obliczeń

$N = 5, \Delta x = \frac{1}{5} = 25000 \text{ m}$			
$k\tau$	$t = \tau/30$	$t = \tau/50$	$t = \tau/70$
	$U_B[\text{kV}]$ $t^0[\text{min}]$	$U_B[\text{kV}]$ $t^0[\text{min}]$	$U_B[\text{kV}]$ $t^0[\text{min}]$
1	198,6 12	199,3 20	199,1 33
3	10,77 25	4,39 43	1,35 61
5	182,08 40	187,8 66	191,24 95

$U_B$  - wartość napięcia na końcu linii otwartej w chwilach będących krotnościami czasu propagacji fali  $\tau$ ,

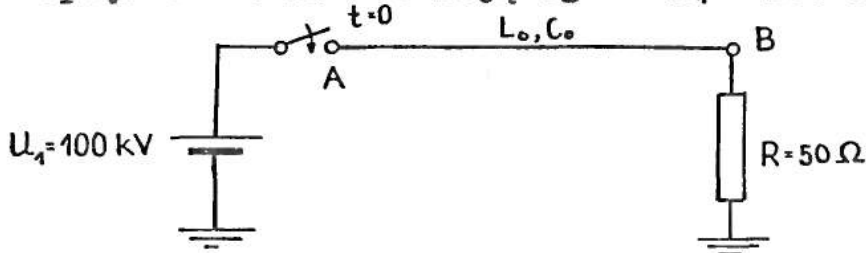
$t^0$  - czas uzyskiwania odpowiednich wyników.

2. Dołączenie napięcia stałego do linii bez strat obciążonej na końcu rezystancją R.

Zadanie polega na obliczeniu przebiegu napięcia w punkcie B, w linii przedstawionej na rysunku 5.3, w stanie nieustalonym, wywołanym dołączeniem napięcia stałego do

linii bezstratnej o parametrach takich samych jak w przy-  
kładzie 1 obciążonej na końcu rezystancją  $R = 50 \Omega$ .

Napięcie źródła zasilającego  $U_1 = 100 \text{ kV}$ .

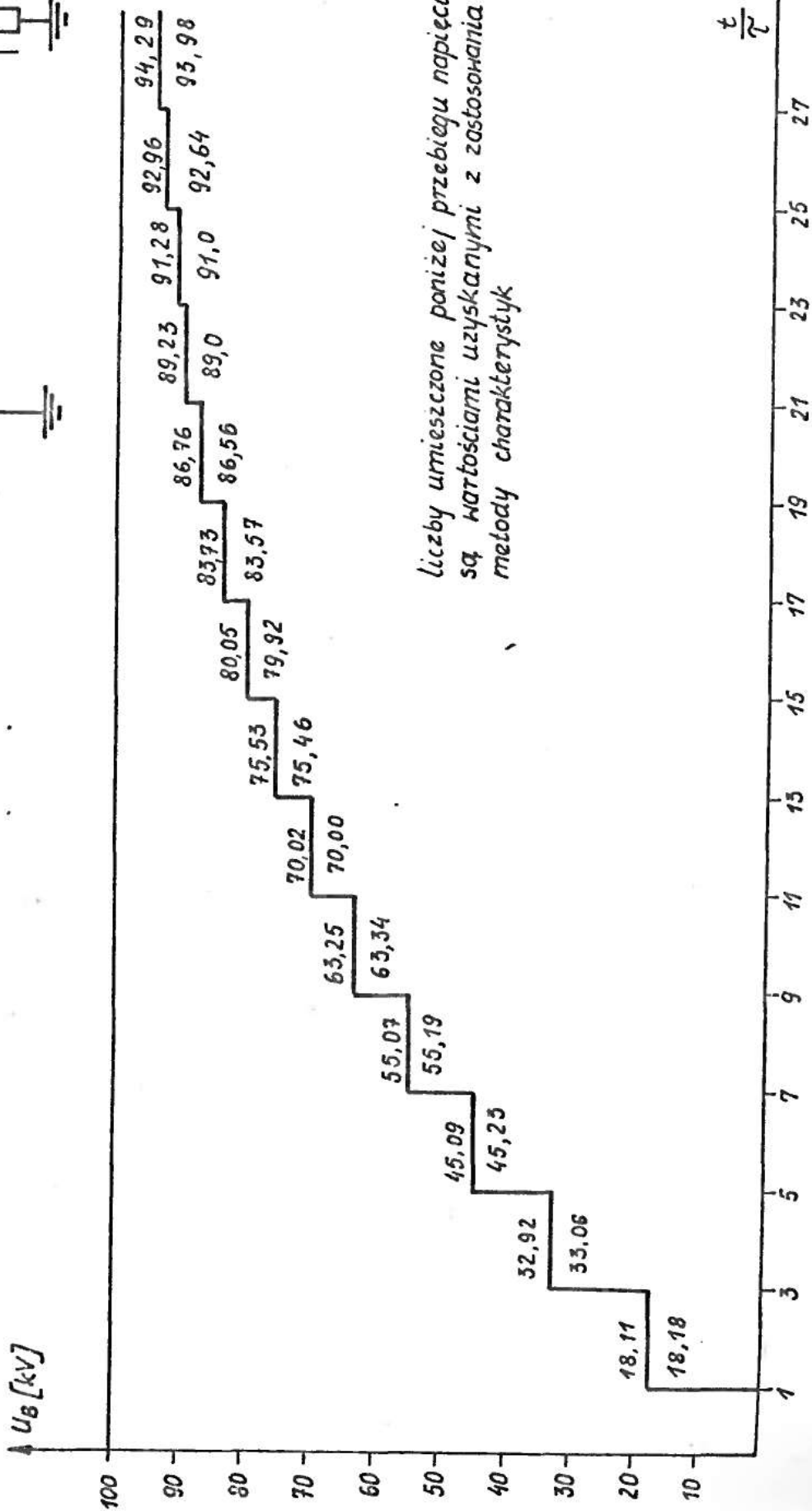
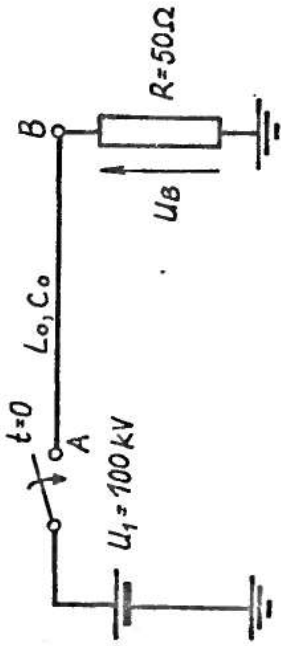


Rys. 5.3. Dołączenie napięcia stałego do linii bezstrat-  
nej obciążonej na końcu rezystancją  $R$ .

Wyniki obliczeń przeprowadzonych wg opracowanej metody przedstawiono na rys. 5.4. Uzyskany przebieg napięcia ma charakter zgodny ze zjawiskami zachodzącymi w stanie nieustalonym w układzie z rysunku 5.3. Potwierdzeniem takiego wniosku są zamieszczone na rys. 5.4 wyniki uzyskane po zastosowaniu metody charakterystyk.

Różnice w wartościach napięć uzyskiwanych w kolejnych chwilach czasowych w wyniku zastosowania opracowanej w rozprawie metody i metody charakterystyk nie przekraczają kilku dziesiątych części procenta. Przedstawiony na rys. 5.4 przebieg uzyskano po około 2 godzinach pracy mikrokomputera, a więc po czasie wielokrotnie dłuższym niż w przypadku zastosowania metody charakterystyk. W tabelicy 5.2 podano wartości napięć w poszczególnych chwilach czasowych po obciążeniu linii impedancją równą impedancji falowej linii /stan dopasowania falowego/.

Uzyskane wyniki są całkowicie zgodne z teorią przebiegów falowych w liniach bezstratnych [3,6,10,11,15].



*liczby umieszczone poniżej przebiegu napięcia są wartościami uzyskanymi z zastosowania metody charakterystyk*

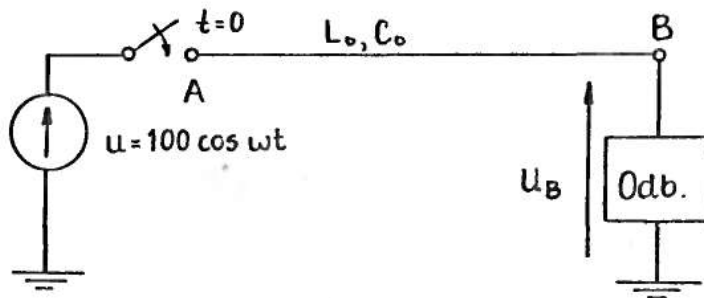
*Rys. 5.4. Dołączenie napięcia stałego do linii bezstratnej obciążonej rezystancją  $R=50 \Omega$  ( $N=10, \Delta t=\tau/10$ )*

Tablica 5.2. Wartości napięć na końcu linii w stanie dopasowania falowego

kτ	$N = 10, \Delta t = \tau / 10, R = 499,2532 \Omega$
	$U_B [kV]$
1	96,98
3	100,09
5	100,11
7	100,12
9	100,11
11	100,08
13	100,08
15	100,13
17	100,07
19	100,10

3. Dołączenie napięcia przemiennego do linii bez strat.

Linie bezstratną o parametrach jednostkowych takich samych jak w poprzednich przykładach dołączono w chwili  $t = 0$  do źródła napięcia przemiennego  $u_1(t) = 100 \cos \omega t$   
/rys. 5.5 /



Rys. 5.5. Dołączenie linii bezstratnej do źródła napięcia przemiennego.

Zadanie polega na określeniu przebiegu napięcia na końcu linii, w stanie nieustalonym, w chwilach czasowych będących krotnościami czasu propagacji fali wzdłuż linii

$\tau$ . Wyniki obliczeń przeprowadzonych według opracowanej metody przedstawiono w tablicach 5.3, 5.4, 5.5, 5.6. Graficzną interpretację zamieszczonych w tablicach wyników stanowią rysunki 5.6, 5.7, 5.8, 5.9. Widoczne są różnice w przebiegu napięcia przy obciążeniu linii odbiornikiem czysto rezystancyjnym, rezystancyjno-indukcyjnym oraz rezystancyjno-pojemnościowym /rys. 5.6/. Na rysunkach 5.7 i 5.8 uwidoczniono wpływ na przebieg napięcia zmieniającej się w odbiorniku rezystancyjno-reakcyjnym indukcyjności /rys. 5.7/ lub pojemności /rys. 5.8/ obciążenia.

Przebieg napięcia na odbiorniku będącym szeregowym połączeniem rezystancji, indukcyjności i pojemności przedstawiono na rysunku 5.9.

Tablica 5.3. Wartości napięć na końcu linii w stanie nieustalonym w zależności od charakteru odbiornika /rys. 5.6/

kτ	charakter odbiornika		
	rezystancyjny R = 50 Ω  Z  = 50 Ω	rezystancyjno- indukcyjny R = 50 Ω L = 0,5H  Z  = 164,770 Ω	rezystancyjno- pojemnościowy R = 50 Ω C = 0,5 μF  Z  = 6369,623 Ω
U <sub>B</sub> [kV]			
1	18,49	49,61	173,09
3	32,89	72,89	45,54
5	43,70	82,25	123,13
7	51,23	83,51	59,05
9	55,70	79,62	86,42
11	57,34	72,15	49,34
13	56,38	62,09	52,42
15	52,99	50,05	26,84
17	47,53	36,54	18,83
19	40,23	22,06	- 1,79
21	31,40	6,96	- 14,30

Tablica 5.4. Wartości napięć na końcu linii obciążonej odbiornikiem rezystancyjno-indukcyjnym przy dwóch różnych wartościach indukcyjności obciążenia /rys. 5.7/

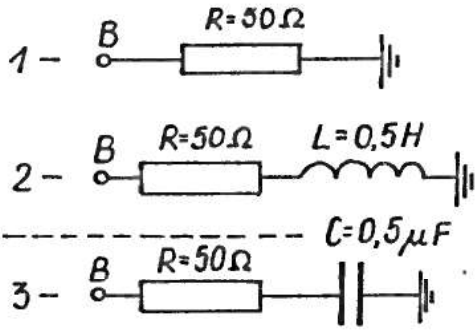
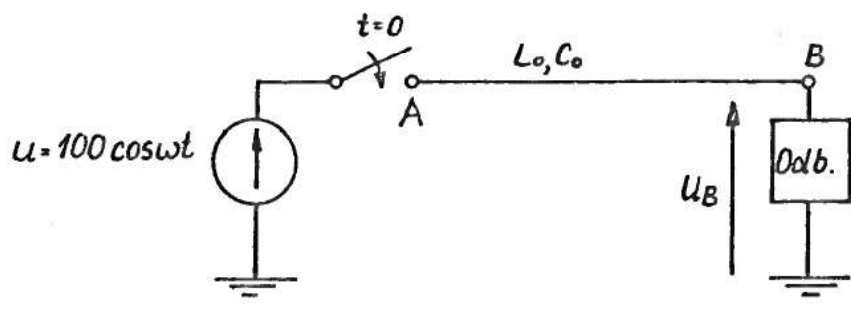
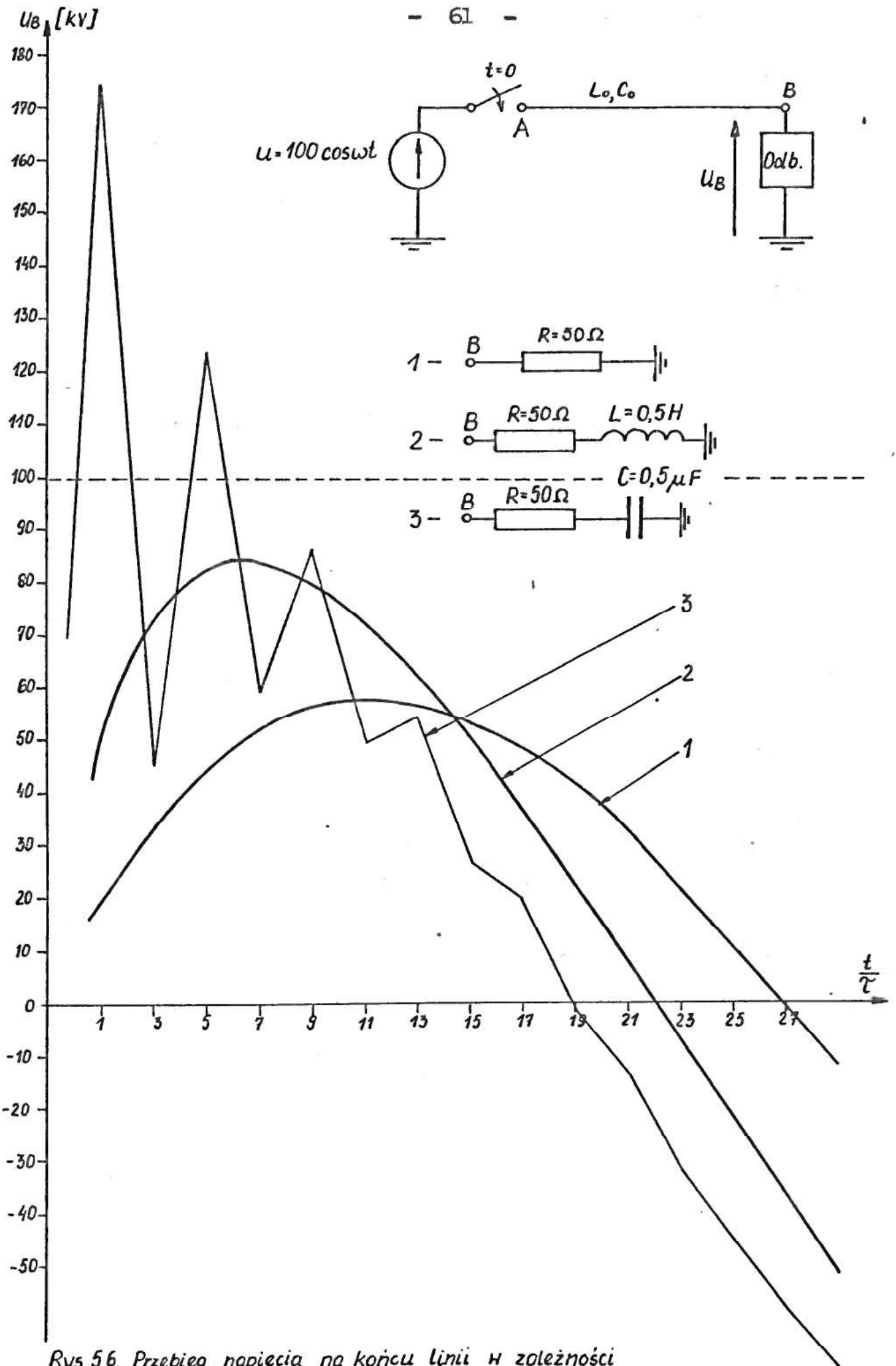
kτ	R = 50 Ω , L = 0,5 H  Z  = 164,770 Ω	R = 50 Ω , L = 5H  Z  = 1570,770 Ω
	U <sub>B</sub> [ kV ]	
1	49,61	144,11
3	72,89	77,99
5	82,25	97,49
7	83,51	79,71
9	79,62	73,54
11	72,15	60,33
13	62,09	47,60
15	50,05	32,95
17	36,54	17,77
19	22,06	2,04
21	6,96	- 13,71
23	- 8,34	- 29,12
25	- 23,44	- 43,83
27	- 37,97	- 57,41

Tablica 5.5. Wartości napięć na końcu linii obciążonej odbiornikiem rezystancyjno-pojemnościowym przy dwóch różnych wartościach pojemności obciążenia /rys. 5.8/

kτ	R = 50 Ω , C = 0,5 μF /Z/ = 6369,623 Ω	R = 50 Ω , C = 5 μF /Z/ = 638,902 Ω
	U <sub>B</sub> [kV]	
1	173,69	108,85
3	45,54	96,55
5	123,13	91,89
7	59,05	84,47
9	86,42	74,92
11	49,34	63,58
13	52,42	50,65
15	26,84	36,43
17	18,83	21,35
19	- 1,79	5,71
21	- 14,30	- 10,06
23	- 31,82	- 25,58
25	- 44,98	- 40,47
27	- 59,39	- 54,34

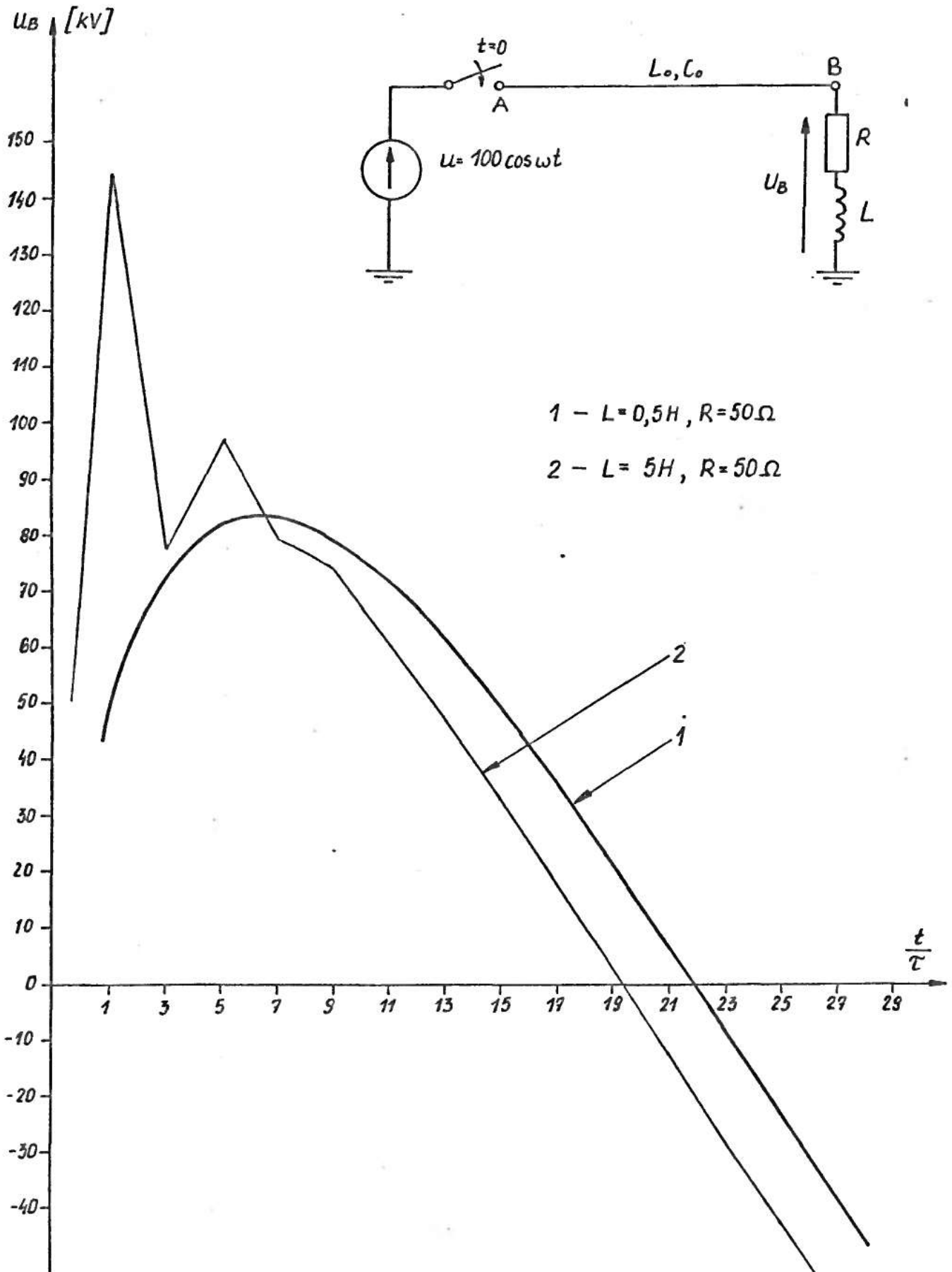
Tablica 5.6. Wartości napięć na końcu linii obciążonej odbiornikiem rezystancyjno-reaktancyjnym przy różnych wartościach indukcyjności i pojemności obciążenia /rys. 5.9 /

kτ	Parametry odbiornika		
	R = 50 Ω ; L = 0,5H /Z/ = 6212,628 Ω	R = 50Ω; L = 5H; C = 0,5 μF /Z/ = 4799,687Ω	R = 50 Ω ; L = 0,5H; C = 5 μF; /Z/ = 482,5402Ω
U <sub>B</sub> [kV]			
1	172,76	169,48	95,94
3	45,94	50,51	97,13
5	122,70	118,41	92,42
7	59,43	63,39	85,28
9	85,87	82,86	76,07
11	49,54	52,18	64,95
13	52,28	50,57	52,24
15	26,96	28,57	38,20
17	18,75	17,90	23,22
19	- 1,71	- 0,77	7,67
21	- 14,33	-14,68	- 8,06
23	- 31,75	-31,20	-23,60
25	- 44,98	-45,09	-38,65
27	- 59,34	-59,03	-52,54

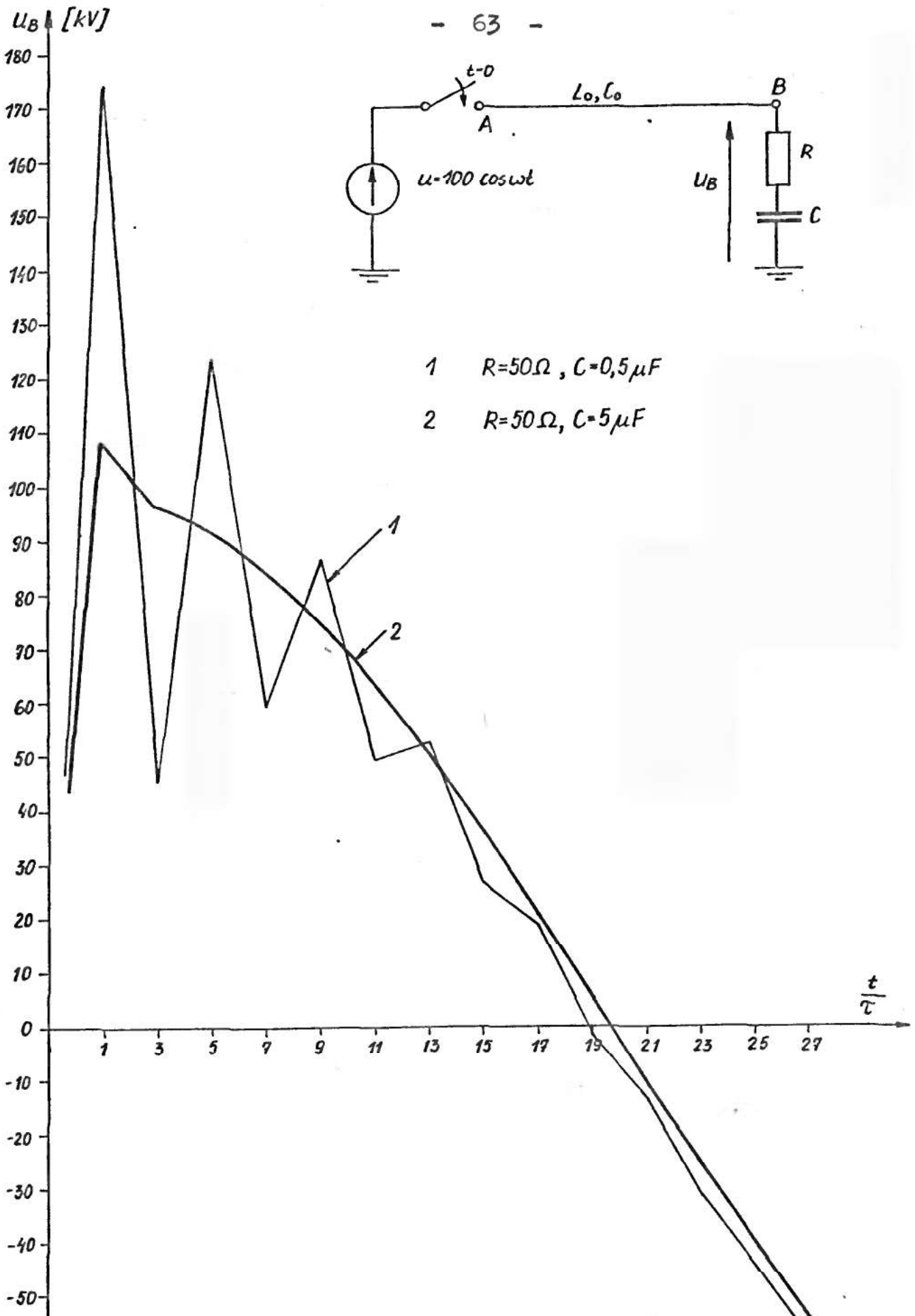


Rys. 5.6. Przebieg napięcia na końcu linii w zależności od charakteru odbiornika ( $N=10, \Delta t = T/10$ ).



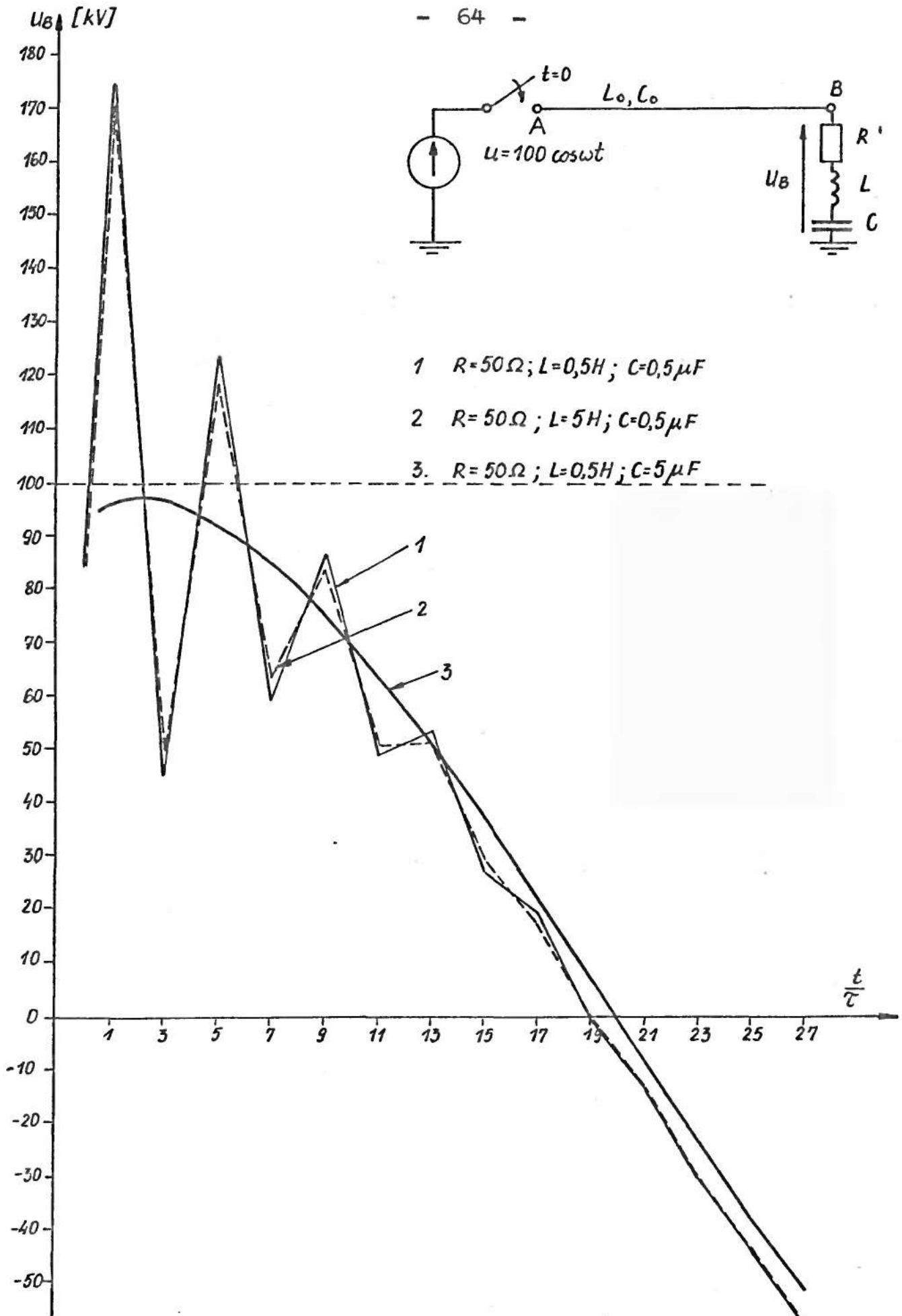


Rys.5.7. Przebieg napięcia na końcu linii bezstratnej zasilanej napięciem przemiennym, obciążonej odbiornikiem rezystancyjno-indukcyjnym ( $N=10, \Delta t = \tau/10$ ).



- 1  $R=50\Omega, C=0,5\mu F$
- 2  $R=50\Omega, C=5\mu F$

Rys.5.8. Przebieg napięcia na końcu linii bezstratnej zasilanej napięciem przemiernym obciążonej odbiornikiem rezystancyjno-pojemnościowym ( $N=10, \Delta t = \tau/10$ ).



Rys.5.9. Przebieg napięcia na końcu linii bezstratnej dołączonej w chwili  $t=0$  do źródła napięcia przemiennego ( $N=10, \Delta t = \tau/10$ ).

Uwaga : W trzecim przypadku przy obciążeniu linii odbiornikiem o parametrach  $R = 50 \Omega$  ,  $C = 5 \mu F$  moduł impedancji obciążenia  $|Z| = 482,5402 \Omega$  jest bliski impedancji falowej linii  $Z_0 = 499,25 \Omega$ . Jest to przypadek dopasowania falowego linii.

Charakter przedstawionych na rysunkach przebiegów napięcia jest zgodny z fizyczną interpretacją zjawisk zachodzących w bezstratnych liniach dwuprzewodowych, w stanie nieustalonym, wywołanym dołączeniem linii do źródła napięcia przemiennego [ 6. 15 ] .

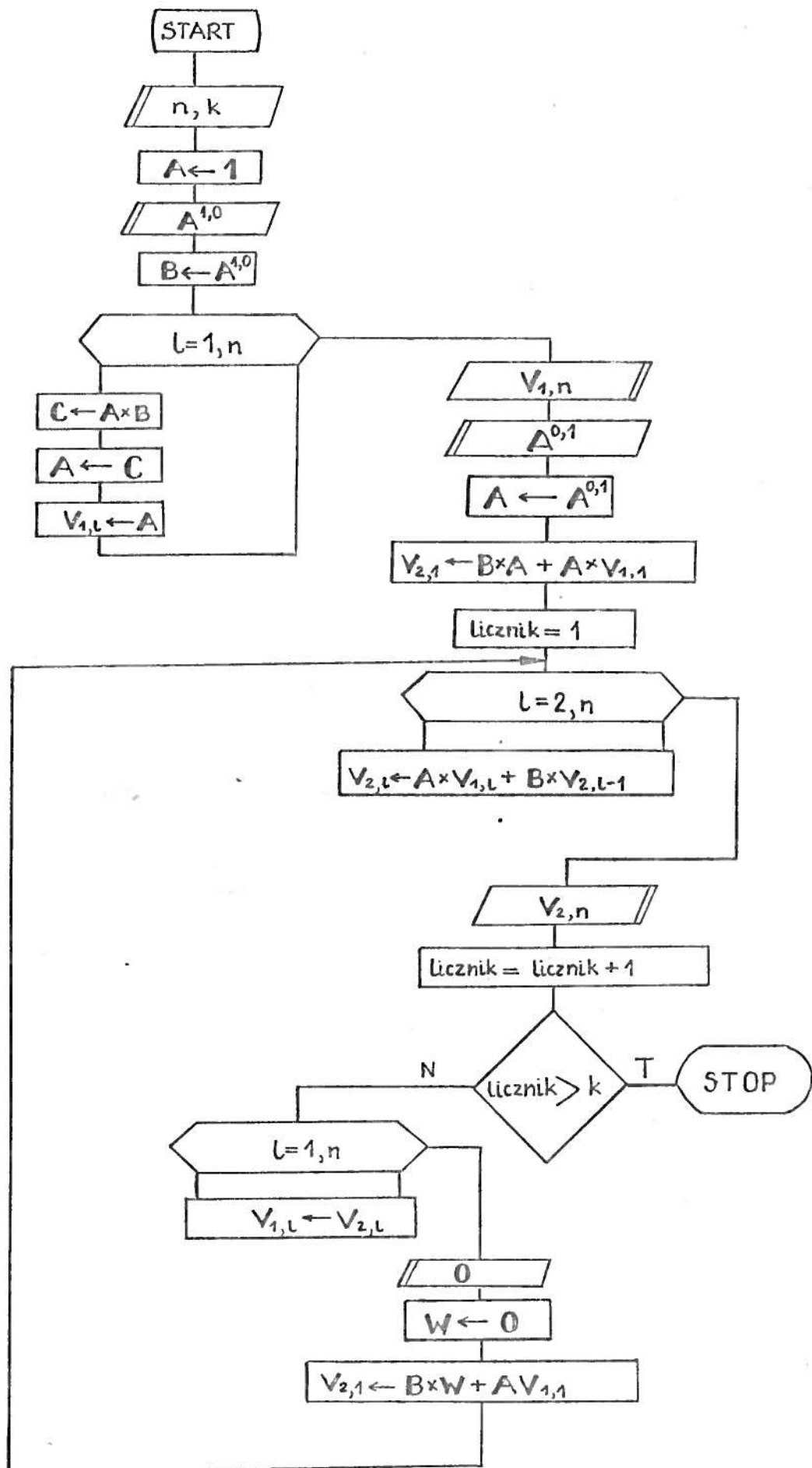
Czas obliczeń jednego przebiegu przeprowadzonych przy  $N = 10$  i  $\Delta t = T / 10$  wynosi około 2 godzin.

#### Uwagi do obliczeń przeprowadzonych w przykładach 1, 2, 3.

W przedstawionych wyżej kilku przykładach obliczono, według opracowanej metody, przebiegi napięć na odbiorniku znajdującym się na końcu linii bezstratnej, w stanie nieustalonym, spowodowanym dołączeniem jej do źródła napięcia stałego lub przemiennego. Uzyskane wyniki są zbliżone do wyników uzyskanych w rezultacie zastosowania innych znanych metod analizy stanów nieustalonych, jednak czas w jakim je uzyskano znacznie odbiega od pożądanego.

Spowodowane jest to głównie długim czasem obliczania kolejnych macierzy  $A^{n,k}$  .

W rozdziale 4.4 podano zależności określające dyskretne wartości napięcia oraz prądu wzdłuż linii w stanie nieustalonym. Występujące w tych zależnościach współczynniki  $\alpha_m / m = 1, 2, 3, 4 /$  są elementami macierzy tranzycyjnej  $A^{n,k}$  . Określenie więc macierzy  $A^{n,k}$  oraz jej elementów



Rys. 5.10. Schemat blokowy obliczania macierzy tranzycyjnej.

jest z punktu widzenia obliczeń pierwszym krokiem prowadzącym do rozwiązania według opracowanej metody.

Na rysunku 5.10 podano schemat blokowy obliczania macierzy  $A^{n,k}$  do pracy zaś dołączono program "MACIERZ" napisany w języku BASIC umożliwiającą jej obliczenie.

Program ten stanowi główną część wszelkich programów służących do obliczania dyskretnych wartości napięcia i prądu wzdłuż linii. Do pracy dołączono przykład takiego programu o nazwie "NAP W3" umożliwiającą obliczenie przebiegu napięcia na odbiorniku znajdującym się na końcu linii dołączonej w chwili  $t = 0$  do źródła napięcia przemiennego.

W opracowanej metodzie pochodne cząstkowe funkcji  $u/x, t/$  oraz  $v/x, t/$  występujące w równaniach telegrafistów zastąpione zostały ilorazami różnicowymi.

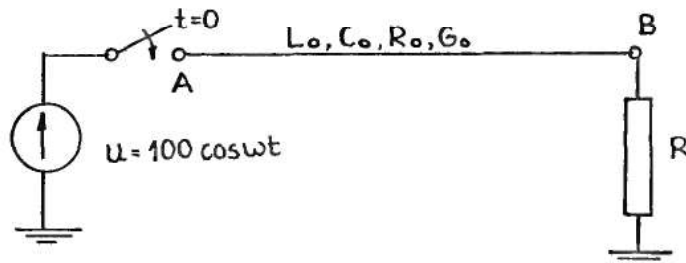
Wybrane przy dyskretyzacji długości kroków  $\Delta x$  oraz  $\Delta t$  w zasadniczy sposób wpływają na czas oraz dokładność uzyskanego rozwiązania a także na jego stabilność i zbieżność. Indeks  $n$  występujący w macierzy  $A^{n,k}$  związany jest z krokiem dyskretyzacji długości linii  $\Delta x$ , zaś indeks  $k$  z krokiem dyskretyzacji czasu  $\Delta t$ . Długości kroków  $\Delta x$  i  $\Delta t$  są ściśle związane ze sobą. Ze względu na stabilność i zbieżność rozwiązanie zmniejszenie kroku  $\Delta x$  zmusza do zwiększenia kroku  $\Delta t$ , zmniejszenie zaś kroku  $\Delta t$  do zwiększenia  $\Delta x$ .

Zmniejszenie kroku  $\Delta x$  lub  $\Delta t$  w znaczny sposób wpływa na czas obliczeń wydłużając go niekiedy, nawet w przypadku analizy prostych przykładów stanu nieustalonego do kilkunastu godzin. Ograniczenie w wyborze kroków  $\Delta x$  oraz  $\Delta t$  wynikają także z wyboru jako języka programowania języka BASIC.

Dostępne " pod językiem BASIC " 64 kB pamięci operacyjnej komputera uniemożliwia dowolny wybór  $\Delta x$  oraz  $\Delta t$ . Tak mały obszar dostępnej pamięci operacyjnej uniemożliwia praktycznie analizę bardziej skomplikowanych przypadków stanu nieustalonego a w szczególności przeprowadzenie obliczeń przy niezerowych warunkach początkowych. Obliczenia takie wymagają bowiem równoległego obliczania dwóch różnych macierzy tranzycyjnych. Wspomniana analiza możliwa byłaby przy dostępie do pamięci operacyjnej co najmniej 256 kB, a zmiana języka programowania / PASCAL / mogłaby wpłynąć na skrócenie czasu obliczeń.

5.2. Dwuprzewodowa linia elektroenergetyczna stratna przy warunkach początkowych zerowych.

Linie elektroenergetyczną stratną o parametrach jednostkowych  $L_0 = 1,67 \cdot 10^{-3}$  H/km,  $C_0 = 6,7 \cdot 10^{-9}$  F/km,  $R_0 = 0,61 \Omega$  /km,  $G_0 = 50 \cdot 10^{-9}$  S/km, obciążoną rezystancją  $R = 50 \Omega$ , dołączono w chwili  $t = 0$  do źródła napięcia przemiennego  $u_1 / t / = 100 \cos \omega t$  /rys. 5.11/



Rys. 5.11. Dołączenie linii stratnej, obciążonej rezystancją  $R$ , do źródła napięcia przemiennego.

Zadanie polega na obliczeniu przebiegu napięcia na końcu linii stratnej, w stanie nieustalonym, spowodowanym dołączeniem linii do źródła napięcia przemiennego.

Wyniki obliczeń przeprowadzonych według opracowanej metody przedstawiono w tabelicy 5.7.

Tabela 5.7. Wartości napięć na końcu linii stratnej obciążonej rezystancją R.

kτ	Parametry jednostkowe linii		Różnica napięć w stosunku do linii bezstratnej
	Linia bezstratna $R_o = 0$ $G_o = 0$	Linia stratna $R_o = 0,61 \Omega/\text{km}$ $G_o = 50 \cdot 10^{-9} \text{ S}/\text{km}$	
	$U_B [\text{kV}]$		[V]
1	18,49	18,36	130
3	32,89	32,62	270
5	43,70	43,33	360
7	51,23	50,78	450
9	55,70	55,21	490
11	57,34	56,82	520
13	56,38	55,86	520
15	52,99	52,56	430
17	47,53	47,13	400
19	40,23	39,90	330

W tabelicy 5.7 zamieszczono również odpowiadające tym samym chwilom czasowym wartości napięć uzyskane dla linii bezstratnej / przykład 3 / o tych samych parametrach jednostkowych  $L_o$  i  $C_o$ .



Zgodnie z fizyczną interpretacją zjawisk w liniach elektroenergetycznych stratnych wartości napięć uzyskane dla linii stratnej są niższe od analogicznych wartości dla linii bezstratnej.

Wprowadzenie rezystancji jednostkowej  $R_0$  oraz upływności jednostkowej  $G_0$  nie wpływa na czas obliczeń przeprowadzonych na mikrokomputerze; wszelkie natomiast ograniczenia mające wpływ na małą efektywność opracowanej metody wymienione w punkcie 5.1 w odniesieniu do linii bezstratnych dotyczą również linii stratnych.

6. ZASTOSOWANIE MODELU ROESSERA DO ANALIZY STANOW  
NIEUSTALONYCH W WIELOPRZEWODOWEJ LINII  
ELEKTROENERGETYCZNEJ

6.1. Uogólnienie rozwiązania równań telegrafistów na  
przypadek jednorodnej linii elektroenergetycznej,  
n-przewodowej stratnej.

Weźmy pod uwagę n-przewodową linię elektroenergetyczną jednorodną, niesymetryczną ze sprzężeniami, stratną. Równania telegrafistów dla takiej linii będą miały postać /odległość  $x$  mierzona od końca linii/

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial x} = \mathbf{R} \mathbf{v}(x,t) + \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{v}(x,t)}{\partial t} \quad /6.1/$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(x,t)}{\partial x} = \mathbf{G} \mathbf{u}(x,t) + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial t}$$

gdzie

$\mathbf{u}(x,t)$  - macierz kolumnowa napięć poszczególnych przewodów linii względem ziemi w punkcie odległym o  $x$  od końca linii,

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \vdots \\ u_n(x,t) \end{bmatrix} \quad /6.2/$$

wymiar macierzy  $U/x,t/$  jest  $n \times 1$ ,

$V/x,t/$  - macierz kolumnowa prądów płynących w poszczególnych przewodach linii w punkcie odległym

o  $x$  od początku linii,

$$V(x,t) = \begin{bmatrix} V_1(x,t) \\ V_2(x,t) \\ \vdots \\ V_n(x,t) \end{bmatrix} \quad /6.3/$$

wymiar macierzy  $V/x,t/$  jest  $n \times 1$ ,

$R$  - macierz rezystancji jednostkowych podłużnych poszczególnych przewodów linii, kwadratowa diagonalna o wymiarze  $n \times n$ ,

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \quad /6.4/$$

$L$  - macierz indukcyjności jednostkowych własnych podłużnych poszczególnych przewodów oraz indukcyjności jednostkowych wzajemnych, kwadratowa symetryczna o wymiarze  $n \times n$ ,

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad /6.5/$$

$C$  - macierz jednostkowych pojemności do ziemi i wzajemnych poszczególnych przewodów linii, kwadratowa symetryczna o wymiarze  $n \times n$ ,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} & \dots & \dots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_{22} & & & -C_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -C_{n1} & \dots & \dots & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad C_{km} = C_{mk} \quad /6.6/$$

$$C_{kk} = C_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n C_{km}$$

$\mathbf{G}$  - macierz jednostkowych konduktancji do ziemi i wzajemnych poszczególnych przewodów linii, kwadratowa symetryczna o wymiarze  $n \times n$ ,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \dots & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} & & & -G_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -G_{n1} & \dots & \dots & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \quad G_{km} = G_{mk} \quad /6.7/$$

$$G_{kk} = G_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n G_{km}$$

Podobnie jak dla linii długiej dwuprzewodowej układ równań /6.1/ zapiszemy w postaci jednego równania macierzowego

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(x,t) \\ \mathbf{v}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(x,t) \\ \mathbf{v}(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(x,t) \\ \mathbf{v}(x,t) \end{bmatrix} \quad /6.8/$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\mathbf{V}(x,t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(x,t) \\ \mathbf{v}(x,t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad /6.9/$$

Wymienione macierze są macierzami blokowymi przy czym wymiar macierzy  $\mathbf{V}(x,t)$  jest  $2n \times 1$ , natomiast  $\mathbf{A}_0$  i  $\mathbf{B}_0$  mają wymiar  $2n \times 2n$ .

Przy powyższych oznaczeniach równanie /6.8/ można zapisać w postaci analogicznej do /4.2.4/

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x,t) = A_0 V(x,t) + B_0 \frac{\partial}{\partial t} V(x,t) \quad /6.10/$$

Dalszy tok postępowania jest analogiczny do tego jaki przeprowadzono w rozdziale 4.2 /trzeci wariant przekształcenia/ i prowadzi w rezultacie do następującego równania

$$\begin{bmatrix} V(i+1,j) \\ K(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta x A_0 + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(i,j) \\ K(i,j) \end{bmatrix} \quad /6.11/$$

Równanie /6.11/ ma identyczną postać jak równanie opisujące model Roessera przy wymuszeniu  $f(i,j) = 0$ .

Macierz układu o wymiarze  $4n \times 4n$  ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \Delta x A_0 + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 & -\frac{\Delta x}{\Delta t} B_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad /6.12/$$

Macierz  $A$  stanowi podstawę do obliczenia macierzy tranzycyjnej rozwiązań układu równań /6.11/.

Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do przedstawionego w punkcie 4.4 możemy, przy znanych warunkach początkowych

$K(\beta, 0)$  oraz brzegowych  $V(l, \alpha)$ , napisać rozwiązanie równania /6.11/

$$\begin{bmatrix} V(i,j) \\ K(i,j) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=0}^j A^{i,j-\alpha} \begin{bmatrix} V(l,\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{\beta=0}^i A^{i-\beta,j} \begin{bmatrix} 0 \\ K(\beta,0) \end{bmatrix} \quad /6.13/$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia zaznaczając wymiary poszczególnych macierzy, niech

$$\frac{4n}{4n} A^{i,j-\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{2n} A_1^{i,j-\alpha} & \frac{2n}{2n} A_2^{i,j-\alpha} \\ \frac{2n}{2n} A_3^{i,j-\alpha} & \frac{2n}{2n} A_4^{i,j-\alpha} \end{bmatrix} \quad /6.14/$$

oraz

$$A^{i-\beta,j} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{2n} A_1^{i-\beta,j} & \frac{2n}{2n} A_2^{i-\beta,j} \\ \frac{2n}{2n} A_3^{i-\beta,j} & \frac{2n}{2n} A_4^{i-\beta,j} \end{bmatrix} \quad /6.15/$$

W celu wyodrębnienia w rozwiązaniu wektora napięć poszczególnych przewodów względem ziemi oraz wektora prądów płynących w poszczególnych przewodach linii wprowadzimy dalsze oznaczenia, niech

$$\frac{2n}{2n} A_1^{i,j-\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{n}{n} a_1^{i,j-\alpha} & \frac{n}{n} a_2^{i,j-\alpha} \\ \frac{n}{n} a_3^{i,j-\alpha} & \frac{n}{n} a_4^{i,j-\alpha} \end{bmatrix} \quad /6.16/$$

oraz

$$\frac{2n}{2n} A_2^{i-\beta, j} = \begin{bmatrix} \frac{n}{n} a_1^{i-\beta, j} & \frac{n}{n} a_2^{i-\beta, j} \\ \frac{n}{n} a_3^{i-\beta, j} & \frac{n}{n} a_4^{i-\beta, j} \end{bmatrix} \quad /6.17/$$

występujący w równaniu /6.11/ wektor  $K /i, j/$  określony jest następująco

$$K /i, j/ = V /i, j - 1/ \quad /6.18/$$

załóżmy, że

$$V /i, 0/ \cong K /i, 0/ \quad /6.19/$$

stąd

$$V(\beta, 0) \cong K(\beta, 0) \quad /6.20/$$

Korzystając z oznaczeń /6.16 - 6.17/ oraz zależności /6.20/ możemy napisać wzory określające wektory napięć poszczególnych przewodów linii względem ziemi oraz wektory prądów płynących w poszczególnych przewodach linii w odległości  $z$  od końca linii.

$$u(i, j) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_1^{i, j-\alpha} u(l, \alpha) + a_2^{i, j-\alpha} v(l, \alpha) \right) + \sum_{\beta=0}^i \left( a_1^{i-\beta, j} u(\beta, 0) + a_2^{i-\beta, j} v(\beta, 0) \right) \quad /6.21/$$

oraz

$$V(l, j) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_3^{l, j-\alpha} u(l, \alpha) + a_4^{l, j-\alpha} v(l, \alpha) \right) + \\ + \sum_{\beta=0}^l \left( a_3^{l-\beta, j} u(\beta, 0) + a_4^{l-\beta, j} v(\beta, 0) \right)$$

/6.22/

gdzie

$\sqrt[n]{u}(l, \alpha)$  - wektor napięć poszczególnych przewodów linii względem ziemi, w ostatnim oczku linii, w kolejnych chwilach czasowych od momentu rozpoczęcia stanu nieustalonego,

$\sqrt[n]{v}(l, \alpha)$  - wektor prądów płynących w poszczególnych przewodach linii, w ostatnim oczku, w kolejnych chwilach czasowych od momentu rozpoczęcia stanu nieustalonego,

wektory powyższe stanowią warunki brzegowe,

$\sqrt[n]{u}(\beta, 0)$  - wektor napięć poszczególnych przewodów linii względem ziemi w kolejnych oczkach linii w chwili rozpoczęcia stanu nieustalonego,

$\sqrt[n]{v}(\beta, 0)$  - wektor prądów płynących w poszczególnych przewodach linii, w kolejnych oczkach, w chwili rozpoczęcia stanu nieustalonego,



${}^n a_m^{i,j-\alpha}$ ,  ${}^n a_m^{i-\beta,j}$  / $m = 1,2,3,4$ / - macierze zależne od parametrów linii  $R, L, G, C$  oraz od przyjętych kroków dyskretyzacji czasu  $\Delta t$  oraz odległości  $\Delta x$ .

Wektory  $u(\beta,0)$  i  $v(\beta,0)$  stanowią warunki początkowe. Zgodnie z prawem Ohma napięcia i prądy na końcu linii związane są zależnością

$$u(l, \alpha \Delta t) = Z_2 v(l, \alpha \Delta t) \quad /6.23/$$

gdzie

$Z_2$  - macierz modułów impedancji obciążenia poszczególnych przewodów linii, kwadratowa diagonalna o wymiarze  $n \times n$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & Z_n \end{bmatrix} \quad /6.24/$$

Z zależności /6.23/ wynika, że

$$v(l, \alpha \Delta t) = Z_2^{-1} u(l, \alpha \Delta t) \quad /6.25/$$

Dalszy tok postępowania analogiczny do tego jaki został przeprowadzony w punkcie 4.4, w odniesieniu do linii dwuprzewodowych, prowadzi w rezultacie do następujących zależności określających dyskretne wartości napięć poszczególnych przewodów linii względem ziemi oraz prądów płynących w poszczególnych przewodach linii i w jej kolejnych oczkach :

$$u(i,j) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_1^{\frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha} + a_2^{\frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha} Z_2^{-1} \right) \cdot b_0^{-1} \cdot (u(0, \alpha \Delta t) + \sum_{k=0}^{\alpha-1} b_{\alpha-k} u(l, k \Delta t)) + \sum_{\beta=0}^{\frac{l}{\Delta x} - i} \left( a_1^{\frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j} u(\beta, 0) + a_2^{\frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j} v(\beta, 0) \right) \quad /6.26/$$

oraz

$$v(i,j) = \sum_{\alpha=0}^j \left( a_3^{\frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha} + a_4^{\frac{l}{\Delta x} - i, j - \alpha} Z_2^{-1} \right) \cdot b_0^{-1} \cdot (u(0, \alpha \Delta t) + \sum_{k=0}^{\alpha-1} b_{\alpha-k} u(l, k \Delta t)) + \sum_{\beta=0}^{\frac{l}{\Delta x} - i} \left( a_3^{\frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j} u(\beta, 0) + a_4^{\frac{l}{\Delta x} - i - \beta, j} v(\beta, 0) \right) \quad /6.27/$$

gdzie

$$b_m = a_1^{\frac{l}{\Delta x}, m} + a_2^{\frac{l}{\Delta x}, m} Z_2^{-1} \quad /6.28/$$

Powyższe zależności mogą być wykorzystane do obliczeń stanów nieustalonych w wieloprzewodowych liniach elektroenergetycznych; w szczególności w liniach trójfazowych.

### 6.2. Uwagi o możliwości zastosowania opracowanej metody do analizy stanów nieustalonych w trójfazowej linii elektroenergetycznej.

Jak wynika z rozważań w punkcie /6.1/ opracowana metoda analizy stanów nieustalonych, podobnie jak w przypadku linii elektroenergetycznych jednofazowych wymaga obliczenia macierzy tranzycyjnej  $A^{n,k}$ . W przypadku linii trójfazowej macierz ta będzie miała wymiar 12 x 12. Przy takim wymiarze macierzy jeszcze wyraźniej występują ograniczenia wymienione w punkcie /5/ dotyczące linii jednofazowych.

Znacznemu wydłużeniu ulegnie czas obliczeń, a 64 kB pamięci operacyjnej mikrokomputera nie pozwala na rozwiązanie nawet najprostszycb przypadków stanu nieustalonego.

## 7. W N I O S K I

Przeprowadzone w pracy rozważania i obliczenia stanowią podstawę do sformułowania następujących wniosków :

1. Istnieje możliwość wykorzystania modelu Roessera do analizy stanów nieustalonych w liniach elektroenergetycznych jedno i wieloprzewodowych; wniosek ten potwierdza słuszność tezy pracy sformułowanej w jej wstępie.
2. Algorytm obliczeń wynikający z modelu Roessera /punkt 4.4/ wymaga określenia elementów macierzy tranzycyjnej w każdym kolejnym kroku obliczeń; wpływa to na znaczne wydłużenie obliczeń nawet najprostszycch przypadków.
3. Realizacja wspomnianego algorytmu wymaga bardzo dużej pamięci operacyjnej co w poważnym stopniu ogranicza zakres zadań nadających się do badania tą metodą.
4. Zestawiając wniosek 2 i 3 należy stwierdzić, że model Roessera nie będzie miał praktycznego znaczenia w badaniu stanów nieustalonych w liniach elektroenergetycznych z uwagi na to, że parametry eksploatacyjne programu obliczeń według tego modelu są o kilka rzędów gorsze od parametrów programów obliczeń według innych metod.

## 8. L I T E R A T U R A

### 8.1 Wykaz literatury cytowanej w pracy

1. Bernas S., Ciok Z. : Modele matematyczne elementów systemu elektroenergetycznego. WNT, Warszawa 1977.
2. Bolkowski S. : Stany nieustalone w obwodach elektrycznych. WNT, Warszawa 1976.
3. Cholewicki T. : Elektrotechnika teoretyczna, t.2. WNT, Warszawa 1973.
4. Cholewicki T. : Elektryczne linie długie i układy drabinkowe niejednorodne. PWN, Warszawa 1974.
5. Ciok Z. : Przepięcia łączeniowe w układach elektroenergetycznych. PWN, Warszawa 1972.
6. Jakubowski J.L. : Podstawy teorii przepięć. PWN, Warszawa 1968.
7. Kaczorek T. : Teoria układów regulacji automatycznej. WNT, Warszawa 1976.
8. Kaczorek T. : Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych. WNT, Warszawa 1983.
9. Kącki E. : Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice. WNT, Warszawa 1971.
10. Lewinsztein M.L. : Zastosowanie rachunku operatorowego do obliczania stanów nieustalonych w obwodach trójfazowych. WNT, Warszawa 1967.

11. Osiowski J. : Zarys rachunku operatorowego.  
WNT, Warszawa 1972.
12. Roesser R.P. : A discrete state - space model for  
linear image processing. IEEE Transactions on Automatic  
Control, Vol. AC-20, No1. 1975
13. Zieliński J.S. ; Grymuza W. : Analiza stanów niestabil-  
nych w liniach elektroenergetycznych z wykorzystaniem  
modelu Roessera. IX Seminarium z Podstaw Elektrotechni-  
ki i Teorii obwodów. Gliwice - Wisła 23-26.VI.1986.
14. Zieliński J.S. : Zastosowanie maszyn analogowych  
i cyfrowych do obliczeń przepięć w układach elektro-  
energetycznych. Postępy TWN, z.15, PWN, Warszawa 1985.
15. Zieliński J.S. : Zastosowanie metody charakterystyk do  
analizy stanów niestabilnych w układach elektroenerge-  
tycznych. Postępy TWN, z. 12, PWN, Warszawa 1975.

8.2. Wykaz literatury uzupełniającej związanej z tematyką  
pracy.

1. Bieńkowska-Lipińska K. : Wybrane zagadnienia równań  
fizyki matematycznej. PWN, Warszawa 1970.
2. Bobińska B., Zieliński J.S. : Modelowanie matematyczne  
zjawisk ulotu i naskórkowości w liniach elektroenerge-  
tycznych. Zesz.Nauk.P. Łódzka, Elektryka, 1981, z.70.
3. Cholewicki T. : Analiza elektrycznych układów niejedno-  
rodnych metodą równań różnicowych. PWN, Warszawa 1982.
4. Cholewicki T. : A new method of calculation of currents  
and voltages in a long transmission line. Arch. Elekt-  
rot. t.XIII, 1964.

5. Cholewicki T. : Szczególne własności linii wykładniczo zbieżnej. Arch. Elektrot., t.XVIII, 1969 .
6. Cholewicki T. : Analysis of nonuniform n-wire active transmission line by application of matrix difference equations. Arch. Elektrot., t. XXVI, 1977.
7. Collatz L. : Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych. PWN, Warszawa 1960.
8. Jasicki Z., Kiezkowski Z. : Algorytmy obliczeń elektroenergetycznych na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1968.
9. Jury E.J. : Przekształcenie  $\mathcal{Z}$  i jego zastosowania. WNT, Warszawa 1970 .
10. Kaczorek T. : Zastosowanie metody symbolicznej Puchowa do wyznaczenia przebiegów czasowych w liniach długich. Arch. Elektrot. t. XIII, 1964.
11. Kaczorek T. : Analiza procesów stochastycznych w liniach długich o parametrach będących przypadkowymi funkcjami współrzędnej położenia. Arch. Elektrot., t.XVI, 1967.
12. Kaczorek T. : Analiza procesów stochastycznych w jednorodnych liniach długich. Arch. Elektrot., t. XIV, 1965.
13. Kaczorek T. : Macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT, Warszawa 1984.
14. Trzaska Z. : Analiza stanu nieustalonego w linii niesymetrycznej wykładniczo zbieżnej. Arch. Elektrot. t. XIX, 1970.

15. Trzaska Z. : Rozkład napięć i prądów chwilowych w szczególnej linii n - przewodowej niesymetrycznej stratnej. Arch. Elektrot. t. XX, 1971.
16. Wolska-Bochenek J. i in. : Zarys teorii równań całkowych i równań różniczkowych cząstkowych. WPW, Warszawa 1978.
17. Zieliński J.S. : O wyborze przekształcenia liniowego do analizy asymetrii w układach N - torowych /N = 1,2,3/. Rozprawy Elektrot. 1966, XII, 3.



## 9. ZAŁACZNIK

```
10 PRINT "PROGRAM MACIERZ"  
20 REM PROGRAM OBLICZANIA MACIERZY TRANZYCYJNEJ  
30 INPUT "PODAJ N:";N  
40 INPUT "PODAJ K:";K1  
50 DIM W(4,4):DIM A(4,4):DIM B(4,4):DIM C(4,4):DIM V(2,N,4,4)  
60 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
70 IF I=J THEN A(I,J)=1:GOTO 90  
80 A(I,J)=0  
90 NEXT J:NEXT I  
100 RESTORE 730  
110 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
120 READ B(I,J)  
130 NEXT J:NEXT I  
140 FOR L=1 TO N  
150 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
160 S=0  
170 FOR K=1 TO 4  
180 S=S+A(I,K)*B(K,J)  
190 NEXT K  
200 C(I,J)=S  
210 NEXT J:NEXT I  
220 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
230 A(I,J)=C(I,J)  
240 V(1,L,I,J)=A(I,J)  
250 NEXT J:NEXT I:NEXT L  
260 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
270 PRINT V(1,N,I,J),  
280 NEXT J:PRINT :NEXT I  
290 RESTORE 770  
300 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
310 READ A(I,J)  
320 NEXT J:NEXT I  
330 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
340 S=0:Z=0  
350 FOR K=1 TO 4  
360 S=S+B(I,K)*A(K,J)  
370 Z=Z+A(I,K)*V(1,1,K,J)  
380 NEXT K  
390 V(2,1,I,J)=Z+S  
400 NEXT J:NEXT I  
410 LICZNIK=1  
420 FOR L=2 TO N  
430 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
440 S=0:Z=0  
450 FOR K=1 TO 4  
460 S=S+B(I,K)*V(2,L-1,K,J)  
470 Z=Z+A(I,K)*V(1,L,K,J)  
480 NEXT K  
490 V(2,L,I,J)=Z+S  
500 NEXT J:NEXT I:NEXT L  
510 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4  
520 PRINT V(2,N,I,J),  
530 NEXT J:PRINT :NEXT I  
540 LICZNIK=LICZNIK+1  
550 IF LICZNIK>K1 THEN STOP  
560 FOR L=1 TO N  
570 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
```

```
580 V(1,L,I,J)=V(2,L,I,J)
590 NEXT J:NEXT I:NEXT L
600 RESTORE 750
610 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
620 READ W(I,J)
630 NEXT J:NEXT I
640 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
650 S=0:Z=0
660 FOR K=1 TO 4
670 S=S+B(I,K)*W(K,J)
680 Z=Z+A(I,K)*V(1,1,K,J)
690 NEXT K
700 V(2,1,I,J)=S+Z
710 NEXT J:NEXT I
720 GOTO 420
730 DATA 1,4,0,-4
740 DATA 2,1,-2,0
750 DATA 0,0,0,0
760 DATA 0,0,0,0
770 DATA 0,0,0,0
780 DATA 0,0,0,0
790 DATA 1,0,0,0
800 DATA 0,1,0,0
```

```
10 PRINT "PRFGRAM NAP W3"
20 REM PROGRAM OBLICZAJACY PRZEBIEG NAPIECIA NA KONCU LINII BEZSTRATNEJ
   DOLACZONEJ W CHWILI t=0 DO ZRODLA NAPIECIA PRZEMIENNEGO
30 READ L,C,S,PM
40 REM L-INDUKCYJNOSC JEDNOSTKOWA LINII,C-POJEMNOSC JEDNOSTKOWA LINII
   S-DLUGOSC LINII,PM-AMPLITUDA NAPIECIA ZASILAJACEGO
50 DATA 1.67E-03,67E-10,75,100
60 INPUT "PODAJ N:";N
70 INPUT "PODAJ K:";K1
80 INPUT "PODAJ H:";H
90 INPUT "PODAJ R2:";R2
100 D1=S/N
110 D2=(S*SQR(L*C))/H
120 REM D1-KROK DYSKRETYZACJI DLUGOSCI LINII,
   D2-KROK DYSKRETYZACJI CZASU
130 X=(D1/D2)*L
140 Y=(D1/D2)*C
150 REM X,Y-ELEMENTY MACIERZY UKLADU A
160 PRINT "X=";X
170 PRINT "Y=";Y
180 W=314
190 PO=PM
200 DIM P(1600)
210 FOR K=1 TO 1600
220 P(K)=PM*COS(W*K*D2)
230 NEXT K
240 DIM W(4,4):DIM A(4,4):DIM B(4,4):DIM C(4,4):DIM V(2,N,4,4)
250 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
260 IF I=J THEN A(I,J)=1:GOTO 280
270 A(I,J)=0
280 NEXT J:NEXT I
290 RESTORE 1030
300 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
310 READ B(I,J)
320 NEXT J:NEXT I
330 DIM Z(K1,2):DIM Q(K1):DIM U2(K1)
340 FOR L=1 TO N
350 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
360 S=0
370 FOR K=1 TO 4
380 S=S+A(I,K)*B(K,J)
390 NEXT K
400 C(I,J)=S
410 NEXT J:NEXT I
420 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
430 A(I,J)=C(I,J)
440 V(1,L,I,J)=A(I,J)
450 NEXT J:NEXT I:NEXT L
460 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
470 PRINT V(1,N,I,J),
480 NEXT J:PRINT :NEXT I
490 Q0=V(1,N,1,1)+V(1,N,1,2)/R2
500 RESTORE 1070
510 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
520 READ A(I,J)
530 NEXT J:NEXT I
540 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
550 S=0:Z=0
560 FOR K=1 TO 4
570 S=S+B(I,K)*A(K,J)
```

```
580 Z=Z+A(I,K)*V(1,1,K,J)
590 NEXT K
600 V(2,1,I,J)=Z+S
610 NEXT J:NEXT I
620 LICZNIK=1
630 FOR L=2 TO N
640 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
650 S=0:Z=0
660 FOR K=1 TO 4
670 S=S+B(I,K)*V(2,L-1,K,J)
680 Z=Z+A(I,K)*V(1,L,K,J)
690 NEXT K
700 V(2,L,I,J)=Z+S
710 NEXT J:NEXT I:NEXT L
720 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
730 PRINT V(2,N,I,J),
740 NEXT J:PRINT :NEXT I
750 Z(LICZNIK,1)=V(2,N,1,1):Z(LICZNIK,2)=V(2,N,1,2)
760 Q(LICZNIK)=Z(LICZNIK,1)+Z(LICZNIK,2)/R2
770 U2(0)=0
780 S1=0
790 FOR M=1 TO LICZNIK
800 S1=S1+U2(LICZNIK-M)*Q(M)
810 NEXT M
820 U2(LICZNIK)=(P(LICZNIK)-S1)/Q0
830 PRINT "U2(";LICZNIK;")=";U2(LICZNIK)
840 LICZNIK=LICZNIK+1
850 IF LICZNIK>K1 THEN STOP
860 FOR L=1 TO N
870 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
880 V(1,L,I,J)=V(2,L,I,J)
890 NEXT J:NEXT I:NEXT L
900 RESTORE 1050
910 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
920 READ W(I,J)
930 NEXT J:NEXT I
940 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 4
950 S=0:Z=0
960 FOR K=1 TO 4
970 S=S+B(I,K)*W(K,J)
980 Z=Z+A(I,K)*V(1,1,K,J)
990 NEXT K
1000 V(2,1,I,J)=S+Z
1010 NEXT J:NEXT I
1020 GOTO 630
1030 DATA 1,499.2532,0,-499.2532
1040 DATA 2.002992E-03,1,-2.002992E-03,0
1050 DATA 0,0,0,0
1060 DATA 0,0,0,0
1070 DATA 0,0,0,0
1080 DATA 0,0,0,0
1090 DATA 1,0,0,0
1100 DATA 0,1,0,0
```

Q-6  
Jaf

POLITECHNIKA LUBELSKA

WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Katedra Elektroenergetyki

mgr inż. Wiesław Grymusa

Suplement do pracy doktorskiej pt.:

ANALIZA STANÓW NIESTABILNYCH  
W LINIACH DŁUGICH  
Z WYKORZYSTANIEM MODELU ROSSERA

Promotor :

Prof.dr hab.inż. Jerzy S. Zieliński

Lublin 1987

S P I S    T R E Ś C I

	strona
1. Spis głównych oznaczeń używanych w rozprawie ...	3
2. Uzasadnienie podjęcia tematu i charakter pracy..	6
3. Przegląd literatury związanej z tematyką pracy..	9
4. Aproksymacja pochodnych cząstkowych ilorazami różnicowymi oraz wybór wariantu przekształcenia.	12
5. Język programowania i parametry maszyny cyfrowej.	14
6. Problem wyboru przykładów i interpretacja uzyskanych wyników .....	16
7. Deklaracja elementów własnych rozprawy .....	19
8. Spis literatury .....	20

1. Spis głównych oznaczeń używanych w rozprawie.

- =====
- A - macierz układu, równań liniowych modelu Roessera /2/
  - $A_1, A_2, A_3, A_4$  - macierze składowe macierzy układu A /2/
  - B - macierz sterowania w modelu Roessera /2/
  - C - macierz odpowiedzi w modelu Roessera /2/
  - D - macierz transmisyjna w modelu Roessera /2/
  - $B_1, B_2$  - macierze składowe macierzy sterowania B /2/
  - $C_1, C_2$  - macierze składowe macierzy odpowiedzi C /2/
  - $x^n(i, j), x^v(i, j)$  - wektory stanu w modelu Roessera /2/
  - $f(i, j)$  - wektor sterowania w modelu Roessera /2/
  - $y(i, j)$  - wektor odpowiedzi w modelu Roessera /2/
  - $A^{i,j}$  - macierz tranzycyjna dwuwymiarowego modelu Roessera /2/
  - $R_0, L_0$  - parametry podłużne /rezystancja jednostkowa oraz indukcyjność jednostkowa/ linii długiej /3/
  - $G_0, C_0$  - parametry poprzeczne /upływność jednostkowa oraz pojemność jednostkowa / linii długiej /3/
  - $v(x, t)$  - funkcja określająca przebieg prądu w linii długiej /3/
  - $u(x, t)$  - funkcja określająca przebieg napięcia w linii długiej /3/

- $\Delta x$  - krok dyskretyzacji długości linii /4/
- $\Delta t$  - krok dyskretyzacji czasu /4/
- $V(x, t)$  - wektor o składowych  $u(x, t)$  i  $v(x, t)$   
- /macierzowa postać równań telegrafistów//4/
- $A_0$  - macierz parametrów rozpraszających linii  $R_0, G_0$  /macierzowa postać równań telegrafistów//4/
- $B_0$  - macierz parametrów zachowawczych linii  $L_0, C_0$  /macierzowa postać równań telegrafistów//4/
- $u(i, j) = u(i\Delta x, j\Delta t)$  - funkcja określająca przebieg napięcia w linii długiej w zmiennych dyskretnych /4/
- $v(i, j) = v(i\Delta x, j\Delta t)$  - funkcja określająca przebieg prądu w linii długiej w zmiennych dyskretnych /4/
- $V(i, j)$  - wektor o składowych  $u(i, j)$  i  $v(i, j)$  /4/
- $l$  - długość linii długiej w [km] /4/
- $N$  - liczba odcinków na jakie podzielono linię /5/
- $\tau$  - czas propagacji fali wzdłuż linii w [s] /5/
- $t^o$  - czas uzyskiwania wyników obliczeń na maszynie cyfrowej w [min] /5/
- $|Z|$  - moduł impedancji obciążenia linii w [ $\Omega$ ] /5/
- $Z_0$  - impedancja falowa w linii długiej w [ $\Omega$ ] /5/



R, L, C

- rezystancja, indukcyjność oraz  
pojemność odbiornika obciążającego  
linię /5/

2. Uzasadnienie podjęcia tematu i charakter pracy.

Stany nieustalone w jednorodnej linii długiej o parametrach rozłożonych opisywane są za pomocą układu równań / 3.1 / /linia dwuprzewodowa/ lub / 6.1 / /linia wieloprzewodowa/. Rozwiązanie układu równań różniczkowych cząstkowych w ogólnym przypadku musi spełnić określone warunki początkowe /tzw. zagadnienie Cauchy'ego/ oraz warunki brzegowe. Zagadnienie rozwiązywania układu równań telegrafistów przy jednoczesnym spełnieniu warunków początkowych i brzegowych nosi nazwę zagadnienia mieszane [15] i z punktu widzenia praktycznego ma największe znaczenie. Teoretycznie w przypadku, w którym funkcje opisujące przebiegi napięć i prądów w linii są analitycznymi funkcjami zmiennych niezależnych omawiane równania mogą mieć swoje rozwiązanie w postaci analitycznej; w przeciwnym przypadku rozwiązanie tych równań możliwe jest za pomocą jednej z metod numerycznych bądź jedną z metod modelowania matematycznego. Analityczne rozwiązanie układu równań telegrafistów można przeprowadzić dwoma sposobami : metodą d'Alemberta lub metodą Bernoulliego [5, 6]. Rozwiązanie metodą pierwszą prowadzi do wyników przedstawiających fale bieżące, rozwiązanie zaś drugą metodą - do wyników pod postacią fal stojących. Również interpretacja fizyczna algorytmów wykorzystywanych przy stosowaniu metod numerycznych daje się sprowadzić bądź do metody fal wędrownych, bądź do metody fal stojących. Obecnie w literaturze światowej nie ma informacji na temat nowych algorytmów rozwiązywania równań telegrafistów.

Raczej ulepszą się algorytmy istniejące wraz z rosnącymi możliwościami używanych do ich rozwiązywania maszyn cyfrowych.

Nowe możliwości w tym zakresie stworzyła intensywnie rozwijana w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych teoria układów dwuwymiarowych. Wektory stanu występujące w równaniach modelu Roessera są funkcjami dwóch zmiennych niezależnych. Podobnie funkcje opisujące przebiegi napięć i prądów w liniach długich są funkcjami dwóch zmiennych niezależnych czasu  $t$  oraz odległości od końca linii  $x$ . Powyższa analogia skłania do podjęcia próby wykorzystania dwuwymiarowego modelu Roessera jako narzędzia metemetycznego umożliwiającego przybliżone rozwiązanie równań telegrafistów opisujących stany nieustalone w liniach długich.

Poszukiwanie metod rozwiązywania równań telegrafistów jest między innymi przedmiotem badań przeprowadzanych w elektrotechnice teoretycznej. W pracy zaproponowano sposób podejścia do analizy zgodnienia stanów nieustalonych w elektroenergetycznych liniach przesyłowych charakterystyczny dla badań przeprowadzanych nad liniami długimi w tej właśnie dziedzinie i stąd również teoretyczny charakter pracy. Na obecnym etapie, przy braku efektywnych metod komputerowych obliczenia macierzy tranzycyjnej opracowana w rozprawie metoda nie ma jeszcze wyraźnych własności aplikacyjnych zbliżających ją do praktyki inżynierskiej. Zastosowanie innych języków programowania w połączeniu z efektywnymi metodami obliczania macierzy tranzycyjnej, przy wykorzystaniu szybkich maszyn o odpowiednio dużej pamięci operacyjnej może

w przyszłości uczynić tą metodę bardziej konkurencyjną w stosunku do innych, szczególnie przy zastosowaniu jej do analizy przypadków bardziej ogólnych, np. wieloprzewodowych linii strasznych.

### 3. Przegląd literatury związanej z tematyką pracy.

=====

W ostatnich latach gwałtownie wzrosło zainteresowanie układami wielowymiarowymi / układami o wielu zmiennych niezależnych /. W języku angielskim układy tego typu nazywane są "multidimensional systems". Używane są również określenie "układy N - D" tzn. układy o N - zmiennych niezależnych. Zgodnie z tą nomenklaturą klasyczne układy dynamiczne nazywa się czasem układami 1 - D.

Systemy wielowymiarowe będące naturalnym uogólnieniem klasycznej teorii sterowania pozwalają ująć całość własności dynamicznych układów nie tylko w funkcji czasu ale również w zależności od innych parametrów fizycznych. Tego typu obiekty mają zastosowanie w wielu najnowszych zagadnieniach naukowych takich jak : wielowymiarowa filtracja cyfrowa, synteza systemów rozpoznawanie obrazów, analiza danych sejsmicznych, analiza zdjęć satelitarnych czy nawet racjonalna polityka kadrowa.

Z historycznego punktu widzenia pierwszym modelem dwuwymiarowym był model zaproponowany przez Givone i Roessera [5d, 6d] , rozwinięty następnie przez Roessera [12] oraz takich autorów jak Kung, Levy, Morf i Kailath [8d] . Nieco inne modele zaproponowali Attasi [1d, 2d] oraz Fornasini i Marchesini [3d, 4d] . Najbardziej ogólnym jest model Fornasini - Marchesini II [3d] , natomiast najlepiej i najszerzej zbadanym model Roessera [12] . Model ten rozszerzyli do 3 - D Tzafestas i Pimenides w pracy [10d] . Ostatnie osiągnięcia w teorii dwuwymiarowych układów liniowych bardzo szeroko omówiono w

monografii T. Kaczorka [7d] . W pierwszej części tej publikacji omówiono między innymi główne modele dwuwymiarowe oraz występujące między nimi relacje. Podano rozwiązanie modelu Roessera wyrażone za pomocą wartości własnych oraz różne metody obliczania macierzy tranzycyjnej.

Monografia zawiera spis kilkudziesięciu pozycji literatury traktujących o zastosowaniu układów 2 - D w teorii automatyki i sterowania. Przykłady wykorzystania modelu Roessera do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, w tym także do rozwiązania równania fali płaskiej przedstawiono w pracach [7d , 9d]

W rozprawie nie uznano za celowe omawianie aktualnego stanu badań w zakresie analizy stanów nieustalonych w elektroenergetycznych liniach przesyłowych. Istnieje na świecie dziesiątki publikacji traktujących o stanach nieustalonych, przyczynach i skutkach ich powstawania, metodach analizy oraz sposobach ograniczania ich skutków zarówno dla poszczególnych urządzeń jak i całych systemów elektroenergetycznych. Są to publikacje głównie z zakresu elektrotechniki teoretycznej, techniki wysokich napięć i systemów elektroenergetycznych. Bardzo szerokie omówienie literatury i stanu badań z tego zakresu można znaleźć w cytowanej w rozprawie publikacji [14] , w której podany jest przegląd najistotniejszych pozycji bibliograficznych z tej dziedziny do końca 1983 roku. Warto nadmienić, że dopływ literatury zachodniej do naszego kraju praktycznie ustał zaś zbierane incydentalnie informacje wskazują, że w rozważanej dziedzinie nie opisuje się nowych algorytmów

obliczenia elektromagnetycznych stanów nieustalonych a jedynie ulepsza istniejące, stosownie do powiększających się możliwości współczesnych maszyn cyfrowych.



4. Aproksymacja pochodnych cząstkowych ilorazami różnicowymi  
=====  
oraz wybór wariantu przekształcenia.  
=====

Przejsście od opisu przebiegów napięć i prądów w stanie nieustalonym w liniach długich w postaci równań różniczkowych cząstkowych do modelu Roessera jest pierwszym problemem, jaki pojawia się na drodze opracowania metody analizy stanów nieustalonych wykorzystującej model Roessera. W pracy dokonano tego na drodze aproksymacji pochodnych cząstkowych ilorazami różnicowymi podając cztery różne warianty przekształcenia równań telegrafistów do postaci modelu Roessera. Zagadnienia aproksymacji pochodnych cząstkowych ilorazami różnicowymi, problemy zgodności, stabilności oraz zbieżności rozwiązania różnicowego szeroko omówiono w publikacji [16] /zamieszczonej w wykazie literatury uzupełniającej związanej z tematyką pracy/. Warianty przedstawione w rozprawie różnią się od siebie i każdy z nich może stanowić punkt wyjścia do dalszej analizy. Autor uważając tą część rozprawy za swoje oryginalne osiągnięcie zdecydował się na opis wszystkich czterech wariantów, jakkolwiek do dalszej analizy zastosowano jedynie wariant trzeci, jako najprostszy do dalszych obliczeń numerycznych. Podjęto także próbę opracowania analogicznych algorytmów obliczeń wykorzystujących pozostałe warianty. Są one jednak bardziej skomplikowane numerycznie, wymagają większej pamięci operacyjnej maszyny i wydłużają czas obliczeń. Ponadto, należy zaznaczyć, że w pracy zamieszczono jedynie te warianty aproksymacji pochodnych cząstkowych ilorazami różnicowymi, które



umożliwiają przekształcenie równań telegrafistów do postaci modelu Roessera. Warient wykorzystujący np. ilorazy przednie dla obydwu zmiennych takiej możliwości nie daje i dlatego też został w rozprawie pominięty.

Komentarza wymaga również fakt zasadniczo różnych warunków zerowania się macierzy tranzycyjnej w wariancie drugim i trzecim mimo nieznacznych różnic w aproksymacji pochodnych. Z definicji macierzy tranzycyjnej /def. 2.2.2 str. 14/ wynika, że każdą macierz  $A^{i,j}$  można przedstawić jako pewną kombinację macierzy  $A^{1,0}$  oraz  $A^{0,1}$  będących składowymi macierzy układu  $A / A = A^{1,0} + A^{0,1} /$ . Macierz układu  $A$  decyduje więc o budowie i zerowaniu się macierzy tranzycyjnej  $A^{i,j}$ . Budowa macierzy  $A$  /a tym samym  $A^{1,0}$  oraz  $A^{0,1}$  / w obu wariantach przekształcenia jest zasadniczo różna i z tego właśnie względu otrzymano tak różne warunki zerowania się macierzy tranzycyjnej.

5. Język programowania i parametry maszyny cyfrowej.  
=====

Do obliczeń przykładów zamieszczonych w rozprawie zastosowano język BASIC. Fakt zastosowania tego języka wpłynął oczywiście na ograniczenie zakresu dostępnej pamięci operacyjnej mikrokomputera do 64 kB.

Celem przedstawienia przykładowych obliczeń było zilustrowanie opracowanej metody i uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy metoda ta daje wyniki zbliżone z rezultatami uzyskanymi przy zastosowaniu innych znanych metod. Uzyskana odpowiedź pozytywną, a więc przedstawiony cel został osiągnięty. Warto zaznaczyć, że rozmiar przykładu obliczeniowego był taki, że cały program realizowany był tylko przy użyciu pamięci wewnętrznej mikrokomputera, tak więc zastosowanie innego języka nie wpłynie w istotny sposób na skrócenie czasu obliczeń. Poszukiwanie możliwości skrócenia tego czasu może wiązać się z próbami poszukiwań innych, efektywniejszych algorytmów obliczania macierzy tranzycyjnej bądź też przez zastosowanie do obliczeń komputera z procesorem macierzowym. Pierwsza z wymienionych możliwości jest bardzo pracochłonna i podjęcie jej będzie uzasadnione jeśli zarysuje się wyraźna efektywność rozważanej metody, zaś druga możliwość w obecnych warunkach krajowych nie jest do zrealizowania ze względu na brak dostępu do komputera z procesorem macierzowym.

Na stosunkowo długi czas uzyskiwanie wyników bez wątplenia miały wpływ także parametry mikrokomputera.

Do obliczeń wykorzystano mikrokomputer IBM PC/XT z zegarem 4,7 MHz bez koprocatora arytmetycznego. W trakcie realizacji programów nie stosowano kompilatora języka BASIC. Zastosowanie kompilatora i koprocatora arytmetycznego mogłoby skrócić czas obliczeń kilkadziesiąt razy.



6. Problem wyboru przykładów i interpretacje uzyskanych  
=====  
wyników.  
=====

Głównym i zasadniczym celem rozprawy było opracowanie metody analizy stanów nieustalonych w liniach elektroenergetycznych wykorzystującej model Koessera. Znieszczone w rozprawie przykłady obliczeniowe mają służyć przede wszystkim sprawdzeniu, czy wyniki uzyskane dzięki jej zastosowaniu są zbieżne z wynikami innych metod i nie są sprzeczne z fizyczną interpretacją zjawisk zachodzących w trakcie elektromagnetycznych stanów nieustalonych w liniach długich. Wykazanie takiej zbieżności jest potwierdzeniem sformułowanej w rozprawie tezy pracy oraz wykazaniem słuszności opracowanej metody a tym samym realizacją postawionego celu pracy.

Na obecnym etapie, opracowana w rozprawie metoda, nie jest w stosunku do innych konkurencyjna i próby jej szerszych zastosowań nie znajdują jeszcze uzasadnienia. Wymaga ona dalszego rozwijania przede wszystkim na drodze poszukiwania efektywnych i szybkich metod obliczenia macierzy tranzycyjnej. Należy ponadto zwrócić uwagę na ogromną złożoność i trudności w analizie zjawisk nieustalonych w systemach elektroenergetycznych. Analiza elektromagnetycznych stanów nieustalonych w przesyłowych liniach elektroenergetycznych sprowadza się w zasadzie do analizy przepięć wewnętrznych i przepięć występujących podczas wyładowań atmosferycznych.



Wyznaczenie wartości przepięć wewnętrznych nieograniczonych lub ograniczonych w projektowanych układach przesyłowych prądu przemiennego odbywa się za pomocą analizatorów stanów nieustalonych, które są właściwie modelami fizycznymi badanych obiektów lub też za pomocą matematycznych maszyn cyfrowych. Prawidłowość metody i wyniku może być sprawdzona przez bezpośredni pomiar w układach istniejących. Liczba czynników, od których zależy wartość maksymalna oraz przebieg przepięć wewnętrznych jest tak duża, iż nie można wyników otrzymanych z obliczeń lub pomiarów wykonanych dla jednego układu przesyłowego przenieść na inny układ. Każdy nowy układ przesyłowy powinien być sprawdzony na przepięcia wewnętrzne podobnie jak na prądy zwarciove, stateczność współpracy równoległej czy rozkład napięć roboczych podczas różnych warunków pracy. Wyniki badań laboratoryjnych i obliczeń przepięć były w prostych przypadkach sprawdzane w sieciach rzeczywistych. Mimo to nie posiadamy jeszcze pełnego statystycznego obrazu tych zjawisk i uważa się, że z powodu przypadkowego charakteru zjawisk przepięciowych każdy układ przesyłowy powinien być sprawdzony indywidualnie, nie ma bowiem ogólnych prawideł pozwalających na określenie wartości przepięć wewnętrznych. Opisane wyżej fakty świadczą o trudnościach związanych z inżynierską weryfikacją każdej nowo opracowanej metody analizy stanów nieustalonych.

Komentarze wyszła także przyjęte w przykładach zamieszczonych w rozprawie napięcie linii długiej 100 kV.

Zgodnie z definicją [3] "linią długą nazywamy linię rzędu długości fali, na której linie pracuje". Jeżeli zatem uwzględnić fakt, że dla fali wywołanej wyładowaniem atmosferycznym, której czas trwania nie przekracza w większości przypadków kilkuset mikrosekund, nawet uzwojenie transformatora jest linią długą, określenie linii średniego napięcia linią "długą" staje się oczywiste. Niefortunne określenie napięcia linii 100 kV wynika z przyjętego w większości publikacji w tej dziedzinie zwyczaju prowadzenia obliczeń w jednostkach względnych i dla uniknięcia nieporozumień lepsze byłoby przyjęcie konwencji stosowanej np. w [15], gdzie przyjmuje się amplitudę napięcia źródła wymuszającego równą 1 jednostce względnej napięcia. Wykonane, chociaż nie zamieszczone w rozprawie obliczenia przy użyciu jednostek względnych dawały z fizycznego punktu widzenia wyniki identyczne.

Deklaracja elementów własnych rozprawy.  
=====

Za własne i oryginalne elementy rozprawy autor uważa :

1. Podanie czterech sposobów przejścia od opisu równań telegrafistów w postaci równań różniczkowych cząstkowych do modelu Roessera. /4/.
2. Opracowanie algorytmu obliczenia macierzy tranzycyjnej w wybranym do dalszej analizy wariancie przekształcenia /4/.
3. Wyprowadzenie wzorów umożliwiających obliczanie przebiegu napięć i prądów wzdłuż linii długiej w stanie nieustalonym dla linii dwu i wieloprzewodowej /4,6/.
4. Opracowanie programu obliczeń na maszynie cyfrowej oraz przetestowanie opracowanej metody na kilku przykładach linii zarówno bezstratnej jak i stratnej /5/.

8. Spis literetury.  
=====

- 1d. Attasi S. : Modélisation et traitement des suites à deux indices. IRIA Rapport Laboria, Sept. 1975.
- 2d. Attasi S. : Systèmes lineaires homogènes à deux indices. IRIA Rapport Laboria No.31, sept. 1973.
- 3d. Fornasini E., Marchesini G. : Doubly indexed dynamical systems; state space models and structural properties. Mathematical systems Theory, vol. 12, no. 1, 1978.
- 4d. Fornasini E., Marchesini G. : State - space realization theory of two - dimensional filters. IEEE Trans. Autom. Contr. vol. AC - 21, no. 4, Aug. 1976.
- 5d. Givone B.D., Roesser R.P. : Minimization of multidimensional linear iterative circuits. IEEE Trans. on Computers vol. C - 22, no. 7, 1973.
- 6d. Givone B.D., Roesser R.P. : Multidimensional linear iterative circuits - general properties. IEEE Trans. on Computers vol. C - 21, no. 10, 1972.
- 7d. Kaczorek T. : Two - dimensional Linear systems. Springer - Verlag 1985.



- 8d. Kung S., Levy B., Morf M., Kailath, T. : New results  
in 2 - D systems theory, part II :  
2 - D state space models realization  
and the notions of controllability,  
observability and minimality. Proc.  
of ITM, vol. 65, no.6, 1977.
- 9d. Marzolek W. : Two - dimensional state - space  
discrete models for hyperbolic  
partial differential equations.  
Applied Mathematical Modelling,  
vol. 3, Febr. 1984 .
- 10d. Tzafestas S.G., Pimonides T.G. : Exact model matching  
control of three - dimensional systems  
using state and output feedback.  
Int.J.Syst. Scie, vol. 13, no. 11,  
1982 .

