

## SPIS TREŚCI

W s t ę p .....	4
-----------------	---

### I. WŁAŚCIWOŚCI WSTĘPNE

1. Abstrakcyjna przestrzeń Hilberta	
1.1. Przestrzeń unitarna .....	7
1.2. Norma i metryka w przestrzeni unitarnej .....	9
1.3. Zupełność przestrzeni .....	10
1.4. Przestrzeń Hilberta .....	12
2. Elementy ortogonalne	
2.1. Rozkład elementów na składowe ortogonalne .....	15
2.2. Aproksymacja kombinacjami liniowymi .....	14
2.3. Ciągi Fouriera .....	16
2.4. Zupełność i szczelność układów elementów .....	18
3. Funkcyjne przestrzenie Hilberta	
3.1. Funkcje klasy $L^1$ i $L^2$ .....	17
3.2. Orzyny i transformaty Laplace'a .....	20
3.3. Przestrzenie $L^2(0, \infty)$ i $L^2(-j\infty, j\infty)$ .....	21
3.4. Przestrzeń $L^2(0, \infty)$ z wagą .....	25

### II. ORTOGONALNE WIELOMIANY WYKŁADNICZE

4. Konstrukcje ortogonalnych wielomianów wykładniczych	
4.1. Metoda ortogonalizacji w.ł. Krutza .....	29

4.2. Ortogonalne rzeczywiste wielomiany wykładniczo- trygonometryczne .....	27
4.3. Ortogonalizacja z wagą wykładniczą .....	32
4.4. Ortogonalizacja z zerowymi warunkami początkowymi .....	35
4.5. Ortogonalizacja z wykładnikami wielokrotnymi ...	37
5. Zupełność ciągu ortogonalnych wielomianów wykładniczych	
5.1. Zupełność ciągu oryginalów i transformab .....	40
5.2. Zupełność ciągu funkcji wykładniczych z wykładni- kami pojedynczymi .....	41
5.3. Warunki wystarczające zupełności .....	42
5.4. Zupełność ciągu funkcji wykładniczych z wykładni- kami wielokrotnymi .....	44
6. Szeregi ortogonalnych wielomianów wykładniczych	
6.1. Zbieżność według metryki przestrzeni $L^2$ .....	45
6.2. Zbieżność i zbieżność jednostajna .....	46
7. Zsumowanie	
7.1. Przykłady ortogonalnych wielomianów wykładniczych .....	47
7.2. Ortogonalne wielomiany wykładnicze z wykładnikami całkowitymi ciąg arytmetyczny .....	51

### III. ZAGADNIENIA

8. Identyfikacja układów	
8.1. Identyfikacja i aproksymacja .....	53
8.2. Identyfikacja na podstawie charakterystyki czystej .....	55
8.3. Identyfikacja na podstawie charakterystyki całkowitej .....	57

8.4. Modele symulujące i analizatory widna sygnałów	59
8.5. Przykłady identyfikacji na podstawie charakterystryki czasowej .....	65
9. Aproksymacja przebiegów przejściowych	
9.1. Przebiegi sygnałów w pewnych klasach układów liniowych stacjonarnych .....	73
9.2. Aproksymacja przebiegów przejściowych w pewnych klasach układów liniowych stacjonarnych .....	75
9.3. Aproksymacja przebiegów przejściowych w układach liniowych, o parametrach skupionych, niestacjonarnych .....	78
10. Jakość procesów regulacji	
10.1. Wskaźniki jakości procesu regulacji .....	79
10.2. Całkowe kwadratowe wskaźniki jakości .....	80
10.3. Zmiana parametrów układów regulacji .....	83
11. O dalszych zastosowaniach .....	84
Zakończenie .....	86
Aneks 1. Dowody twierdzeń .....	90
Aneks 2. Programy obliczeń .....	102
L i t e r a t u r a .....	112

## W S T Ź P

Geneza zainteresowań ortogonalnymi wielomianami wykładniczymi tkwi zarówno w technice jak i w matematyce. Z jednej strony, w różnych zagadnieniach technicznych okazuje się dogodne stosowanie aproksymacji funkcji czasu, przy pomocy wielomianów wykładniczych, a z drugiej, strony własność ortogonalności ułatwia obliczenia matematyczne.

Problemy aproksymacji dogodnie jest czasem rozwiązać w sposób ogólny, w tzw. przestrzeniach abstrakcyjnych. Wprowadzona odpowiednio metryka takich przestrzeni, spełnia rolę wskaźnika jakości aproksymacji.

Jedną z najważniejszych przestrzeni jest przestrzeń Hilberta, w której metrykę wprowadza się przy pomocy odpowiednio zdefiniowanego iloczynu skalarnego. Posługując się tym iloczynem, konstruuje się także elementy ortogonalne. Jedną z realizacji abstrakcyjnej przestrzeni Hilberta, jest przestrzeń  $L^2(0, \infty)$ , funkcji całkowalnych z kwadratem, w przedziale  $(0, \infty)$ , z metryką Gaussa.

$$E = \sqrt{\int_0^{\infty} |x(t) - x_N(t)|^2 dt}$$

Metryka ta szacuje energię różnicy sygnałów, a można ją niekiedy interpretować jako miarę różnicy sygnałów. W przestrzeni tej, elementami ortogonalnymi są właśnie ortogonalne wielomiany wykładnicze. Znany ortogonalny układ funkcji Laguerre'a jest ich szczególnym przypadkiem.

Funkcje Laguerre'a zostały zbadane w roku 1879, ale dopiero w roku 1932 Y.W.Lee zastosował te funkcje i ich transformaty do syntezy obwodów elektrycznych. Następnie w roku 1952 G.H.Kautz uogólnił metodę Y.W.Lee i otrzymał ortogonalne wielomiany wykładnicze. Wyniki G.H.Kautza zostały częściowo opublikowane w pracy [6]. W ciągu następujących kilkunastu lat ukazało się wiele prac różnych autorów. Dotyczyły one różnych aspektów procedury ortogonalizacyjnej G.H.Kautza ([9], [13], [15], [16]) lub zastosowań omawianych funkcji w elektrotechnice i teorii regulacji ([20], [21], [25 - 26], [28], [29], [31]). Istotny problem zupełności układu funkcji wykładniczych, został zasygnalizowany w pracach [10], [15] i udowodniony w przypadku szczególnym w pracy [14].

Przy opracowywaniu niniejszej rozprawy, autor postawił sobie trzy cele:

- 1<sup>o</sup> dokonanie próby syntezy dotychczasowych wyników, teorii ortogonalnych wielomianów wykładniczych, a także pewne ich uzupełnienie i uściślenie
- 2<sup>o</sup> wykazanie, że celowe i korzystne może być stosowanie tych funkcji w wybranych dziedzinach elektrotechniki i automatyki
- 3<sup>o</sup> opracowanie dogodnych algorytmów niektórych postępowań aproksymacyjnych, częściej spotykanych w praktyce technicznej.

Zasadniczą tezę pracy można by więc sformułować w sposób następujący:

Ortogonalne wielomiany wykładnicze mogą być użyteczne w zagadnieniach aproksymacji przebiegów czasowych. Mogą być one praktycznie stosowane przy badaniu właściwości dynamicznych układów, w których występują sygnały o ograniczonej energii. Umożliwiają praktycznie, proste i jednolite rozwiązanie niektórych problemów elektrotechniki lub automatyki.

Praca składa się z trzech części oraz aneksów.

W części I podano krótkie zestawienie najważniejszych pojęć i zależności matematycznych, potrzebnych w toku dalszych rozważań.

Część II stanowi realizację pierwszego celu. Przedstawiono tu, w sposób systematyczny, konstrukcję ortogonalnych wielomianów wykładniczych w różnych przypadkach. Autor uzupełnił wszystkie dowody, których brak było w dostępnej literaturze. Ponadto tw. 1, 2 i 3 /p.4.2/ autor sformułował i udowodnił w postaci najogólniejszej. Omówiono tu także problem zupełności ciągu funkcji wykładniczych. Autor uwiódnił warunek konieczny i wystarczający zupełności w przypadku ogólnym (tw.1.p.5.4) a także warunki wystarczające zupełności (tw.1 i 3 oraz wn. 2 i 4 p.5.3).

Część III stanowi realizację drugiego celu. Przedstawiono tu zastosowanie ortogonalnych wielomianów wykładniczych do identyfikacji układów, do aproksymacji przebiegów przejściowych w pewnych klasach układów liniowych, stacjonarnych i niestacjonarnych, oraz do badania jakości procesów regulacji. Autor przedstawił tu metodę aproksymacji funkcji czasu (p.8.2) i funkcji częstotliwości (p.8.3, 9.2), oraz uogólnienie metody Basakirova analizy przebiegu przejściowego w układach liniowych, niestacjonarnych (p.9.3). Ponadto autor

zastosował ortogonalne wielomiany wykładnicze do obliczenia całkowitego kwadratowego wskaźnika jakości regulacji (p.70.2), oraz do odpowiedniego doboru parametrów układu regulacji (p.70.3).

Podane w wymienionych punktach algorytmy, stanowią realizację trzeciego celu pracy.

W ostatnim rozdziale wskazano na możliwości dalszych zastosowań

W aneksach zamieszczono dowody twierdzeń oraz programy obliczeń w języku ALGOL.

3. Abstrakcyjna przestrzeń Hilberta

3.1. Przestrzeń unitarna.

Przestrzeń abstrakcyjną nazywa się w matematyce zbiór dowolnych elementów, z określonymi dla tych elementów pewnymi relacjami natury geometrycznej lub arytmetycznej; np. odległość między elementami lub pewne działania na elementach. Przez wybór elementów i odpowiednio określenie relacji między elementami, otrzymuje się konkretne realizacje przestrzeni.

Przykładem są więc przestrzenie ciągów liczbowych, przestrzenie funkcyjne a także przestrzenie stanów układów fizycznych.

W geometrii analitycznej będą się przestrzemi Euklidesa  $E_n$ , której elementami są ciągi liczbowe o  $n$  wyrazach, z odpowiednio określonymi dodawaniem dwo elementów, mnożeniem elementu przez liczbę oraz iloczynem skalarnym dwo elementów. Elementy przestrzeni  $E_n$  można interpretować jako punkty  $P(x_1, \dots, x_n)$  lub jako wektory

$$\vec{OP} = [x_1, \dots, x_n]$$

Ważnym uogólnieniem przestrzeni  $E_n$  jest przestrzeń unitarna.

Def 1. Przestrzeń unitarna  $H_0$  jest to przestrzeń, w której spełnione są warunki A, B i C.

A. Każdej parze elementów  $x, y \in H_0$  odpowiada pewien element  $x + y \in H_0$  zwany sumą elementów  $x$  i  $y$ . Działanie to ma następującą własność:

$$A_1 \quad x + y = y + x$$

$$A_2 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$A_3$  istnieje element zerowy  $0 \in H_0$  taki, że dla każdego elementu  $x \in H_0$  jest

$$x + 0 = x$$

A<sub>4</sub> dla każdego elementu  $x \in H_0$  istnieje element przeciwny  $-x \in H_0$  taki, że

$$x + (-x) = 0$$

B. Każdemu elementowi  $x \in H_0$  i każdej liczbie zespolonej  $\alpha$  odpowiada pewien element  $\alpha x \in H_0$  zwany iloczynem elementu  $x$  przez liczbę  $\alpha$ . Działanie to ma następujące własności:

$$B_1 \quad 1 \cdot x = x$$

$$B_2 \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$$

$$B_3 \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$B_4 \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

C. Każdej parze elementów  $x, y \in H_0$  odpowiada pewna liczba zespolona - oznacza się ją symbolem  $(x, y)$  - zwana iloczynem skalarnym elementów  $x$  i  $y$ . Działanie to ma następujące własności:

$$C_1 \quad (x, x) = 0 \quad \text{gdy } x = 0$$

$$C_2 \quad (x, x) > 0 \quad \text{" } x \neq 0$$

$$C_3 \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$C_4 \quad (\alpha \cdot x + \beta \cdot y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

Elementy przestrzeni unitarnej, analogicznie jak elementy przestrzeni  $E_n$ , mogą być interpretowane jako punkty lub jako wektory.

Przestrzeń z działaniami A i B nazywamy się przestrzenią liniową. W przestrzeni liniowej (w szczególności w przestrzeni unitarnej), można z elementów  $\{x_n\}_1^N$  utworzyć ich kombinację liniową

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_N \cdot x_N$$

i wprowadzić pojęcie zależności i niezależności liniowej elementów.

Def 2. Elementy  $\{x_n\}_1^N$  są liniowo niezależne, tzn. że w równaniu

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_N \cdot x_N = 0$$



wynika warunk

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_N = 0$$

W przeciwnym przypadku elementy są liniowo zależne.

Tryb badania niezależności liniowej elementów stosuje się tzw. wyznacznik Grama

$$G(x_1, \dots, x_N) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_N, x_1) & \dots & (x_N, x_N) \end{vmatrix}$$

Tw 1. Jeżeli elementy  $\{x_n\}_1^N$  są liniowo niezależne, to

$$G(x_1, \dots, x_N) > 0$$

i odwrotnie

Tw 2. Jeżeli elementy  $\{x_n\}_1^N$  są liniowo zależne, to

$$G(x_1, \dots, x_N) = 0$$

i odwrotnie.

Def 3. Elementy ciągu  $\{x_n\}_1^\infty$  są liniowo niezależne, tan. że każdy elementowy podciąg tego ciągu jest liniowo niezależny.

### 1.2. Norma i metryka w przestrzeni unitarnej.

W przestrzeni  $B_0$  każdemu elementowi  $x$  przyporządkowuje się jedną liczbę rzeczywistą, nieujemną. Określa się ją symbolem  $\|x\|$  i nazywa normą elementu  $x$ .

Def 4.  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Tw 1. (nierówność Bunikowskiego-Schwarz)

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

**Tw 2. (własności normy)**

- $N_1$   $\|x\| = 0$     gdy     $x = 0$
- $N_2$   $\|x\| > 0$     "     $x \neq 0$
- $N_3$   $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $N_4$   $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

własności normy  $N_1$  identyczna z podstawowymi własnościami długości wektora w przestrzeni  $E_n$ .

**Def 2.** Metryka przestrzeni  $H_D$  jest to funkcja

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

określona dla każdej pary elementów  $x, y \in H_D$ .

**Tw 3. (własności metryki)**

- $M_1$   $\|x - y\| = 0$     gdy     $x = y$
- $M_2$   $\|x - y\| > 0$     "     $x \neq y$
- $M_3$   $\|x - y\| = \|y - x\|$
- $M_4$   $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\|$

własności metryki  $M_1$  identyczna z podstawowymi własnościami odległości punktów w przestrzeni  $E_n$ . Stąd, metrykę nazywa się także odległością elementów przestrzeni  $H_D$ .

Przestrzeń z metryką nazywa się przestrzenią metryczną.

Teorię można wprowadzić przy pomocy odpowiedniej definicji także w przestrzeniach, w których nie została określona norma. Istotna jest jednak spełnienie warunków  $M_1 - M_4$  (aksjomaty metryki).

1.3. Zbieżność w przestrzeni

W każdej przestrzeni metrycznej, w szczególności w przestrzeni euklidesowej  $H_D$ , można wprowadzić pojęcie granicy ciągu elementów.

Sprowadza się to pojęcie do granicy ciągu liczbowego.

$$\text{Def 1. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{tzn.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Zbieżność ciągu w sensie tej definicji, nazywa się zbieżnością według normy albo zbieżnością normą.

Def 2. Ciąg elementów  $\{x_n\}_1^\infty$  przestrzeni metrycznej spełnia warunek Cauchy'ego, tzn. że

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

Dowodni się, że w każdej przestrzeni metrycznej ciąg elementów zbieżny według normy spełnia warunek Cauchy'ego. Późniejsze odwrócone prawdziwe jest tylko w niektórych przestrzeniach, tzn. w przestrzeniach zupełnych.

Def 3. Przestrzeń metryczna jest zupełna, tzn. że każdy ciąg elementów spełniający warunek Cauchy'ego ma granicę, która jest elementem tej przestrzeni.

Tw 1. W przestrzeni metrycznej zupełnej istnienie granicy ciągu należącego do tej przestrzeni i warunek Cauchy'ego są równoważne.

Przykładem przestrzeni metrycznej zupełnej, może być przestrzeń  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych z metryką określoną zależnością

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| \quad \text{gdzie} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Nieco inaczej przestrzeń  $\mathbb{K}$ , liczb wymiernych z tą samą metryką, nie jest przestrzenią zupełną. Wiadomo jednak, że przestrzeń  $\mathbb{R}$  można otrzymać z przestrzeni  $\mathbb{K}$ , przez uzupełnienie jej liczbami niewymiernymi. Podobnie, przez konstrukcję pewnych nowych elementów, można uzupełnić każdą przestrzeń metryczną niezupełną.

### 1.2. Przestrzeń Hilberta.

W punktach poprzednich omówione zostały podstawowe pojęcia, które składają się na pojęcie przestrzeni Hilberta.

**Def 1.** Abstrakcyjną przestrzeń Hilberta  $H$  jest to przestrzeń unitarna i zupełna.

**Tw 1.** Każdą niezupełną przestrzeń unitarną można uzupełnić do przestrzeni Hilberta.

Przykładem przestrzeni Hilberta może służyć przestrzeń  $L^2_{\mu}$  funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a. Przestrzeń tę można otrzymać przez uzupełnienie przestrzeni unitarnej  $(L^2)_{\sigma}$  funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Riemanna.

Każdej przestrzeni liniowej można wprowadzić pojęcie wymiaru skończonego lub nieskończonego. W pewnych przestrzeniach można wprowadzić pojęcie bazy. Tutaj zostaną omówione te pojęcia w odniesieniu do przestrzeni Hilberta.

**Def 2.** Przestrzeń  $H$  jest przestrzenią o  $N$  wymiarach, tzn. że

1. istnieje w niej ciąg  $\{x_n\}_1^N$  elementów liniowo niezależnych
2. każdy element  $x \in H$  można przedstawić w postaci

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_N x_N$$

Elementy  $\{x_n\}_1^N$  tworzą bazę  $N$ -wymiarowej przestrzeni  $H$ .

**Def 3.** Przestrzeń  $H$  jest przestrzenią o przeliczalnej liczbie wymiarów, tzn. że

1. istnieje w niej ciąg  $\{x_n\}_1^{\infty}$  elementów liniowo niezależnych
2. każdy element  $x \in H$  można przedstawić w postaci

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$$

Elementy  $\{x_n\}_1^{\infty}$  tworzą bazę przeliczalnie wymiarowej przestrzeni  $H$ .

Warto zauważyć, że mogą być także przestrzenie Hilberta nie-  
przeliczalnie wymiarowe.

Niech będzie przestrzeń Hilberta  $H$  z bazą  $\{x_n\}$  skończoną  
lub przeliczalną. Przestrzeń Hilberta  $\tilde{H}$  z bazą  $\{x_0\}$  wybraną  
z bazy  $\{x_n\}$  noszywe się podprzestrzenią. Szczególnie warto zwrócić  
uwagę na podprzestrzeń  $H$  - wymiarową z bazą  $\{x_n\}_1^N$ , -przestrzeni  
przeliczalnie wymiarowej z bazą  $\{x_n\}_1^\infty$ .

## 2. Elementy ortogonalne

### 2.1. Rozkład elementów na składowe ortogonalne.

W przestrzeni Hilberta  $H$  można, przy pomocy iloczynu skalarnego,  
oprowadzić dwa podstawowe pojęcia metryczne: pojęcie długości  
(p.1.2.) oraz pojęcie kąta, a w szczególności pojęcie ortogonalności  
(O O) czyli prostopadłości ( $\perp$ ).

Def 1. Dwa elementy  $x, y \in H$  są O O ( $x \perp y$ ) tzn. że spełniony  
jest warunek

$$(x, y) = 0$$

Def 2. Element  $x \in H$  i podprzestrzeń  $\tilde{H}$  są O O ( $x \perp \tilde{H}$ ),  
tzn. że dla dowolnego elementu  $y \in \tilde{H}$  spełniony jest warunek

$$(x, y) = 0$$

Ważną własnością przestrzeni Hilberta jest możliwość rozkładu  
elementu na dwie składowe ortogonalne.

Tw 1. (o rozkładzie ortogonalnym)

Jeżeli 1.  $\tilde{H}$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $H$

2.  $h \in H$  i  $h \neq 0$

to istnieją jedynne elementy  $x_0 \in \tilde{H}$  i  $e \perp \tilde{H}$  takie, że

$$1. h = x_0 + e$$

2.  $\|h\|^2 = \|x_0\|^2 + \|e\|^2$
3.  $\|h - x_0\| = \min_{x \in \bar{H}} \|h - x\|$

Twierdzenie to jest analogiczne do twierdzenia o rzucie wektora na płaszczyznę w przestrzeni  $E_3$ . W związku z tym, element  $x_0$  nazywa się rzutem elementu  $h$  na podprzestrzeń  $\bar{H}$ . Element  $e$  można traktować jako wektor łączący koniec rzutu i koniec wektora. Rzut elementu można traktować jako aproksymację optymalną elementu w sensie minimum odległości. Liczba  $\|e\|$  jest wtedy błędem aproksymacji.

### 2.2. Aproksymacje kombinacjami liniowymi.

Niech będzie podprzestrzeń  $\bar{H}$  z bazą  $\{x_i\}_1^N$ . Dany element  $h \in E$  można przedstawić w postaci

$$h = (d_1 x_1 + \dots + d_N x_N) + e_N, \quad e_N \perp \bar{H}$$

Współczynniki  $d_1 \dots d_N$  elementu optymalnego w sensie minimum błędów można znaleźć z układu równań

$$\begin{bmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_N, x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_1, x_N) & \dots & (x_N, x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h, x_1) \\ \dots \\ (h, x_N) \end{bmatrix} \quad (*)$$

Błąd aproksymacji wynosi

$$\|e_N\|^2 = \frac{G(h, x_1 \dots x_N)}{G(x_1 \dots x_N)}$$

gdzie symbol  $G(\dots)$  oznacza wyznacznik Grama (p. 7.4).

Układ równań (\*) jest szczególnie prosty, gdy zamiast dowolnego układu elementów  $\{x_i\}_1^N$  bierze się tzn. układ ortonormalny (ON).

Wtedy bowiem, szczególnie prosto wyrażają się współczynniki elementu optymalnego oraz błąd aproksymacji.

Def 1. Ciąg elementów  $\{u_n\}_1^N$  lub  $\{u_n\}_1^{\infty}$  przestrzeni Hilberta tworzy układ ON, tzn. że

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{" } i \neq j \end{cases}$$

Niech będzie podprzestrzeń  $\bar{H}$  z bazą  $\{u_n\}_1^N$ . D dowolny element  $h \in \bar{H}$  można przedstawić w postaci

$$h = (y_1 u_1 + \dots + y_N u_N) + e_N, \quad e_N \perp \bar{H}$$

W 1. współczynniki optymalnej kombinacji liniowej elementów ON wyrażają się wzorami Fouriera

$$y_n = (h, u_n) \quad n = 1, \dots, N$$

zaś błąd aproksymacji wynosi

$$\|e_N\|^2 = \|h\|^2 - \sum_1^N |y_n|^2$$

Tutaj tu zwrócić uwagę na następujące własności współczynników 1. błąd

1. współczynniki  $y_n$  są niezależne od innych współczynników
2. błąd maleje ze wzrostem liczby wyrazów

Układ ON można otrzymać z dowolnego układu elementów liniowo niezależnych. Ogólną metodą ortogonalizacji jest metoda Schmidta, będąca uogólnieniem metody rozkładu wektora w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  na składowe wzajemnie prostopadłe. rozdział 4 zostanie poświęcone szczególnej metodzie ortogonalizacji podanej przez J. H. Kautza, przydatna oczywiście tylko w pewnym szczególnym, niemniej ważnym przypadku.

Def 2. Dwa ciągi elementów są równoważne, tzn. że każdy element pierwszego ciągu jest kombinacją liniową elementów drugiego ciągu i odwrotnie.



### Tw 2. (Schmidta)

Jeżeli ciąg  $\{x_n\}_1^m$  lub  $\{x_n\}_1^\infty$  jest liniowo niezależny to ciąg  $\{u_n\}_1^m$  lub  $\{u_n\}_1^\infty$  gdzie

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad i \quad u_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots$$

przy czym

$$y_n = x_n - (x_n, u_1) \cdot u_1 - \dots - (x_n, u_{n-1}) \cdot u_{n-1}$$

jest też liniowo niezależny, i ortonormalny a ponadto obydwa ciągi są równoważne.

Przeliczalnie wymiarowa przestrzeń Hilberta jest przestrzenią z bazą przeliczalną. Z twierdzenia Schmidta wynika, że w takiej przestrzeni istnieje przeliczalna baza ortonormalna.

Bazami ON w odpowiednich przestrzeniach Hilberta są wielomiany Jacobiego, Laguerre'a, Hermite'a. Funkcje trygonometryczne

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

stanowią w odpowiedniej przestrzeni, bazę ON.

### 2.3. Szereg Fouriera.

Na elementy przestrzeni Hilberta H można przenieść pojęcie szeregu liczbowego, jego zbieżności i sumy.

Def 1. Szereg elementów przestrzeni H

$$x_1 + x_2 + \dots$$

jest to ciąg sum częściowych

$$s_0 = 0, \quad s_n = s_{n-1} + x_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Def 2. Szereg elementów przestrzeni H jest zbieżny według normy,  $\| \cdot \|$ , jeżeli ciąg sum częściowych jest zbieżny według normy.



Suma szeregu jest to granica ciągu sum częściowych.

$$x_1 + x_2 + \dots = s \iff \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

Niech będzie podprzestrzeń  $\tilde{H}$  z bazą ON  $\{u_n\}_1^\infty$ . Każda rozkładność tzn. szeregi ortogonalne

$$d_1 u_1 + d_2 u_2 + \dots$$

z dowolnymi współczynnikami  $d_1, d_2, \dots$  ale szczególnie ważne są ortogonalne szeregi Fouriera.

Def 3. Szereg Fouriera przyporządkowany elementowi  $h \in H$  jest to szereg

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots$$

ze współczynnikami

$$y_n = (h, u_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

Związek elementu  $h$  i przyporządkowanego mu szeregu Fouriera, zapisuje się w postaci

$$h \sim y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots \quad (*)$$

Zapis ten oznacza tylko tyle, że współczynniki szeregu są obliczane przy pomocy elementu  $h$ .

Szeregi Fouriera w abstrakcyjnej przestrzeni  $H$  są uogólnieniem dobrze znanych trygonometrycznych szeregów Fouriera. Dla trygonometrycznych szeregów Fouriera, a także dla szeregów Fouriera w przestrzeni abstrakcyjnej, istotne są dwa zagadnienia :

1. czy szereg jest zbieżny ?

2. czy suma szeregu jest równa odpowiedniemu elementowi ?

A więc, czy i kiedy można w zależności (\*) symbol przyporządkowania „ $\sim$ ” zastąpić symbolem równości „ $=$ ” ? Odpowiedź na te pytania dają następujące twierdzenia :

Tw 1. Szereg Fouriera dowolnego elementu  $h \in H$  jest zbieżny według normy, przy tym

$$1. h = (\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \dots) + e$$

$$2. e \perp \tilde{H}$$

$$3. \|e\|^2 = \|h\|^2 - \sum_1^{\infty} |\varphi_n|^2$$

Szereg Fouriera elementu  $h$ , przybliża optymalnie ten element w sensie minimum odległości. Szczególnie ważny jest przypadek, gdy szereg Fouriera przedstawia dokładnie element  $h$ .

Tw 2. Szereg Fouriera elementu  $h$  jest zbieżny według normy do tego elementu

$$h = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \dots$$

gdy jest spełniona równość Parsewala

$$\sum_1^{\infty} |\varphi_n|^2 = \|h\|^2$$

i odwrotnie.

#### 2.4. Supelnosc i zamkniętosc układów elementów.

W punktach poprzednich omówione zostały ortogonalne układy elementów. Własność ortogonalności układów jest bardzo wygodna, przy rozwijaniu elementów przestrzeni  $H$  w szereg nieskończony i przy aproksymacji elementów skończonymi kombinacjami liniowymi. Ale dla dobrej aproksymacji, istotne są pewne inne własności układów elementów: supelnosc i zamkniętosć.

Def 1. Układ elementów  $\{x_n\}_1^{\infty}$  jest supelny, tan. że z warunku

$$(h, x_n) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

wynika warunek  $h = 0$

Def 2. Układ elementów  $\{x_n\}_1^\infty$  jest zmięty, tzn. że każdy element  $h \in H$  można przedstawić w postaci szeregu

$$h = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots$$

Tw 1. Dla układu elementów  $\{x_n\}_1^\infty$  warunki zupełności i zmiętyści są równoważne.

Oczywiście, układy zupełne lub zmięte pozostają takie, także po procesie ortogonalizacji.

Tw 2. Dla ON układu elementów  $\{u_n\}_1^\infty$  równoważne są warunki zupełności, zmiętyści oraz równość Parsewala.

Reasumując, sumy częściowe szeregu Fouriera są zawsze przybliżeniami optymalnymi. W przypadku gdy układ ON jest zupełny, przybliżenie może być dowolnie dokładne - błąd dąży do 0 ze wzrostem liczby wyrazów.

### 3. Funkcyjne przestrzenie Hilberta.

#### 3.1. Funkcje klasy L i L<sup>2</sup>

W zastosowaniach technicznych, wystarczy w sąsiedztwie rozwiązać funkcje całkowite w sensie Riemanna, ewentualnie z pewnymi dodatkowymi założeniami. Ze względu na trudności przy przejściu do granicy pod znakiem całki (granica ciągu funkcji całkowitych w sensie Riemanna może nie być całkowita w sensie Riemanna), istotne jest rozważanie funkcji całkowitych w sensie Lebesgue'a. Rozważa się przy tym funkcje zmienną rzeczywistą lub zespoloną, o wartościach rzeczywistych lub zespolonych, określone na zbiorach o miarze skończonej lub nieskończonej. Klasę takich funkcji oznacza się symbolem L.

Def 1.  $f(x) \in L(\mathbb{C})$  tzn.  $\int_{\mathbb{C}} |f(x)| dx < \infty$

Żąda się także często całkowalności kwadratu modułu funkcji. Klasę takich funkcji oznacza się symbolem  $L^2$ .

Def 2.  $f(z) \in L^2(\mathbb{C})$  tzn.  $\int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{f(z)} |z| < \infty$

### 5.2. Oryginały i transformaty Laplace'a.

W teorii przekształcenia Laplace'a rozważa się funkcje-oryginały  $f(t)$  oraz ich transformaty  $\mathcal{L}[f(t)]$ .

Def 1. Funkcja  $f(t)$  jest oryginałem z odciętą zbiorowością  $x_0$ , tzn. że

1.  $f(t)$  jest funkcją zmienną rzeczywistą  $t \in (-\infty, \infty)$ , o wartościach rzeczywistych lub zespolonych
2.  $f(t) = 0$  dla  $t \in (-\infty, 0)$
3.  $f(t) \cdot \exp(-x_0 t) \in L(0, \infty)$ , gdzie  $x_0$  jest pewną liczbą rzeczywistą

Def 2. Funkcja  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  jest transformacją, tzn. że

1.  $f(t)$  jest oryginałem
2.  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ ,  $\operatorname{Re} s \geq x_0$

W dalszym ciągu będą wykorzystane następujące, dobrze znane własności transformacji.

Tw 1. Transformata  $F(s)$  jest określona w półpłaszczyźnie zamkniętej  $\operatorname{Re} s \geq a$  lub otwartej  $\operatorname{Re} s > a$  (może być także  $a = -\infty$ ) przy tym

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty} F(s) = 0$$

Tw 2. Transformata  $F(s)$  jest funkcją analityczną w półpłaszczyźnie  $\text{Re } s > b > a$ , przy tym jej pochodne można otrzymać przez różniczkowanie pod znakiem całki ten.

$$y^{(n)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [(-t)^n f(t)]$$

Tw 3. (o wartościach granicznych)

Jeżeli 1. istnieją granice  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0_+)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$   
 2.  $s \rightarrow \infty$  tak że  $|\arg s| \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$

to  $\lim_{s \rightarrow \infty} [s^{n+1}P(s) - s^n f(0_+) - \dots - s f^{(n-1)}(0_+)] = f^{(n)}(0_+)$

### 3.3. Przestrzenie $L^2(0, \infty)$ i $L^2(-j\infty, j\infty)$ .

Niech będąc zbiór funkcji całkownych z kwadrantu modułu  $L^2(C)$ , ten. funkcji spełniających warunek

$$\int_C f(z) \cdot \overline{f(z)} |dz| < \infty$$

Zbiór ten jest przestrzenią liniową ze zwykłym dodawaniem funkcji, i mnożeniem funkcji przez liczbę zespoloną, a ponadto można w nim wprowadzić iloczyn skalarny

$$(f, g) = \int_C f(z) \cdot \overline{g(z)} |dz| \quad (*)$$

Tw 1. Zbiór funkcji  $L^2(C)$  z iloczynem skalarnym określonym wzorem (\*) jest przeliczalnie wymiarową przestrzenią Hilberta.

Przestrzeń ta jest funkcyjną realizacją abstrakcyjnej przestrzeni Hilberta. Oznacza się ją tym samym symbolem  $L^2(C)$ .

W szczególności w zgodnieniach technicznych wystarczą rozróżnić przestrzeń unitarną  $(L^2)_0$ , funkcji całkownych z kwadrantu modułu w sensie Riemanna. Jedynie zgodnienie związane z zupełnością układów elementów wymagają rozważania przestrzeni  $L^2$ .

Niech będzie układ elektryczny lub regulacyjny i jego odpowiedź składowa  $h(t)$ . Jeżeli układ jest stabilny, to istnieje wartość ustalona

$$h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$$

a tzw. uchyb przejściowy

$$f(t) = h_{\infty} - h(t)$$

jak można ująć z praktyki, jest elementem przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ .

Analogicznie transformata uchyłu przejściowego

$$F(s) = \int_0^{\infty} [f(t)] e^{-st} dt$$

jest elementem przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$ . Odnosi się to także do charakterystyki impulsowej i jej transformaty.

Niech będzie przestrzeń  $L^2(0, \infty)$  i niech  $f(t), g(t) \in L^2(0, \infty)$ . Wtedy oczywiście  $f(t) \cdot \overline{g(t)} \in L(0, \infty)$ . Jeżeli założymy dodatkowo,

że  $f(t)$  i  $g(t)$  są oryginalami z odciętą zbiciowością  $x_0 = 0$ ,

to dla  $\text{Re } s \geq 0$  istnieją transformaty

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s), \quad \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = G(s), \quad \int_0^{\infty} \overline{g(t)} e^{-st} dt = \overline{G(-\bar{s})}$$

Niech oryginalami i ich transformacjami zachodzi interesująca zależność.

Tw. 2. (Parsewala)

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) \cdot \overline{G(-\bar{s})} ds$$

Zwrażenie Parsewala można zapisać w innej formie, tak aby dodatkowo zaznaczyć jego istotny sens.

Tw. 3. Jeżeli oryginaly  $f(t)$  i  $g(t)$ , z odciętą zbiciowością  $x_0 = 0$ , są elementami przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ , a iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$$

to transformaty  $F(s)$  i  $G(s)$  są elementami przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$  z iloczynem skalarnym

$$(F, G) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) \cdot \overline{G(-\bar{s})} ds$$

przy tym zachodzi równość

$$(F, G) = (F, G)$$

Te 4. Jeżeli oryginalny są ON w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ , to transformaty są ON w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$  i odwrotnie.

#### 1.4. Przestrzeń $L^2(C)$ z wagą.

Niech będzie ustalona funkcja  $w(x)$  (tzw. waga), określona na zbiorze  $C$  i spełniająca warunek

$$w(x) > 0$$

oraz zbiór  $L_w^2(C)$  funkcji określonych na  $C$  i takich, że

$$f(x) \sqrt{w(x)} \in L^2(C)$$

czyli

$$\int_C |f(x) \cdot \overline{f(x)} \cdot w(x)| dx < \infty$$

to 1. Zbiór  $L_w^2(C)$  z iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \int_C f(x) \cdot \overline{g(x)} \cdot w(x) |dx|$$

jest przeliczalnie wymiarową przestrzenią Hilberta.

Przestrzeń  $L_w^2(C)$  stanowi pewne uogólnienie przestrzeni  $L^2(C)$ , (z wagą  $w(x) = 1$ ) nale istotne z matematycznego punktu widzenia, ale bardzo ważne dla zastosowań. Błędy aproksymacji funkcji  $f(x)$  funkcją  $f_n(x)$ , w obu przestrzeniach wyrażają się wzorami

$$\|e\|_1^2 = \int_C |f(x) - f_n(x)|^2 |dx|$$

$$\|e\|_w^2 = \int_C |f(x) - f_n(x)|^2 w(x) |dx|$$

w przestrzeni  $L^2(C)$ , różnic  $f(x) - f_n(x)$  w każdej części zbioru  $C$  ma jednakowy wpływ na błąd aproksymacji. Wagi w przestrzeni  $L_w^2(C)$ , przez odpowiedni dobór wagi  $w(x)$  można zmienić, aby w pewnych częściach zbioru  $C$  a zwiększyć błąd innym a innym.

Niech będzie waga

$$w(t) = e^{-2\alpha t} \quad , \quad \alpha > 0$$

i niech będą funkcje  $f(t)$ ,  $g(t) \in L^2_W(0, \infty)$ . Przy założeniu, że  $f(t)$  i  $g(t)$  są oryginalami z odciętą zbicięnościami  $x_0 = 0$ , istnieją dla  $\text{Re } s \geq \alpha$  transformaty

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot e^{-\alpha t}] = F(s+\alpha) \quad , \quad \mathcal{L}[g(t) \cdot e^{-\alpha t}] = G(s+\alpha) \quad , \quad \mathcal{L}[\overline{g(t)} \cdot e^{-\alpha t}] = \overline{G(-\bar{s}+\alpha)}$$

Dla oryginalów i transformat zachodzą twierdzenia analogiczne do twierdzeń z p.3.3.

Tw 2. (Parsewala uogólnione)

$$\int_0^{\infty} f(t) \overline{g(t)} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s+\alpha) \cdot \overline{G(-\bar{s}+\alpha)} ds$$

Tw 3. Jeżeli oryginaly  $f(t)$  i  $g(t)$ , z odciętą zbicięnościami  $x_0 = 0$ , są elementami przestrzeni  $L^2_{\exp(-2\alpha t)}(0, \infty)$ , z iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} e^{-2\alpha t} dt$$

to transformaty  $F(s)$  i  $G(s)$  są elementami przestrzeni  $[L^2(-j\infty, j\infty)]_{\alpha}$ , z iloczynem skalarnym

$$(F, G)_{\alpha} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s+\alpha) \overline{G(-\bar{s}+\alpha)} ds$$

przy tym CN w jednej przestrzeni jest równoważna CN w drugiej.

Tw 4. Jeżeli oryginaly są CN w przestrzeni  $L^2_{\exp(-2\alpha t)}(0, \infty)$ , to transformaty są CN w przestrzeni  $[L^2(-j\infty, j\infty)]_{\alpha}$ .



## II. ORTOGONALNE WIELOMIANY WYKLADNICZE.

### 7. Konstrukcja ortogonalnych wielomianów wykładniczych.

#### 7.1. Metoda ortogonalizacji W.H. Kautza.

Mieca bazy ciąg funkcji wykładniczych (oryginałów)

$$x_n(t) = e^{s_n t}, \quad t \in (0, \infty), \quad s_1 \neq s_j, \quad \operatorname{Re} s_n < 0 \quad (1)$$

oraz ciąg ich transformat Laplace'a

$$X_n(s) = \frac{1}{s - s_n}, \quad \operatorname{Re} s > \sup \operatorname{Re} s_n \quad (2)$$

Tw 1. Funkcje (1) oraz (2) są liniowo niezależnymi elementami przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i  $L^2(-j\infty, j\infty)$

Dowód: Aneks 7.1.

Z funkcji (1) oraz (2) można otrzymać równoważne linie ciągły ortogonalne  $\{O_n\}$ , przy pomocy ogólnej metody ortogonalizacji Schaudera. W tym przypadku wygodniej jest jednak stosować metodę podaną przez W.H. Kautza [6].

Tw 2. (W.H. Kautza). Ciąg funkcji

$$U_n(s) = A_n \prod_{v=0}^{n-1} v_v(s) u_n^0(s), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

gdzie

$$A_n = \sqrt{-2 \operatorname{Re} s_n}$$

$$u_0^0(s) = 1$$

$$v_v(s) = \frac{s + \bar{s}_v}{s - s_v}, \quad v = 1, 2, \dots, n-1$$

$$u_n^0(s) = \frac{1}{s - s_n}$$

jest ON w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$  i równoważny ciągowi (2).

Dowód: Aneks 1.2.

Aby z dziedziny  $s$  przejść do dziedziny  $t$  należy zastosować odwrotną transformację Laplace'a  $\mathcal{L}^{-1}$ .

Te 3. Ciąg funkcji

$$u_n(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_n(s)] \quad (4)$$

jest ON w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i równoważny ciągowi (1).

Dowód wynika bezpośrednio z tw. 4 p.3.3.

Funkcje (3) można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych

$$U_n(s) = \sum_{\nu=1}^n \frac{c_{n\nu}}{s - s_\nu} \quad (5)$$

a funkcje (4) w postaci wielomianów wykładniczych (czyli kombinacji liniowych funkcji wykładniczych)

$$u_n(t) = \sum_{\nu=1}^n c_{n\nu} e^{s_\nu t} \quad (6)$$

Te 4. Współczynniki  $c_{n\nu}$  wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} c_{n1} &= A_1 \\ c_{n\nu} &= A_n \frac{\prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \nu}}^n (s_\nu + s_\alpha)}{\prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \nu}}^n (s_\nu - s_\alpha)} \quad \begin{array}{l} n = 2, 3, \dots \\ \nu = 1, \dots, n \end{array} \end{aligned} \quad (7)$$

Dowód: Aneks 1.3.

4.2. Ortogonalne wielomiany wykładniczo-trigonometryczne.

Ortogonalne wielomiany wykładnicze omówione w p.4.1. są funkcjami rzeczywistymi tylko w przypadku biegunów rzeczywistych. Jeżeli natomiast, występują bieguny zespolone nawet parami sprzężone, to funkcje te są zespolone. Jest to niezgodnie, gdy chodzi o zastosowania w elektrotechnice, powolny nakładem. Biorąc oddzielnie części rzeczywiste i urojone, otrzymuje się wprawdzie funkcje rzeczywiste ale niestety nie ortogonalne. Niemniej, wprowadzając do procedury ortogonalizacyjnej W.H. Kautza pewną modyfikację, można otrzymać funkcje  $Q_n$  i rzeczywiste. Oczywiście ich transformaty będą miłą współzmienniki rzeczywiste.

Niech będzie ciąg liczb  $\{s_{in}\}$  taki, że

$$s_{in} = \begin{cases} -\alpha_n & \text{gdzie } \alpha_n > 0, \beta_n = 0 \\ -\alpha_n \pm j\beta_n & \text{" } \alpha_n > 0, \beta_n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

w przypadku  $\beta_n = 0$  symbol  $s_{in}$  oznacza jedną liczbę  $s_{in}$ , zaś w przypadku  $\beta_n > 0$  - parę liczb zespolonych sprzężonych uporządkowaną w kolejności  $s_{+n}, s_{-n}$ .

Liczkom tym odpowiada ciąg funkcji wykładniczych (oryginałów)

$$x_{in}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha_n t} & \text{gdzie } \beta_n = 0 \\ e^{-\alpha_n t} \pm j\beta_n t & \text{" } \beta_n > 0 \end{cases} \quad (2)$$

oraz ciąg ich transformat Laplace'a

$$X_{in}(s) = \begin{cases} \frac{1}{s + \alpha_n} & \text{gdzie } \beta_n = 0 \\ \frac{1}{s + \alpha_n \pm j\beta_n} & \text{" } \beta_n > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Liczby  $s_{zn}$  są biegunami transformacji  $X_{zn}(s)$ . Przy pomocy tych biegunów można skonstruować ciąg funkcji OK  $U_{zn}(s)$ , o współczynnikach rzeczywistych, przy czym symbol  $U_{zn}(s)$  oznacza albo jedną funkcję  $U_n(s)$  albo parę funkcji  $U_{+n}(s)$  i  $U_{-n}(s)$ .

Funkcje  $U_{zn}(s)$  konstruuje się jako kombinacje liniowe funkcji L.H. Kautza (p.4.1). Oczywiście konstrukcja ta nie jest jednoczesna - współczynniki kombinacji liniowej zależą od liczb rzeczywistych  $\xi_{zn}$  w zakresie dowolnych, spełniających tylko pewne warunki dodatkowe.

Tw 1. Ciąg funkcji o współczynnikach rzeczywistych

$$U_{zn}(s) = A_n K_{zn} \cdot \prod_{v=0}^{n-1} U_v(s) \cdot v_{zn}^0(s) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

gdzie

$$A_n = \sqrt{-2 \operatorname{Re} s_n}$$

$$K_{zn} = \begin{cases} 1 & \text{gdzi } \beta_n = 0 \\ \frac{\sqrt{2} |\xi_n|}{\sqrt{|\xi_n|^2 + \xi_{zn}^2}} & \text{" } \beta_n > 0 \end{cases}$$

$$U_v(s) = \begin{cases} 1 & \text{gdzi } v = 0 \\ \frac{s + \beta_v}{s - \beta_v} & \text{" } \beta_v = 0, v = 1, \dots, n-1 \\ \frac{(s + \beta_v)(n + \bar{\beta}_v)}{(s - \beta_v)(s - \bar{\beta}_v)} & \text{" } \beta_v > 0, v = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$v_{zn}^0(s) = \begin{cases} \frac{1}{s - s_n} & \text{gdzi } \beta_n = 0 \\ \frac{s - \xi_{zn}}{(s - s_{1n})(n - \bar{s}_{1n})} & \text{" } \beta_n > 0 \end{cases}$$

$$\xi_{2n} - \xi_{2n} = - |u_{2n}|^2, \quad \xi_{2n}, \xi_{2n} \in (-\infty, +\infty)$$

jest ON w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$  i równoważny ciągowi (3).

Dowód indukcyjny: Aneks 1.4.

Tw 2. Ciąg funkcji

$$u_{2n}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ U_{2n}(s) \right] \quad (5)$$

jest ON w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i równoważny ciągowi (2).

Dowód wynika bezpośrednio z tw 4 p.3.3.

Funkcje (4) można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych o współczynnikach rzeczywistych

$$U_{2n}(s) = \sum_{v=1}^n \frac{a_{2nv}(s+d_v) + b_{2nv}\beta_v}{(s+d_v)^2 + \beta_v^2} \quad (6)$$

(oczywiście w przypadku  $\beta_v = 0$  odpowiedni składnik ma postać  $\frac{c_{2nv}}{s+d_v}$ )

Sumę (5) można przedstawić w postaci wielomianów wielomianowo-trigonometrycznych o współczynnikach rzeczywistych

$$u_{2n}(t) = \sum_{v=1}^n e^{-d_v t} \cdot \left[ a_{2nv} \cos \beta_v t + b_{2nv} \sin \beta_v t \right] \quad (7)$$

lub

$$u_{2n}(t) = \sum_{v=1}^n e^{-d_v t} \cdot r_{2nv} \sin(\beta_v t + \gamma_{2nv}) \quad (8)$$

(oczywiście w przypadku  $\beta_v = 0$  odpowiedni składnik ma postać  $e^{-d_v t} \cdot c_{2nv}$ ).

Tw 3. Współczynniki  $a_{2nv}, b_{2nv}, r_{2nv}, \gamma_{2nv}$  wyrażają się wzorami

1. Gdy  $\beta_v = 0$  to

$$c_{2nv} = v_{2nv} \quad (9)$$

gdy  $\beta > 0$  to

$$a_{z_{nv}} = \frac{\text{Im } V_{z_{nv}}}{\beta} \quad b_{z_{nv}} = \frac{\text{Re } V_{z_{nv}}}{\beta} \quad (10)$$

$$r_{z_{nv}} = \frac{|V_{z_{nv}}|}{\beta} \quad \gamma_{z_{nv}} = \text{arg } V_{z_{nv}}. \quad (11)$$

gdzie

$$V_{z_{nv}} = \begin{cases} A_1 & \text{gdy } n = 1, \beta_1 = 0 \\ A_1 K_{z_1} (s_1 - \beta_1) & \text{" } n = 1, \beta_1 > 0 \\ A_n K_{z_n} \frac{\prod_{x=1}^{n-1} L_x(s_0) \cdot L_{z_n}^0(s_0)}{\prod_{x=1}^n K_x(s_0)} & \text{" } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

oraz

$$L_x(s) = \begin{cases} s + \beta_x & \text{gdy } \beta_x = 0 \\ (s + \beta_x) (s + \bar{\beta}_x) & \text{" } \beta_x > 0 \end{cases}$$

$$L_{z_n}^0(s) = \begin{cases} 1 & \text{" } \beta_x = 0 \\ s - \beta_{z_n} & \text{" } \beta_x > 0 \end{cases}$$

$$K_x(s) = \begin{cases} s - \beta_x & \text{" } \beta_x = 0 \\ (s - \beta_x) (s - \bar{\beta}_x) & \text{" } \beta_x > 0 \end{cases}$$

Dowód: Annex 1.5.

Wodyfikacja metody ortogonalizacyjnej L.M. Lutza, przy pomocy geometrycznej serii  $\zeta_{z_n}$ , pochodzi od D.C. Rossa [13], który okazał zresztą jej zastosowanie tylko na przykładzie.

Warto tu zwrócić uwagę na postać szczególnie prostą, którą ma, a mianowicie

$$Z_{+n} = -|a_n| \quad , \quad Z_{-n} = |a_n|$$

Wtedy bowiem  $K_{\pm n} = 1$ . Otrzymuje się w ten sposób funkcje CK :

$$U_{\pm n}^K(s) = A_n \prod_{\nu=0}^{n-1} w_{\nu}^K(s) = U_{\pm n}^{CK}(s) \quad (12)$$

gdzie

$$w_{\pm n}^{CK}(s) = \begin{cases} \frac{1}{s - \bar{E}_n} & \text{gdzi } \beta_n = 0 \\ \frac{s \pm |a_n|}{(s - a_n)(s - \bar{E}_n)} & \text{" } \beta_n > 0 \end{cases}$$

Teorenie następnie w przypadku  $\beta_n > 0$  kombinacje liniowe

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ U_{+n}^K(s) \pm U_{-n}^K(s) \right]$$

otrzymuje się funkcje CH :

$$U_{\pm n}^H(s) = A_n \prod_{\nu=0}^{n-1} w_{\nu}^H(s) = U_{\pm n}^{CH}(s) \quad (13)$$

gdzie

$$w_{\pm n}^{CH}(s) = \frac{1}{s - a_n} \quad \text{gdzi } \beta_n = 0$$

$$w_{+n}^{CH}(s) = \frac{\sqrt{2} s}{(s - a_n)(s - \bar{E}_n)} \quad \text{" } \beta_n > 0$$

$$w_{-n}^{CH}(s) = \frac{\sqrt{2} |a_n|}{(s - a_n)(s - \bar{E}_n)}$$

Funkcje  $U_{zn}^K(s)$  oraz  $U_{zn}^H(s)$ , w szczególności przy, gdy są wszystkie bieguny są zespolone parami sprzężone, rozważali L.S.Kautz [8] i H.W. Muggins [Representation and analysis of signals Pt.I, 1957, Report No. AFOSR - TR - 57 - 357, The Johns Hopkins University].

#### 4.3. Ortogonalizacja z wagą wykładniczą

Niech będzie ciąg biegunów

$$P_n = s_n + \sigma, \quad \sigma > 0, \quad s_i \neq s_j, \quad \operatorname{Re} s_n < 0 \quad (1)$$

i odpowiadający im ciąg funkcji wykładniczych (oryginałów)

$$x_n(t) = e^{-P_n t} \quad (2)$$

oraz ciąg ich transformacji Laplace'a

$$X_n(p) = \frac{1}{p - P_n} \quad \operatorname{Re} p \geq \sup \operatorname{Re} P_n \quad (3)$$

Funkcje (2) i (3) są liniowo niezależnymi elementami przestrzeni  $L_{\exp(-\lambda t)}^2(0, \infty)$  i  $[L^2(-j\infty, j\infty)]_{\lambda}$ . Analogicznie jak w p.4.1 można otrzymać równoważne im ciągi CN  $u_n^\sigma(t)$  i ich transformaty  $U_n^\sigma(p)$ . Funkcje te wyrażają się prosto przez funkcje CN  $u_n(t)$  i  $U_n(s)$  zbudowane dla biegunów  $s_n$ .

Tw 1. Ciąg funkcji

$$u_n^\sigma(t) = u_n(t) \cdot e^{-\sigma t} \quad (4)$$

jest CN w przestrzeni  $L_{\exp(-\lambda t)}^2(0, \infty)$  i równoważny ciągowi (2).

Dowód wynika bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego w przestrzeni  $L_{\exp(-\lambda t)}^2(0, \infty)$  i CN funkcji  $u_n(t)$ .

Tw 2. Ciąg funkcji

$$U_n^\sigma(p) = U_n(p - \sigma) \quad \operatorname{Re} p \geq \sup \operatorname{Re} P_n \quad (5)$$



jest CM w przestrzeni  $[L^2(-j\infty, j\infty)]_c$  i równowalicy ciągłości (5).

Dowód wynika bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego w przestrzeni  $[L^2(-j\infty, j\infty)]_c$  i CM funkcji  $U_n(s)$ .

Ortogonalizacja z wagą wykładniczą  $e^{-\delta t}$ , sprowadza się do przesunięcia układu w płaszczyźnie zespolonej, w kierunku osi rzeczywistej o odcinek  $\delta$  w prawo. Dzięki temu zwiększa się zakres stabilności o  $\delta$  i zarazem odpowiednio zmniejsza się stopień oscylacyjności.

Wszystkie wzory p.4.1 i 4.2 zachowują swoją ważność także przy ortogonalizacji z wagą wykładniczą, należy tylko wszędzie dokonać zmiany zmiennych

$$s = p - \delta \quad \text{i} \quad s_n = p_n - \delta \quad (6)$$

Odpowiednie wzory w przypadkach szczególnych można znaleźć w monografii [22].

#### 4.5. Ortogonalizacja z zerowymi warunkami początkowymi

Niech będzie ciąg biegunów  $s_n$  spełniający warunki

$$s_i \neq s_j, \quad \text{Re } s_n < 0$$

B. Liu [15] i J.M. Mendel [16] badali ciąg transformacji  $V_n^k(s)$  konstruowany przy pomocy tych biegunów i taki, że ich oryginaly  $V_n^k(t)$  wraz z pochodnymi aż do rzędu  $k$ , przyjmują zerowe wartości początkowe.

Fig. 1. Transformaty

$$V_n^k(s) = A_n^k \cdot \prod_{v=0}^k v_p(s) \cdot \prod_{v=0}^{n-k} w_v(s) \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

ciąg

$$V_0(s) = 1$$

$$V_\nu(s) = \frac{s + \beta_\nu}{s - \alpha_\nu} \quad \nu = 1, \dots, n-1$$

$$V_\nu^0(s) = \frac{1}{s - \alpha_\nu} \quad \nu = n, \dots, n+k-1$$

mają oryginalny  $v_n^k(t)$  spełniające zerowe warunki początkowe

$$\left[ v_n^k(t) \right]^{(x)} = 0 \quad x = 0, \dots, k$$

Dowód: Aneks 1.6

Dla ciągu transformast  $V_n^k(s)$  zachodzi relacja asymptotycznej równości

$$V_n^k(s) \sim s^{-(k+2)} \quad \text{przy } s \rightarrow \infty \quad (4)$$

analogicznie dla ciągu transformast  $U_n(s)$  (p.4.1) zachodzi

$$U_n(s) \sim s^{-1} \quad \text{przy } s \rightarrow \infty \quad (5)$$

Ciąg  $V_n^k(s)$  jest więc pewnym uogólnieniem ciągu  $U_n(s)$  i zachodzi bowiem zależność

$$V_n^k(s) = U_n(s) \quad (6)$$

Kwestyą nie jest to ciąg OG, a tylko częściowo OG. Znaczy to, że każdy wyraz ciągu jest OG do wszystkich innych wyrazów, z wyjątkiem skończonej ich liczby.

Prz 2. Funkcje  $V_n^k(s)$  i  $V_m^k(s)$  o ułamkach  $n$  i  $m$  spełniających nierówność

$$|n - m| \geq k + 2 \quad (7)$$

są OG.

Definicja: Definicja 1.7

Dla każdej ciągu funkcji  $V_n^k(s)$  istnieje skończona liczba funkcji  $V_n^k(s)$  o współczynnikach  $n$  spełniających nierówność

$$|n - m| \leq k + 1 \quad (v)$$

które nie są CG do funkcji  $V_n^k(s)$ .

Dla otrzymania wszystkich funkcji CG wystarczy zastosować metodę Schnida.

Warto tu jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że z ciągu funkcji

$$\left\{ V_n^k(s) \right\} \quad k = 0, 1, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

można wybrać różne podciągi CG :

$$\left\{ V_{n+v(k+2)}^k(s) \right\}_{v=0}^{\infty} \quad k = 0, 1, \dots \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Jako ilustrację wymienionych własności podano tabelki iloczynów skalarnych  $(V_n^k, V_m^k)$  w przypadku  $k = 0, 1$ .

$k=0$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0
2	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0
3	0	+	+	+	0	0	0	0	0	0
4	0	0	+	+	+	0	0	0	0	0
5	0	0	0	+	+	+	0	0	0	0
6	0	0	0	0	+	+	+	0	0	0
7	0	0	0	0	0	+	+	+	0	0
8	0	0	0	0	0	0	+	+	+	0
9	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+
10	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+

$k=1$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0
2	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0
3	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0
4	0	+	+	+	+	+	0	0	0	0
5	0	0	+	+	+	+	+	0	0	0
6	0	0	0	+	+	+	+	+	0	0
7	0	0	0	0	+	+	+	+	+	0
8	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+
9	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+
10	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+

Bezpośrednio z tabelki można wybrać podciągł :

$$v_1^0, v_3^0, v_5^0, \dots \text{ lub } v_2^0, v_4^0, v_6^0, \dots$$

oraz

$$v_1^1, v_4^1, v_7^1, \dots \text{ lub } v_2^1, v_5^1, v_8^1, \dots \text{ lub } v_3^1, v_6^1, v_9^1, \dots$$

Oryginały tych transformacji są także OG i spełniają zerowe warunki początkowe.

W zastosowaniach technicznych istotne może być zjawisko, aby odpowiedź czasowo układu miała z góry zadany stan początkowy : wartości charakterystyki czasowej i jej kolejnych pochodnych dla  $t = 0$ . Rozważyć tu trzeba dwa przypadki : zerowych i niezerowych warunków początkowych.

I. Niech będzie zadany zerowy stan początkowy charakterystyki  $f(t)$  :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = 0$$

Wtedy dla przybliżenia funkcji  $f(t)$  można użyć funkcji  $v_{\pm}^k(t)$  OG i spełniających zerowe warunki początkowe. Otrzymuje się wtedy funkcję przybliżającą w postaci

$$f_{\pm}(t) = \varphi_1 \cdot v_1^k(t) + \dots + \varphi_N \cdot v_N^k(t) \quad (9)$$

także spełniającą zerowe warunki początkowe. Współczynniki  $\varphi_1 \dots \varphi_N$  są oznaczane współczynnikami Fouriera.

II. Niech będzie zadany niezerowy stan początkowy charakterystyki  $x(t)$  :

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(k)}(0) = x_k$$

Przyodek ten sprowadza się do przypadku poprzedniego. Tworzy się nieliniowa funkcja pomocnicza

$$f(t) = x(t) - (a_1 \cdot e^{s_1 t} + \dots + a_k \cdot e^{s_k t}) \quad (10)$$

tak aby spełniała zerowe warunki początkowe. Wykładniki  $s_1 \dots s_k$

$s_i$  tj. sąsiadnymi wykładnikami przy pomocy których stado... do są funkcje  $v_{\alpha}^k(s)$ . Dla znalezienia współczynników  $d_1 \dots d_k$ , należy  $k$ -krotnie zróżniczkować funkcję (10), a następnie przyjąć  $t = 0$ . Otrzymuje się wtedy układ równań

$$\begin{aligned} 1 \cdot d_1 + \dots + 1 \cdot d_k &= x_0 \\ s_1 \cdot d_1 + \dots + s_k \cdot d_k &= x_1 \\ \dots & \dots \\ s_1^{k-1} \cdot d_1 + \dots + s_k^{k-1} \cdot d_k &= x_{k-1} \\ s_1^k \cdot d_1 + \dots + s_k^k \cdot d_k &= x_k \end{aligned} \quad (11)$$

Wyznacznik tego układu jest wyznacznikiem Vandermonde'a

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ s_1 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1^{k-1} & \dots & s_k^{k-1} \\ s_1^k & \dots & s_k^k \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (s_i - s_j) \quad (12)$$

Z założenia  $s_i \neq s_j$ , wobec tego wyznacznik (12) jest różny od zera i układ równań (11) ma jedno rozwiązanie. Po obliczeniu współczynników  $d_1 \dots d_k$  można znaleźć funkcję  $f_2(t)$  o następującej postaci

$$f_2(t) = \sum_{i=1}^k d_i e^{s_i t}$$

funkcję  $x_2(t)$  aproksymującą funkcję  $x(t)$ .

#### 4.5. Orogonalizacja w wykładnikach wielokrotnymi.

Niech będzie ciąg liczb

$$s_1, s_2, \dots, s_k \quad s_i \neq s_j \quad \text{Je } s_n < 0$$

$n$ -krotnościami

$$r_1, r_2, \dots \quad (r_i - \text{liczby naturalne})$$

Liczbom tym odpowiada ciąg funkcji (oryginałów)

$$\begin{aligned} e^{s_1 t}, t e^{s_1 t}, \dots, t^{r_1-1} e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t}, t e^{s_2 t}, \dots, t^{r_2-1} e^{s_2 t} \\ \dots \end{aligned} \quad (1)$$

oraz ciąg ich transformat Laplace'a

$$\frac{1}{s-s_1}, \frac{1}{(s-s_1)^2}, \dots, \frac{(n_1-1)!}{(s-s_1)^{n_1}}$$

$$\frac{1}{s-s_2}, \frac{1}{(s-s_2)^2}, \dots, \frac{(n_2-1)!}{(s-s_2)^{n_2}} \quad (2)$$

.....

Tw 1. Funkcje (1) oraz (2) są liniowo niezależnymi elementami przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i  $L^2(-j\infty, j\infty)$

Dowód : Zobacz 1.8

Z funkcji (1) oraz (2) można otrzymać równoważne im ciągi ON, stosując metodę ortogonalizacji S.H. Krutza.

Tw 2. (A. Crenonesi) . Ciąg funkcji

$$V_{n_1+1} \dots + n_{n-1} + \mu (s) = A_n \cdot \prod_{v=1}^{n-1} v_v (s) \cdot L_n^{\mu-1}(s) \quad (3)$$

gdzie

$$A_n = \sqrt{-2 \operatorname{Re} s_n}$$

$$V_0(s) = 1$$

$$v_v(s) = \left( \frac{s + \bar{s}_v}{s - s_v} \right)^{n_v} \quad v = 1, \dots, n-1$$

$$L_n^{\mu-1}(s) = \left( \frac{s + \bar{s}_n}{s - s_n} \right)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{s - s_n} \quad \mu = 1, \dots, n_n$$

Jest ON w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$  i równoważny ciągowi (2).

Dowód analogiczny jak w tw 2. p.4.1.

Tw 3. Ciąg funkcji

$$v_{n_1+\dots+n_{n-1}+\mu}(t) = \xi^{-1} \left[ v_{n_1+\dots+n_{n-1}+\mu}(z) \right] \quad (4)$$

jest ON w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i równoważny ciągowi (1).

Dowód wynika wprost z tw 4. p.3.3.

Funkcje (3) i (4) rozstrzał A.Crononesi [9]. Funkcje te są ogólniejsze niż funkcje badane przez W.H.Kautza. Uogólnienie A. Crononesiego idzie w innym kierunku niż ortogonalizacja z wagą wykładniczą (p.4.3), czy ortogonalizacja z zerowymi warunkami początkowymi (p.4.4). Zresztą w tym przypadku także, możliwe jest ortogonalizacja i z wagą wykładniczą, i z zerowymi warunkami początkowymi. Wydaje się jednak, że tak rozbudowany aparat byłby zbyt skomplikowany i przynajmniej w zagadnieniach identyfikacji mało przydatny.

Trzeba tu jeszcze wspomnieć o funkcjach Laguerre'a, które są granicznymi przypadkami zarówno ortogonalnych wielomianów wykładniczych badanych przez W.H.Kautza jak i ortogonalnych wielomianów wykładniczych rozważanych przez A. Crononesiego, gdy wszystkie bieguny dążą do  $\infty$ .

Funkcje Laguerre'a już w roku 1952 stosował Y.S.Ito w zagadnieniach symetryzacji obsadów. Od tego czasu znalazły one szerokie zastosowanie w elektrotechnice. I one też posłużyły Kautzowi za punkt wyjścia do jego procesu ortogonalizacji.

O ile funkcje ortogonalne odpowiadające ciągom biegunów wielokrotnych wydają się być zbyt skomplikowane, o tyle funkcje Laguerre'a odpowiadające jednemu biegunowi wielokrotnemu są zbyt uproszczone.

Punkcje badane przez W.H. Kautza zw., stanowią jakby złoty środek. Niesłusznie wydaje się celowe stosowanie analogonów funkcji Laguerre'a z zerowymi warunkami początkowymi.

## 5. Zupełność ciągu ortogonalnych wielomianów wykładniczych.

### 5.1. Zupełność ciągu ortogonalistów i transformat.

W zastosowaniach teorii aproksymacji różni się różne układy elementów. Zwraca się przy tym uwagę na dwie szczególne cechy układów. Ortogonalność (p.2.1) - ze względu na wygodę obliczeń, oraz zupełność (p.2.4) - ze względu na możliwość aproksymacji dowolnie bliskiej, w sensie odległości w odpowiedniej przestrzeni.

Konstrukcja pewnych układów OB została omówiona w rozdziale 4. W rozdziale niniejszym zostaną omówione warunki gwarantujące zupełność tych układów.

Przed wszystkim, należy zwrócić uwagę na przechodność zupełności układu, przy pewnych jego transformacjach.

Tw 1. (R. Paley - M. Wiener [17])

Jeżeli 1.  $f_n(x) \in L^2(a,b)$  z normą  $\|f\|_1$ ,

2.  $g_n(y) \in L^2(c,d)$  "  $\|g\|_2$

3.  $T[f_n(x)] = g_n(y)$  gdzie  $T$  jest transformacją liniową

4.  $\|f_n\|_1 = \|g_n\|_2$

to ciągi  $\{f_n(x)\}_1^\infty$  i  $\{g_n(y)\}_1^\infty$  są jednocześnie zupełne lub niezupełne.

W szczególności transformacja  $T$  może być transformacją Laplace'a.



Ln 2. Jeżeli ciąg oryginalów  $\{x_n(t)\}_1^\infty$  jest zupełny w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  to ciąg transformant  $\{X_n(s)\}_1^\infty$  jest zupełny w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$  i odwrotnie.

5.2. Zupełność ciągu funkcji wykładniczych z wykładnikami pojedynczymi.

Niech będzie ciąg funkcji wykładniczych (oryginałów)

$$x_n(t) = e^{s_n t} \quad t \in (0, \infty) \quad s_i \neq s_j \quad \operatorname{Re} s_n < 0 \quad (1)$$

Warunek konieczny i wystarczający (WK) zupełności tego ciągu w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  podał K.N. Huggins [10]

Tw 1. WK zupełności ciągu oryginalów  $\{e^{s_n t}\}_1^\infty$  w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  jest warunek następujący

$$\sum_1^\infty \frac{-\operatorname{Re} s_n}{1 + |s_n + \frac{1}{2}|^2} = \infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Re} s_n < 0 \quad (2)$$

Dowód znajduje się w pracy P.R. Clementa [14]. W dowodzie wykorzystuje się WK O. Szánza [18], dotyczący zupełności ciągu  $\{x_n^{(p)}\}_1^\infty$  w przestrzeni  $L^2(0, 1)$ , oraz tw. Paley'a - Wienera (p.5.4).

Ln 2. WK zupełności ciągu transformant  $\left\{\frac{1}{s-s_n}\right\}_1^\infty$  w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$  jest warunek (2).

Ln 3. WK zupełności ciągów OR  $\{u_n(t)\}_1^\infty$  i  $\{U_n(s)\}_1^\infty$  (p.4.4) w odpowiednich przestrzeniach jest warunek (2).

Wn 4. Wzr zupełności ciągu CG  $\{u_n^\alpha(t)\}_1^\infty$  i  $\{u_n^\alpha(p)\}_1^\infty$  (p.4.3) w odpowiednich przestrzeniach jest warunkiem następującej

$$\sum_1^\infty \frac{-\operatorname{Re}(p_n - \alpha)}{1 + \left| p_n - \alpha + \frac{1}{2} \right|^2} = \infty \quad \operatorname{Re} p_n < \alpha \quad (3)$$

Dowód wynika z warunku (2) i zależności (5) (p.4.3).

Wymaga jeszcze omówienia zupełności ciągu wielomianów wykładniczych z zerowymi warunkami początkowymi (p.4.4).

Tw 5. Jeżeli ciąg funkcji  $\{e^{a_n t}\}_1^\infty$  jest zupełny w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ , to ciąg funkcji  $\{v_n^k(t)\}_{n=1}^\infty$ , spełniający zerołe warunki początkowe, jest także zupełny w tej przestrzeni.

Dowód indukcyjny znajduje się w pracy B. Liu [15]

Wynika stąd oczywiście, że podciągi CG (p.4.4)

$$\left\{ v_{n+\nu}^k(t) \right\}_{\nu=0}^\infty \quad k = 0, 1, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

wybrane z ciągu  $\{v_n^k(t)\}$  nie stanowią układów zupełnych.

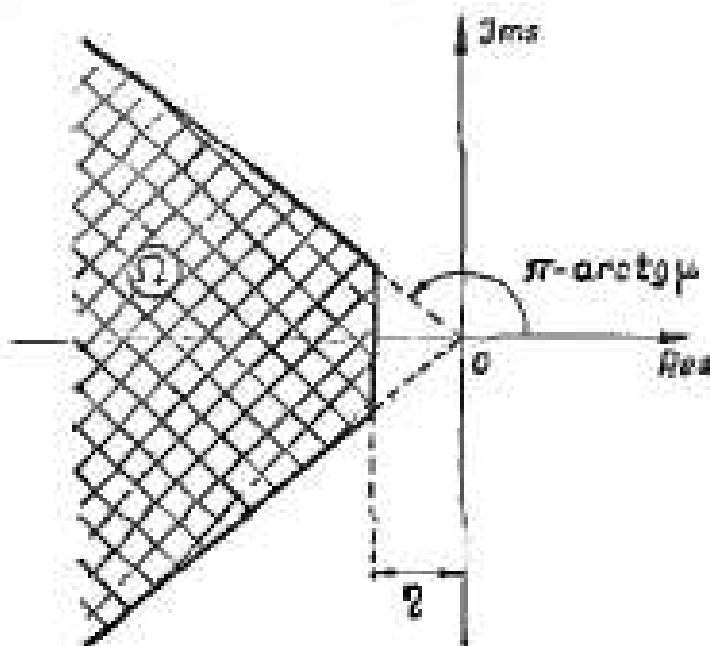
### 5.3. Warunki wystarczające zupełności.

Ważnym warunkiem zupełności ciągu wielomianów wykładniczych, omówionym w p.5.2, warto wyprowadzić także pewne warunki wystarczające, ułatwiające wybór ciągów zupełnych.

Bierzmy do planowania  $\mu$  obszar domknięty  $\tilde{D}$

(rys. 5.1)

$$\operatorname{Re} s < -\eta \quad \cdot \quad \left| \frac{\operatorname{Im} s}{\operatorname{Re} s} \right| < \mu \quad (1)$$



Rys. 8.1

Tw 1. Jeżeli

1.  $s_n \in \bar{\Omega}$

2.  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{-\operatorname{Re} s_n} = \infty$

to ciąg funkcji  $\{e^{s_n t}\}_1^{\infty}$  jest zupełny w  $L^2(0, \infty)$

Dowód. Aneks 1.9.

Tw 2. Jeżeli

1.  $s_n \in \bar{\Omega}$

2.  $-\operatorname{Re} s_n \leq M n^k$ ,  $k < 1$

to ciąg funkcji  $\{e^{s_n t}\}_1^{\infty}$  jest zupełny w  $L^2(0, \infty)$

W szczególności warunki te są spełnione, gdy ciąg  $\{s_n\}$  jest ograniczony lub dąży do nieskończoności tak jednak, że ciąg

$\{-\operatorname{Re} s_n\}$  jest co najwyżej tak "rzadki" jak ciąg arytmetyczny  $\{n \cdot n\}$ .

Ograniczenie się do obszaru  $\bar{\Omega}$  zapewni odpowiedni stopień stabilności i odpowiednią oscylacyjność przebiegów opisanych wielomianami wykładniczymi. Niemniej warto rozpatryć jeden przypadek, gdy ciąg  $\{s_n\}$  nie należy do obszaru  $\bar{\Omega}$ .

Tw 3. Jeżeli

$$1. \operatorname{Re} s_n = \text{const} < 0 \quad 2. \int_1^{\infty} \frac{1}{(\operatorname{Im} s_n)^2} = \text{co}$$

to ciąg funkcji  $\left\{ e^{s_n t} \right\}_t^{\infty}$  jest zupełny w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ .

Dowód. Aneks 1.10.

Tw 4. Jeżeli

$$1. \operatorname{Re} s_n = \text{const} < 0 \quad 2. |\operatorname{Im} s_n| < n^k, \quad k \leq \frac{1}{2}$$

to ciąg funkcji  $\left\{ e^{s_n t} \right\}_t^{\infty}$  jest zupełny w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$

szczególności warunki te są spełnione gdy ciąg  $\{s_n\}$  jest ograniczony lub dąży do nieskończoności po prostej pionowej, tak jednak, że ciąg  $\{|\operatorname{Im} s_n|\}$  jest co najwyżej tak "rzadki" jak ciąg pierwiastków kwadratowych  $\{n \cdot \sqrt{n}\}$ .

#### 5.4. Europejski ciąg funkcji wykładniczych z wykładnikami wielokrotnymi.

Niech będzie ciąg biegunów

$$s_1, s_2, \dots \quad s_1 \neq s_j \quad \operatorname{Re} s_n < 0$$

z krotnościami

$$n_1, n_2, \dots \quad (n_j - \text{liczby naturalne})$$

oraz zbudowane przez A. Crumera ciąg  $W$  (p.4.5).

Tw 4. LK. zupełności ciągów

$$\left\{ v_{n_1 + \dots + n_{l-1} + \mu}(t) \right\} \quad \text{w przestrzeni } L^2(0, \infty)$$
 oraz
 
$$\left\{ v_{n_1 + \dots + n_{l-1} + \mu}(s) \right\} \quad \text{" } L^2(-j\infty, j\infty)$$
 jest warunkiem wystarczającym

$$\sum_1^{\infty} \frac{n_n \cdot (-\operatorname{Re} s_n)}{1 + \left| s_n + \frac{1}{2} \right|^2} = \infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Re} s_n < 0$$

Dowód. Lemka 1.11

analogiczny sposób można rozpatrywać funkcje zbudowane przy pomocy jednego biegunu  $s_1$  o dowolnej krotności, tzn. funkcje Laguerre'a. Dowód zupełności ciągu funkcji Laguerre'a można przeprowadzić podobnie.

## 6. Szeregi ortogonalnych wielomianów wykładniczych.

### 6.1. Zbieżność według normy przestrzeni $L^2$ .

Niech będzie CN ciąg funkcji (oryginałów)  $\{u_n(t)\}$ , zupełny w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ . Każdej funkcji  $f(t) \in L^2(0, \infty)$  można przyporządkować szereg Fouriera. Zupełność przestrzeni i zupełność ciągu gwarantują zbieżność szeregu do funkcji  $f(t)$ , według normy przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ . Analogiczne uwagi odnoszą się do transformant w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$ .

#### **T.1. (o zbieżności szeregu oryginałów)**

Jeżeli  $f$ , oryginał  $f(t)$  jest elementem przestrzeni  $L^2(0, \infty)$

2. CI ciąg oryginalów  $\{u_n(t)\}$  jest zupełny w  $L^2(0, \infty)$

to: 1.  $\|f(t) - (\psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t) + \dots)\| = 0$

2. współczynniki rozwinięcia  $\psi_n = (f, u_n)$  są jednocześnie wyznaczone przez oryginal

3. 2. (o zbliżności szeregu transformacji)

Jeżeli  $F(s)$  i  $U_n(s)$  są transformacjami Laplace'a oryginalów z twierdzenia 1 to

$$\|F(s) - (\psi_1 U_1(s) + \psi_2 U_2(s) + \dots)\| = 0$$

W szczególności odnosi się to do ciągów CN wielomianów wykładniczych i ich transformacji rozłożonych w rozkładach 4. i 5.

Aproxymacje funkcji  $f(t)$  są częściami szeregu

$$f(t) \approx \psi_1 u_1(t) + \dots + \psi_N u_N(t)$$

obierzona jest błąd  $e(t)$  spełniającym warunek

$$\|e\|^2 = \|f\|^2 - \sum_1^N |\psi_n|^2$$

Analogicznie w dziedzinie  $s$ , gdy

$$F(s) \approx \psi_1 U_1(s) + \dots + \psi_N U_N(s)$$

to błąd aproksymacji  $E(s)$  spełnia warunek

$$\|E\|^2 = \|F\|^2 - \sum_1^N |\psi_n|^2 = \|f\|^2 - \sum_1^N |\psi_n|^2$$

Błędy te mogą być uczynione dowolnie małe, gdy ciąg  $\{u_n(t)\}$  lub  $\{U_n(s)\}$  są zupełne. Niemniej, nawet ciągi nie-  
zupełne mogą służyć do aproksymacji funkcji przy pomocy sum skończonych, jeżeli tylko błąd można uczynić praktycznie małym.

### 6.2. Zbieżność i zbieżność jednoczesną

W pewnych zagadnieniach technicznych jako kryterium jakości

aproxymacji przyjmuje się kryterium Gaussa, w innych - kryterium Czebyszewa. W związku z tym, zamiast zbieżności szeregu według normy, trzeba czasem rozważać zbieżność szeregu w każdym punkcie, a nawet zbieżność jednostajną.

Zagadnienie zbieżności szeregów ortogonalnych zostało gruntownie omówione w książce G. Alexitsa - *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960, Akadémiai Kiadó; istnieje także tłumaczenie angielskie i rosyjskie). Niestety rozważa się w tej książce tylko szeregi ortogonalne w przedziałach skończonych i domkniętych. Według G. Alexitsa "w przedziałach nieskończonych rozważa się tylko dwa bardzo szczególne układy ortogonalne, układ wielomianów Laguerre'a i układ wielomianów Hermite'a". Ale oprócz tych dwa układy skonstruowano układ ortogonalny wielomianów wykładniczych i wprawdzie on odgrywać coraz większą rolę w zastosowaniach, w związku z tym, wydaje się celowe badanie zbieżności szeregów ortogonalnych w przedziałach nieskończonych. Jednym z ważniejszych problemów, byłby tu problem określenia warunków jakie powinna spełniać funkcja (oryginał), aby jej szereg ortogonalny wielomianów wykładniczych był zbieżny lub jednostajnie zbieżny do tej funkcji. Analogiczny problem można postawić dla transformant. Innym ważnym problemem byłoby oszacowanie błędu w sensie kryterium Czebyszewa, przy aproxymacji funkcji sumą częściową szeregu ortogonalnego, zbieżnego do tej funkcji. Oczywiście wartość błędu będzie zależała od własności strukturalnych funkcji.

## 7. Uzupełnienia

### 7.1. Szeregi ortogonalnych wielomianów wykładniczych.

Współczynniki ortogonalnych wielomianów wykładniczych można

stosunkowo łatwo obliczyć w przypadku biegunów rzeczywistych (tu 4. p.4.1) . Znacznie trudniejsze jest obliczanie współczynników w przypadku, gdy uwzględnia się bieguny rzeczywiste i zespolone (tu 5. p.4.2) . W każdym jednak przypadku można wykonać obliczenia na elektronicznej maszynie cyfrowej. Program obliczeń w języku ALGOL, na podstawie wzorów (5) - (11) (p.4.2), zamieszczono w Aneksie 2.1. W pewnych konkretnych przykładach obliczone współczynniki i stabilizacyjność odpowiednie ortogonalne wielomiany wykładnicze<sup>x)</sup> .

#### Przykład 1.

Bieguny transformacji:  $s_1 = -1$  ,  $s_2 = -2$  ,  $s_3 = -3$  ,  $s_4 = -4$

Ortogonalne wielomiany wykładnicze:

$$u_1(t) = + 1.41421 e^{-1t}$$

$$u_2(t) = - 4.00000 e^{-1t} + 6.00000 e^{-2t}$$

$$u_3(t) = + 7.34847 e^{-1t} - 29.3939 e^{-2t} + 24.4949 e^{-3t}$$

$$u_4(t) = - 11.3137 e^{-1t} + 84.8524 e^{-2t} - 169.706 e^{-3t} + 98.9913 e^{-4t}$$

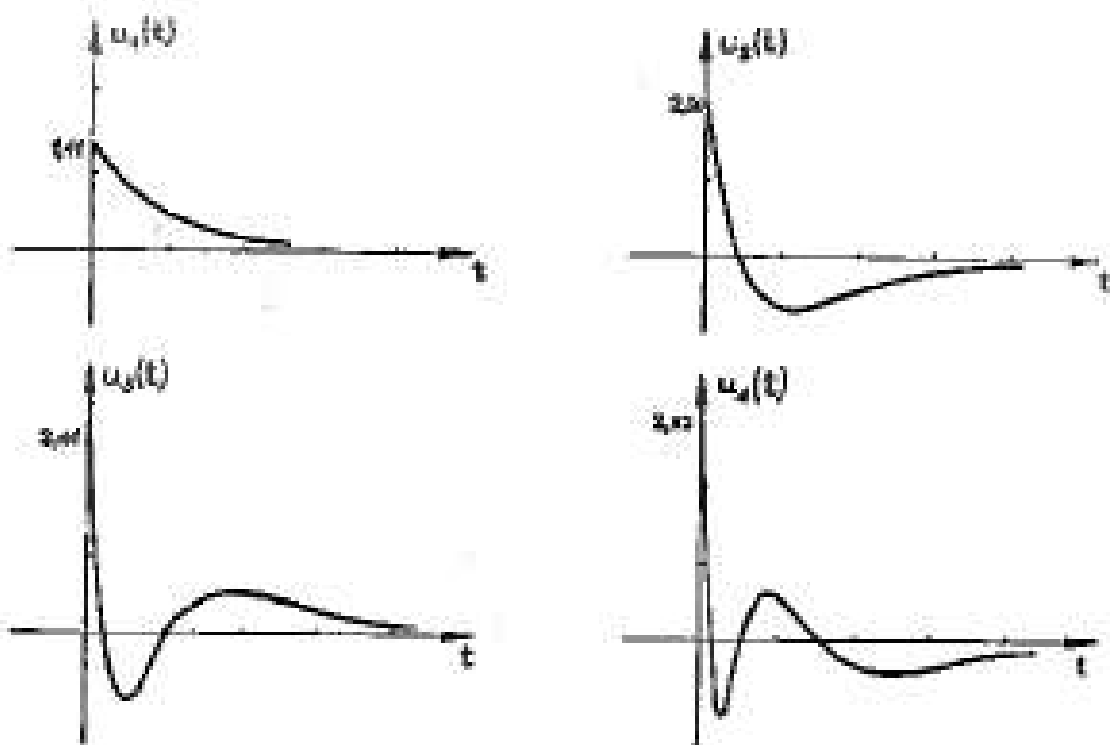
Na podstawie tabeli wartości sporządzono wykresy funkcji (rys.7.1) (można je także znaleźć w monografii [27])

Funkcje te mają stosunkową ilość miejsc zerowych i zerowa amplitudę oraz ilość należących oscylacji. Analogicznie zachowują się ortogonalne wielomiany wykładnicze w przypadku gdy bieguny rzeczywiste ujemne tworzą dowolny ciąg arytmetyczny (p.7.2) .

---

x) Obliczenia wykonano na EBC Odra 1024 w Zakładzie Metod Numerycznych Instytutu Matematyki UMCS w Lublinie.





Rys. 7.1

Przykład 2.

Wielomiany transformacji :  $s_{z1} = -3+4j$  ,  $s_{z2} = -4+3j$

Dodatkowe zero :  $\zeta_{zn} = \bar{z}_n$

Ortogonalne wielomiany wykładnicze :

$$u_{+1}(t) = e^{-3t} (+ 2.44949 \cos 4t + 1.22474 \sin 4t)$$

$$u_{-1}(t) = e^{-3t} (+ 2.44949 \cos 4t - 5.89898 \sin 4t)$$

$$u_{+2}(t) = e^{-3t} (- 16.9706 \cos 4t - 8.48528 \sin 4t) + e^{-4t} (+ 19.7990 \cos 3t + 6.59966 \sin 4t)$$

$$u_{-2}(t) = e^{-3t} (- 16.9706 \cos 4t + 33.5411 \sin 4t) + e^{-4t} (+ 19.7990 \cos 3t - 59.3970 \sin 4t)$$

Funkcje te można przedstawić także w innej postaci

$$u_{+1}(t) = e^{-3t} \cdot 2.73861 \sin(4t + 1.1071)$$

$$u_{-1}(t) = e^{-3t} \cdot 5.47723 \sin(4t + 2.6780)$$

$$u_{+2}(t) = e^{-3t} \cdot 18.9737 \sin(4t - 2.0345) + \\ + e^{-4t} \cdot 20.8700 \sin(4t + 1.2450)$$

$$u_{-2}(t) = e^{-3t} \cdot 37.9473 \sin(4t - 0.4636) + \\ + e^{-4t} \cdot 62.6099 \sin(4t + 2.8198)$$

Przykład 3.

Biegony transformacji:  $s_1 = -2$  ,  $s_{\pm 2} = -3 \pm 4j$  ,  $s_3 = -4$

podstawowe szere:  $\xi_{in} = \tau |e_n|$

Ortogonalne wielomiany wykładnicze:

$$u_1(t) = + 2.00000 \cdot e^{-2t}$$

$$u_{+2}(t) = - 1.72905 \cdot e^{-2t} + e^{-3t} \cdot (+ 4.17854 \cos 4t - 0.752482 \sin 4t)$$

$$u_{-2}(t) = + 4.03445 \cdot e^{-2t} + e^{-3t} \cdot (- 1.58496 \cos 4t - 6.35706 \sin 4t)$$

$$u_3(t) = - 13.6430 \cdot e^{-2t} + e^{-3t} \cdot (- 15.9723 \cos 4t - 0.499130 \sin 4t) + \\ + 32.4437 \cdot e^{-4t}$$

Funkcje te można także przedstawić w innej postaci:

$$u_1(t) = + 2.00000 \cdot e^{-2t}$$

$$u_{+2}(t) = - 1.72905 \cdot e^{-2t} + e^{-3t} \cdot \sin(4t + 1.7582) \cdot 4.15103$$

$$u_{-2}(t) = + 4.03445 \cdot e^{-2t} + e^{-3t} \cdot \sin(4t - 2.9542) \cdot 8.70605$$

$$u_3(t) = - 13.6430 \cdot e^{-2t} + e^{-3t} \cdot \sin(4t - 1.6020) \cdot 15.9801 + \\ + 32.4437 \cdot e^{-4t}$$

Funkcje w przykładach 2 i 3 różnią się od funkcji z przykładu 1 tym, że mają nieskończoną ilość miejsc zerowych, a ponadto są bardzo szybko tłumione.

7.2. Ortogonalne wielomiany wykładnicze z wykładnikami tworzącymi ciąg arytmetyczny.

Niech będzie ciąg funkcji wykładniczych (oryginałów)

$$x_n(t) = e^{-\alpha t}, \quad t \in (0, \infty), \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

Ciąg ten jest szczególnym przypadkiem ciągu rozważanego w p.4.1. Wykładniki w tym przypadku znajdują się na ujemnej części osi rzeczywistej i są rozmieszczone w równych odstępach. Z ciągu tego można metodą H.L.Kautza otrzymać ciąg ortogonalny

$$u_n(t) = \sqrt{2n\alpha} \cdot \sum_{v=0}^n \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (v+\alpha)}{\prod_{j=0}^{n-1} (v-\alpha)} e^{-\alpha t} \quad (2)$$

H.L. Armstrong ([11], [12]) udowodnił, że funkcje  $u_n(t)$  wyrażają się w prosty sposób przy pomocy wielomianów Jacobiego  $G_n(p, q; x)$ , ortogonalnych w przedziale  $(0, 1)$  z wagą  $x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}$ , gdzie  $q > 0$  i  $p > q-1$ .<sup>\*)</sup> Zachodzi mianowicie zależność

$$u_n(t) = (-1)^{n-1} \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \cdot n G_{n-1}(2, 2; e^{-\alpha t}) \quad (3)$$

Wielomiany Jacobiego mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste i zawarte w przedziale  $(0, 1)$ . Ponadto, pierwiastki dwóch kolejnych wielomianów Jacobiego przegradzają się wzajemnie. Wynika stąd, że każda z funkcji  $u_n(t)$  ma  $n-1$  pierwiastków rzeczywistych i ponadto, że pierwiastki dwóch kolejnych funkcji przegradzają się wzajemnie. Jeśli pierwiastkami wielomianu Jacobiego  $G_{n-1}(2, 2, x)$  są liczby  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , to pierwiastkami funkcji  $u_n(t)$  są liczby  $t_1, \dots, t_{n-1}$  obliczone z zależności

$$x_v = e^{-\alpha t_v}, \quad v = 1, \dots, n-1$$

\*) Definicję i sąsiednie własności wielomianów Jacobiego podane są, np., w Tablicach [19]

Może być interesujące przeniesienie innych własności wielomianów Jacobiego, na ortogonalne wielomiany wykładnicze z wykładnikami tworzącymi ciąg arytmetyczny, a także zbadać ewentualnych związków, ortogonalnych wielomianów wykładniczych (wzrzućkach ogólniejszych) z innymi funkcjami, np. z funkcjami hipergeometrycznymi

### III. ZASTOSOWANIA

#### 5. Identyfikacja układów

##### 5.1. Identyfikacja i aproksymacja.

Własności dynamiczne liniowych układów elektrycznych lub układów regulacji są całkowicie określone przez transmitancję operatorową układu. Transmitancja z jednej strony, jest odzwierciedleniem struktury układu, a z drugiej - określa związek między sygnałem wejściowym i wyjściowym. Transmitancję można znaleźć, gdy znany jest model strukturalny układu, a można także wyznaczyć ją przy pomocy charakterystyk, tzn. odpowiedzi układu na typowe wymoszenia.

Wyznaczenie transmitancji (lub zależności jej równoważnych) na podstawie charakterystyk pomierzonych doświadczalnie, nazywa się identyfikacją układu. Identyfikacja sprowadza się w zasadzie do aproksymacji funkcji empirycznych, pewnymi wyrażeniami analitycznymi - nie jest to więc zadanie jednoznacznie rozwiązalne. Transmitancja otrzymana w wyniku identyfikacji, nie odzwierciedla wobec tego struktury układu badanego, określa natomiast pewien zastępczy, liniowy model funkcjonalny, tzn. przybliżony związek między sygnałem wejściowym i wyjściowym.

W licznych publikacjach opisane są różne metody identyfikacji. Tu zostaną omówione metody identyfikacji, przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych.

Niech będzie układ, którego charakterystykę impulsową lub uchyb przejściowy charakterystyki skokowej  $f(t)$ , można uważać za element przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ . W tym przypadku identyfikacja sprowadza się do aproksymacji funkcji  $f(t)$  kombinacją liniową funkcji wykładniczych

$$f_N(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \dots + \alpha_N e^{s_N t}, \quad t \in (0, \infty), \quad \text{Re } s_i < 0$$

Rozwiązując zadanie aproksymacji, należy określić liczbę  $N$  (matematyczną strukturę modelu liniowego), wykładniki  $s_1 \dots s_N$ , oraz współczynniki  $\alpha_1 \dots \alpha_N$ , tak aby funkcje  $f(t)$  i  $f_{\text{ap}}(t)$  były "bliższe" sobie w sensie przyjętego kryterium aproksymacji.

Przy wyborze liczby  $N$ , z jednej strony należy uwzględnić żądanie dostatecznej "bliżkości" funkcji aproksymowanej i aproksymującej (co wymaga wybrania dużego  $N$ ), a z drugiej strony - prostotę układu (co wymaga by  $N$  nie było zbyt duże). A więc możliwe tu jest w pewnych granicach dowolność wyboru.

Wykładniki  $s_1 \dots s_N$  albo ustala się także dowolnie, albo dobiera się w odpowiedni sposób do danej charakterystyki. Przy odpowiednim doborze wykładników może być zmniejszona liczba  $N$ .

Są opracowane różne metody numeryczne doboru wykładników ([8], [27 - 30]). Istotne jest przy tym, że nie jest tu wymagana duża dokładność. W pracy [29] wskazano na możliwość doboru wykładników przy pomocy maszyna analogowych.

Należy jeszcze zauważyć, że można określić liczbę  $N$  przy okazji doboru wykładników. Wystarczy tylko, że wstępnie ustalonego w taki lub inny sposób zbioru wykładników, usunąć te wykładniki, które leżą zbyt daleko od osi urojonej w porównaniu z wykładnikami położonymi najbliższej tej osi. Odrzuca się w ten sposób składniki silnie tłumione, których wpływ w funkcji aproksymującej byłby pomijalnie mały.

Współczynniki  $\alpha_1 \dots \alpha_N$  wyznacza się tak aby, przy obranych liczbach  $N$  oraz  $s_1 \dots s_N$ , było spełnione kryterium jakości aproksymacji.

Analogicznie można postępować w przypadku gdy znana jest charakterystyka częstotliwościowa.

W dalszym ciągu zostaną omówione dokładnie obie metody identyfikacji: na podstawie charakterystyki czasowej oraz na podstawie

charakterystyki esytotliwosciowej. A ponadto krótko zostanie omówiona metoda identyfikacji analogowej, przy pomocy modelu o ustalonej strukturze fizycznej, i z nastawianymi parametrami.

### 5.2. Identyfikacja na podstawie charakterystyki czasowej.

Niech będzie układ, którego charakterystykę czasową ( lub uchyb przejściowy )  $f(t)$  można uważać za element przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ . Należy znaleźć funkcję aproksymującą  $f_N(t)$ .

I. Zakłada się liczbę  $N$ .

II. Określa się wykładniki  $s_1 \dots s_N$ . Można je na przykład znaleźć z równania charakterystycznego pewnego równania różnicowego o stałych współczynnikach. Współczynniki te znajdują się metodą najmniejszych kwadratów z pewnego układu równań liniowych.

Funkcję aproksymującą

$$f_N(t) = \alpha_1 \cdot e^{s_1 t} + \dots + \alpha_N \cdot e^{s_N t} \quad (1)$$

po zmianie oznaczeń

$$e^{s_n} = z_n \quad n = 1, \dots, N \quad (2)$$

można przedstawić w postaci

$$f_N(t) = \alpha_1 \cdot z_1^{t/h} + \dots + \alpha_N \cdot z_N^{t/h} \quad (3)$$

Funkcja ta jest rozwiązaniem ogólnym równania różnicowego

$$f(t + Nh) + s_1 f(t + (N-1) \cdot h) + \dots + s_N f(t) = 0 \quad (4)$$

jeżeli liczby  $z_1 \dots z_N$  są różnymi pierwiastkami równania charakterystycznego

$$z^N + s_1 z^{N-1} + \dots + s_N = 0 \quad (5)$$

Należy przede wszystkim znaleźć współczynniki  $\alpha_1 \dots \alpha_N$ , a następnie pierwiastki  $z_1 \dots z_N$ .

Niech będzie tabela wartości funkcji  $f(t)$  ze stałym skokiem

$h$ :

$t$	$t_0$	$t_0 + 1h$	...	$t_0 + (n-1)h$	$n > 2N$
$f(t)$	$f_0$	$f_1$	...	$f_{n-1}$	

Wykorzystując tę tabelę, można na podstawie równania (4) napisać układ  $n-N$  równań liniowych o niewiadomych  $a_1 \dots a_N$ :

$$\begin{aligned}
 f_N + a_1 f_{N-1} + \dots + a_N f_0 &= 0 \\
 f_{N+1} + a_1 f_N + \dots + a_N f_1 &= 0 \\
 \dots & \\
 f_{n-1} + a_1 f_{n-2} + \dots + a_N f_{n-N-1} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Układ ten rozwiązuje się metodą najmniejszych kwadratów.

Do obliczenia współczynników  $a_1 \dots a_N$ , rozwiązuje się równanie charakterystyczne (5). Następnie z zależności (2) znajduje się wykładniki

$$s_n = \frac{1}{h} \ln |z_n| + j \cdot \frac{1}{h} \arg z_n
 \tag{7}$$

III. Teraz, posiedy wykładników  $s_1 \dots s_N$  konstruuje się ortogonalne wielomiany wykładnicze (p.4.1 lub 4.2),

$$u_1(t) \dots u_N(t)$$

Następnie oblicza się współczynniki Fouriera (p.2.2 i 3.5)

$$\varphi_n = (f, u_n) \quad n = 1, \dots, N
 \tag{8}$$

i wreszcie znajduje się optymalną kombinację liniową

$$f_p(t) = \varphi_1 u_1(t) + \dots + \varphi_N u_N(t)
 \tag{9}$$

która jest szukaną funkcją, aproksymującą funkcję  $f(t)$ .

Porozważmy jeszcze w/wznaczone błęd aproksymacji (p.3.2)

$$\|e\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_1^N |\varphi_n|^2}
 \tag{10}$$



Wszystki pomiary, dokonywane przy doświadczalnym wyznaczeniu charakterystyk czasowych, odznaczają się wrażliwością na zakłócenia zewnętrzne a zarazem małą dokładnością. Ale dzięki metodzie najmniejszych kwadratów, współczynniki równania charakterystycznego z jednej strony dość dobrze spełniają układ równań (6), a z drugiej strony nie są ściśle dopasowane do danych doświadczalnych. Ten sposób zostaje w pewnym stopniu wygładzony wpływ zakłóceń i niedokładność pomiarów. Gdyby przyjęto  $m = 2N$ , otrzymalibyśmy układ  $M$  równań o  $M$  niewiadomych, których rozwiązania byłyby ściśle dopasowane do obliczonych błędnie wyników pomiarów. Stwarzaloby to tylko iluzję dokładności.

Błąd, spowodowany dowolnym wyborem struktury matematycznej modelu oraz błędy numeryczne, popełnione przy obliczeniu wykładników, zostają dodatkowo skorygowane metodą aproksymacji z metody Gaussa.

### 8.3. Identyfikacja na podstawie charakterystyki częstotliwościowej

1.1.  $v_{1j}$   $v_{2j}$

Niech będzie pewien układ elektryczny lub układ regulacji.

Dla znalezienia transmitancji  $G_{21}(s)$  zastępczego modelu liniowego można zaproponować następującą metodę.

I. Zakłada się strukturę matematyczną modelu w postaci transmitancji

$$G_{21}(s) = \frac{b_1 s^{N-1} + \dots + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_N} \quad (7)$$

z nie oznaczonymi współczynnikami.

II. Otrzymuje się doświadczalnie charakterystykę częstotliwościową  $G(j\omega)$  w postaci tabeli

$\omega$	$\omega_1$	...	$\omega_m$	$m > N$
$G(j\omega)$	$G_1$	...	$G_m$	



oraz błąd aproksymacji

$$\|e\| = \sqrt{\|G\|^2 - \sum_1^N |y_n|^2} \quad (7)$$

Można jeszcze dokonać pewnej modyfikacji części III.

Przy pomocy współczynników  $b_1 \dots b_N$  można obliczyć warunki początkowe funkcji

$$G_N(t) = \mathcal{L}^{-1} [ G_N(s) ] \quad (8)$$

Do wprowadzenia do zerowych warunków początkowych można skonstruować funkcje ortogonalne (p.4.4)

$$v_1^k(s) \dots v_N^k(s)$$

a następnie obliczyć współczynniki Fouriera i znaleźć optymalną kombinację liniową.

Próponowana tu metoda jest bliska metodom interpolacyjnym, opisanym w monografii [30] i tak jak teście na powyższą wiedzę wymaga dużego nakładu pracy.

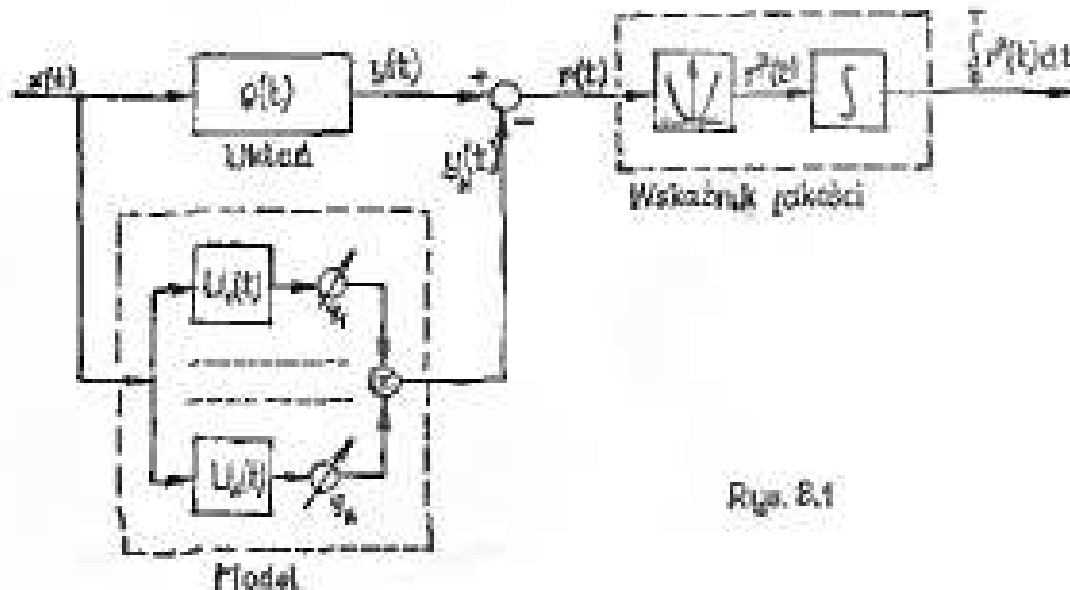
#### 8.4. Łośce symulujące i analizatory widna sygnałów.

Podaję jeszcze wspomnieć o urządzeniach, w których mogą być wykorzystane ortogonalne wielomiany wykładnicze : o modelach symulujących z nastawianymi parametrami, oraz o analogowych analizatorach widna sygnałów. Zagadnieniem tym poświęcono wiele prac np. [8], [20], [21], [22], [25], [26], [28], [29]. Omówienie tych zagadnień analizie można także w monografiach [22], [30], [33].

I. Model symulujący z nastawianymi parametrami służy do identyfikacji układów. Zasada działania tego urządzenia polega na tym, że badany układ i model pobudza się jednocześnie tym samym sygnałem wejściowym, a następnie zmieniając parametry modelu dąży się do minimalizacji jakiegoś wskaźnika jakości, zależnego od różnicy

sygnałów wyjściowych układu i modelu,

Na rys. 8.1 przedstawiono schemat blokowy układu symulacyjnego, w którym model jest dostosowywany przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych. Wskaźnik jakości oparty o kryterium Gaussa składa się z dwu elementów: kwadratora i integratora.



Rys. 8.1

Sygnał wyjściowy układu  $y(t)$  porównuje się z sygnałem wyjściowym modelu  $y_M(t)$ . Ponieważ funkcje  $u_1(t) \dots u_n(t)$  są ortogonalne, to współczynniki  $\gamma_1 \dots \gamma_n$  są niezależne od siebie i dla otrzymania minimum wskaźnika jakości, wystarcza w zasadzie jednakowe nastawienie wartości każdego współczynnika. Gdyby natomiast zastosowane funkcje nie były ortogonalne, to dla uzyskania optymalnych wartości współczynników należałoby wielokrotnie poprawiać ich nastawy.

Włączając urządzenia nastawcze w pętli sprzężenia zwrotnego, można dopasować model do badanego układu w sposób automatyczny. Taki model symulujący, z automatycznym nastawieniem parametrów, może być zastosowany w układach regulacji adaptacyjnej. Praca takiego układu sprowadza się do często powtarzanych pomiarów własności obiektu sterowanego i na dostosowywaniu parametrów modelu do

wyników tych ~~przebiegów~~ pomiarów.

W działaniu układu symulacyjnego tkwi źródło dodatkowego błędu. Mianowicie, każdy pomiar musi być wykonany w pewnym skończonym czasie. Z tego powodu, zamiast ocenić różnicę sygnałów wejściowych przy pomocy wskaźnika jakości Gaussa

$$\xi^2 = \int_0^{\infty} r^2(t) dt$$

ocenia się tę różnicę przy pomocy wskaźnika nieco zmienionego

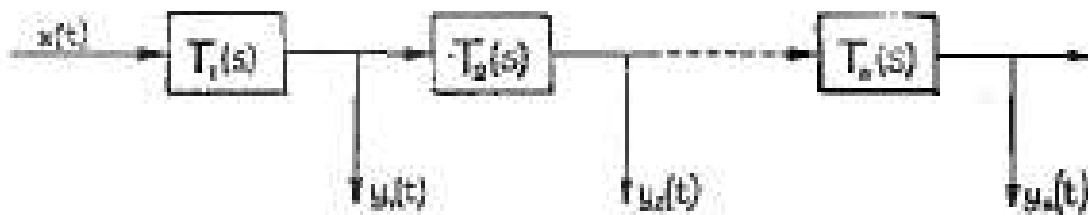
$$\xi^2 = \int_0^T r^2(t) dt$$

Przy jednorazowej identyfikacji układu można wziąć czas  $T$  dostatecznie długi i zmiana wskaźnika jakości nie spowoduje większego błędu. Natomiast w układach adaptacyjnych, gdzie pomiary muszą być często powtarzane, czas  $T$  musi być z konieczności krótki. Może to wyraźnie wpłynąć na jakość aproksymacji.

I jeszcze jedna uwaga. Można oczywiście zbadać modele symulujące przy pomocy innych funkcji ortogonalnych np. funkcji Laguerre'a. Wybór jednak ortogonalnych wielomianów wykładniczych może być podjęty tym, że przez odpowiednie dobór biegunów można otrzymać modele prostsze (niższego rzędu), a przy tym dające lepszą aproksymację.

II. Automatyczny analizator widm sygnałów. Służy do obliczenia współczynników Fouriera sygnału wejściowego. (Zbiór tych współczynników stanowi widmo sygnału). Tym samym dokonuje się aproksymacji funkcji kombinacją liniową funkcji ortogonalnych.

Na rys. 3.8 przedstawiono schemat blokowy analizatora, zbudowany przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych z biegunami rzeczywistymi  $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots$



Rys. 8.2

Zbudowany on jest z połączenia lancuchowo członek jednozmiennych o transmitancjach

$$T_1(s) = \sqrt{2 \alpha_1} \cdot \frac{1}{s + \alpha_1}$$

$$T_2(s) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot \frac{s - \alpha_1}{s + \alpha_2}$$

.....

$$T_N(s) = \sqrt{\frac{\alpha_N}{\alpha_{N-1}}} \cdot \frac{s - \alpha_{N-1}}{s + \alpha_N}$$

Oczywiste jest, że transmitancje  $T_n(s)$  i transformaty ortogonalnych wielomianów wykładniczych  $U_n(s)$  związane są zależnościami

$$T_1(s) = U_1(s)$$

$$U_1(s) \cdot T_2(s) = U_2(s)$$

.....

$$U_{N-1}(s) T_N(s) = U_N(s)$$

Niech będzie sygnał wejściowy  $x(t)$ . Wtedy sygnałami wyjściowymi kolejnych członów będą funkcje

$$y_n(t) = \int_0^t x(t - \tau) u_n(\tau) d\tau \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

z szerepności w chwili  $t = T$  na wyjściach kolejnych członów otrzymuje się wartości

$$y_n(T) = \int_0^{\infty} x(T - \tau) u_n(\tau) d\tau \quad n = 1, \dots, k \quad (2)$$

Jeżeli uwzględnia się skończony czas pomiaru  $T$ , to należy w równaniu (2) ustawić skończoną granicę całkowania, a więc

$$y_n(T) = \int_0^T x(T - \tau) u_n(\tau) d\tau \quad (3)$$

Równoważne to jest przyjęciu założenia, że

$$x(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t > T$$

Z drugiej strony współczynniki Fouriera funkcji  $f(t)$  wyrażają się wzorami

$$y_n = \int_0^{\infty} f(t) u_n(t) dt \quad (4)$$

Jeżeli przyjmie się założenie, że

$$f(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t > T$$

to będzie

$$y_n = \int_0^T f(t) u_n(t) dt \quad (5)$$

Porównując wzory (5) i (3) widac, że można otrzymać współczynniki Fouriera funkcji  $f(t)$  (a właściwie funkcji "ociętej" w chwili  $t = T$ ) jako wartości sygnałów wyjściowych w chwili  $T$ , kolejnych członów analizatora, wtedy gdy sygnał wejściowy będzie spełniał warunek

$$x(T - t) = f(t) \quad \text{czyli} \quad x(t) = f(T - t)$$

Na rys. 0.3 podano przykładowe wykresy obu funkcji



Rys 0.3

lub otrzymaną sygnał wyjściowy  $x(t)$ , należy zapisać funkcję  $x(t)$  w jakimś urządzeniu pomiarowym (np. na taśmie magnetycznej lub w komórkach pomiaru maszyny cyfrowej) w przedziale czasu  $(0, T)$ , a następnie odczytać zapis "od końca".

Wzór (7) można zapisać w innej postaci

$$y_n(t) = \int_0^t x(\tau) u_n(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

Podstawiając poprzednie rozumowanie otrzymuje się

$$y_n(T) = \int_0^T x(\tau) u_n(T-\tau) d\tau \quad (7)$$

przy założeniu, że

$$u_n(t) = 0 \quad \text{dla } t > T$$

Porównując wzory (5) i (7) widąc, że można otrzymać współczynniki Fouriera funkcji  $f(t)$  jako wartości sygnałów wyjściowych w chwili  $T$ , kolejnych członów analizatora, wtedy gdy sygnał wejściowy będzie spełniał warunek

$$x(t) = f(t)$$

zastąpić kolejne człony, zamiast odpowiedzi impulsowych  $u_n(t)$ , będą miały odpowiedzi impulsowe  $\varepsilon_n(t)$ , spełniające warunek

$$\varepsilon_n(t) = \begin{cases} u_n(T-t) & \text{dla } 0 < t < T \\ 0 & \text{" } t > T \end{cases}$$

Wzrosty analizy sygnałów przy pomocy analizatora widnia, są oczywiście obarczone błędami, wynikającymi z kończoności dokonanych pomiarów w skończonym czasie. W monografii [22] zbliżone wpływy czasu wliczania współczynników na dokładność przybliżonej oraz określono minimalny czas pomiaru, przy którym otrzymuje się jeszcze dobre przybliżenie.



## 9. Uzupełnienia

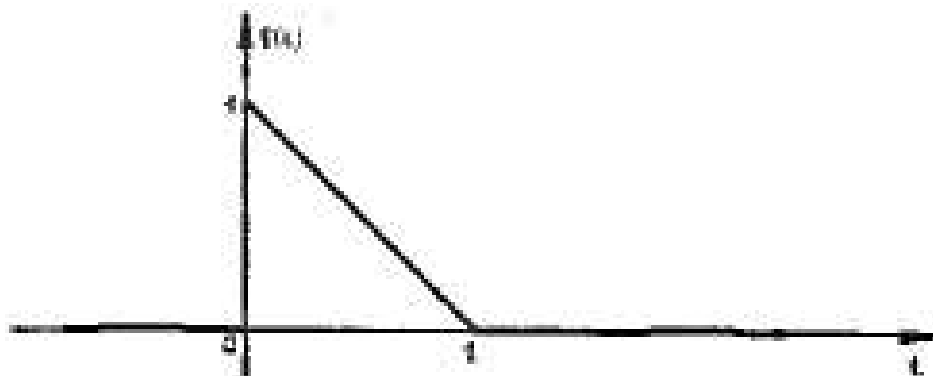
### 8.1. Przykład identyfikacji na podstawie charakterystyki czasowej

Metoda identyfikacji na podstawie charakterystyki czasowej opisana w p. 8.2, wymaga wykonania dużej ilości obliczeń. Odpowiedni program obliczeń w języku ALGOL zamieszczono w Aneksie 2.2. Metodę tę zastosowano w dwóch konkretnych przykładach i w kilku wariantach.<sup>x)</sup>

Przykład 1.

Do aproksymacji przyjęto funkcję (rys. 8.1)

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{gdy } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{" } t < 0 \text{ lub } t > 1 \end{cases}$$



Rys. 8.1

Funkcję tę aproksymowano kombinacją liniową czterech ortogonalnych wielomianów Legendre'owych. Rozwiązanie przy tym dla wartości z różnymi warunkami, zostało przedstawione w tabeli 8.1.

---

<sup>x)</sup> Obliczenia wykonane na MNC Góra 1024 w Zakładzie Inżynierii i Automatyki Instytutu Matematyki UNCS w Lublinie.

Tab. 8.1. Funkcje  $f_n(t) = \sum_{v=1}^n \gamma_v u_v(t)$  oraz funkcje  $f_n(\tau)$  (rysunki 1)

licznik $u_n(t)$	wykładniki $(v=1 \dots n)$	składowiki CG wielonianów w. kwadratowych $C_{nv}$	składowiki Fouriera $\gamma_n$
V a r i a n t I.			
$u_1(t)$	-1	1.41421	0.5203
$u_2(t)$	-1	-6.0	0.2315
	-2	6.0	
$u_3(t)$	-1	7.34847	-0.0608
	-2	-29.3939	
	-3	24.4949	
$u_4(t)$	-1	-11.5137	-0.0513
	-2	64.3528	
	-3	-159.706	
	-4	98.9949	
V a r i a n t II.			
$u_1(t)$	-1.5415	9.75535	0.5583
$u_2(t)$	-1.5415	-4.56630	0.0893
	-3.0830	7.44945	
$u_3(t)$	-1.5415	9.12368	-0.1045
	-3.0830	-36.4947	
	-4.6245	30.4123	
$u_4(t)$	-1.5415	-44.0468	0.0302
	-3.0830	105.351	
	-4.6245	-210.702	
	-6.1660	122.910	

W wariancie I przyjęto zupełnie dowolnie wykładniki

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -3, \quad s_4 = -4$$

(por. przykład 1 p.7.1). W wariancie II przyjęto wykładniki

$$s_1 = -1.5 \cdot 15, \quad s_2 = 2s_1, \quad s_3 = 3s_1, \quad s_4 = 4s_1$$

przy tym  $s_1$  obliczone przy pomocy metody opisanaj w p. 6.2. przyjęto niepowielisz wartości funkcji  $f(t)$  dla  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  ze skokiem  $h = 0.1$  oraz  $N = 1$ .

Funkcje aproksymujące, w obu wariantach zostały stabilaryzowane (tab. 8.2). Dla porównania podano także w tabeli wartości funkcji  $f(t)$ .

Tab. 8.2. Wartości funkcji aproksymujących (przykład 1)

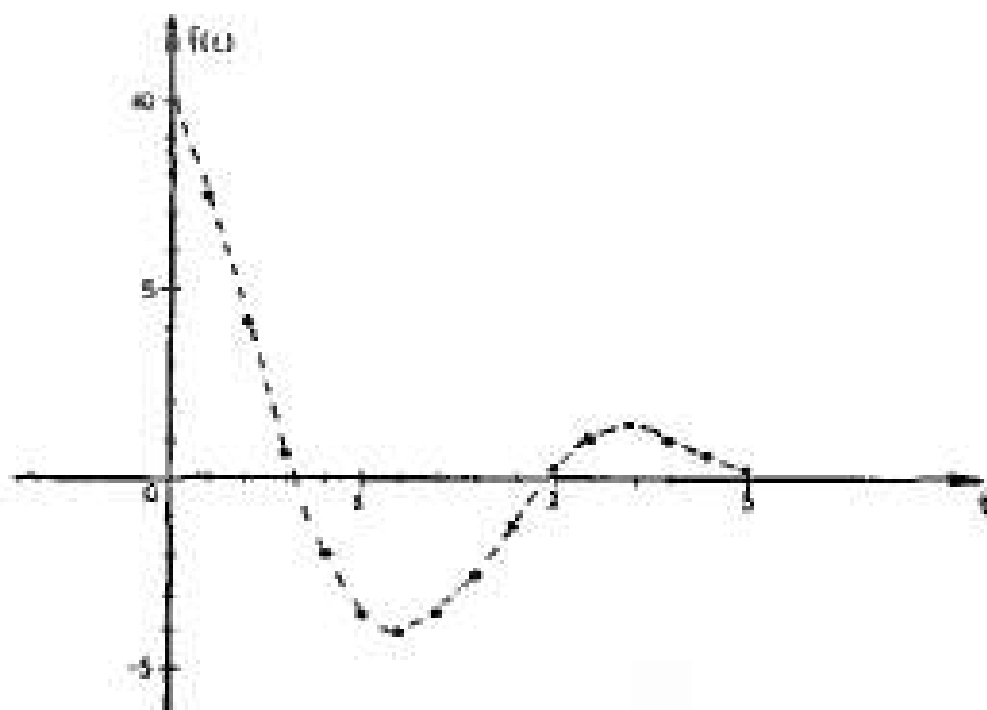
t	f(t)	f <sub>q</sub> (t)	
		Wariant I	Wariant II
0.0	1.0	0.8963	0.9902
0.1	0.9	0.9076	0.9026
0.2	0.8	0.8465	0.8150
0.3	0.7	0.7196	0.7094
0.4	0.6	0.5433	0.5926
0.5	0.5	0.4560	0.4759
0.6	0.4	0.3459	0.3680
0.7	0.3	0.2550	0.2741
0.8	0.2	0.1826	0.1960
0.9	0.1	0.1265	0.1356
1.0	0.0	0.0842	0.0852
błąd   e   =		0.0493442	0.0426166

przykład 2.

Do aproksymacji przyjęto funkcję daną przy pomocy tabeli wartości

$\tau$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$f(\tau)$	10.0	7.5	4.1	0.7	-2.0	-3.6	-4.0	-3.5
	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
	-2.5	-1.2	0.1	1.0	1.9	1.1	0.6	0.1

Na rys. 8.5 przedstawiono wykres tej funkcji



Rys. 8.5

Funkcję  $f_j$  aproksymowano także kombinacją liniową czterech ortogonalnych wielomianów wykładniczych. Rozważono przy tym trzy warianty. Wyniki przedstawiono w tabeli 8.3 i 8.5.

Zob. 8.3. Funkcje  $f_v(t) = \sum \varphi_n u_{vn}(t)$   $u_{vn}$  rządkująco  
 funkcje  $f(t)$  (przykład 2)

składowe $u_{vn}(t)$	składowe $a_v$ ( $v=1, \dots, 4$ )	składowe składowe $c_{nv}$	składowe Fouriera $\varphi_n$
V a r i a n t I			
$u_1(t)$	-1	1.41421	2.6706
$u_2(t)$	-1	-4.0	4.5194
	-2	6.0	
$u_3(t)$	-1	7.54847	0.2866
	-2	-29.3979	
	-3	24.4949	
$u_4(t)$	-1	-11.3157	-2.3660
	-2	84.0526	
	-3	-169.706	
	-4	90.5949	
V a r i a n t II			
$u_1(t)$	-1.8321	1.94531	3.5266
$u_2(t)$	-1.8921	-5.50216	2.9190
	-3.7842	8.25324	
$u_3(t)$	-1.8921	10.1061	-2.7196
	-3.7842	-40.4325	
	-5.6763	33.6937	
$u_4(t)$	-1.8921	-13.5625	1.1652
	-3.7842	116.718	
	-5.6763	-235.437	
	-7.5684	136.172	

Tab. 8.4. (jak tab. 8.3)

wielomiany $u_{\pm n}(t)$	Wykładniki $u_{\pm v}$		Współczynniki CG wielomianów wykładn.		składowe zezwierciadlenie $\varphi_{\pm n}$
	$-a_v$	$\beta_v$	$a_{\pm v}$	$b_{\pm v}$	
V a r i a n t III					
$u_{+1}(t)$	-0.7607	2.4066	1.23344	0.903722	5.2561
$u_{-1}(t)$	-0.7607	2.4066	1.23344	-1.68346	2.6530
$u_2(t)$	-0.7607	2.4066	-1.95713	-0.313139	-0.0433
	-5.5601		5.23163		
$u_3(t)$	-0.7607	2.4066	1.39541	1.53466	0.1002
	-5.5601		-26.5448		
	-8.2625		29.2145		

Varianty I i II są analogiczne do odpowiednich variantów z przykładu 1. W wariancie III przyjęto wykładniki obliczone przy pomocy metody opisanej w p. 6.2 (dla  $N = 4$ ). Funkcje  $u_{\pm n}(t)$  zostały zbudowane według wzoru (7) p. 4.2 (por. przykłady 2,3 p.7.1).

Funkcje aproksymujące, we wszystkich wariantach, zostały stabilarytmowe (tab. 8.5). Dla porównania podano także w tabeli wartości funkcji  $f(t)$ .

Tab. 8.5. Wartości funkcji aproksymujących (przykład 2)

t	f(t)	I <sub>4</sub> (t)		
		orient I	orient II	orient III
0.0	10.0	6.8255	11.1164	19.2630
0.2	7.5	8.6576	7.7295	7.4424
0.4	4.1	3.7221	4.2382	4.1728
0.6	0.7	-0.5566	0.1552	0.3064
0.8	-2.0	-2.6961	-2.3169	-4.9053
1.0	-5.6	-3.2289	-3.1220	-3.5229
1.2	-4.0	-2.3022	-3.0957	-3.9674
1.4	-3.5	-2.2177	-2.6082	-3.4455
1.6	-2.5	-1.5062	-2.0350	-2.3206
1.8	-1.2	-0.8955	-1.5170	-0.9921
2.0	0.1	-0.4293	-1.0389	0.2011
2.2	1.0	-0.1001	-0.7015	1.0300
2.4	1.5	0.1128	-0.5490	1.4321
2.6	1.1	0.2533	-0.3826	1.4147
2.8	0.6	0.3016	-0.2651	1.0977
3.0	0.1	0.3233	-0.1831	0.6277
Błąd $\ e\ _{\infty}$		1.81164	1.94399	0.850484

Na podstawie podanych przykładów można wysnuć następujące wnioski :

1. kombinacje liniowe ortogonalnych wielomianów wykładniczych, nawet o małej liczbie  $\nu$  rzędów, dają dobre aproksymacje, szczególnie osobno klasy  $L^2$ ;
2. przy przeciętnych bez oscylacji można otrzymać dobrą aproksymację; nawet wtedy, gdy wykładniki są obronne dowolnie ;

3. Przy przebiegach oscylujących otrzymuje się znacznie lepszą aproksymację, gdy wykładniki są dobrane odpowiednio (wariant III).

Wniosek ten można przedstawić w postaci ilorazowej, rozważając błąd względny aproksymacji według metody Gaussa

$$\xi = \frac{\|e\|}{\|f\|}$$

oraz błąd według metody Czebyszewa

$$\delta = \sup |f(t) - r_N(t)|$$

Dodatkowo warto zwrócić uwagę na błąd  $\hat{\delta}$  w części przedziału aproksymacji, a mianowicie w przedziale (0.1, 0.9) dla przykładu 1 oraz w przedziale (0.2, 2.4) dla przykładu 2.

Wyniki przedstawiono w tabeli 8.6

Tab. 8.6. Zestawienie błędów aproksymacji

	Przykład 1		Przykład 2		
	Wariant I	Wariant II	Wariant I	Wariant II	Wariant III
$\ r\ $	0.5773	0.5773	6.043	6.043	6.043
$\ e\ $	0.0493	0.0426	1.812	1.944	0.850
$\xi$	8.5 %	7.4 %	29.9 %	32.1 %	12.4 %
$\delta$	0.1037	0.0852	3.1745	2.0490	0.5277
$\hat{\delta}$	0.0541	0.0336	1.3672	2.0490	0.2079

Trzeba tu zwrócić uwagę, że różnice wartości funkcji  $f(t)$  i  $r_N(t)$  są większe w pobliżu końców przedziału. Te właśnie różnice wpływają na wartość błędu względnego aproksymacji w sensie Gaussa. Można te błędy zmniejszyć przez odpowiednie określenie wartości funkcji poza przedziałem czasu, w którym były prowadzone pomiary.



## 9. Aproxymacja przebiegów przejściowych

### 9.1. Przebiegi sygnałów w pewnych klasach układów liniowych, stacjonarnych.

Jednym z ważniejszych zadań, zarówno w analizie jak i syntezie układów, jest badanie sygnałów wyjściowych. W dalszym ciągu zostaną przedstawione transformaty tych sygnałów, w pewnych klasach układów liniowych stacjonarnych.

A. Układ liniowy, stacjonarny, o parametrach skupionych, można opisać równaniem różniczkowym o współczynnikach stałych

$$\sum_{v=0}^n a_v y^{(v)}(t) = \sum_{v=0}^n b_v f^{(v)}(t), \quad a_n \neq 0, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle$$

z warunkami początkowymi

$$y^{(v)}(0) = y_v, \quad v = 0, 1, \dots, n-1$$

Transformata sygnału wyjściowego wyraża się wzorem

$$Y(s) = \frac{1}{A(s)} [B(s) \cdot F(s) + B_0(s)] \quad (1)$$

gdzie  $F(s)$  jest transformatą wymuszenia, a  $A(s)$ ,  $B(s)$  i  $B_0(s)$  są wielocianami.

B. Układ liniowy, stacjonarny, o parametrach skupionych, pierwszego rzędu, zawierający jeden element opóźniający, można opisać równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem

$$ay'(t) + by(t) + cy(t - \tau) = f(t), \quad s \neq 0, \quad t \in \langle \tau, \infty \rangle$$

z funkcją początkową ciągłą

$$y(t) = g(t), \quad t \in \langle 0, \tau \rangle$$

Transformata sygnału wyjściowego wyraża się wzorem

$$Y(s) = \frac{1}{M(s)} [F(s) - \frac{F(s)}{\tau} + L_0(s)] \quad (2)$$

gdzie

$$E(s) = as + b + c e^{-s\tau}$$

$$L_0(s) = (as + b) \cdot G_c(s) + ag(\tau) e^{-s\tau}$$

$$F_\tau(s) = \int_0^\tau f(t) e^{-st} dt$$

$$G(s) = \int_0^\tau g(t) e^{-st} dt$$

W analogiczny sposób wyraża się transformata sygnału wyjściowego, w układzie zawierającym więcej niż jeden element opóźniający.

C. W linii łańcuchowej zbudowanej z czwórników, można badać sygnały /napięcia lub prądy/ na wyjściu każdego czwórnika.

W przypadku linii łańcuchowej jednorodnej, zbudowanej z  $n$  jednakowych czwórników liniowych, stacjonarych, o parametrach skupionych, transformata sygnału na wyjściu czwórnika z numerem  $k$ , wyraża się wzorem

$$Y_k(s) = A(s) \cdot e^{-k \cdot \gamma(s)} \cdot \frac{1 + B(s) \cdot e^{-2(n-k) \cdot \gamma(s)}}{1 + C(s) \cdot e^{-2(n-k) \cdot \gamma(s)}}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3)$$

gdzie  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$ ,  $\gamma(s)$  zależą od parametrów linii i od zasilania.

Wzrost, przy zmianie parametrów linii, przy zmianie warunków rozgałęziania (3), (4).

W dalszym ciągu wygodnie będzie przedstawić transformatę  $Y(s)$  w postaci sumy

$$Y(s) = Y_u(s) + Y_p(s)$$

Pierwszy składnik opisuje przebieg ustalony, a drugi - przebieg przejściowy. Wyznaczenie oryginału  $y_u(t)$  jest na ogół łatwe. Główną trudność przedstawia wyznaczenie oryginału  $y_p(t)$ .

Dla wyznaczenia oryginału  $y_p(t)$  można stosować różne metody

- a. rozkład funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych
- b. rozkład funkcji meromorfolicznej na szereg ułamków prostych
- c. wzór Riemann-Hellina z ewentualną deformacją kontury całkowania
- d. rozwinięcie funkcji w szereg funkcyjnie zbieżne
- e. rozwinięcie funkcji w szereg asymptotyczny
- f. aproksymację rzeczywistej charakterystyki częstotliwościowej charakterystykami trapezowymi.

Opisanie i zastosowanie tych metod znaleźć można w monografiach [6], [7], [32].

Każda z metod b - f, wymaga wykonania pewnych obliczeń dodatkowych, a także sprawdzenia pewnych warunków, gwarantujących zasadność wykonywanych przekształceń. Poza tym wyniki otrzymane w postaci szeregów nieskończonych, należy i tak aproksymować sumami częściowymi. W odniesieniu do graf-analitycznej metody charakterystyk trapezowych należy zauważyć, że trudno tu oszacować błąd.

W dalszym ciągu będzie omówiona metoda aproksymacji przebiegu przejściowego przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych (por. p.8.3.).

## 9.2. Aproksymacja przebiegów przejściowych w pewnych klasach układów liniowych stacjonarnych

Niech będzie transformata  $Y(s) \in L^2(-j\infty, j\infty)$ . Wtedy oryginał  $y(t)$  opisujący przebieg przejściowy, będzie oczywiście funkcją klasy  $L^2(0, \infty)$ . Fizycznie założenie to oznacza, że sygnał  $y(t)$  jest

sygnałem o ograniczonej energii. Proponuje się następujący tok postępowania (por. p.8.3).

I. Zakłada się transformatę aproksymującą w postaci

$$Y_N(s) = \frac{b_0 s^{N-1} + \dots + b_{N-1}}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_N} \quad (1)$$

z nie oznaczonymi współczynnikami.

II. Wybiera się zbiór punktów

$$s_v = j\omega_v, \quad v = 1, \dots, n, \quad n \geq N$$

i pisze się układ równań

$$Y_N(j\omega_v) = Y(j\omega_v) \quad v = 1, \dots, n \quad (2)$$

z których znajduje się, metodą najmniejszych kwadratów, współczynniki

$$a_1, \dots, a_N \quad \text{craz} \quad b_1, \dots, b_N$$

Następnie z równania charakterystycznego transformaty aproksymującej znajduje się bieguny

$$s_1, \dots, s_N$$

III. Przy pomocy biegunów konstruuje się funkcje ortogonalne (p.4.2)

$$U_1(s), \dots, U_N(s)$$

i przedstawia się  $Y_N(s)$  w postaci optymalnej kombinacji liniowej

$$Y_N(s) = \Psi_1 \cdot U_1(s) + \dots + \Psi_N \cdot U_N(s) \quad (3)$$

Ostatecznie znajduje się funkcję aproksymującą przebieg przejściowy

$$y_N(t) = \Psi_1 \cdot U_1(t) + \dots + \Psi_N \cdot U_N(t) \quad (4)$$

oraz błąd aproksymacji

$$\|e\| = \sqrt{\|y\|^2 - \sum_1^n |y_k|^2} \quad (5)$$

W przypadku układów statycznych, można zastosować ortogonalizację z wagą (p.4.3).

Dla linii łańcuchowej (p.9.1.C) opisaną procedurę można stosować dla każdego  $k = 1, \dots, n$ . Otrzymuje się w ten sposób ciąg funkcji  $\{y_k(t)\}_1^n$ , opisujących przebiegi przejściowe sygnałów, na wyjściach poszczególnych czworników.

Dla linii długiej (p.9.1.D) procedurę tę można stosować dla ciągu punktów  $x_n$  takich, że

$$0 < x_1 < \dots < x_n = 1$$

Otrzymuje się w ten sposób ciąg funkcji  $\{y(t, x_k)\}_1^n$  opisujących przebiegi przejściowe sygnałów w punktach linii o współrzędnych  $x_1, \dots, x_n$ . Krzywe te, aproksymują odpowiednie krzywe położone na powierzchni całkowitej wyjściowego równania cząstkowego.

Przydatność omawianej metody nie powinna budzić wątpliwości. Pozostaje do wyjaśnienia sprawa jej konkurencyjności w stosunku do innych metod. Jak w wielu dziedzinach tak i tu, znajdują się z pewnością takie zagadnienia, że proponowana metoda będzie lepsza od innych oraz takie - w których może być gorsza.

Jest jednak pewna cecha proponowanej metody, która korzystnie wyróżnia ją wśród innych metod. Metoda ta dysponuje dogodnymi algorytmami na maszynę cyfrową oraz możliwością oszacowania błędu. Dzięki temu możliwe jest wielokrotne rozwiązywanie tego samego zagadnienia, przy zmienionych pewnych warunkach i porównywanie otrzymanych wyników.

9.3. Aproxymacja przebiegów przejściowych w układach liniowych  
o parametrach skupionych niestacjonarnych.

Układ liniowy, o parametrach skupionych, niestacjonarny można opisać równaniem różniczkowym liniowym o współczynnikach zależnych od czasu

$$\sum_0^n a_\nu(t) y^{(\nu)}(t) = \sum_0^n b_\nu(t) f^{(\nu)}(t), \quad a_n(t) \neq 0, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle \quad (1)$$

z warunkami początkowymi

$$y^{(\nu)}(0) = y_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

W pewnych przypadkach szczególnych, całki równania (1) można wyrazić przy pomocy funkcji specjalnych, ale na ogół efektywne rozwiązanie tego równania jest niemożliwe. Można tylko stosować różne metody przybliżone (np. metoda kolejnych przybliżeń, metody różnicowe, metody graficzne).

Można także zaproponować metodę, która jest pewną modyfikacją grafic-analitycznej metody Baszkirowa.

I. Przedział  $\langle 0, \infty \rangle$  dzieli się punktami

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

na podprzedziały  $\langle t_{\nu-1}, t_\nu \rangle$  i w każdym z nich wybiera się chwilę  $\tau_\nu$ . Następnie w każdym podprzedziale ustala się wartości współczynników, równe ich wartościom w chwili  $\tau_\nu$ .

II. W przedziale  $\langle 0, t_1 \rangle$  rozwiąże się równanie o stałych współczynnikach

$$\sum_0^n a_\nu(\tau_1) y^{(\nu)}(t) = \sum_0^n b_\nu(\tau_1) f^{(\nu)}(t) \quad (3)$$

z warunkami początkowymi (2). Równanie to można rozwiązać metodą

opisaną w p.9.1 i 9.2. Po znalezieniu rozwiązań znajduje się wartości

$$y^{(v)}(t_1) = y_{01}^{(v)}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4)$$

III. Następnie w przedziale  $\langle t_1, t_2 \rangle$  rozwiąza się równanie

$$\sum_0^n a_v(t_1) y^{(v)}(t) = \sum_0^n b_v(t_2) z^{(v)}(t) \quad (5)$$

z warunkami początkowymi (4). Dokonuje się przesunięcia  $t = t' + t_1$ , a dalej postępuje się jak z równaniem (3).

Procedurę tę powtarza się w każdym następnym podprzedziale.

## 10. Jakość procesów regulacji

### 10.1. Wskaźniki jakości procesu regulacji

W procesach regulacji występują uchyby, między sygnałem żądanym i rzeczywistym sygnałem regulowanym. Aby ocenić jakość procesu regulacji należy sprawdzić, czy przebieg przejściowy uchybu mieści się w pewnym obszarze dopuszczalnym (w dziedzinie  $t$  lub w dziedzinie  $s$ ). Wymaga to oczywiście, przedstawienia przebiegu przejściowego uchybu, w postaci wykresu lub tabeli.

Często ocenę jakości procesu regulacji, sprowadza się do obliczenia pewnych parametrów przebiegu przejściowego uchybu. Takimi parametrycznymi wskaźnikami jakości są np: czas regulacji i przeregulowanie - w dziedzinie  $t$ , lub zapas amplitudy i zapas fazy - w dziedzinie  $s$ .

W wielu zagadnieniach, zamiast badać szczegółowe parametryczne wskaźniki jakości, można badać wskaźniki jakości syntetyczne, zadane w postaci pewnych funkcjonałów zależnych od przebiegu przejściowego uchybu

$$x(t) = y(t) - y(\infty)$$

Szeroką klasę takich wskaźników przedstawia całka

$$I = \int_0^{\infty} r(x(t), t) dt$$

W szczególności mogą to być wskaźniki jakości zwykłe

$$\int_0^{\infty} x(t) dt \quad , \quad \int_0^{\infty} x^2(t) dt \quad , \quad \int_0^{\infty} |x(t)| dt$$

lub ważone

$$\int_0^{\infty} t^k x(t) dt \quad , \quad \int_0^{\infty} t^k x^2(t) dt \quad , \quad \int_0^{\infty} t^k |x(t)| dt$$

### 10.2. Całkowe, kwadratowe wskaźniki jakości

W klasie sygnałów całkowlanych z kwadratem, szczególnie dogodnie są całkowe, kwadratowe wskaźniki jakości.

Najprostszym takim wskaźnikiem jest całka

$$I_0 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt \quad (1)$$

gdzie uchyb przejściowy  $x(t)$ , jest funkcją całkowlaną z kwadratem w przedziale  $(0, \infty)$ .

Wadą wskaźnika jakości  $I_0$  jest to, że nie wykrywa on oscylacji przebiegu, nawet wtedy gdy mają one duże amplitudy. Dla ograniczenia oscylacyjności stosuje się uogólniony całkowy, kwadratowy wskaźnik jakości

$$I_n = \int_0^{\infty} \left[ x^2(t) + T_1^2 \dot{x}^2(t) + \dots + T_n^{2n} x^{(n)}(t) \right] dt \quad (2)$$

Dla obliczenia całki  $I_0$ , można wykorzystać równanie różniczkowe przebiegu lub jego transmutację operatorową (W.W. Sołodownikow, red., Teoria automatycznego regulowania, t.1, Moskwa, 1967, Maszinostrojenie). Niestety otrzymuje się tą drogą bardzo złożone wyrażenia, co ogranicza stosowanie tego wskaźnika jakości. Pewne ułatwienia można uzyskać przy zastosowaniu ortogonalnych funkcji



wykładniczych

Jeżeli funkcję  $x(t)$ , przedstawi się w postaci szeregu ortogonalnych funkcji wykładniczych

$$x(t) = \varphi_1 u_1(t) + \varphi_2 u_2(t) + \dots$$

to całkę (1) można obliczyć jako sumę szeregu

$$I_0 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \dots$$

W przypadku aproksymacji funkcji  $x(t)$  ortogonalnym wielomianem wykładniczym

$$x(t) = \varphi_1 u_1(t) + \dots + \varphi_N u_N(t) \quad (3)$$

otrzymuje się wartości całki (1) w postaci sumy

$$I_0 = |\varphi_1|^2 + \dots + |\varphi_N|^2 \quad (4)$$

Dla obliczenia wartości wskaźnika jakości  $I_0$  wystarczy więc znajomość współczynników  $\varphi_p$ .

Aby obliczyć całkę  $I_0$ , należy wcześniej wyrazić pochodną  $\dot{x}(t)$  w postaci ortogonalnego wielomianu wykładniczego.

Na podstawie wzoru (6) (p.4.1) można napisać

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t} \\ \dots \\ e^{s_N t} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix}$$

można wzór (5) zapisać w postaci

$$[u_1(t) \dots u_N(t)]^T = \mathbf{c} \cdot [e^{s_1 t} \dots e^{s_N t}]^T \quad (6)$$

Wtedy przebieg przejściowy

$$x(t) = \varphi_1 u_1(t) + \dots + \varphi_N u_N(t) \quad (7)$$

otrzymuje postać

$$x(t) = [\varphi_1 \dots \varphi_N] \cdot \mathbf{c} \cdot [e^{s_1 t} \dots e^{s_N t}]^T$$

a dla pochodnej  $\dot{x}(t)$  otrzymuje się wyrażenie

$$\dot{x}(t) = \varphi_{11} u_1(t) + \dots + \varphi_{N1} u_N(t) \quad (8)$$

gdzie

$$[\varphi_{11} \dots \varphi_{N1}] = [\varphi_1 \dots \varphi_N] \cdot \mathbf{c} \cdot \text{diag}(s_1, \dots, s_N) \cdot \mathbf{c}^{-1} \quad (9)$$

Wobec tego dla całki  $I_1$  otrzymuje się wyrażenie

$$I_1 = \sum_1^N (|\varphi_{01}|^2 + T_1^2 |\varphi_{01}|^2) \quad (10)$$

Analogicznie pochodna  $\overset{(10)}{x}(t)$  wyraża się wzorem

$$\overset{(10)}{x}(t) = \varphi_{1n} u_1(t) + \dots + \varphi_{Nn} u_N(t) \quad (11)$$

gdzie

$$[\varphi_{1n} \dots \varphi_{nn}] = [\varphi_{1n-1} \dots \varphi_{nn-1}] \cdot e \cdot \text{diag}(s_1, \dots, s_n) e^{-1} \quad (12)$$

a dla całki  $I_n$  otrzymuje się wyrażenie

$$I_n = \sum_1^n \left( |Y_0|^2 + T_1^2 |\varphi_{11}|^2 + \dots + T_n^2 |\varphi_{nn}|^2 \right) \quad (13)$$

Obliczenie wartości wskaźnika  $I_n$ , łatwo jest zaprogramować na maszynę cyfrową.

### 10.3. Zmiana parametrów układu regulacji

Jeżeli własności dynamiczne układu regulacji odbiegają od własności żądanych, to należy dokonać zmiany pewnych elementów układu. Można na przykład, wprowadzić do układu pewne elementy o parametrach zmiennych i dobrać następnie wartości tych parametrów tak, aby układ spełniał żądane warunki jakości. W pewnym zakresie, można do tego celu wykorzystać całkowy, kwadratowy wskaźnik jakości.

Niech będzie przebieg przejściowy uchybu  $x(t)$  z dowolnymi parametrami  $A_1, \dots, A_n$  w postaci

$$x(t) = A_1 x_1(t) + \dots + A_n x_n(t) \quad (1)$$

oraz żądany przebieg  $x_0(t)$ . Należy tak dobrać wartości parametrów, żeby wskaźnik jakości

$$I_0 = \int_0^{\infty} [x(t) - x_0(t)]^2 dt \quad (2)$$

osiągał minimum.

Każdą z funkcji  $x_i(t)$  we wzorze (1) oraz funkcję  $x_0(t)$  można przedstawić w postaci ortogonalnego wielomianu wykładniczego

$$x_i(t) = \varphi_{1i} u_1(t) + \dots + \varphi_{ni} u_n(t) \quad i = 0, \dots, n \quad (3)$$

Wtedy różnica między przebiegiem  $x(t)$  i przebiegiem żądanym  $x_0(t)$  jest takie ortogonalnym wielomianem wykładniczym

$$\begin{aligned} x(t) - x_0(t) = & (A_1 \varphi_{11} + \dots + A_m \varphi_{1m} - \varphi_{10}) u_1(t) + \\ & + \dots + \\ & + (A_1 \varphi_{N1} + \dots + A_m \varphi_{Nm} - \varphi_{N0}) u_N(t) \end{aligned}$$

Wartość całki (2) na mocy wzoru (3) (p.10.2) wynosi

$$I_0 = [A_1 \varphi_{11} + A_m \varphi_{1m} - \varphi_{10}]^2 + \dots + [A_1 \varphi_{N1} + \dots + A_m \varphi_{Nm} - \varphi_{N0}]^2 \quad (4)$$

Wartość minimalną osiągnie całka  $I_0$ , dla wartości parametrów  $A_1 \dots A_m$  spełniających układ równań

$$\frac{\partial I}{\partial A_j} = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (5)$$

Na podkreślenie zasługuje fakt, że układ równań (5) jest układem liniowym, a więc łatwym do rozwiązania.

Zupełnie analogicznie można dobrać parametry z warunku aby wskaźnik jakości  $I_0$  osiągał minimum.

## 11. O dalszych zastosowaniach

Oprócz zastosowań omówionych w rozdziałach 9 i 10, wydaje się celowe przeprowadzenie dalszych badań nad możliwością zastosowań ortogonalnych wielomianów wykładniczych w następujących zagadnieniach:

- a. identyfikacja układów przy dowolnych wymuszeniach
- b. analiza przebiegów w układach o wymuszeniach i zakłóceniach stochastycznych
- c. analiza przebiegów w różnych układach o stałych rozłożonych

- d. analiza przebiegów w układach przekątnikowych
- e. analiza przebiegów w układach wielowymiarowych
- f. analiza stabilności układów z pewnymi dodatkowymi ograniczeniami
- g. analiza pracy układów adaptacyjnych
- h. synteza układów inwariantnych

Oprócz ortogonalnych wielomianów wykładniczych omówionych w rozdziałach 4 - 8 można rozważać dyskretne ortogonalne wielomiany wykładnicze. Funkcje takie skonstruowali T.Y. Young i H.W. Ruggina (Discrete orthogonal exponentials, Proc. IAS, 1962, vol. 18).

W związku z tym, wydają się interesujące dwie klasy problemów

- i. rozwinięcie teorii dyskretnych ortogonalnych wielomianów wykładniczych
- j. zastosowanie tych funkcji w zagadnieniach analogicznych jak dla funkcji ciągłych

Należy tu jeszcze wspomnieć, że ortogonalne wielomiany wykładnicze znalazły także inne interesujące zastosowanie, np.: analiza dźwięków mowy, analiza elektrokardiogramów, badania nieniszczące. O zastosowaniach tych można znaleźć wiadomość w pracy [13].

## ZAKOŃCZENIE

Z pracy niniejszej rozważa się aproksymację w przestrzeni  $L^2$  i jej zastosowania. We wstępie do pracy sformułowane tezę, w której zwrócono uwagę zarówno na aspekt matematyczny jak i aspekt techniczny aproksymacji.

Ortogonalne wielomiany wykładnicze i ich transformaty z odpowiednio dobranymi biegunami, stanowią bazę przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i  $L^2(-j\infty, j\infty)$ . Dowolne elementy tych przestrzeni, mogą być przedstawione w postaci szeregu ortogonalnego funkcji bazowych, zbieżnego według normy. Sumy częściowe tych szeregów, są wtedy przybliżeniami odpowiednich elementów.

Elementy bazowe mają dwie cenne zalety:

- a. ortogonalność w obu przestrzeniach
- b. wymierność w przestrzeni transformant

Dzięki tym zaletom, możliwe było opracowanie algorytmów obliczania optymalnych współczynników funkcji aproksymujących, oraz błędów aproksymacji. Algorytmy te zostały zaprogramowane na maszynę cyfrową. Funkcja aproksymowana może być więc zadana w postaci analitycznej lub przy pomocy tabeli wartości. Trzeba jeszcze podkreślić, że z ortogonalności funkcji bazowych wynika brak korelacji między współczynnikami - wartości współczynników zależą tylko od numeru funkcji bazowej, a nie zależą od innych współczynników.

W przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i  $L^2(-j\infty, j\infty)$  można rozważać także inne bazy ortogonalne: funkcje Laguerre'a i ich transformaty (z jednym biegunem wielokrotnym). Oczywiście funkcje te mają własności a i b. Ale w porównaniu z tymi funkcjami, ortogonalne wielomiany wykładnicze i ich transformaty mają jeszcze dwie inne zalety:

- c. możliwość odpowiedniego doboru biegunów

d. możliwość doboru dodatkowego zera

Dzięki tym własnościom można uzyskać lepszą aproksymację przy mniejszej liczbie składników, niż przy aproksymacji funkcjami Laguerre'a.

Na tej podstawie można stwierdzić, że ortogonalne wielomiany wykładnicze i ich transformaty, są dobrym narzędziem do aproksymacji funkcji w przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  i  $L^2(-j\infty, j\infty)$ .

Interpretując zmienną  $t$  jako czas, a zmienną  $s$  jako częstotliwość, wchodzimy w aspekt techniczny aproksymacji.

Funkcje wykładnicze czasu i ich transformaty, strukturalnie odpowiadają szlacom liniowym. A więc aproksymacja przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych jest pewnym sposobem linearyzacji układów.

Zastosowania omówione w pracy dotyczą głównie identyfikacji układów oraz aproksymacji przebiegów przejściowych. Zresztą obydwa te zagadnienia dotyczą tej samej zależności między sygnałem wejściowym i wyjściowym

$$Y(s) = G(s) \cdot F(s)$$

W identyfikacji chodzi o wyznaczenie funkcji  $G(s)$ .

Aproksymując tę funkcję przy pomocy transformat ortogonalnych wielomianów wykładniczych, aproksymuje się w zasadzie układ badany, realizowany fizycznie układem liniowym, o możliwie małej skłócenności (o ile tylko bieguny zostały odpowiednio dobrane).

W przypadku modeli symulujących, ważne jest także to, że wszystkie filtry z których zbudowany jest model mają podobną strukturę.

Przy aproksymacji przebiegów przejściowych chodzi o wyznaczenie funkcji  $y(t) = L^{-1}[G(s)F(s)]$ . Aproksymację przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych, można stosować do szerokiej klasy

układów liniowych, stacjonarnych, o parametrach skupionych lub rozłożonych.

Zw względu na metodę aproksymacji, odpowiednie sygnały powinny mieć ograniczoną energię (klasa  $L^2$ ).

Ustalając czasowe parametry układów, można stosować aproksymację przebiegów przejściowych przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych, także do układów niestacjonarnych. Wymaga to wielokrotnego powtarzania takiego samego cyklu obliczeń. Zw względu na opracowane algorytmy, nie powinno to stanowić problemu.

Trzeba jeszcze wspomnieć o innych metodach rozwiązywania omawianych zagadnień.

I. Metoda pól nachybów w identyfikacji, lub metoda charakterystyk trapezowych do obliczania przebiegów przejściowych, potrzebują prostych środków ale są mało dokładne.

II. Metoda momentów i metody interpolacyjne w identyfikacji, lub różne metody numeryczne do obliczania przebiegów przejściowych, wymagają stosowania maszyn cyfrowych, ale też mogą dawać dokładne wyniki.

Metoda aproksymacji przy pomocy ortogonalnych wielomianów wykładniczych jest w pewnym sensie równoważna metodom grupy II. Ma jednak pewną dodatkową zaletę: w wyniku aproksymacji otrzymuje się stosunkowo proste wyrażenia fizycznie realizowalne.

Na tej podstawie można stwierdzić, że ortogonalne wielomiany wykładnicze mogą być z powodzeniem stosowane w identyfikacji układów, oraz do obliczenia przebiegów przejściowych w dość szerokiej klasie układów.

Teza pracy została więc całkowicie potwierdzona.

Wspomniane dwa zagadnienia nie wyczerpują wszystkich możliwości zastosowań. W pracy podano jeszcze zastosowanie do badania jakości



procesów regulacji, a w ostatnim rozdziale przedstawiono pewne inne tematy, w których ortogonalne funkcje wykładnicze być może znajdą zastosowanie.

## ZADANIE 7. DOKŁADY WYKŁADNI

### 7.7. Dokład twierdzenia 1 p.4.1.

Niech będą dwie funkcje ciągu (1)

$$x_n(t) = e^{s_n t}, \quad x_m(t) = e^{\bar{s}_m t}, \quad \operatorname{Re} s_i < 0$$

I sposób formalny można utworzyć i obliczyć iloczyn skalarny

$$(x_n, x_m) = \int_0^{\infty} e^{s_n t} \cdot e^{\bar{s}_m t} dt = \frac{-1}{s_n + \bar{s}_m} \quad (*)$$

W szczególności

$$(x_n, x_n) = \frac{-1}{s_n + \bar{s}_n} \quad (**)$$

Istnienie iloczynu skalarnego(\*\*) świadczy, że funkcje ciągu (1) są elementami przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ .

II. Dla sprawdzenia niezależności liniowej należy obliczyć wyznacznik Grama

$$G(x_1, \dots, x_N) = \begin{vmatrix} \frac{-1}{s_1 + \bar{s}_1} & \dots & \frac{-1}{s_1 + \bar{s}_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{-1}{s_N + \bar{s}_1} & \dots & \frac{-1}{s_N + \bar{s}_N} \end{vmatrix}$$

Można tu skorzystać z wyznacznik Cauchy'ego (por. [1] str.25):

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_N + b_1} & \dots & \frac{1}{a_N + b_N} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{\substack{m, n \in N \\ m < n}} (a_m - a_n) (b_m - b_n)}{\prod_{n \in N, m \in N} (a_n + b_m)}$$

Podstawiając w wyrażeniu Cauchy'ego  $a_n = -\alpha_n$ ,  $b_n = -\bar{\alpha}_n$  otrzymuje się

$$G(x_1, \dots, x_N) = \frac{\prod_{1 \leq n < m \leq N} (-s_n + s_m) (-\bar{s}_n + \bar{s}_m)}{\prod_{1 \leq n < m \leq N} (-s_n - \bar{s}_m)} =$$

$$= \frac{\prod_{1 \leq n < m \leq N} | -s_n + s_m |^2}{\prod_{1 \leq n < m \leq N} (-2 \operatorname{Re} s_n) \cdot \prod_{1 \leq n < m \leq N} | -s_n - \bar{s}_m |^2}$$

Przy założeniu  $s_n \neq s_m$  oraz  $\operatorname{Re} s_n < 0$  jest oczywiste, że

$$G(x_1, \dots, x_N) > 0$$

z tego dowodzi, że funkcje ciągu (1) są liniowo niezależne.

III. Uzasadnienie własności ciągu (1) przenosi się przy pomocy tw. 3 p. 3.5 na funkcje ciągu (2).

Twierdzenie zostało uzasadnione.

#### 1.2. Dowód twierdzenia 2 p. 4.1.

Niech będzie  $U_\nu(s) = \frac{s + \bar{s}_\nu}{s - s_\nu}$  i  $U_\mu^0(s) = \frac{1}{s - s_\mu}$

tedy  $U_\nu(-\bar{s}) = \frac{s - s_\nu}{s + \bar{s}_\nu}$  i  $U_\mu^0(-\bar{s}) = \frac{-1}{s + \bar{s}_\mu}$

Stąd otrzymuje się

$$U_n(s) \cdot \overline{U_n(-\bar{s})} = \lambda_n \cdot \frac{1}{s - s_n} \cdot \frac{-1}{s + \bar{s}_n}$$

oraz

$$\|U_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_n(s) \cdot \overline{U_n(-\bar{s})} ds = -\lambda_n \cdot \operatorname{res}_{s=s_n} \left[ \frac{1}{s - s_n} \cdot \frac{1}{s + \bar{s}_n} \right] =$$

$$= 2 \operatorname{Re} s_n \cdot \frac{1}{2 \operatorname{Re} s_n} = 1$$

Niech będzie  $m < n$ . Wtedy funkcja

$$U_n(s) \cdot \overline{U_m(-\bar{s})} = A_n A_m \cdot \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m}}^{n-1} U_\nu(s) \cdot \frac{1}{s - s_n} \cdot \frac{-1}{s - s_m}$$

jest analityczna w półpłaszczyźnie  $\operatorname{Re} s > 0$ . Wobec tego

$$(U_n, U_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} U_n(s) \cdot \overline{U_m(-\bar{s})} ds = 0$$

Gdy  $m > n$  to oczywiście  $(U_m, U_n) = 0$  i tym samym  $(U_n, U_m) = 0$ . Twierdzenie zostało udowodnione.

### 1.3. Dowód twierdzenia 4 P.4.1a

Równość  $c_{nz} = 1$  jest oczywista. Niech będzie  $n > 2$ . Przez porównanie wzorów (5) i (3) otrzymuje się

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_{nz}}{s - s_k} = A_n \cdot \frac{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^{n-1} (s + \bar{s}_\nu)}{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^{n-1} (s - s_\nu)} \quad (*)$$

znosząc obie strony wyrażenia (\*) przez  $s - s_\nu$  i podstawiając  $s = s_\nu$  otrzymuje się

$$c_{n\nu} = A_n \frac{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^{n-1} (s_\nu + \bar{s}_\nu)}{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^{n-1} (s_\nu - s_\nu)}$$

Twierdzenie zostało udowodnione.

### 1.4. Dowód twierdzenia 1 P.4.1c

I. Niech będzie  $n = 1$ . Jeżeli  $\beta_1 = 0$  to funkcja

$$U_1(s) = A_1 \cdot \frac{1}{s - s_1}$$

na współczynniki rzeczywiste, a ponadto  $\|U_{\pm 1}\| = 1$

Jeżeli  $\beta_1 > 0$  to konstruuje się dwie funkcje

$$\tilde{U}_{+1}(s) = A_1 \cdot \frac{1}{s - a_1} \quad \text{i} \quad \tilde{U}_{-1}(s) = A_1 \cdot \frac{1}{s - \bar{a}_1}$$

Noray i iloczyn skalarny tych funkcji wynoszą

$$\|\tilde{U}_{+1}\| = 1, \quad \|\tilde{U}_{-1}\| = 1, \quad (\tilde{U}_{+1}, \tilde{U}_{-1}) = \frac{a_1 + \bar{a}_1}{2a_1}, \quad (\tilde{U}_{-1}, \tilde{U}_{+1}) = \frac{\bar{a}_1 + a_1}{2\bar{a}_1}$$

Letdiera się teraz współczynniki  $B_{\pm 1}, C_{\pm 1}$  tak aby zachodziły równości

$$\frac{B_{\pm 1}}{s - a_1} + \frac{C_{\pm 1}}{s - \bar{a}_1} = K_{\pm 1} \frac{s - \xi_{\pm 1}}{(s - a_1)(s - \bar{a}_1)}$$

Otrzymuje się

$$B_{\pm 1} = K_{\pm 1} \cdot \frac{a_1 - \xi_{\pm 1}}{a_1 - \bar{a}_1} \quad C_{\pm 1} = K_{\pm 1} \cdot \frac{\bar{a}_1 - \xi_{\pm 1}}{\bar{a}_1 - a_1}$$

Następnie wyznacza się współczynniki rzeczywiste  $K_{\pm 1}$  oraz rzeczywiste miejsca zerowe  $\xi_{\pm 1}$  tak aby funkcje

$$U_{\pm 1}(s) = A_1 K_{\pm 1} \frac{s - \xi_{\pm 1}}{(s - a_1)(s - \bar{a}_1)} = K_{\pm 1} [B_{\pm 1} \tilde{U}_{+1}(s) + C_{\pm 1} \tilde{U}_{-1}(s)]$$

były CM. Stosując prawo rozdzielności iloczynu skalarnego znajdujemy się

$$\|U_{\pm 1}\|^2 = \frac{K_{\pm 1}^2}{2|a_1|^2} (|a_1|^2 + \xi_{\pm 1}^2) \quad \cdot \quad (U_{+1}, U_{-1}) = \frac{K_{+1} K_{-1}}{2|a_1|^2} (|a_1|^2 + \xi_{+1} \xi_{-1})$$

Wystarczy więc uzyskać

$$K_{\pm 1} = \frac{\sqrt{2} |a_1|}{\sqrt{|a_1|^2 + \xi_{\pm 1}^2}} \quad \text{oraz} \quad \xi_{+1} \xi_{-1} = -|a_1|^2$$

Trzeba jeszcze zauważyć, że funkcje  $U_{\pm 1}(s)$  mają rzeczywiste współczynniki.

II. Przyjmuje się, że dla pewnego  $n$  funkcje  $\{U_{\pm v}(s)\}_1^{n-1}$  zbudowane zgodnie z warunkami twierdzenia są OG. Następnie dołącza się nowe bieguny  $s_{\pm n}$  i konstruuje funkcje  $U_{\pm n}(s)$ .

Jeżeli  $\beta_n = 0$  to funkcja  $U_n(s)$  jest zbudowana zgodnie z warunkami twierdzenia Koubna, a więc z poprzednimi funkcjami tworzy układ OG o współczynnikach rzeczywistych.

Niech będzie  $\beta_n > 0$ . Konstruuje się funkcje

$$\tilde{U}_{+n}(s) = A_n \cdot \prod_{v=0}^{n-1} v_v(s) \cdot \frac{1}{s - s_n}$$

$$\tilde{U}_{-n}(s) = A_n \cdot \prod_{v=0}^{n-1} v_v(s) \cdot \frac{1}{s - \bar{s}_n}$$

dalej jak w części I dowodu oblicza się normy i iloczyn skalarny tych funkcji, a następnie wyznacza się współczynniki  $B_{\pm n}$ ,  $C_{\pm n}$ ,  $K_{\pm n}$ ,  $\xi_{\pm n}$  tak aby funkcje

$$\begin{aligned} U_{\pm n}(s) &= A_n K_{\pm n} \prod_{v=0}^{n-1} v_v(s) \frac{s - \xi_{\pm n}}{(s - s_n)(s - \bar{s}_n)} = \\ &= K_{\pm n} [B_{\pm n} \tilde{U}_{+n}(s) + C_{\pm n} \tilde{U}_{-n}(s)] \end{aligned}$$

wyky G1. Otrzymuje się wzory analogiczne do wzorów w części I. W szczególności

$$K_{\pm n} = \frac{\sqrt{2} |s_n|}{\sqrt{|s_n|^2 + \xi_n^2}} \quad \xi_n \cdot \bar{\xi}_n = -|s_n|^2$$

Funkcje  $U_{\pm n}(s)$  mają oczywiście współczynniki rzeczywiste. Ponadto funkcje te są OG do funkcji OG  $\{U_{\pm v}(s)\}_1^{n-1}$  gdyż są ich

składowiki  $\tilde{U}_{2n}(s)$  spełniają ten warunek. A więc funkcje  $\{U_{2n}(s)\}_1^n$  tworzą układ ON. Z zasady indukcji matematycznej wynika prawdziwość twierdzenia dla dowolnego  $n$ .

1.5. Dowód twierdzenia 3 D.3.2.

Niech będzie  $n = 1$  i  $\beta_1 = 0$ . Wtedy

$$U_1(s) = A_1 \cdot \frac{1}{s - \alpha_1}$$

a więc istotnie  $a_{11} = A_1 = V_{11}$ .

Niech będzie  $n = 1$  i  $\beta_1 > 0$ . Wtedy

$$U_{21}(s) = A_1 K_{21} \frac{s - \xi_{21}}{(s - \alpha_1)(s - \bar{\alpha}_1)}$$

lub

$$U_{21}(s) = \frac{a_{211}(s + \alpha_1) + b_{211}\beta_1}{(s + \alpha_1)^2 + \beta_1^2}$$

Różnicując liczniki i podstawiając  $s = \alpha_1 = -\alpha_1 + j\beta_1$  otrzymuje się

$$a_{211} \cdot j\beta_1 + b_{211}\beta_1 = A_1 K_{21} (\alpha_1 - \xi_{21}) = V_{211}$$

a stąd

$$a_{211}\beta_1 = \text{Im } V_{211} \quad \text{oraz} \quad b_{211}\beta_1 = \text{Re } V_{211}$$

Niech będzie  $n \geq 2$ . Funkcje  $U_{2n}(s)$  można przedstawić w postaci

$$U_{2n}(s) = \lambda_n K_{2n} \frac{\prod_{\alpha \in Z_{2n}} L_{\alpha}(s) L_{\alpha}^*(s)}{\prod_{\alpha \in Z_{2n}} \rho_{\alpha}(s)}$$

lub w postaci

$$U_{zn}(s) = \sum_{x=1}^n \frac{a_{znx}(s + \alpha_x) + b_{znx}\beta_x}{(s + \alpha_x)^2 + \beta_x^2}$$

Porównując obie wyrażenia otrzymuje się

$$\frac{a_{znx}(s + \alpha_x) + b_{znx}\beta_x}{(s + \alpha_x)^2 + \beta_x^2} = A_n \cdot K_{zn} \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq n} L_{kl}(s) \cdot L_{zn}^0(s)}{\prod_{1 \leq k < l \leq n} L_{kl}(s)} \quad (*)$$

Jeżeli  $\beta_v = 0$  to możemy obie strony wyrażenia (\*) przez  $s - s_v = s + \alpha_v$  i podstawiając  $s = s_v = -\alpha_v$  otrzymuje się

$$a_{znv} = A_n \cdot K_{zn} \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq n} L_{kl}(s_v) \cdot L_{zn}^0(s_v)}{\prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k \neq v}} L_{kl}(s_v)} = V_{znv}$$

Jeżeli  $\beta_v > 0$  to możemy obie strony wyrażenia (\*) przez

$$(s - s_v)(s - \bar{s}_v) = (s + \alpha_v)^2 + \beta_v^2$$

i podstawiając  $s = s_v = -\alpha_v + j\beta_v$  otrzymuje się

$$a_{znv} \cdot j\beta_v + b_{znv} \beta_v = A_n \cdot K_{zn} \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq n} L_{kl}(s_v) \cdot L_{zn}^0(s_v)}{\prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k \neq v}} L_{kl}(s_v)} = V_{znv}$$

z stąd

$$a_{znv} \beta_v = \text{Im } V_{znv} \quad \& \quad b_{znv} \beta_v = \text{Re } V_{znv}$$

Wzory (9) i (10) zostały udowodnione. Wzory (11) wynikają z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej  $V_{znv} / \beta_v$ .

### 1.6. Inwersja wyrażenia 1.6.4.1.

Oryginalny transferost  $V_n^x(s)$  możemy przedstawić w postaci

$$v_n^k(t) = A_n \sum_{v=1}^{n-k+1} c_{nv} \cdot e^{s_v t}$$

Analogiczną postać mają kolejne pochodne, a więc istnieją granice



$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ v_n^{(k)}(t) \right]^{(x)} = \left[ v_n^{(k)}(0^+) \right]^{(x)} \quad x = 0, 1, \dots$$

Tenże to oznacza, że

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^x v_n^{(k)}(s) = 0 \quad x = 0, \dots, k+1$$

Stosując twierdzenie o wartościach granicznych otrzymuje się

$$\left[ v_n^{(k)}(0^+) \right]^{(x)} = 0$$

co jest dla  $x = 0, \dots, k$ .

### 1.2. Dowód twierdzenia 2 p.4.4.

Jeżeli 
$$L_v(s) = \frac{s + \bar{s}_v}{s - s_v} \quad \text{i} \quad L_v^{(0)}(s) = \frac{1}{s - s_v}$$

to

$$L_v(-\bar{s}) = \frac{s - s_v}{s + \bar{s}_v} \quad \text{i} \quad L_v^{(0)}(-\bar{s}) = \frac{-1}{s + \bar{s}_v}$$

Niech będzie  $n \leq n - k - 2$ . Wtedy funkcja

$$V_n^{(k)}(s) \cdot V_n^{(k)}(-s) = A_n^{(k)} \cdot A_n^{(k)} \cdot \frac{\prod_{p=0}^{n-1} (s + \bar{s}_v)}{\prod_{p=0}^{n-1} (s - s_v)} (-1)^{k+2}$$

jest analityczna w półpłaszczyźnie  $\text{Re } s > 0$  i wobec tego

$$\left( V_n^{(k)}, V_n^{(k)} \right) = 0.$$

Analogicznie rozpatruje się przypadek  $n \leq n - k - 2$ . Twierdzenie zostało udowodnione.

### 1.3. Dowód twierdzenia 1 p.4.5.

I. Niech będzie funkcja

$$x(t) = t^n \cdot e^{st}, \quad \text{Re } s < 0$$

Całkując wielokrotnie przez części otrzymuje się

$$(x_n, x_n) = \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-(s+\bar{s})t} dt = - \frac{(2n)!}{(s + \bar{s})^{2n+1}}.$$

Wynika stąd, że funkcje szeregu (1) są elementami przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ .

II. Sprawdzenie niezależności liniowej funkcji (1) <sup>przy pomocy</sup> wyznacznika Grama byłoby kłopotliwe. Szczególnie trudniej jest zastosować metodę dcaodu nie wprost. Dowód ten można znaleźć w podręczniku W.I. Stepanow, Równania różniczkowe (Warszawa, 1956, RW, str.233).

III. Z twierdzenia 3 p.5.3 wnio-kuje się następnie, że funkcje (2) są elementami przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$ .

IV. Niezależność liniową funkcji (2) można udowodnić metodą nie wprost. Przyjmujemy się, że między funkcjami (2) zachodzi zależność liniowa. Stosując odwrotną transformację Laplace'a otrzymuje się zależność liniową funkcji (1), co jest niemożliwe.

Twierdzenie zostało udowodnione.

#### 1.5. Dowód twierdzenia 7 p.5.3

Niech  $s_n = -x_n + jy_n \in \bar{\Omega}$ . wtedy

$$x_n \neq 0 \quad 1 \quad \left| \frac{y_n}{x_n} \right| \leq \mu$$

oraz

$$\frac{-50 s_n}{1 + \left| s_n + \frac{1}{2} \right|^2} \gg \frac{1}{x_n} \frac{1}{1 + \left( 1 + \frac{1}{2\mu} \right)^2 + \mu^2}$$

ponieważ z założenia (2) szereg  $\sum 1/x_n$  jest rozbieżny, to tym bardziej rozbieżny jest szereg (2) p.5.3. A to dowodzi twierdzenia.

1.10. Dowód twierdzenia 2 p.5.3.

Niech  $s_n = -x_0 + iy_n$ , gdzie  $x_0 > 0$ . Rozpatrzyć trzeba dwa przypadki.

I. Gdy ciąg  $\{y_n\}$  spełnia warunek  $|y_n| \in \mathbb{Z}$ , to spełnia on założenie 2. i zarazem rozbieżny jest szereg (2) p.5.3.

II. Gdy ciąg  $\{y_n\}$  spełnia warunek  $\lim |y_n| = \infty$  przy  $n \rightarrow \infty$ , to dla dostatecznie dużych  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{-\operatorname{Re} s_n}{1 + |s_n + \frac{1}{2}|^2} > \frac{x_0}{2} \cdot \frac{1}{y_n^2}$$

Ponieważ z założenia 2 szereg  $\sum 1/y_n^2$  jest rozbieżny to tym bardziej rozbieżny jest szereg (2) p.5.3.

Twierdzenie zostało udowodnione.

1.11. Dowód twierdzenia 1 p.5.4.

I. Każdą dziedzinę  $G_\nu$  o krotności  $m_\nu$  niech będzie przyporządkowany zbiór dziedzin pojedynczych

$$s_\nu - \delta_{\nu\mu}, \dots, s_\nu - \delta_{\nu m_\nu} \quad \text{gdzie} \quad \delta_{\nu\mu} > 0, \quad \mu = 1, \dots, m_\nu$$

Ponadto oprócz ciągłej funkcji  $U$  rozważanych przez A. Crosonesia (p.4.5)

$$V_{N+\mu}(s) = \sqrt{-2 \operatorname{Re} s_n} \cdot \prod_{\nu=0}^{n-1} \left( \frac{s + \bar{s}_\nu}{s - s_\nu} \right)^{m_\nu} \cdot \frac{1}{s - s_n}$$

niech będzie ciąg funkcji badanych przez b.f.Kautza (p.4.1)

$$U_{N+\mu}(s, \delta_{\nu\mu}) = \sqrt{-2 \operatorname{Re} (s_n - \delta_{n\mu})} \cdot \prod_{\substack{\nu=0, \dots, n-1 \\ \nu \neq n_\nu}} \frac{s + \bar{s}_\nu - \delta_{\nu\mu}}{s - s_\nu + \delta_{\nu\mu}} \cdot \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{s + \bar{s}_n - \delta_{n\mu}}{s - s_n + \delta_{n\mu}} \cdot \frac{1}{s - s_n + \delta_{n\mu}}$$

gdzie  $\lambda = s_1 + \dots + s_{n-1}$ .

Oczywista jest zależność

$$\lim_{\delta_{\nu\kappa} \rightarrow 0} U_{E+\mu}(s, \delta_{\nu\kappa}) = V_{E+\mu}(s)$$

to znaczy, że dla dowolnej liczby  $\epsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta(\epsilon) > 0$ , taka, że gdy

$$0 < \delta_{\nu\kappa} < \delta(\epsilon) \quad (1)$$

to

$$|U_{E+\mu}(s, \delta_{\nu\kappa}) - V_{E+\mu}(s)| < \epsilon \quad (11)$$

II. Niech ciąg funkcji  $\{U_{E+\mu}(s, \delta_{\nu\kappa})\}$  będzie zupełny w przestrzeni  $L^2(-j\infty, j\infty)$ . Przyjmujemy się, że ciąg  $\{V_{E+\mu}(s)\}$  nie jest zupełny w przestrzeni. Istnieje więc funkcja  $F(s)$  spełniająca warunki

1.  $F(s) \in L^2(-j\infty, j\infty)$
2.  $(V_{E+\mu}, F) = 0$
3.  $F(s) \neq 0$  w zbiorze  $E \subset (-j\infty, j\infty)$ , przy tym miara  $E = m > 0$ .

Z warunku 1 wynika, że funkcja  $F(s)$  powinna być ograniczona prawie wszędzie, tzn. powinna istnieć taka liczba  $M$ , że

$$|F(s)| \leq M \quad \text{dla } s \in E_1 \subset E, \text{ przy tym miara } E_1 = m$$

oraz ewentualnie

$$|F(s)| > M \quad \text{dla } s \in E_2 = E - E_1, \text{ przy tym miara } E_2 = 0.$$

Łożąc teraz oszacować  $(U_{E+\mu}, F)$ :

$$(U_{E+\mu}, F) - (U_{E+\mu} - V_{E+\mu}, F) = \frac{1}{2\pi j} \int_{E_1} (U_{E+\mu}(s, \delta_{\nu\kappa}) - V_{E+\mu}(s)) \overline{F(-\bar{s})} ds$$

Jeżeli spełnione są warunki (1) oraz (11), to

$$|(U_{E+\mu}, F)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \epsilon \cdot m + m$$

Jeśli wziętą na dowolność liczbę  $\epsilon > 0$  otrzymuje się

$$(U_{E+\mu}, F) = 0$$

a stąd na mocy zupełności ciągu  $\{U_{E+\mu}(s)\}$  jest

$$F(s) = 0 \quad \text{dla } s \in (-j\infty, j\infty)$$

odpowiednio z własnością 3 dowodzi zbieżności ciągu  $\{v_{n+p}(\varepsilon)\}$ .

III. Niech będą dwa ciągi

$$a_n(\delta_{np}) = \sum_{r=1}^{n_2} \frac{-\operatorname{Re}(z_n - \delta_{np})}{1 + \left| z_n - \delta_{np} + \frac{1}{2} \right|^2}$$

oraz

$$b_n = \frac{z_n(-\operatorname{Re} z_n)}{1 + \left| z_n + \frac{1}{2} \right|^2}$$

oczywista jest zależność

$$\lim_{\delta_{np} \rightarrow 0+} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

to znaczy, że dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta(\varepsilon) > 0$  taka, że gdy

$$0 < \delta_{np} < \delta(\varepsilon)$$

to

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

czyli

$$(1 - \varepsilon)b_n < a_n < (1 + \varepsilon)b_n$$

co znaczy, że szeregi  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Z części II i III dowodu wynika prawdziwość twierdzenia.

## ALGOL 2. PROGRAMY CYLICZNE

### 2.1. Współczynniki ortogonalnych wielomianów wykładniczych, i współczynniki Fouriera.

```
begin integer n,n; setinput(1); read(n,n);
```

```
begin
```

```
integer i,j,k,z,stw;
```

```
array s[1:n,1:2],f1,ksl[1:n],DZ[0:n,0:n,1:2],V[1:n,1:n,1:2],  
f[1:m],F[1:2>n],ar[0:n-1],wf[0:n-1,1:1],alfa[1:20,1:1];
```

```
real t,h,a1,a2,r,a,b,A,B,W,eps;
```

comment Program oblicza i drukuje współczynniki ortogonalnych wielomianów wykładniczych, współczynniki Fouriera danej funkcji względem tych wielomianów, błąd aproksymacji i tablice wartości funkcji aproksymującej. Dane: n(calkowite) - ilość punktów, w których dana jest funkcja, r(calkowite) - ilość wykładników, s - tablica wykładników - podaje się tylko te, których czynniki urojone jest mniejsze, h(realny) - krok tablicowania funkcji, f - tablica wartości funkcji f z krokiem h, stw(calkowite) - stopień wielomianu, którym chce się aproksymować daną funkcję. Program korzysta z procedury aproksymującej daną funkcję wielomianem (Log polapprox) oraz z procedury obliczającej wartość całki w danym przedziale (Trap);?

```
procedure mult(p,q,r,t,u,v);
```

```
integer p,q,r,t,u,v;
```

```
begin
```

```
real w,x,y,z;
```

```
w=DZ[p,q,1]; x=DZ[p,q,2]; y=DZ[r,t,1]; z=DZ[r,t,2];
```

```
DZ[u,v,1]=w*y-x*z;
```

```
DZ[u,v,2]=w*z+x*y
```

```
end;
```

```
procedure div(p,q);  
integer p,q;  
begin real w,x,y,z,d;  
w:=0Z[0,0,1]; x:=0Z[0,0,2];  
y:=0Z[p,q,1]; z:=0Z[p,q,2];  
d:=y*x+z*w;  
0Z[0,0,1]:= (w*y+x*z)/d;  
0Z[0,0,2]:= (x*y-w*z)/d  
end;
```

```
procedure druk(k,B);  
integer k;  
array B;  
begin real u,v,x,y;  
for j=1 step 1 until 1 do  
begin format('1234567');  
  if j=1 then print('??',k) also print('?????');  
  print(j);  
  format('123.4567');  
  print(e[j,1]);  
  r:=e[j,2];  
  if r=0 then  
    begin print('?????????');  
      format('1.23456e+1');  
      print(B[i,j,1])  
    end  
  else begin print(r, '???');  
    format('1.23456e+1');  
    u:=B[i,j,1]; v:=B[i,j,2];  
    x=B[i,j,1]*v/r; y=B[i,j,2]*u/r;  
    print(x,y, '??', sqrt(u*x+v*y)/x, '???');  
    format('1.23456');  
    if u=0 then begin if v>0 then print (1.5708)  
      else print(4.7118);  
      go to E1 and;  
      x:=arctan(v/u);  
      print(if u<0 then 3.14159265+x else  
        if x<0 then 6.2831853+x else x);  
    end
```

FT1:=end;

end j

end;

procedure wart(B);

ARRAY B;

begin real x,y;

R=0;

for j=1 step 1 until i do

begin x=a[j,1]; y=a[j,2];

if y=0 then R=R+B[i,j,1]\*exp(t\*x)

else R=R+exp(t\*x)\*(B[i,j,1]\*cos(t\*y)+B[i,j,2]\*sin(t\*y))

end j

end;

real procedure wiel(t);

value t;

real t;

begin real w; w:=alfa[1,1];

for k=2 step 1 until stw+1 do w:=w\*t+alfa[k,1];

wiel:=w

end;

real procedure kwiel(t);

value t; real t;

begin real rr; rr:=wiel(t); kwiel:=rr\*rr

end;

real procedure fV(p);

value p;

real p;

begin t:=p; wart(V);

  fV:=B-wiel(p)

end;

real procedure fDZ(p);

value p;

real p;



```
begin try: wart(DZ);  
  rDC=R-wiel(p)  
end:
```

```
read(a);  
if key(5) then begin read(ks1);  
  for i=1 step 1 until n do  
    r1[i]=-(a[1,1]*s[1,1]+a[1,2]*s[1,2])/ks1[i]  
  end else  
    for i=1 step 1 until n do  
      begin ks1[i]=sqrt(a[1,1]*s[1,1]+a[1,2]*s[1,2]);  
        r1[i]=-ks1[i]  
      end:  
end:
```

```
for i=1 step 1 until n do  
begin a=s[1,1]; b=s[1,2];  
  DZ[i,1,1]=2*a; DZ[i,1,2]=2*b;  
  for j=i+1 step 1 until n do  
    begin DZ[j,1,1]=a+s[j,1];  
      DZ[j,1,2]=b+s[j,2];  
      DZ[i,j,1]=a-s[j,1];  
      DZ[i,j,2]=b-s[j,2]  
    end j  
end i;
```

```
for i=1 step 1 until n do  
begin DZ[0,0,1]=DZ[0,1,1]=1;  
  DZ[0,0,2]=DZ[0,1,2]=0;  
  k=i-1;  
  for j=1 step 1 until k do  
    begin  
      mult(0,0,1,j,0,0);  
      mult(0,1,j,1,0,1);  
      DZ[0,1,1]=DZ[0,1,1]; DZ[0,1,2]=DZ[0,1,2];  
      if s[j,2]>0 then  
        begin DZ[1,0,1]=a[1,1]+s[j,1];  
          DZ[1,0,2]=a[1,2]-s[j,2];  
          mult(0,0,1,0,0,0);  
          DZ[1,0,1]=a[1,1]-s[j,1];  
          DZ[1,0,2]=a[1,2]+s[j,2];  
          mult(0,1,1,0,0,1);  
        end if;  
    end j;  
end i;
```

```
      end j;
      div(0, 1);
      V[1, 1, 1] = DZ[0, 0, 1]; V[1, 1, 2] = DZ[0, 0, 2]
    end i;
    for i = 1 step 1 until n do
      begin DZ[0, 0, 1] = V[1, 1, 1]; DZ[0, 0, 2] = V[1, 1, 2];
        for j = i + 1 step 1 until n do
          begin mult(0, 0, j - 1, 1, 0, 0);
            if a[j - 1, 2] > 0 then begin DZ[0, 1, 1] = a[1, 1] + a[j - 1, 1];
                                      DZ[0, 1, 2] = a[1, 2] - a[j - 1, 2];
                                      mult(0, 0, 0, 1, 0, 0)
                                end;
            if a[j, 2] > 0 then begin DZ[0, 1, 1] = a[1, 1] - a[j, 1];
                                      DZ[0, 1, 2] = a[1, 2] + a[j, 2];
                                      mult(0, 1, 1, j, 1, j)
                                end;
          end;
          div(1, j);
          V[j, 1, 1] = DZ[0, 0, 1]; V[j, 1, 2] = DZ[0, 0, 2]
        end j;
      end i;
      setoutput(1);
      for i = 1 step 1 until n do
        begin A = sqrt(-2 * a[1, 1]);
          for j = 1 step 1 until i do
            if a[1, 2] > 0 then
              begin DZ[1, 0, 1] = A * (a[j, 1] - hci[i]);
                    DZ[0, 1, 2] = DZ[1, 0, 2] = A * a[j, 2];
                    DZ[0, 1, 1] = A * (a[j, 1] - fi[i]);
                    DZ[0, 0, 1] = V[1, j, 1]; DZ[0, 0, 2] = V[1, j, 2];
                    mult(0, 0, 1, 0, 1, 0);
                    V[1, j, 1] = DZ[1, 0, 1]; V[1, j, 2] = DZ[1, 0, 2];
                    mult(0, 0, 0, 1, 1, j)
              end;
            else begin V[1, j, 1] = A * V[1, j, 1];
                      V[1, j, 2] = A * V[1, j, 2]
            end;
          end;
          druk(1, V);
          if a[1, 2] > 0 then druk(-1, DZ)
        end i;
      end i;
```



```
end;  
print(t,W);  
end  
end  
end?
```

3.1. Obliczanie wykładników.

Wzrost

opis Program oblicza i drukuje na monitorze wykładniki  $a[i]$  uporządkowane malejąco w/g ich części rzeczywistych. Drukowane są wykładniki o części urojonej nieujemnej. Dane:  $n, N$  - całkowite,  $h$  - rzeczywiste, tablica  $f$  - wczytywane z taśmy. Program korzysta z procedury rozwiązywania układów równań liniowych metodą najmniejszych kwadratów (least square solution) oraz procedury znajdującej pierwiastki wielomianu (Bairstow), które w tym miejscu należy wczytać?

```
Integer n,N,k,i,j,l,n;  
  setinput(1); read(n,N);  
  k=n-N;  
  
begin real h,p,q,delta,r,u;  
  array f[1:n],b[1:k,1:1],w[1:k,1:N],c[0:N],a[1:20,1:2],  
  c[1:N,1:1],re,im[1:N];  
  read(h,f);  
  
for j=1 step 1 until k do  
  begin b[j,1]=f[N+j];  
    for i=N step -1 until 1 do  
      w[j,N-i+1]=f[i+j-1];  
  end;  
  
  least squares solution(w,c,b,N,N,1,singular);  
  a[0]=1; for i=1 step 1 until N do a[i]=c[i,1];  
  if N=1 then begin a[1,1]=ln(abs(a[1]))/n;  
    a[1,2]=0; n=1; go to E6 end;  
  
  if N=2 then  
  begin p=a[1]; q=a[2];  
    delta=p*p-4*q;  
    if delta>0 then begin delta=sqrt(delta);  
      a[2,2]=a[1,2]=0;  
      a[1,1]=(-p-delta)/2;
```

```

        s[2,1]=(-p+delta)/2;
        m=2; goto E4;
        end;
E1: if delta=0 then begin s[1,2]=0; s[1,1]=-p/2;
        go to E3; end;
        delta=sqrt(-delta);
        s[1,1]=-p/2; s[1,2]=delta/2;
E3:m=1; go to E4;
end;
Eairstow(N,n,v-7,v-7,rc,im,nd);
m=1; i=1;
E2: if im[i]=0 then begin s[n,1]=re[i];
        s[n,2]=0; i=i+1; go to E7 end;
s[n,1]=re[i]; s[n,2]=abs(im[i]);
i=i+2;
E7: if i<N then begin m=m+1;go to E2 end;
E4: for i=1 step 1 until n do
if s[i,2]=0 then s[1,1]=ln(abs(s[i,1]))/n
        else begin r=s[i,1]; u=s[i,2];
        s[1,1]=ln(sqrt(r*r+u*u))/n;
        if r=0 then begin if u>0 then s[1,2]=1.57079632
        else s[1,2]=4.7178697;
        go to E7 end;
        u=arctan(u/r);
        s[1,2]=if r<0 then (3.14159265+u)/n else
        if u<0 then (6.2831853+u)/n else u/n;
        E7:end;
for i=1 step 1 until n do
begin r=s[i,1];
        for j=i+1 step 1 until n do
        if r<s[j,1] then begin u=s[j,1]; s[j,1]=r; r=u;
        u=s[j,2]; s[j,2]=s[i,2]; s[1,2]=u;
        end;
        s[i,1]=r;
end;
E6:
netoutput(0);
format('%.123.45678e');

```

```
for i=1 step 1 until n do
print('?',s[i,1],s[i,2]);
go to B5;
singular:setoutput(0); print('?macierz osobliwa'); go to B5;
nd:setoutput(0); print('?nie ma czynnika kwadratowego');
end;
B5:end ?
```

## LITERATURA

### Do części I.

1. N.I. Achieser : Teoria aproksymacji, Warszawa, 1957, P.N.
2. L.A. Lusternik, S.I. Sobolew : Elementy analizy funkcyjnej, Warszawa, 1959, P.N.
3. K. Maurin : Metody przestrzeni Hilberta, Warszawa, 1959, P.N.
4. R. Sikorski : Funkcje rzeczywiste t.II, Warszawa, 1959, M.N.
5. W.I. Smirnov, N.A. Lebedew : Konstruktywna teoria funkcji kompleksnego argumentu, Moskwa-Leningrad, 1964, Izd.Nauka
6. G. Doetsch : Praktyka przekształcenia Laplace'a, Warszawa, 1964, P.N.
7. - : Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace -Transformation, Basel u. Stuttgart, 1970, Birkhäuser Verlag

### Do części II.

8. W.H. Kruux : Transient synthesis in the time domain, IRE Trans., 1954, Vol. CT-1, No.3
9. A. Crescenzi : Sull'ortonormalizzazione di un particolare sistema di funzioni, Atti Accad. Lincei, 1956, Vol.20, No.2
10. H. Haggias : Signal theory, IRE Trans., 1956, Vol. CT-3, No.4
11. H.L. Armstrong : On finding an orthonormal basis for representing transients, IRE Trans., 1957, Vol. CT-4, No.3
12. - : On the representation of transients by series of orthogonal functions, IRE Trans., 1954, Vol. CT-6, No.4
13. D.C. Beal : Orthonormal exponentials, Proc. National Electronic Conference, 1962, Vol.18
14. F.B. Clement : On completeness of basis functions used for signal analysis, SLM Review, 1963, Vol.5, No.2



15. B.Liu : Matching of initial behavior in time domain approximation, Journ. Franklin Inst., 1964, Vol. 277, No.2
16. J.H.Mendel : A unified approach to the synthesis of orthonormal exponential functions useful in system analysis, Preprints of JACC, 1965
17. R.Faley, N.Siener : Fourier transform in the complex domain, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XIX, N.Y., 1957, (istniczje wyd.roz.)
18. O.Szász : Über die approximation stetiger Funktionen durch linearen Aggregaten von Potenzen, Math. Ann., 1916, Vol.77
19. J.Antoniewicz : Tablice funkcji dla inżynierów, Warszawa, 1969, P.H

Do części III.

20. E.G.Gilbert : Linear system approximation by differential analyser simulation of orthonormal approximation functions, IRE Trans., 1959, Vol.CT-6, No.4
21. T.Kitahori : Applications of orthogonal functions to the determination of process dynamic characteristics and to the construction of self-optimizing control systems, Proc.I I&C Congress, Moscow, 1960, Vol.1
22. K.Mishkin, L.Braun : Adaptacyjne procesy sterowania autostycznej, Warszawa, 1961, WNT
23. L.Braun, K.Mishkin, J.G.Truxal : On the approximate identification of process dynamics in computer-controlled adaptive system, Proc. I I&C Congress, Moscow, 1960, Vol.4
24. T.Y.Young, E.W.Higgins : Complementary signals and orthogonalised exponentials, IRE Trans., 1962, Vol.CT-9, No.4

25. R.J.A. Paul : Orthogonal functional approximations to linear dynamical systems, Proc. IEEE, 1964, Vol.111, No.11
26. J.L.Douce, P.D.Roberts : Orthogonal functions, Control, 1964, Vol.6
27. J.G. Koceranov : Ob approksimacii zadannykh vremennykh funktsij s pomoc'ju eksponencjalnykh polinomov, Radiotekhnika, 1965, t.10, No.5
28. R.L. De Donough, R.L. Huggins : Best least-squares representation of signals by exponentials, IRE Trans., 1968, Vol. 10-15, No.4
29. A. Marzollo : On the mean square approximation of a function with a linear combination of exponentials, Internat. Jour. Control, 1969, Vol.9, No.1
30. K. Kajs : Metody identyfikacji elementow napędowych, Warszawa, 1970, P.E .
31. A. Ratajczak : O pewnych cechach aproksymacji charakterystyk częstotliwości, Prace Instytutu Elektrotechniki, 1970, Rok XVIII, Zeszyt 63
32. H. Jórceki : Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem, Warszawa, 1971, JNT.

