

Zadania z podstaw kształtowania elementów konstrukcji

Podręczniki – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Budownictwa i Architektury
ul. Nadbystrzycka 40
20-618 Lublin

Cyprian Komorzycki
Przemysław Golewski
Tomasz Sadowski

Zadania z podstaw kształtowania elementów konstrukcji



Politechnika Lubelska
Lublin 2011

Recenzent:
prof. dr hab. inż. Miron Czerniec

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2011

ISBN: 978-83-62596-36-2

Wydawca: Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej
Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej
ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl
www.biblioteka.pollub.pl

Druk: ESUS Agencja Reklamowo-Wydawnicza Tomasz Przybylak
www.esus.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl
Nakład: 100 egz.

Spis treści

Wstęp	7
1. Pręty rozciągane i ściskane	9
1.1. Pręty podtrzymujące elementy sztywne	12
1.2. Wymiana prętów w kratownicach płaskich	18
1.3. Wyznaczanie przekrojów poprzecznych prętów kratownic	20
1.4. Obliczanie przekrojów poprzecznych prętów z uwzględnieniem możliwości utraty stateczności	24
1.5. Zadania statycznie niewyznaczalne	27
1.6. Słupy betonowe i żelbetowe	39
2. Pręty skręcane	40
2.1. Pręty o przekrojach kołowych	40
2.2. Pręty o przekrojach cienkościennych otwartych	42
2.3. Pręty o przekrojach cienkościennych zamkniętych	43
2.4. Układy statycznie niewyznaczalne	47
3. Belki	49
3.1. Belki o przekrojach poprzecznych prostokątnych	49
3.2. Belki o przekrojach poprzecznych kołowych	53
3.3. Belki o przekrojach poprzecznych rurowych niekołowych	56
3.4. Belki o przekrojach z kształtowników hutniczych i innych niekołowych	58
3.5. Zadania statycznie niewyznaczalne	69
3.6. Zadania różne	72
4. Wybrane przypadki wytrzymałości złożonej	77
5. Połączenia spawane	97
6. Połączenia nitowe	99
7. Zagadnienia związane z wybranymi charakterystykami geometrycznymi figur płaskich	103
Dodatek	109
8. Zastosowanie studenckiej wersji programu Abaqus przy rozwiązywaniu zadań z wytrzymałości materiałów	109
8.1. Informacje dotyczące programu Abaqus	109
8.2. Informacje dotyczące wersji studenckiej Abaqus	110
8.3. Układ prętowo – tarczowy statycznie niewyznaczalny	111
8.4. Ukośne zginanie	129

Wstęp

Wytrzymałość materiałów jako przedmiot nauczania pozwala rozwiązywać w praktyce dwa zagadnienia, a mianowicie zadanie kształtowania (konstruowania, projektowania) i zadanie sprawdzania (kontroli) konstrukcji. **Zadanie kształtowania** polega na ustaleniu wymiarów nieistniejącego elementu zgodnie z wymogami statyki i wytrzymałości materiałów. Milcząco stawianym oczekiwaniem w przypadku realizacji zadania kształtowania jest projektowanie optymalne. **Zadanie kontroli** polega na sprawdzeniu spełnienia wymogów wytrzymałościowych przez element już istniejący.

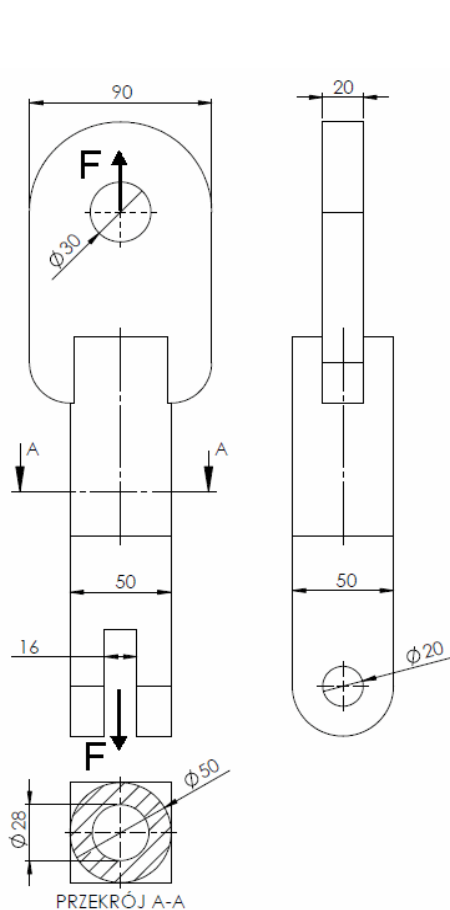
Rozgraniczenie rozwiązywania tych dwóch zadań w przypadkach nieco bardziej złożonych konstrukcji jest trudne i przy ograniczonych technikach obliczeniowych mało racjonalne. W takich przypadkach na podstawie założeń wyjściowych dokonujemy obliczeń głównych wymiarów i przyjmujemy pozostałe sprowadzając zagadnienie do zadania kontroli. Gdy uzyskane wyniki znacząco odbiegają od oczekiwanych konstrukcję korygujemy i obliczenia powtarzamy.

Kształtowanie optymalne jest łatwe do realizacji dla prostych przypadków wytrzymałości na przykład obliczenie przekroju poprzecznego pręta rozciąganego. Zbiór zadań „**Zadania z podstaw kształtowania elementów konstrukcji**” obejmuje wybrane proste elementy do zwymiarowania, a jego głównym celem jest utrwalenie wiadomości ze statyki i wstępnego kursu wytrzymałości materiałów. Położony jest również nacisk na wyrobienie nawyku korzystania z odpowiednich norm, tabel i zaleceń. Pożytecznym uzupełnieniem jest dodatek przedstawiający dydaktyczną wersję programu Abaqus przydatną przy rozwiązywaniu zadań z wytrzymałości materiałów.

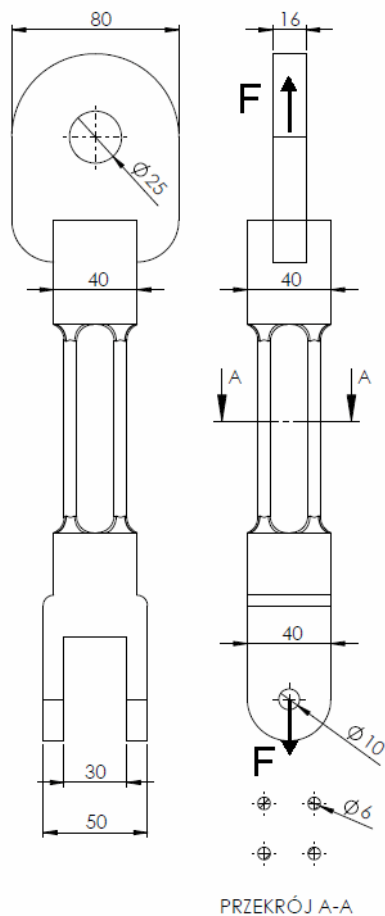
Autorzy

1. Pręty rozciągane i ściskane

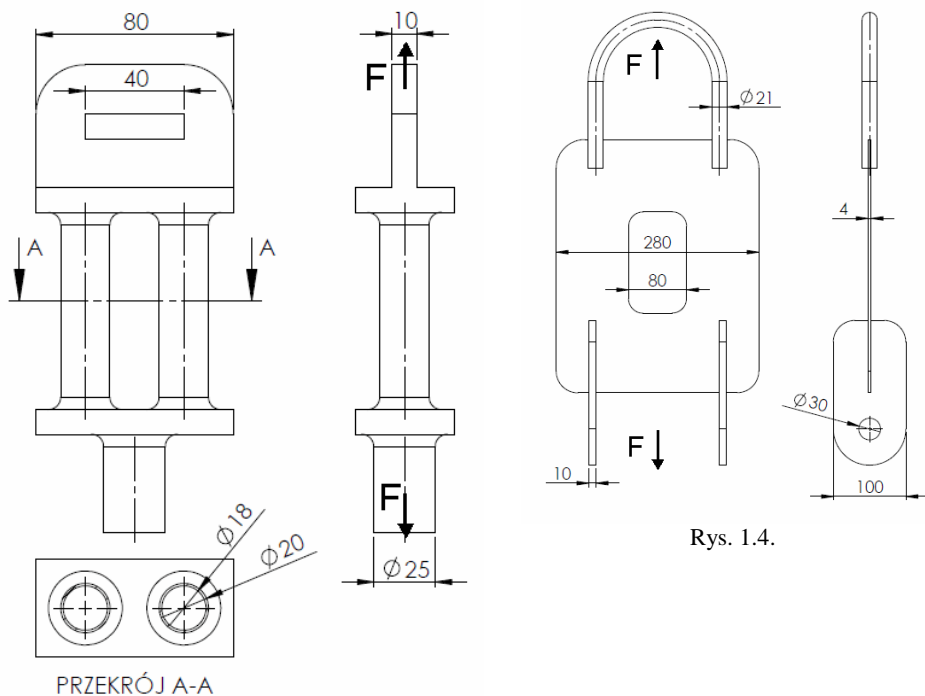
1.1. Na rysunkach pokazano cztery elementy będące w stanie jednoosiowego rozciągania siłą F : a) 36kN, b) 28kN, c) 22kN, d) 40kN. Należy określić jakie naprężenia panują w przekrojach najbardziej wyężonych. Wymiary podano w milimetrach.



Rys. 1.1.

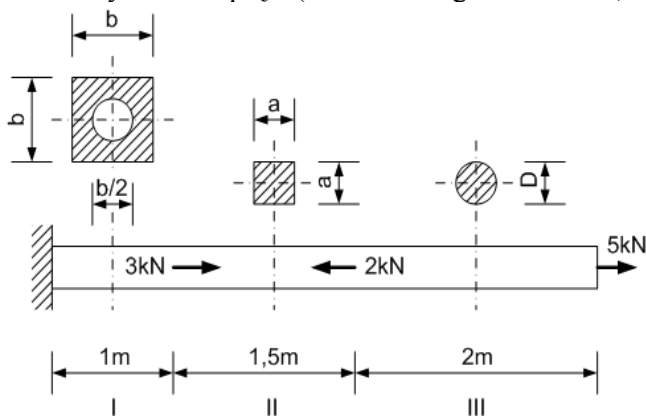


Rys. 1.2.



Rys. 1.3.

1.2. Pręt składający się z trzech odcinków (Rys. 1.5), o różnych przekrojach, tworzących całość jest jednym końcem zamurowany i obciążony jak na rysunku. Znajac naprężenia dopuszczalne $k_t=80\text{MPa}$ dla materiału pręta należy wyznaczyć parametry poszczególnych przekroi: D , a oraz b . Obliczyć ile wyniesie całkowite wydłużenia pręta (moduł Younga $E=210\text{GPa}$).



Rys. 1.5.

Odpowiedź: $D > 9,92\text{mm}$, $a > 6,12\text{mm}$, $b > 9,6\text{mm}$, $\Delta l = 1,712\text{mm}$

1.3. Z jakiego materiału wykonane są rurki układu pokazanego na rysunku 1.6, jeśli wiadomo, że przy obciążeniu $Q=2T$ przemieszczenie wolnego końca wyniosło $\Delta l = 1,2\text{mm}$.

	E [GPa]
stal	210
miedź	115
aluminium	69

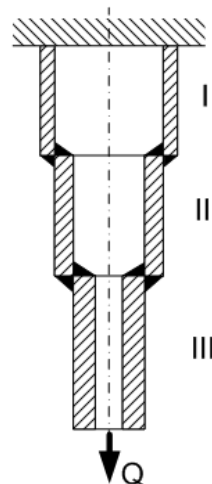
Dane (wymiary poszczególnych segmentów I, II, III):

$l_1 = 0,5\text{m}$, $D_1 = 50\text{mm}$, $d_1 = 45\text{mm}$

$l_2 = 1,0\text{m}$, $D_2 = 45\text{mm}$, $d_2 = 38\text{mm}$

$l_3 = 1,5\text{m}$, $D_3 = 38\text{mm}$, $d_3 = 30\text{mm}$

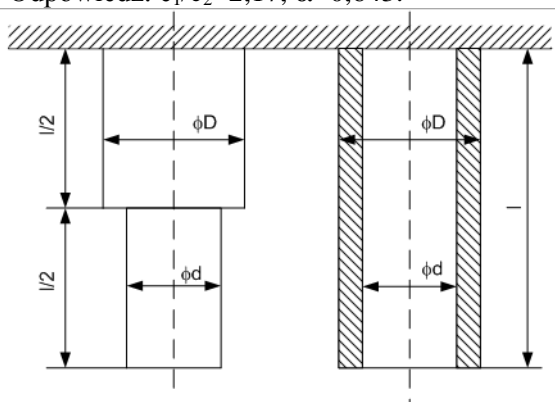
Odpowiedź: Rurki wykonano z miedzi.



Rys. 1.6.

1.4. Obliczyć i porównać wartości jednostkowej sztywności rozciągania dwóch prętów przedstawionych na rysunku 1.7. Pręty wykonane są z tego samego materiału o module Younga E. Iloraz średnic jest równy $\alpha = d/D = 0,8$. Dla jakiej wartości α jednostkowe sztywności rozciągania obu prętów będą jednakowe?

Odpowiedź: $c_1/c_2 = 2,17$, $\alpha = 0,643$.



Rys.1.7.

Jednostkową sztywność rozciągania określa się jako wartość siły potrzebnej do wywołania jednostkowego zwiększenia lub zmniejszenia

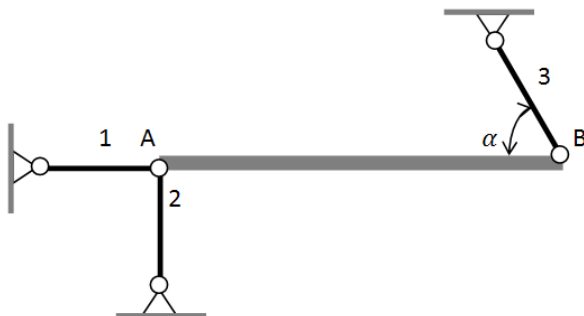
długości pręta, czyli $c = \frac{P}{\Delta l}$,

ponieważ $\Delta l = \frac{Pl}{EA}$, więc

$$c = \frac{EA}{l}$$

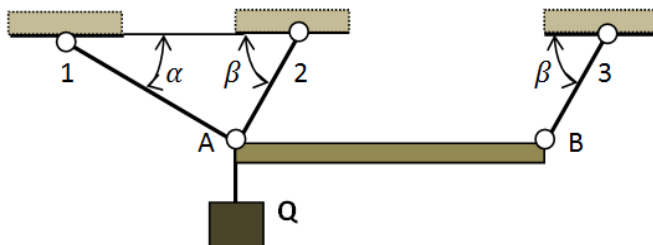
1.1. Pręty podtrzymujące elementy sztywne

1.5. Jednorodna sztywna belka AB o ciężarze Q utrzymywana jest w położeniu poziomym przez trzy pręty jak pokazuje Rys.1.8. Zaprojektować przekroje poprzeczne prętów 1, 2 i 3. Dane: $Q=900 \text{ kN}$; $k_t=k_c=120 \text{ MPa}$; $\alpha=60^\circ$.



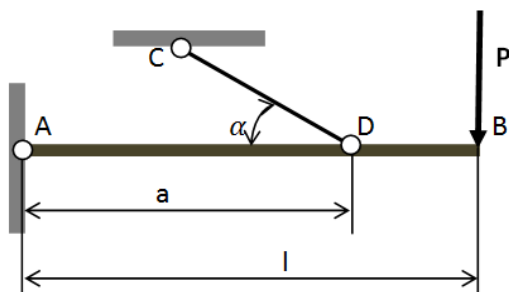
Rys. 1.8

1.6. Sztywna nieważka belka AB utrzymywana jest przez trzy pręty. W węźle A tego układu zawieszono ciężar Q jak pokazuje Rys.1.9. Obliczyć wymagane przekroje poprzeczne prętów. Dane: $Q=800 \text{ kN}$; $k_t=k_c=160 \text{ MPa}$; $\alpha=30^\circ$; $\beta=60^\circ$.



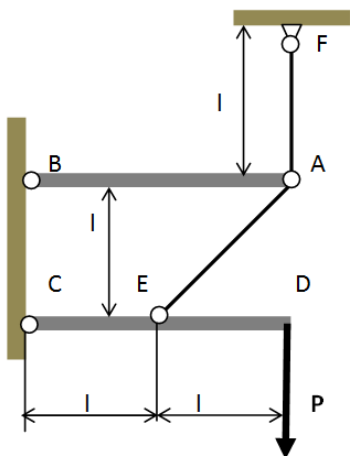
Rys. 1.9.

1.7. Obliczyć przekrój poprzeczny pręta CD podtrzymującego jednorodną sztywną belkę AB o ciężarze Q i obciążoną na końcu siłą P jak pokazuje Rys.1.10. Dane: $Q=20 \text{ kN}$; $P=240 \text{ kN}$; $l=5 \text{ m}$; $a=4 \text{ m}$; $\alpha=30^\circ$; $k_t=160 \text{ MPa}$.

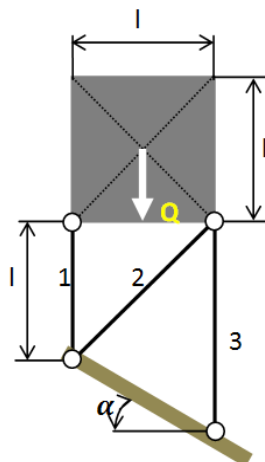


Rys. 1.10.

1.8. Dwie jednorodne sztywne belki AB i CD o ciężarze Q każda podtrzymywane są przez pręty AE i AF (Rys.1.11). Zaprojektować przekroje poprzeczne prętów i wybrać najbliższy dowolny kształtownik hutniczy spełniający te warunki wg PN. Obliczyć pionowe przemieszczenie punktu D. Dane: $Q=40$ kN; $P=120$ kN; $l=2$ m; $k_r=140$ MPa; $E=2 \cdot 10^5$ MPa.



Rys. 1.11.

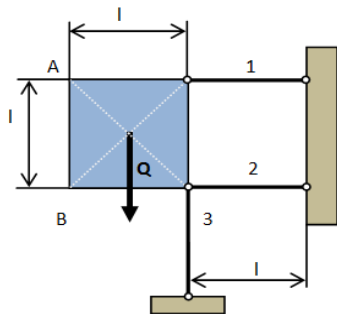


Rys. 1.12.

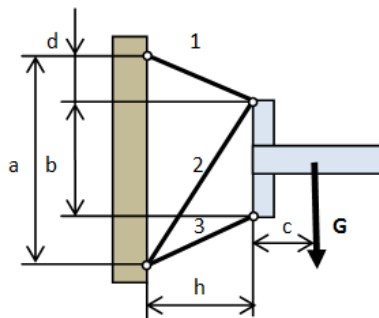
1.9. Blok o ciężarze Q podparty jest prętami jak pokazuje Rys.1.12. Obliczyć przekroje poprzeczne prętów. Dane: $Q=800$ kN; $l=1$ m; $\alpha=30^\circ$; $k_r=k_c=160$ MPa.

1.10. Zaprojektować pręty podtrzymujące jednorodny ciężar Q pokazany na Rys.1.13. Przyjąć pręty w postaci rur wg PN-EN 10210-2:2000. Obliczyć odchylenie od pionu ścianki AB. Dane: $Q=600$ kN; $l=2$ m; $k_r=k_c=140$ MPa; $E=2 \cdot 10^5$ MPa.

1.11. Zaprojektować pręty utrzymujące pomost o ciężarze G pokazany na Rys.1.14. Dane: $G=300\text{ kN}$; $a=1,6\text{ m}$; $b=80\text{ cm}$; $h=60\text{ cm}$; $c=50\text{ cm}$; $d=40\text{ cm}$; $k_r=k_c=160\text{ MPa}$.



Rys. 1.13.

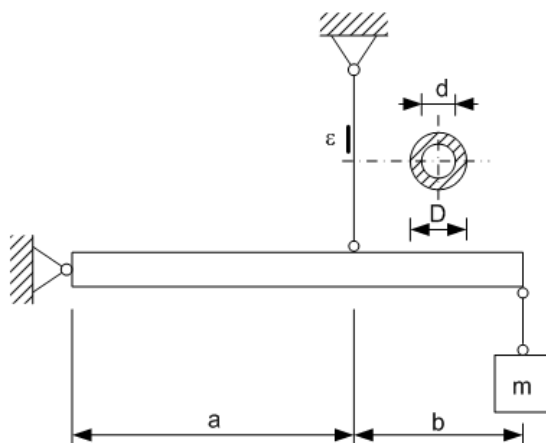


Rys. 1.14.

1.12. Sztywna belka (Rys. 1.15) jest jednym końcem zamocowana przegubowo w ścianie oraz podwieszona do sprężystego pręta o module Younga E , na którym naklejony jest czujnik tensometryczny. Jaka masa m została powieszona na końcu sztywnej belki jeśli wskazania tensometru wyniosły ε .

Dane:

a [cm]	b [cm]	D [mm]	d [mm]	ε [$\mu\text{m}/\text{m}$]	E [GPa]	g [m/s^2]
120	40	20	18	240	210	9,81



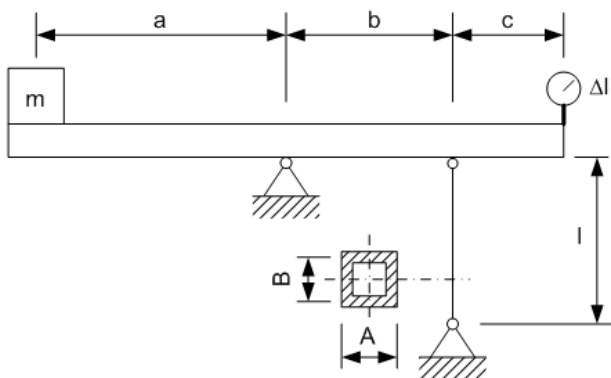
Rys. 1.15.

Odpowiedź: $m=229,99\text{ kg}$

1.13. Sztywna belka (Rys. 1.16) jest zamocowana do fundamentu za pomocą przegubu oraz do sprężystego pręta o module Younga E i długości l . Na jednym z końców belki zamocowany jest czujnik zegarowy. Jaka masa m znajduje się na drugim końcu belki, jeśli wskazanie czujnika wyniosło Δl .

Dane:

a [cm]	b [cm]	c [cm]	l [m]	E [GPa]	A [mm]	B [mm]	Δl [mm]	g [m/s ²]
50	30	60	1.6	70	40	30	0.57	9.81



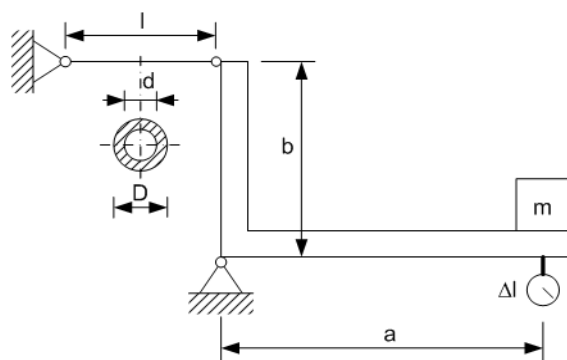
Rys. 1.16

Odpowiedź: $m=355,88\text{kg}$

1.14. Sztywny element konstrukcji (Rys. 1.17) w kształcie litery „L” jest zamocowany do fundamentu za pomocą przegubu oraz do sprężystego pręta o długości l o module Younga E . Na jednym z końców znajduje się czujnik zegarowy, który po nałożeniu masy m wskazał wartość Δl . Jaka masa został obciążony element.

Dane:

a [cm]	b [cm]	l [m]	E [MPa]	D [mm]	d [mm]	Δl [mm]	g [m/s ²]
150	60	2.5	210	28	10	0.43	9.81



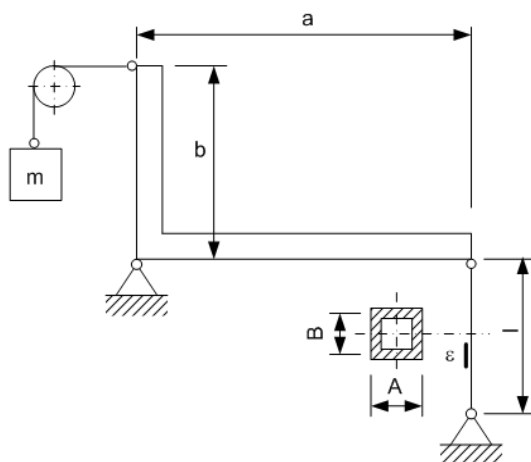
Rys. 1.17

Odpowiedź: $m=316,48\text{kg}$

1.15. Sztywny element konstrukcji (Rys. 1.18) w kształcie litery „L” jest zamocowany do fundamentu za pomocą przegubu oraz do sprężystego pręta o module Younga E na którym naklejony jest czujnik tensometryczny. Do jednego z końców przymocowana jest linka przerzucona przez krążek i utrzymująca masę m . Wyznaczyć masę m , jeśli wskazania tensometru wynoszą ε .

Dane:

a [cm]	b [cm]	l [m]	ε [$\mu\text{m}/\text{m}$]	E [GPa]	A [mm]	B [mm]	g [m/s^2]
170	40	1.3	120	70	32	20	9.81

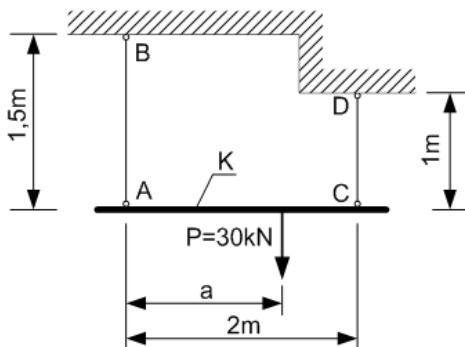


Rys. 1.18.

Odpowiedź: $m=2271\text{kg}$

1.16. Nieodkształcalny element K (Rys.1.19) podwieszono do nieodkształcalnego stropu za pośrednictwem dwóch sprężystych wieszaków AB i CD.

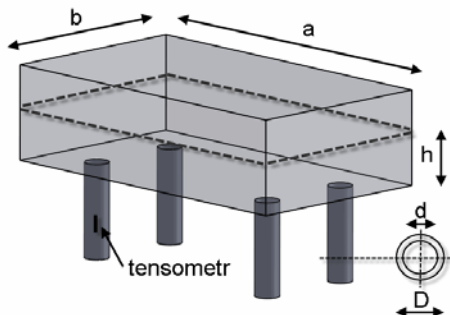
Wieszak AB jest wykonany ze stali ($E_s = 2 \cdot 10^5$ MPa) i ma średnicę $d_1 = 20$ mm, zaś wieszak CD z miedzi ($E_m = 1 \cdot 10^5$ MPa) i ma średnicę $d_2 = 25$ mm. Pozostałe dane jak na rysunku. Należy obliczyć wymiar „a” tak, aby element K po odkształceniu wieszaków pozostał poziomy i określić naprężenia normalne w wieszakach.



Rys. 1.19

Odpowiedź: $\sigma_{AB}=44\text{MPa}$, $\sigma_{CD}=33\text{MPa}$, $a=1,08\text{m}$

1.17. Zbiornik przedstawiony na rysunku 1.20 jest napełniany cieczą o ciężarze właściwym γ . Na jednej z nóg naklejony jest tensometr, którego wskazania przed napełnieniem wynosiły zero. Do jakiej wysokości h napełniono zbiornik, jeśli wskazania tensometru wynoszą ε ?



Rys. 1.20

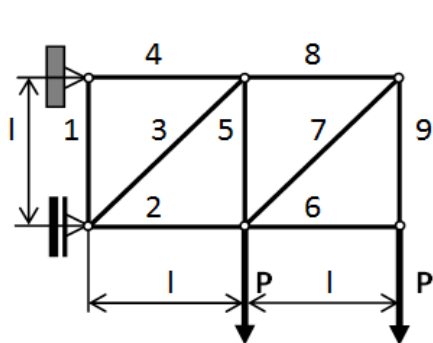
Dane:

ε [$\mu\text{m/m}$]	E [GPa]	D [mm]	d [mm]	γ [N/m ³]	a [m]	b [m]
180	210	50	40	9810	4	1.5

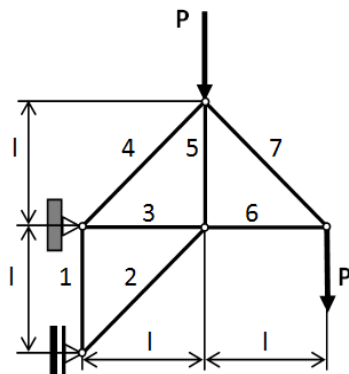
Odpowiedź : $h = 1,816$ m

1.2. Wymiana prętów w kratownicach płaskich

1.18. Zaprojektować przekroje prętów nr 2,3 i 4 kratownicy przedstawionej na Rys.1.21. Siły w w/w prętach wyznaczyć metodami Rittera i Culmanna. Dane: $P=80 \text{ kN}$; $l=1 \text{ m}$; $k_r=k_c=160 \text{ MPa}$.



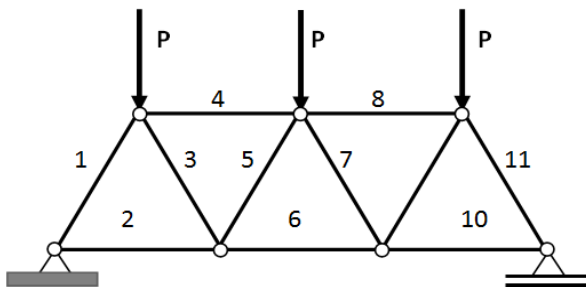
Rys. 1.21.



Rys. 1.22.

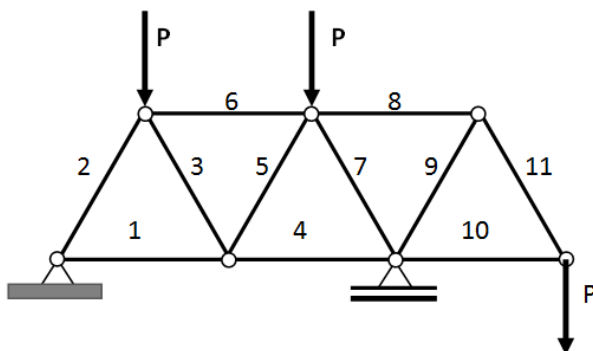
1.19. Zaprojektować pręty nr 4,5 i 6 kratownicy pokazanej na Rys.1.22. Siły w prętach wyznaczyć metodami Rittera i Culmanna. Dane: $P=100 \text{ kN}$; $l=1 \text{ m}$; $k_r=k_c=120 \text{ MPa}$.

1.20. Zaprojektować pręty nr 2,3 i 4 kratownicy pokazanej na Rys.1.23. Przyjąć przekroje dwuteowe prętów wg PN-91/H-93407 Siły w prętach wyznaczyć stosując metody Rittera i Culmanna. Dane: $P=80 \text{ kN}$; $l=1 \text{ m}$ - długości prętów; $k_r=k_c=120 \text{ MPa}$.



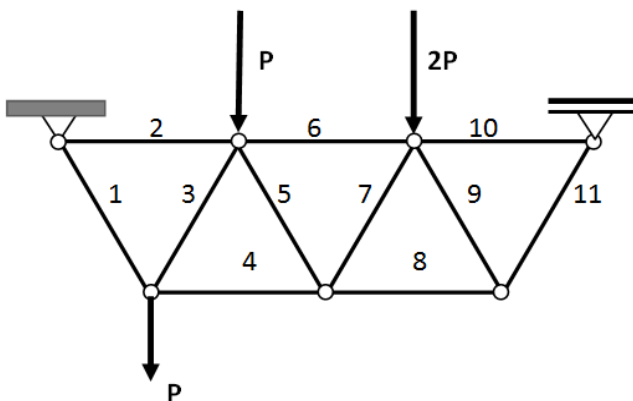
Rys. 1.23.

1.21. Wymienić pręty nr 4,5 i 6 kratownicy przedstawionej na Rys.1.24. Dobrać pręty w postaci teowników wg PN-EN 10055:1999. Siły w prętach wyznaczyć stosując metody Rittera i Culmanna. Dane: $P=160$ kN; $l=2$ m-długości prętów; $k_t=k_c=150$ MPa.



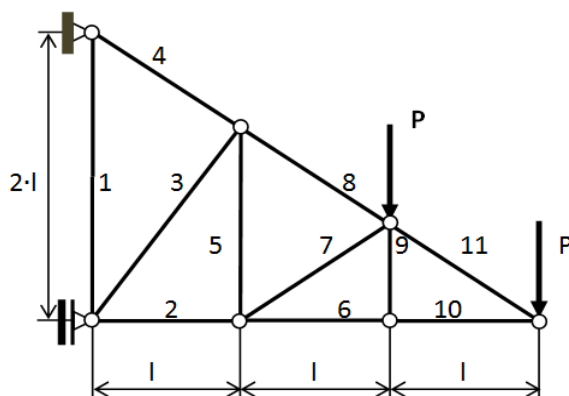
Rys. 1.24.

1.22. Zaprojektować pręty nr 6,7 i 8 kratownicy pokazanej na Rys.1.25. Siły w w/w prętach wyznaczyć metodami Rittera i Culmanna. Dane: $P=50$ kN; $l=1$ m - długości wszystkich prętów; $k_t=k_c=160$ MPa.



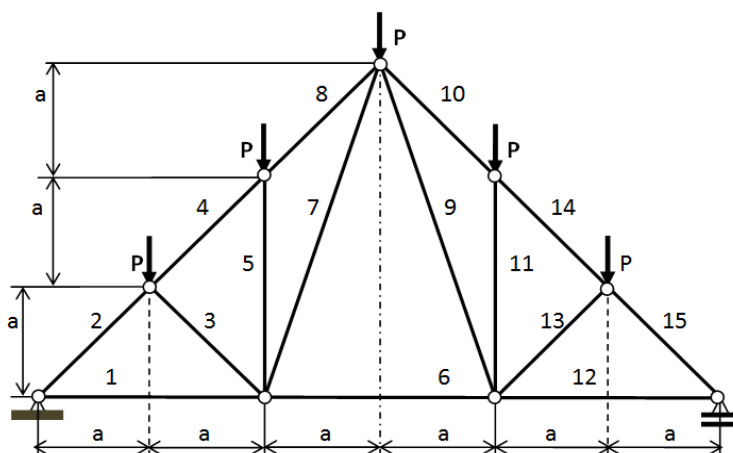
Rys. 1.25

1.23. Zaprojektować pręty nr 2,5 i 8 w kratownicy na Rys.1.26.. Dane; $P=90$ kN; $l=1$ m; $k_t=k_c=120$ MPa.



Rys. 1.26.

1.24. Zaprojektować pręty nr 6, 7 i 8 kratownicy pokazanej na Rys.1.27. Siły w prętach wyznaczyć metodami Rittera i Culmanna. Przekroje poprzeczne prętów dobrać wg PN. Dane: $P=60 \text{ kN}$; $a=1 \text{ m}$; $k_r=k_c=120 \text{ MPa}$.

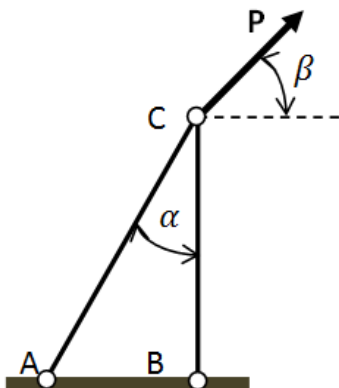


Rys. 1.27.

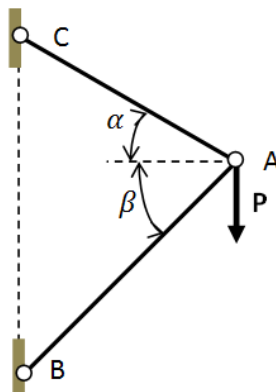
1.3. Wyznaczanie przekrojów poprzecznych prętów kratownic

1.25. Zaprojektować pręty AC i BC wspornika obciążonego jak pokazuje Rys.1.28. Pręty przyjąć w postaci rurek z duralu wg PN-EN 754-1:2002. $P=10 \text{ kN}$; $\alpha=30^\circ$; $\beta=45^\circ$; $k_r=k_c=75 \text{ MPa}$.

1.26. Dobrać przekroje poprzeczne prętów stalowych 1 i 2 (Rys.1.29) takie ażeby przemieszczenie węzła A było pionowe. Obliczyć wartość tego przemieszczenia. Dane: $P=200$ kN; długość pręta $AC=1$ m; $\alpha=30^\circ$; $\beta=45^\circ$; $k_r=k_c=150$ MPa; $E=2 \cdot 10^5$ MPa.

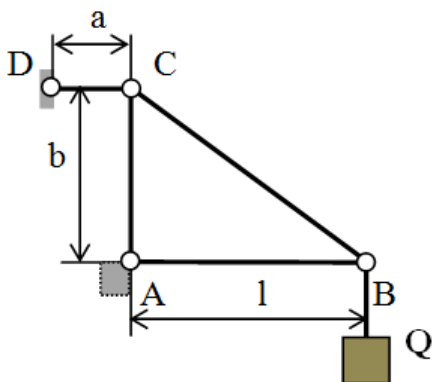


Rys. 1.28.

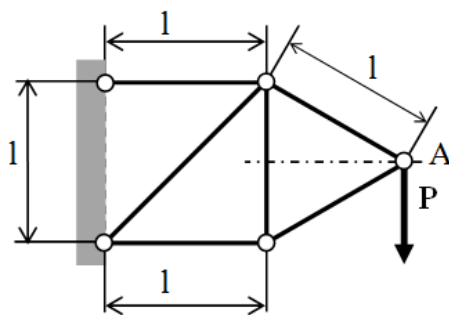


Rys. 1.29.

1.27. Zaprojektować pręty kratownicy pokazanej na Rys.1.30. Pręty przyjąć w postaci rur wg PN-EN 10210-2:2000. Obliczyć pionowe przemieszczenie węzła B. Dane: $Q=160$ kN; $l=4$ m; $a=50$ cm; $b=1,5$ m; $k_r=k_c=120$ MPa; $E=2 \cdot 10^5$ MPa.



Rys. 1.30.

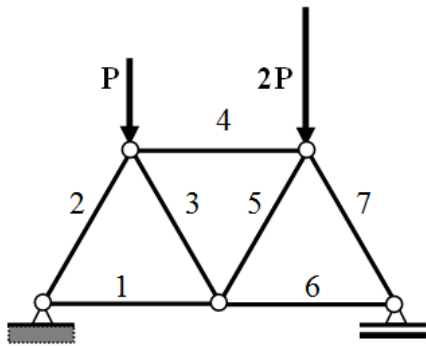


Rys. 1.31.

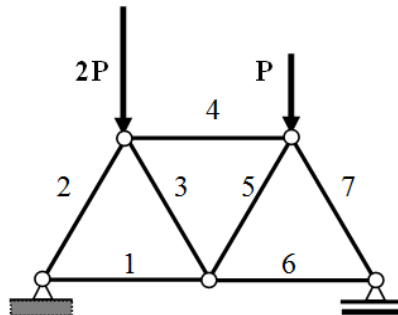
1.28. Zaprojektować pręty kratownicy obciążonej siłą P jak pokazuje Rys.1.31. Przyjąć pręty w postaci rur z duralu wg PN-EN 754-1:2002. Obliczyć pionowe przemieszczenie węzła A kratownicy.

$P=40 \text{ kN}$; $l=1 \text{ m}$; $k_r=k_c=800 \text{ MPa}$; $E=7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

1.29. Zaprojektować pręty kratownicy przedstawionej na Rys.1.32. Przyjąć przekroje poprzeczne prętów w postaci dwuteowników wg PN-91/H-93407. Siły w prętach wyznaczyć metodą analityczną równoważenia węzłów i wg planu sił Cremony. Dane: $P=240 \text{ kN}$; $l=2 \text{ m}$ - długości poszczególnych prętów; $k_r=k_c=120 \text{ MPa}$.



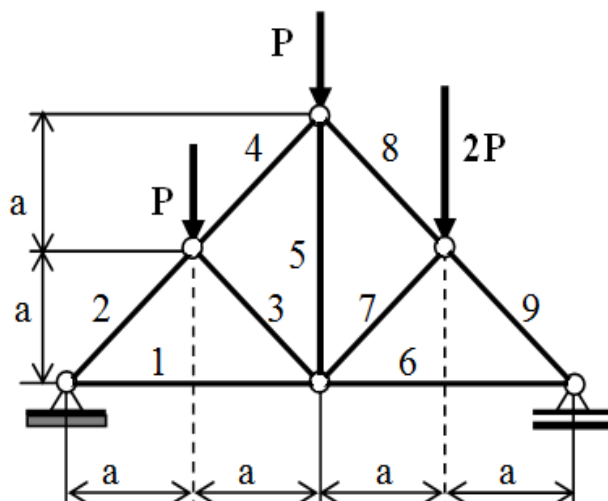
Rys. 1.32.



Rys. 1.33.

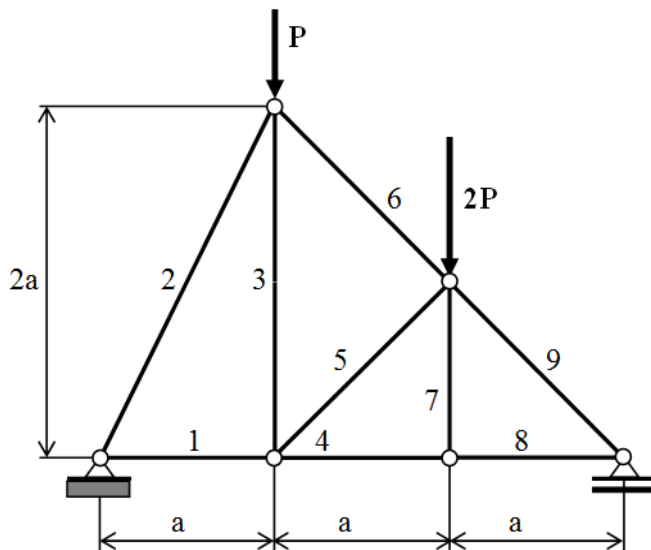
1.30. Zaprojektować pręty kratownicy pokazanej na Rys.1.33. Pręty przyjąć w postaci rur wg PN-EN 10210-2:2000. Wartości sił wyznaczyć stosując metodą analityczną równoważenia węzłów i plan sił Cremony. Dane: $P=80 \text{ kN}$; $l=1 \text{ m}$ - długości prętów; $k_r=k_c=140 \text{ MPa}$.

1.31. Obliczyć przekroje poprzeczne prętów kratownicy pokazanej na Rys.1.34. Dane: $P=200 \text{ kN}$; $a=1 \text{ m}$; $k_r=k_c=160 \text{ MPa}$.



Rys. 1.34.

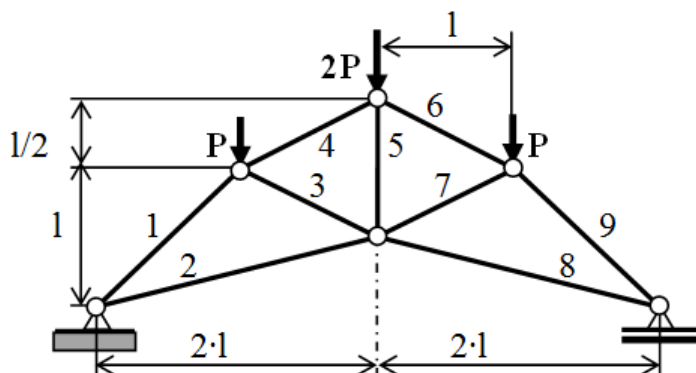
1.32. Zaprojektować pręty kratownicy pokazanej na Rys.1.35. Siły w prętach wyznaczyć metodą analityczną równoważenia węzłów i wg planu sił Cremony.
Dane: $P=60 \text{ kN}$; $a=1 \text{ m}$; $k_t=k_c=100 \text{ MPa}$.



Rys. 1.35.

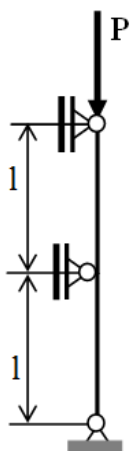
1.4. Obliczanie przekrojów poprzecznych prętów z uwzględnieniem możliwości utraty stateczności

1.33. Zaprojektować kołowe przekroje poprzeczne prętów kratownicy pokazanej na Rys.1.36 z uwzględnieniem możliwości wyboczenia. Dane: $P=200$ kN; $l=1,5$ m; $k_t=k_c=120$ MPa; $R_H=220$ MPa; $R_e=280$ MPa; $E=2 \cdot 10^5$ MPa.

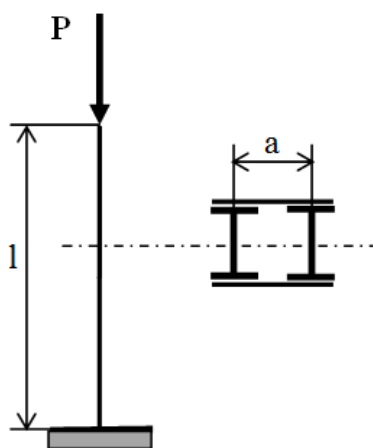


Rys. 1.36.

1.34. Obliczyć dopuszczalną wartość siły P jaką można obciążyć słup o średnicy d pokazany na Rys.1.37. z uwzględnieniem możliwości utraty stateczności. W przypadku wyboczenia niesprężystego zastosować wzór Johnsona-Ostenfelda. Dane: $l=2$ m; $d=15$ cm; $k_c=120$ MPa; $R_H=200$ MPa; $R_e=260$ MPa; $E=2 \cdot 10^5$ MPa.



Rys. 1.37.



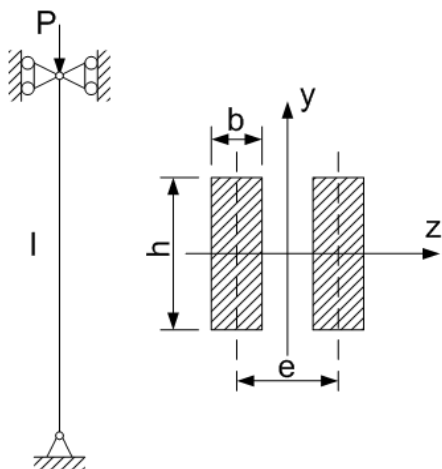
Rys. 1.38.

1.35. Przekrój poprzeczny słupa (Rys.1.38) stanowią dwa połączone ze sobą dwuteowniki 160 wg PN-91/H-93407. Zaprojektować minimalny wymiar rozstawu dwuteowników „a” przy którym można dopuścić największą siłę ściskającą P z uwzględnieniem możliwości utraty stateczności. Obliczyć wartość tej siły. Dane: $l=5\text{ m}$; $k_c=140\text{ MPa}$; $R_H=240\text{ MPa}$; $R_e=280\text{ MPa}$; $E=2\cdot 10^5\text{ MPa}$.

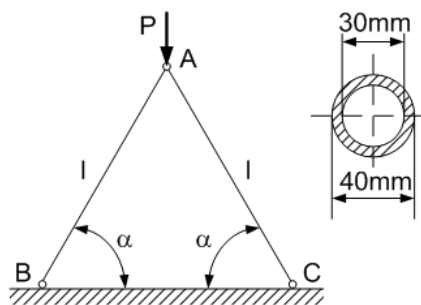
1.36. Bardzo smukły pręt (Rys.1.39) wykonano z dwu płaskowników połączonych tak, że tworzą ze sobą jedną całość. Na pręt działa osiowa siła ściskająca. Końce pręta podparte są przegubowo względem osi z oraz sztywno utwierdzone względem osi y.

Wyznaczyć wielkość rozsunęcia e płaskowników, przy założeniu, że współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie w kierunku osi z ma być dwa razy większy od analogicznego w kierunku osi y.

Odpowiedź:
$$e = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{h^2}{2} - b^2\right)}$$



Rys. 1.39.



Rys. 1.40.

1.37. Przy jakiej sile P pręty AB i AC (Rys.1.40) układu o długościach $l=1500\text{ mm}$ ulegną wyboczeniu, jeśli $\alpha=60^\circ$. Przekrój prętów stanowi rura aluminiowa o wymiarach jak na rysunku. Moduł sprężystości wzdłużnej dla materiału prętów $E=0,7\cdot 10^5\text{ MPa}$.

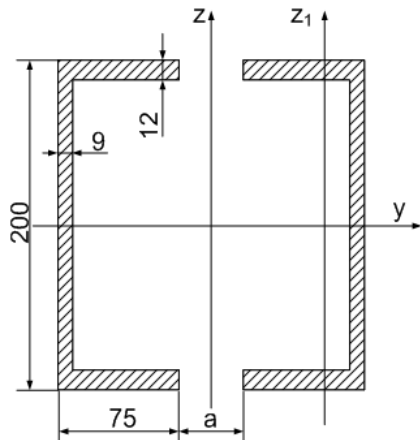
Odpowiedź: $P=45,68\text{ kN}$

1.38. Słup obciążony osiową siłą ściskającą P jest utworzony z dwóch ceowników (Rys. 1.41), rozsuniętych na taką odległość a, że $J_y = J_z$. Słup ma

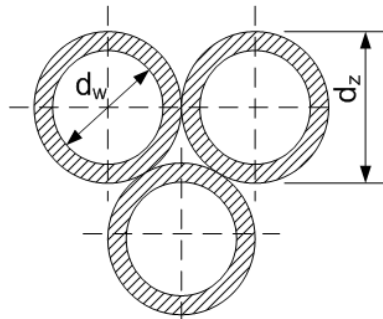
wysokość $L = 5\text{ m}$, jednym końcem jest utwierdzony, zaś drugi jest swobodny. Wyznaczyć wartość dopuszczalnej siły P oraz odległość a .

Dane : $R_e = 240\text{ MPa}$, $R_H = 200\text{ MPa}$, $E = 2.1 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $s_{gr} = 100$.

Odpowiedź: $P_{kr} = 1109\text{ kN}$



Rys. 1.41.



Rys. 1.42.

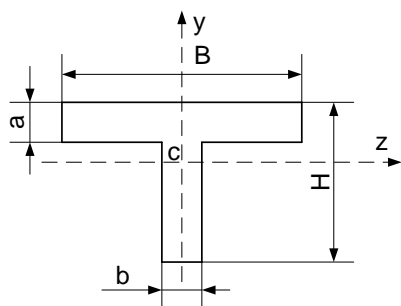
1.39. Jaką siłą ściskającą P możemy obciążyć słup o wysokości $l = 5\text{ m}$, utworzony z trzech połączonych ze sobą rur stalowych (Rys. 1.42)? Końce słupa traktować jako zamocowane przegubowo. Materiał St3, naprężenia dopuszczalne na ściskanie $k_c = 140\text{ MPa}$, $d_z = 8\text{ cm}$, $d_w = 6\text{ cm}$.

Odpowiedź: $P = 406\text{ kN}$

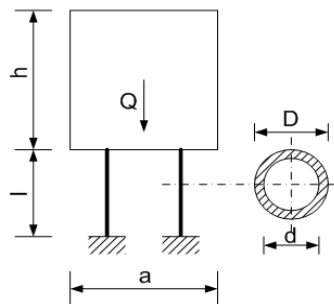
1.40. Stalowy pręt kratownicy (Rys. 1.43) bardzo smukły o długości l i przekroju teownikowym jest ściskany. Końce pręta połączone są przegubowo z węzłami kratownicy. Wyznaczyć siłę krytyczną pręta i siłę dopuszczalną, ściskającą przy współczynniku bezpieczeństwa $n_b = 2$. Dane: $B = 10\text{ mm}$, $E = 196\text{ GN/m}^2$, $l = 100\text{ cm}$, $a = 1\text{ mm}$, $H = 10\text{ mm}$, $b = 1\text{ mm}$.

Odpowiedź:

siła krytyczna $79,8\text{ N}$ siła dopuszczalna $39,2\text{ N}$



Rys. 1.43.



Rys. 1.44.

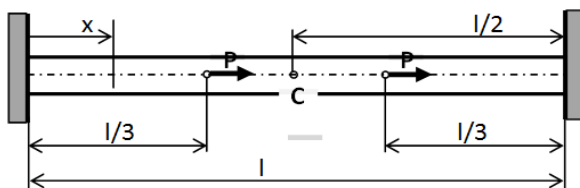
1.41. Zbiornik o podstawie kwadratu axa (Rys. 1.44) został ustawiony na czterech słupach o przekrojach rurowych. Wyznaczyć jego maksymalną wysokość h , jeśli będzie naplnięty cieczą, której ciężar właściwy wynosi $\gamma=9810\text{N/m}^3$. Dane: $l=1,2\text{m}$, $a=1,7\text{m}$, $D=50\text{mm}$, $d=40\text{mm}$, $k_r=120\text{MPa}$. Współczynnik zmniejszający β zależny od smukłości podany jest w tabeli

s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
β	1,00	0,98	0,95	0,92	0,89	0,85	0,80	0,74	0,68	0,62	0,55	0,48	0,42	0,37	0,32	0,28	0,25	0,22	0,20	0,18	0,16	0,14	0,13

Odpowiedź: $h < 3,348\text{m}$

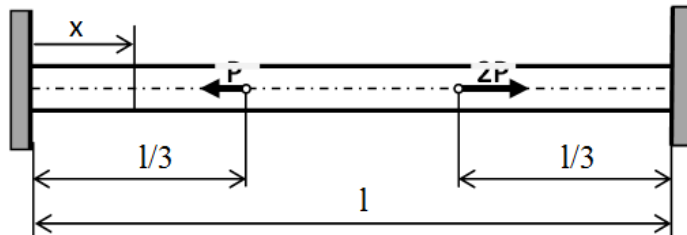
1.5. Zadania statycznie niewyznaczalne

1.42. Obliczyć średnicę pręta pokazanego na Rys.1.45 jeśli dopuszczalne są naprężenia $k_r=k_c=120\text{ MPa}$ i przemieszczenie punktu C równe $u_c \leq 1\text{ mm}$. Wykonać wykres sił normalnych w przekrojach poprzecznych $N(x)$. Pozostałe dane: $P=60\text{ kN}$; $l=3\text{ m}$; $E=2 \cdot 10^5\text{ MPa}$.



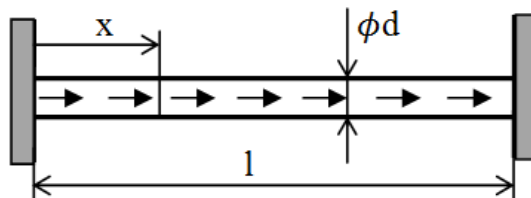
Rys. 1.45.

1.43. Obliczyć przekrój poprzeczny pręta zamocowanego i obciążonego jak przedstawia Rys.1.46. Dla pręta o takim przekroju wykonać wykresy sił normalnych w przekroju poprzecznym $N(x)$ i przemieszczeń poszczególnych punktów wzdłuż osi x $u(x)$. Dane: $P=240$ kN; $l=1,2$ m; $k_r=k_c=140$ MPa; $E=2\cdot 10^5$ MPa.



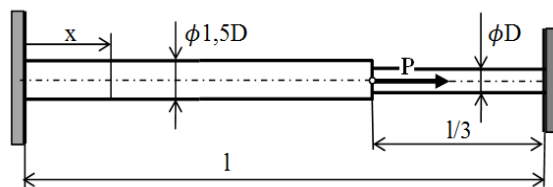
Rys. 1.46.

1.44. Pręt pryzmatyczny o średnicy d wpasowany został bez luzu i bez wcisku pomiędzy dwie nieodkształcalne ściany oraz poddany obciążeniu ciągłemu q jak pokazuje Rys.1.47. Wykonać wykres sił normalnych $N(x)$ oraz obliczyć wymaganą średnicę pręta. Dane: $q=60$ kN/m; $l=2$ m; $k_r=k_c=120$ MPa; $E=2\cdot 10^5$ MPa.



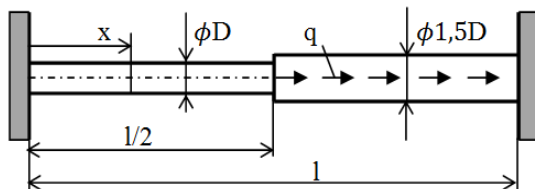
Rys. 1.47.

1.45. Obliczyć średnicę pręta stopniowanego obustronnie sztywno zamocowanego i obciążonego siłą P jak pokazuje Rys.1.48. Wykonać wykresy sił normalnych $N(x)$ i przemieszczeń $u(x)$. Dane: $P=300$ kN; $l=1,8$ m; $k_r=k_c=160$ MPa; $E=2\cdot 10^5$ MPa.



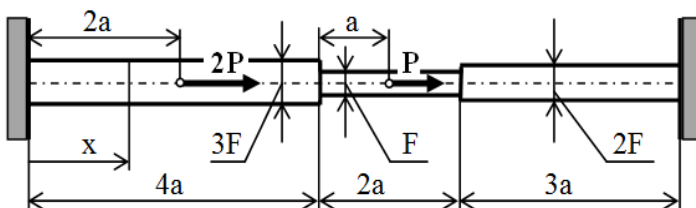
Rys. 1.48.

1.46. Zaprojektować średnice stopniowanego pręta zamocowanego i obciążonego jak pokazuje Rys.1.49. Wykonać wykres sił normalnych $N(x)$ i przemieszczeń $u(x)$. Dane: $q=180 \text{ kN/m}$; $l=1 \text{ m}$; $k_r=k_c=120 \text{ MPa}$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



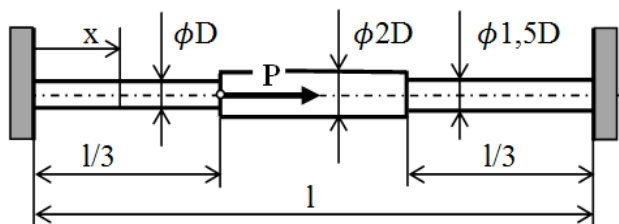
Rys. 1.49.

1.47. Obliczyć przekroje poprzeczne pręta stopniowanego zamocowanego i obciążonego jak pokazuje Rys.1.50. Wykonać wykresy sił normalnych $N(x)$ i naprężeń normalnych $\sigma(x)$ w przekrojach poprzecznych. Dane: $P=300 \text{ kN}$; $a=1 \text{ m}$; $k_r=k_c=150 \text{ MPa}$; $E=\text{const}$.



Rys. 1.50

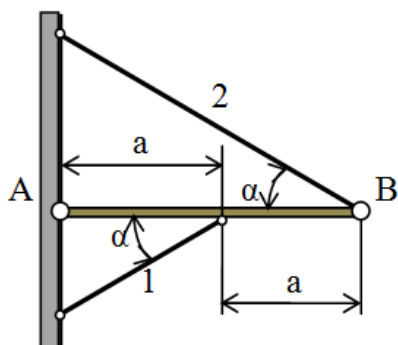
1.48. Zaprojektować wymiary poprzeczne pręta stopniowanego pokazanego na Rys.1.51. Wykonać dla tego pręta wykresy sił normalnych $N(x)$ i przemieszczeń osiowych $u(x)$. Dane: $P=240 \text{ kN}$; $l=1,8 \text{ m}$; $k_r=k_c=120 \text{ MPa}$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



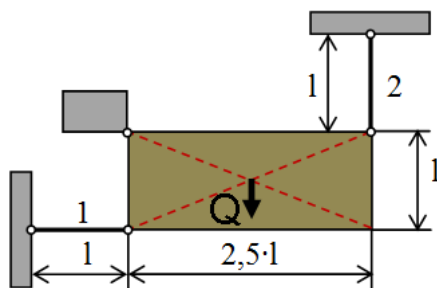
Rys. 1.51.

1.49. Zaprojektować przekroje prętów 1 i 2 podtrzymujących jednorodną sztywną belkę AB o ciężarze Q pokazaną na Rys.1.52. Obliczyć pionowe przemieszczenie końca B belki.

Dane: $Q=320 \text{ kN}$; $a=1 \text{ m}$; $\alpha=30^\circ$; $k_r=k_c=120 \text{ MPa}$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



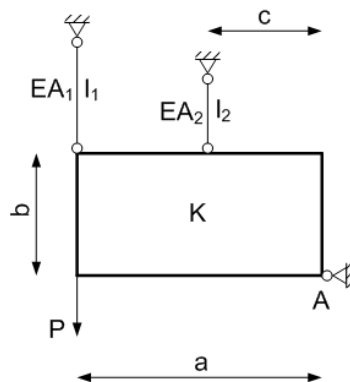
Rys. 1.52.



Rys. 1.53.

1.50. Zaprojektować pręty nr 1 i 2 podtrzymujące prostokątny jednorodny blok o ciężarze Q jak pokazuje Rys.1.53. Dane: $Q=800 \text{ kN}$; $l=1 \text{ m}$; $F_1/F_2=2$ -stosunek przekrojów poprzecznych prętów 1 i 2; $k_r=k_c=160 \text{ MPa}$.

1.51. Sztywna tarcza K (Rys. 1.54) jest zamocowana za pomocą przegubów do dwóch prętów oraz do ściany w punkcie A. Wyznaczyć dopuszczalną wartość siły P wiedząc, że dopuszczalne naprężenia na rozciąganie materiału prętów wynoszą k_r . Moduł Younga $E = 210 \text{ GPa}$.



Rys. 1.54.

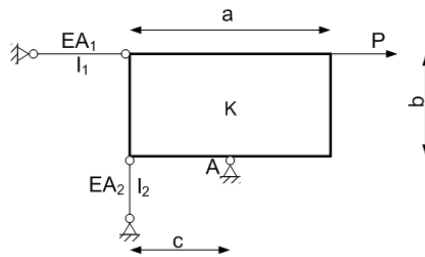
Dane:

	a [cm]	b [cm]	c [cm]	l_1 [m]	l_2 [m]	A_1 [cm ²]	A_2 [cm ²]	k_r [MPa]
1	35	15	15	0,25	0,5	1	2	140
2	40	20	17,5	0,5	0,75	1,25	2,25	120
3	45	25	20	0,75	1	1,5	2,5	160
4	50	30	22,5	1	1,25	1	2	130
5	55	35	25	1,25	1,5	1,25	2,25	150
6	60	40	27,5	1,5	1,75	1,5	2,5	110
7	65	45	30	1,75	2	1,75	2,75	170
8	70	50	32,5	2	2,25	2	3	180
9	75	55	35	2,25	2,5	2,25	3,25	200

Odpowiedzi:

	P [kN]	S_1 [kN]	S_2 [kN]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
1	16,571	0,845P	0,632P	140	30
2	18,445	0,813P	0,427P	120	35
3	29,926	0,802P	0,446P	160	53,333
4	17,212	0,755P	0,544P	130	46,8
5	24,561	0,763P	0,512P	150	56,818
6	21,452	0,769P	0,504P	110	43,214
7	38,464	0,773P	0,491P	170	68,654
8	46,347	0,777P	0,481P	180	74,286
9	57,74	0,779P	0,473P	200	84

1.52. Sztywna tarcza K (Rys. 1.55) jest zamocowana za pomocą przegubów do dwóch prętów oraz do ściany w punkcie A. Wyznaczyć dopuszczalną wartość siły P wiedząc, że dopuszczalne naprężenia na rozciąganie materiału prętów wynoszą k_r . Moduł Younga $E=210$ GPa.



Rys. 1.55.

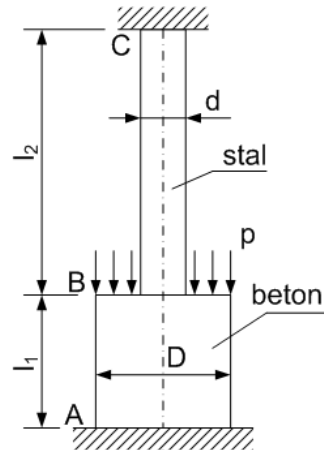
Dane:

	a [cm]	b [cm]	c [cm]	l_1 [m]	l_2 [m]	A_1 [cm ²]	A_2 [cm ²]	k_r [MPa]
1	40	20	30	0,5	0,25	1	2	140
2	45	25	35	0,75	0,5	1,25	2,25	120
3	50	30	40	1	0,75	1,5	2,5	160
4	55	35	30	0,5	0,25	1	2	130
5	60	40	35	0,75	0,5	1,25	2,25	150
6	65	45	40	1	0,75	1,5	2,5	110
7	70	50	45	1,25	1	1,75	2,75	170
8	75	55	50	1,5	1,25	2	3	180
9	80	60	55	1,75	1,5	2,25	3,25	200

Odpowiedzi:

	P [kN]	S_1 [kN]	S_2 [kN]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
1	46,667	0,1P	0,6P	46,667	140
2	44,943	0,159P	0,601P	57,143	120
3	66,833	0,202P	0,599P	90	160
4	29,869	0,254P	0,87P	75,833	130
5	43,817	0,326P	0,77P	114,286	150
6	38,366	0,363P	0,717P	92,812	110
7	69,519	0,386P	0,682P	151,111	170
8	82,091	0,402P	0,658P	165	180
9	101,661	0,414P	0,639P	187,013	200

1.53. Dwa elementy cylindryczne (Rys. 1.56), wykonane z różnych materiałów są razem połączone a ich końce zamurowane. Jakie naprężenia powstaną w obu elementach jeśli na powierzchnię w przekroju B będzie działać ciśnienie p ?



Rys. 1.56.

Dane:

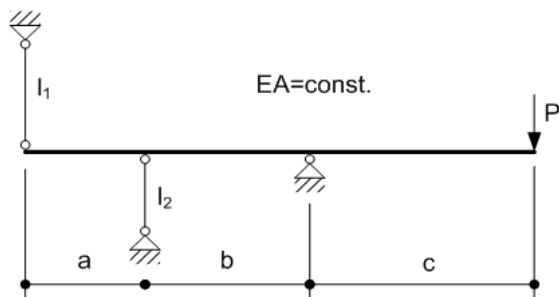
D [cm]	d [cm]	E_B [GPa]	E_S [GPa]	P [kg/cm ²]	l_1 [m]	l_2 [m]
20	5	30	210	20	0,5	3

Odpowiedź : $\sigma_{AB} = 1,714 \text{ MPa}$, $\sigma_{BC} = -1,999 \text{ MPa}$

1.54. Sztywna belka (Rys. 1.57) jest zamocowana za pomocą przegubów do muru oraz dwóch prętów, których długości wynoszą l_1 i l_2 i przekrojach A. Do skrajnego końca belki przyłożona jest siła P . Wyznaczyć wartość naprężeń jakie pojawiają się w prętach. Sprawdzić czy pręt ściskany nie ulegnie wyboczeniu jeśli jego przekrój jest kołowy. Moduł Younga $E=210 \text{ GPa}$.

Dane:

	a [m]	b [m]	c [m]	l_1 [m]	l_2 [m]	A [cm ²]	P [kN]
1	0,5	1,3	0,5	0,7	0,5	1	5
2	0,6	1,2	0,7	0,75	0,6	1,2	5,5
3	0,7	1,1	0,9	1	0,7	1,4	6
4	0,8	1,0	0,5	1,25	0,5	1,6	6,5
5	0,9	0,9	0,7	1,5	0,6	1,8	7
6	1,0	0,8	0,9	1,75	0,7	2	7,5
7	1,1	0,7	0,5	2	0,5	2,2	8
8	1,2	0,6	0,7	2,25	0,6	2,4	8,5
9	1,3	0,5	0,9	2,5	0,7	2,6	9



Rys. 1.57.

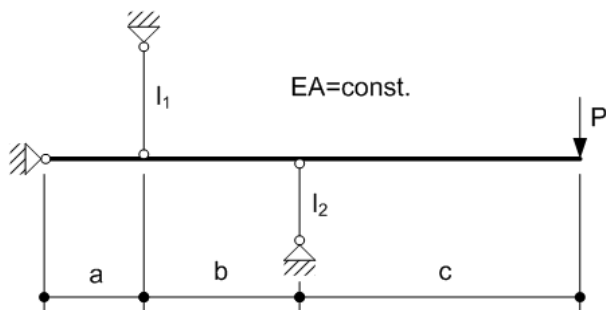
Odpowiedzi:

	S_1 [kN]	S_2 [kN]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	s [-]	P_{kr} [kN]
1	0,803	0,812	8,027	8,116	248,144	3,366
2	1,375	1,146	11,458	9,549	242,703	4,222
3	1,956	1,708	13,974	12,199	299,59	3,233
4	1,416	1,019	6,37	8,847	350,312	2,702
5	1,675	2,094	9,307	11,633	396,33	2,375
6	2,51	2,789	12,552	13,946	438,66	2,154
7	1,385	2,154	6,294	9,79	477,995	1,996
8	2,33	2,917	9,722	12,153	514,851	1,877
9	3,528	3,5	13,569	13,461	549,615	1,784

1.55. Sztywna belka (Rys. 1.58) jest zamocowana za pomocą przegubów do ściany oraz dwóch prętów, których długości wynoszą l_1 i l_2 i przekrojach A. Do przeciwnego końca belki przyłożona jest siła P. Wyznaczyć wartość naprężeń jakie pojawią się w prętach. Sprawdzić czy pręt ściskany nie ulegnie wyboczeniu jeśli jego przekrój jest kołowy.

Dane:

	a [m]	b [m]	c [m]	l_1 [m]	l_2 [m]	E [GPa]	A [cm ²]	P [kN]
1	0,5	1,3	0,5	0,7	0,5	210	1	5
2	0,6	1,2	0,7	0,75	0,6	210	1,2	5,5
3	0,7	1,1	0,9	1	0,7	210	1,4	6
4	0,8	1,0	0,5	1,25	0,5	210	1,6	6,5
5	0,9	0,9	0,7	1,5	0,6	210	1,8	7
6	1,0	0,8	0,9	1,75	0,7	210	2	7,5
7	1,1	0,7	0,5	2	0,5	210	2,2	8
8	1,2	0,6	0,7	2,25	0,6	210	2,4	8,5
9	1,3	0,5	0,9	2,5	0,7	210	2,6	9



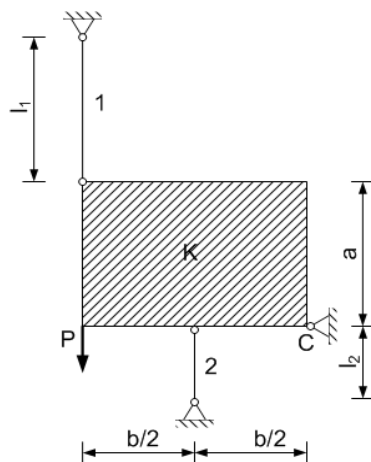
Rys. 1.58.

Odpowiedź:

	S_1 [kN]	S_2 [kN]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	s [-]	P_{kr} [kN]
1	1,201	6,055	12,014	60,552	177,24	6,597
2	1,871	7,015	15,59	58,461	194,16	6,597
3	2,215	8,138	15,825	58,132	209,72	6,597
4	1,368	7,697	8,553	48,109	140,125	16,889
5	1,768	8,838	9,82	49,102	158,53	14,84
6	2,225	10,014	11,126	50,069	175,46	13,46
7	1,428	9,349	6,493	42,497	119,49	31,93
8	1,876	10,555	7,818	43,978	137,29	26,38
9	2,382	11,78	9,162	45,306	153,89	22,75

1.56. Sztywna tarcza K (Rys. 1.59) jest podparta przegubowo w punkcie C oraz dwoma prętami sprężystymi 1 i 2. Wyznaczyć naprężenia w prętach spowodowane obciążeniem siłą P oraz kąt obrotu tarczy. Dane : $P = 12 \text{ kN}$, $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $l_1 = 1,25 \text{ m}$, $l_2 = 0,75 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

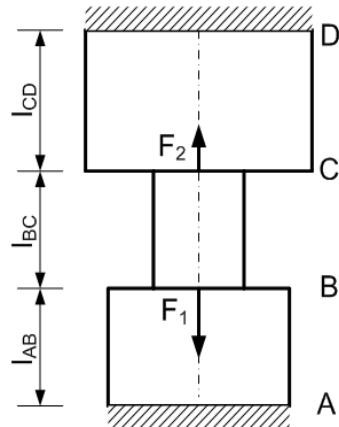
Odpowiedź: $\sigma_1 = 36,923 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 30,769 \text{ MPa}$



Rys. 1.59.

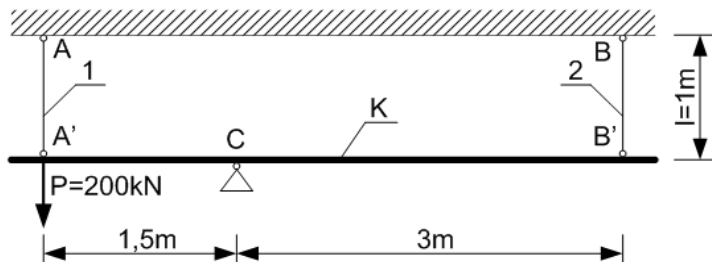
1.57. Pręt o zmiennym przekroju poprzecznym (Rys. 1.60) umieszczono między dwiema nieodkształcalnymi ścianami i obciążono siłami F_1 i F_2 jak na rysunku. Obliczyć naprężenia w poszczególnych przekrojach oraz wykonać ich wykres. Dane: $A_{AB} = 80 \text{ cm}^2$, $A_{BC} = 60 \text{ cm}^2$, $A_{CD} = 100 \text{ cm}^2$, $l_{AB} = 0,5 \text{ m}$, $l_{BC} = 0,8 \text{ m}$, $l_{CD} = 0,6 \text{ m}$, $F_1 = 300 \text{ kN}$, $F_2 = 500 \text{ kN}$, $E = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Odpowiedź: $\sigma_{AB} = 13,681 \text{ MPa}$,
 $\sigma_{BC} = -31,759 \text{ MPa}$, $\sigma_{CD} = 30,945 \text{ MPa}$



Rys. 1.60.

1.58. Nieodkształcalny element K (Rys. 1.61) został podwieszony na dwóch sprężystych wieszakach do nieodkształcalnego stropu i podparty podpórą przegubową. W prętach 1 i 2 układu obliczyć naprężenia normalne. Pola przekroju poprzecznego prętów 1 i 2: $A_1 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Pręt 1 wykonano z miedzi – moduł sprężystości podłużnej $E_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, pręt 2 ze stali $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

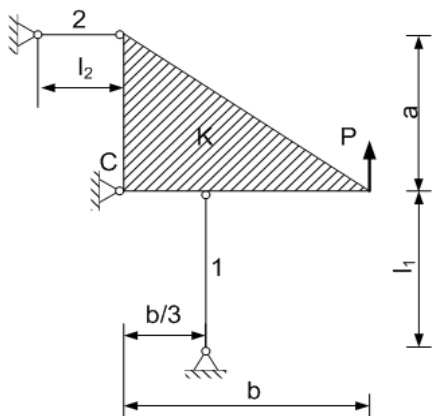


Rys. 1.61.

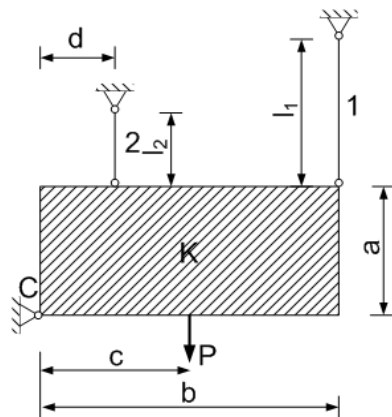
Odpowiedź: $\sigma_{AA'} = 20 \text{ MPa}$, $\sigma_{BB'} = -80 \text{ MPa}$

1.59. Sztywna tarcza K (Rys. 1.62) jest podparta przegubowo w punkcie C oraz dwoma prętami sprężystymi 1 i 2. Wyznaczyć naprężenia w prętach spowodowane obciążeniem siłą P oraz kąt obrotu tarczy. Dane : $P = 10 \text{ kN}$, $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $l_1 = 1,5 \text{ m}$, $l_2 = 0,75 \text{ m}$, $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 2,5 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Odpowiedź: $\sigma_1 = 23,438 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 46,857 \text{ MPa}$



Rys. 1.62.

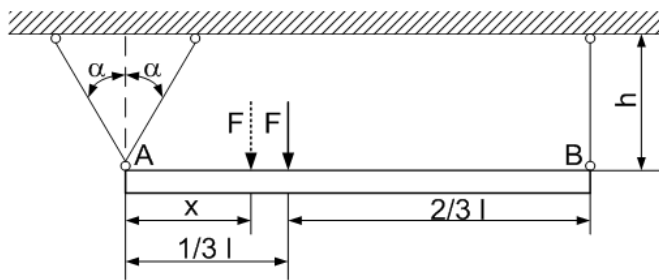


Rys. 1.63.

1.60. Sztywna tarcza K (Rys. 1.63) jest podparta przegubowo w punkcie C oraz dwoma prętami sprężystymi 1 i 2. Wyznaczyć naprężenia w prętach spowodowane obciążeniem siłą P oraz kąt obrotu tarczy. Dane : $P = 10 \text{ kN}$, $A_1 = 26 \text{ mm}^2$, $A_2 = 30 \text{ mm}^2$, $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 0,6 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $c = 0,75 \text{ m}$, $d = 0,25 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Odpowiedź: $\sigma_1 = 182,556 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 50,71 \text{ MPa}$

1.61. Sztywna nieważka belka AB (Rys. 1.64) została zawieszona na trzech prętach dwuprzegubowych o takiej samej sztywności na rozciąganie EA, a następnie obciążona siłą F. Obliczyć obniżenie przegubów A i B belki a następnie odległość x (od lewego końca belki) punktu, w którym należałoby przyłożyć siłę F aby belka po obciążeniu została pozioma.



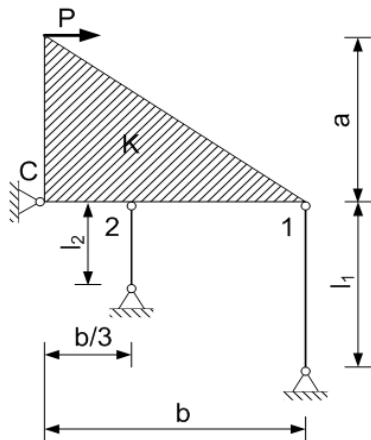
Rys. 1.64.

Dane: $l = 3 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $A = 4 \text{ cm}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $F = 50 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$.

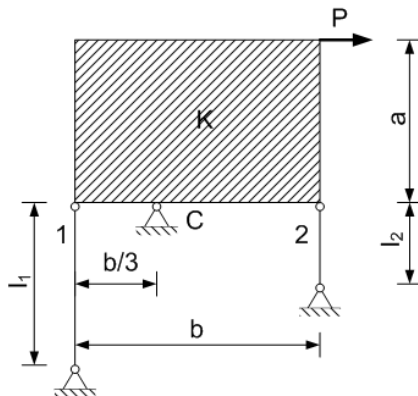
1.62. Sztywna tarcza K (Rys. 1.65) jest podparta przegubowo w punkcie C oraz dwoma prętami sprężystymi 1 i 2. Wyznaczyć naprężenia w prętach

spowodowane obciążeniem siłą P oraz kątem obrotu tarczy. Dane : $P = 12 \text{ kN}$, $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $l_1 = 1,25 \text{ m}$, $l_2 = 0,75 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Odpowiedź: $\sigma_1 = 31,304 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 17,391 \text{ MPa}$



Rys. 1.65.

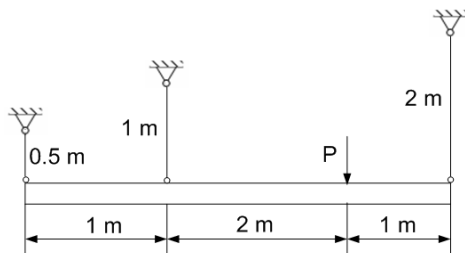


Rys. 1.66.

1.63. Sztywna tarcza K (Rys. 1.66) jest podparta przegubowo w punkcie C oraz dwoma prętami sprężystymi 1 i 2. Wyznaczyć naprężenia w prętach spowodowane obciążeniem siłą P . Dane : $P = 30 \text{ kN}$, $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 0,75 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Odpowiedź: $\sigma_1 = 16,667 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 44,444 \text{ MPa}$

1.64. Nieodkształcalna belka (Rys. 1.67) jest zawieszona przegubowo na trzech prętach o jednakowych przekrojach $F = 6 \text{ cm}^2$. Jaką siłą pionową P możemy obciążyć belkę aby naprężenia w prętach nie przekroczyły wartości dopuszczalnej $k_r = 200 \text{ MPa}$.



Rys. 1.67.

1.6. Słupy betonowe i żelbetowe

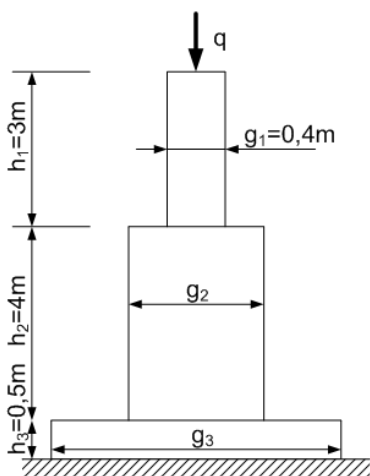
1.65. Zaprojektować słup betonowy o wysokości 12 m ściskany siłą 800 kN i ciężarem własnym. Przyjąć słup stopniowany złożony z czterech odcinków o takich samych długościach i stałych przekrojach poprzecznych. Obliczyć o ile większa byłaby objętość słupa gdyby był on wykonany jako jeden odcinek o stałym przekroju. Pozostałe dane: $\gamma_b=26 \text{ kN/m}^3$ -ciężar właściwy betonu; $k_{cb}=2,5 \text{ MPa}$ -dopuszczalne naprężenia na ściskanie dla betonu.

1.66. W żelbetowej kolumnie przekroje poprzeczne prętów stalowych stanowią 2% całego przekroju poprzecznego kolumny. Obliczyć średnicę kolumny i liczbę prętów stalowych o średnicach 20 mm jeśli kolumna ściskana jest siłą 2000 kN. Pozostałe dane: $k_{cb}=6 \text{ MPa}$ -naprężenia dopuszczalne na ściskanie dla betonu; $k_{cs}=120 \text{ MPa}$ -naprężenia dopuszczalne na ściskanie dla stali; $E_s=10E_b=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ -moduły sprężystości wzdłużnej dla stali i dla betonu.

1.67. Zaprojektować przekrój poprzeczny żelbetowej kolumny obciążony siłą ściskającą 400 kN. Przyjąć przekrój kołowy kolumny, w którym pręty stalowe stanowią 2% przekroju poprzecznego. Pozostałe dane: $k_{cs}=140 \text{ MPa}$; $E_s=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $k_{cb}=5 \text{ MPa}$; $E_b=1,4 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

1.68. Zaprojektować przekrój poprzeczny żelbetowej kolumny ściskanej siłą 800 kN. Przyjąć przekrój kołowy z 6-cioma symetrycznie rozmieszczonymi prętami stalowymi stanowiącymi 1% całego przekroju poprzecznego kolumny. Pozostałe dane: $k_{cs}=160 \text{ MPa}$; $k_{cb}=8 \text{ MPa}$; $E_s=10E_b=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

1.69. Ściana (Rys. 1.68) o grubości $g_1=0,4 \text{ m}$ i wysokości $h_1=3 \text{ m}$ stoi na ścianie o wysokości $h_2=4 \text{ m}$ i grubości g_2 . Cała konstrukcja opiera się na fundamencie o wysokości $h_3=0,5 \text{ m}$ i grubości g_3 . Jakim ciężarem q [kN/m] ciągłym, równomiernie rozłożonym można obciążyć ścianę. Jakie grubości g_2 i g_3 powinna mieć ściana i fundament. Naprężenia dopuszczalne na ściskanie dla muru wynoszą $k_c=300 \text{ kN/m}^2$, naprężenia dopuszczalne dla gruntu $k_g=100 \text{ kN/m}^2$. Ciężar objętościowy muru $\gamma=15,7 \text{ kN/m}^3$.
Odpowiedź: $q=100 \text{ kN/m}$, $g_2=0,5 \text{ m}$, $g_3=1,63 \text{ m}$



Rys. 1.68.

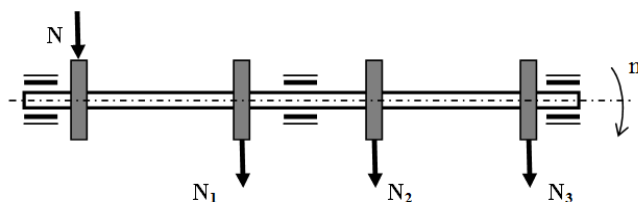
2. Pręty skręcane

2.1. Pręty o przekrojach kołowych

2.1. Wał stalowy o stosunku średnic $D/d=4/3$ ma przenosić moc $N=12$ kW przy prędkości kątowej $n=900$ obr/min. Wyznaczyć wymiary przekroju poprzecznego wału jeśli dopuszcza się naprężenia styczne $k_t=50$ MPa i jednostkowy kąt skręcenia $\varphi_{dop}=0,3^\circ/\text{m}$. $G=8 \cdot 10^4$ MPa.

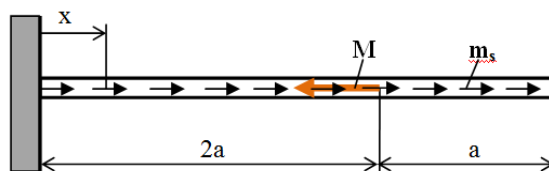
2.2. Zaprojektować przekrój poprzeczny drążonego wału transmisyjnego o stosunku średnic $d/D=0,6$ przenoszącego moc N przy prędkości kątowej n . Dane: $N=40$ kW; $n=800$ obr/min; $k_t=50$ MPa; $\varphi_{dop}=0,6^\circ/\text{m}$; $G=8 \cdot 10^4$ MPa.

2.3. Wał transmisyjny o stałym przekroju poprzecznym przekazuje moc $N=180$ kW na kolejne koła napędowe jak pokazuje Rys. 2.1 przy stałej prędkości kątowej $n=200$ obr/min. Ile procent materiału zaoszczędzimy jeśli zamiast wału o przekroju pełnym wykonamy wał drążony o stosunku średnic $d/D=0,7$? Pozostałe dane: $N_1=80$ kW; $N_2=54$ kW; $N_3=46$ kW; $k_t=25$ MPa; $\varphi_{dop}=0,3^\circ/\text{m}$; $G=8 \cdot 10^4$ MPa.



Rys. 2.1.

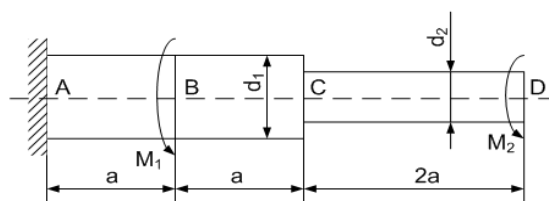
2.4. Pręt o średnicy d skrećany jest momentem skupionym M i momentem ciągłym m_s jak pokazuje Rys.2.2. Obliczyć potrzebną średnicę pręta oraz wykonać wykresy momentów skrećających i kątów obrotu przekrojów poprzecznych. Dane: $m_s=90 \text{ kNm/m}$; $a=2 \text{ m}$; $M=2,4m_s a$; $k_t=60 \text{ MPa}$; $G=8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.



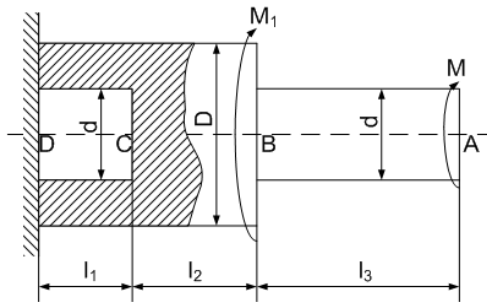
Rys. 2.2.

2.5. Pręt stalowy jednym końcem utwierdzony (Rys. 2.3), o wymiarach i obciążeniu według rysunku został skrećony tak, że kąty obrotu przekrojów B i D względem przekroju utwierdzonego spełniają zależność $\varphi_{AB} = 0,25\varphi_{AD}$. Obliczyć wartość momentu M_2 , największe naprężenia styczne τ_{\max} oraz całkowity kąt skrećenia φ_{AD} . W obliczeniach przyjąć: $M_1 = 500 \text{ Nm}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $d_1 = 0,04 \text{ m}$, $d_2 = 0,03 \text{ m}$ oraz $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.

Odpowiedź: $M_2 = 347 \text{ Nm}$, $\tau_{\max} = 67,4 \text{ MPa}$, $\varphi_{AD} = 4,8^\circ$



Rys. 2.3.



Rys. 2.4.

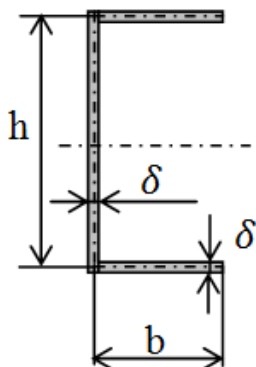
2.6. Obliczyć największe naprężenia styczne i całkowity kąt skręcenia φ_A końca wału (Rys. 2.4). Dane : $M = 49 \text{ Nm}$, $M_1 = 147 \text{ Nm}$, $D = 30 \text{ mm}$, $l_1 = 30 \text{ cm}$, $d = 20 \text{ mm}$, $l_2 = 50 \text{ cm}$, $l_3 = 40 \text{ cm}$, $G = 78,5 \text{ GN/m}^2$.

Odpowiedź:

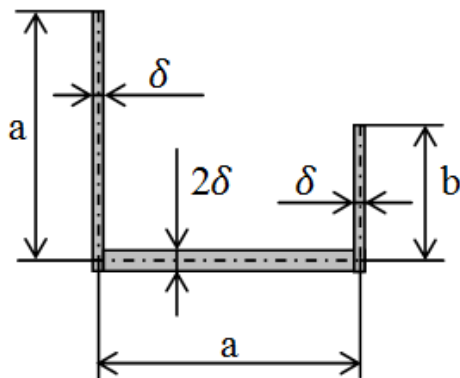
$$\tau_{CD} = 46 \text{ MPa}, \varphi_A = 6,15^\circ$$

2.2. Pręty o przekrojach cienkościennych otwartych

2.7. Zaprojektować wymiary przekroju poprzecznego pręta cienkościennego pokazanego na Rys.2.5 skręcanego momentem M_s . Dane: $M_s = 0,2 \text{ kNm}$; $k_t = 60 \text{ MPa}$; $\varphi_{\text{dop}} = 0,02 \text{ rad/m}$; $h = 2b = 50\delta$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.



Rys. 2.5.

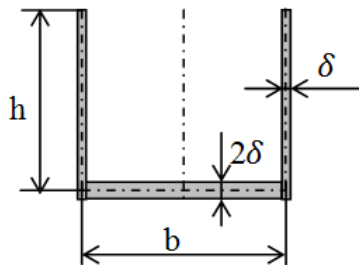


Rys. 2.6.

2.8. Zaprojektować przekrój poprzeczny cienkościenny otwarty (Rys.2.6) pręta skręcanego o długości $l = 2 \text{ m}$ jeśli jego dopuszczalny kąt skręcenia $\varphi \leq 0,04 \text{ rad}$. Obliczyć dla zaprojektowanego pręta maksymalne naprężenia styczne. Pozostałe dane: $a = 2b = 100\delta$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

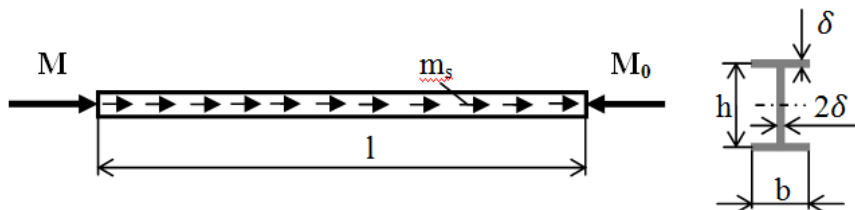
2.9. Zaprojektować wymiary przekroju poprzecznego (Rys.2.7) skręcanego pręta cienkościennego jeśli maksymalne naprężenia styczne nie mogą

przekroczyć 80 MPa. Obliczyć dla zaprojektowanego pręta jednostkowy kąt skręcenia. Pozostałe dane: $b=h=40\delta$; $G=8\cdot 10^4$ MPa.



Rys. 2.7.

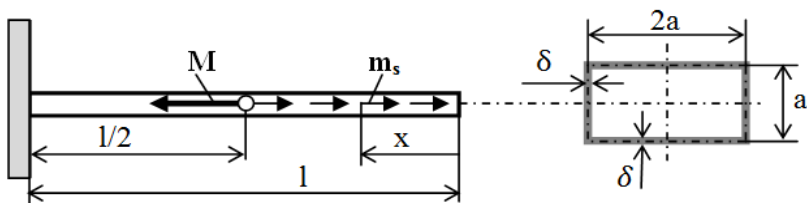
2.10. Pręt o przekroju dwuteowym skręcany jest momentami skupionymi M i M_0 oraz momentem ciągłym m_s jak pokazuje Rys.2.8. Zaprojektować przekrój poprzeczny pręta jeśli $k_t=60$ MPa. Obliczyć dla zaprojektowanego pręta jednostkowy kąt skręcenia i energię potencjalną sprężystości zakumulowaną w pręcie. Pozostałe dane: $M=1,2$ kNm; $m_s=1$ Nm/m; $h=2b=80\delta$; $l=2$ m; $G=8\cdot 10^4$ MPa.



Rys. 2.8.

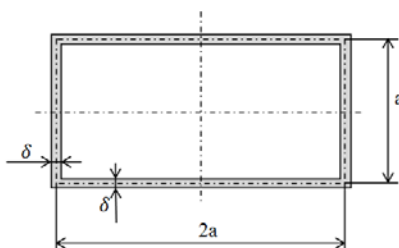
2.3. Pręty o przekrojach cienkościennych zamkniętych

2.11. Pręt o przekroju cienkościennym zamkniętym obciążony jest momentem skupionym M i momentem ciągłym m_s jak pokazuje Rys.2.9. Zaprojektować przekrój poprzeczny pręta. Dane: $M=4,9$ m; $l=1$ m; $m_s=M/l$; $k_t=75$ MPa.



Rys. 2.9.

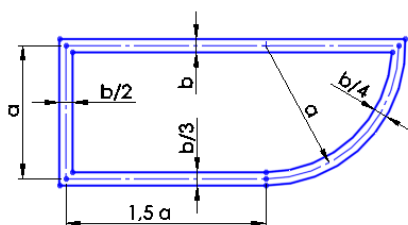
2.12. Pręt o przekroju cienkościennym zamkniętym pokazanym na Rys.2.10 skręcany jest momentem $M_s = 3 \text{ kNm}$ i rozciągany siłą $N = 60 \text{ kN}$. Obliczyć wymiary przekroju poprzecznego. Pozostałe dane: $a = 20\delta$; $k_t = 120 \text{ MPa}$.



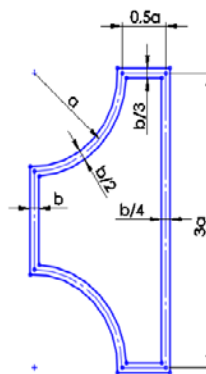
Rys. 2.10.

2.13. Porównać wartości naprężeń stycznych dla dwóch przypadków: 1) profil cienkościenny zamknięty, 2) profil cienkościenny otwarty, prętów skręcanych, o przekrojach pokazanych na Rys. 2.11.

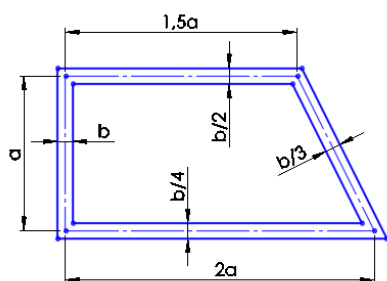
1)



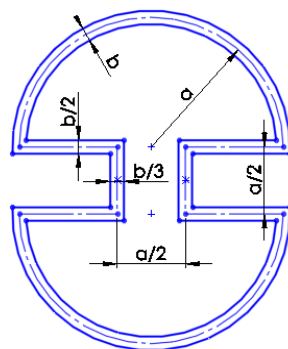
2)



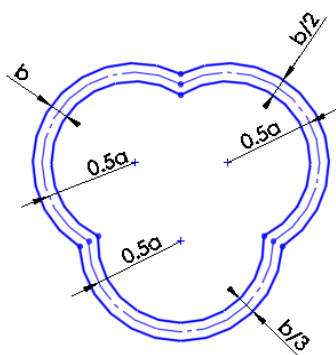
3)



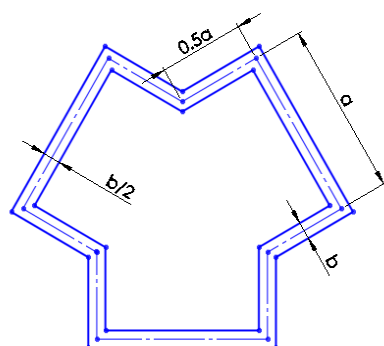
4)



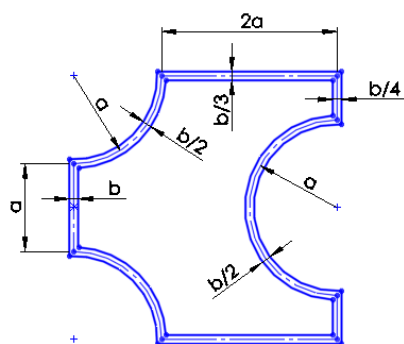
5)



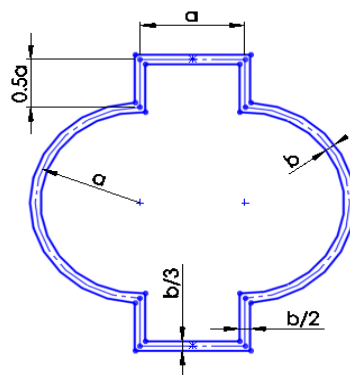
6)



7)



8)



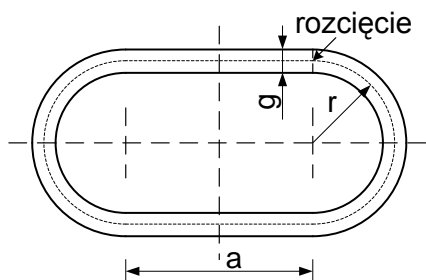
Rys. 2.11.

Odpowiedzi:

Nr. zad.	1	2	3	4
$\frac{\sigma_{otwarty}}{\sigma_{zamkniętym}} =$	$\frac{a}{b} \cdot 1,26$	$\frac{a}{b} \cdot 1,452$	$\frac{a}{b} \cdot 2,08$	$\frac{a}{b} \cdot 1,013$

Nr. zad.	5	6	7	8
$\frac{\sigma_{otwarty}}{\sigma_{zamkniętym}} =$	$\frac{a}{b} \cdot 1,766$	$\frac{a}{b} \cdot 1,718$	$\frac{a}{b} \cdot 4,686$	$\frac{a}{b} \cdot 1,858$

2.14. Jak zmienia się wartości: naprężeń oraz kąta skrzywienia dla pręta o przekroju pokazanym na Rys. 2.12, skrzywanego momentem M_s , o długości l dla dwóch przypadków: gdy profil jest zamknięty oraz rozcięty. Dane : $a = 100$ mm, $r = 25$ mm, $g = 5$ mm, $M_s = 500$ Nm, $l = 3$ m, $G = 3 \cdot 10^4$ MPa.

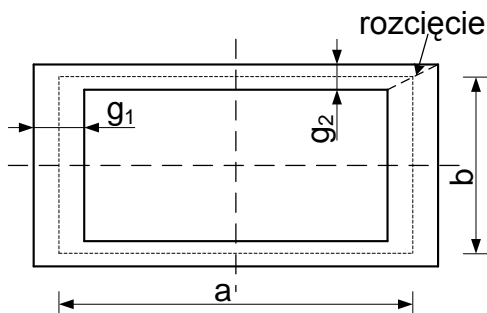


Rys. 2.12

Odpowiedź: $\frac{\tau_2}{\tau_1} = 23,401,$

$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 182,543$

2.15. Jak zmienia się wartości: naprężeń oraz kąta skrzywienia dla pręta o przekroju pokazanym na Rys. 2.13 skrzywanego momentem M_s , o długości l dla dwóch przypadków: gdy profil jest zamknięty oraz rozcięty. Dane : $a = 100$ mm, $b = 50$ mm, $g_1 = 10$ mm, $g_2 = 5$ mm, $M_s = 500$ Nm, $l = 3$ m, $G = 3 \cdot 10^4$ MPa.

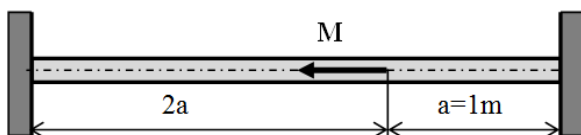


Rys. 2.13

Odpowiedź: $\frac{\tau_2}{\tau_1} = 12, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 48$

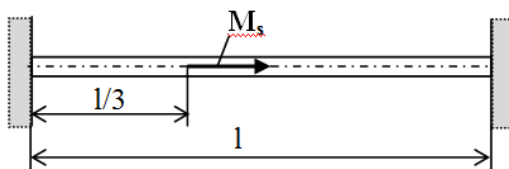
2.4. Układy statycznie niewyznaczalne

2.16. Pręt obustronnie sztywno zamocowany obciążony jest momentem skręcającym $M=8$ kNm jak pokazuje Rys.2.14. Zaprojektować średnicę pręta jeśli dopuszcza się $k_t=90$ MPa i $\varphi_{dop}=0,25^0/m$. $G=8 \cdot 10^4$ MPa.



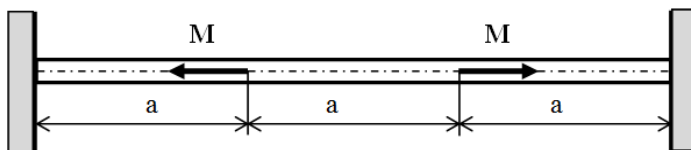
Rys. 2.14.

2.17. Zaprojektować średnicę pręta zamocowanego sztywno obustronnie i obciążonego momentem skręcającym M_s (Rys.2.15) jeśli dopuszczalny kąt obrotu przekroju, w którym przyłożony jest moment wynosi $0,3^0$. Pozostałe dane: $M_s=40$ kNm; $l=2,4$ m; $G=8 \cdot 10^4$ MPa.



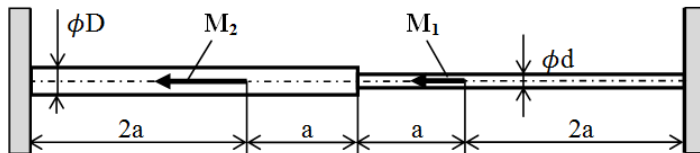
Rys. 2.15.

2.18. Zaprojektować średnicę pręta obustronnie sztywno zamocowanego obciążonego dwoma momentami skręcającymi M jak pokazuje Rys.2.16. Wykonać dla zaprojektowanego pręta wykres kątów obrotu przekroju poprzecznego $\varphi(x)$. Dane: $M=240$ kNcm; $a=80$ cm; $k_t=60$ MPa; $G=8 \cdot 10^4$ MPa.



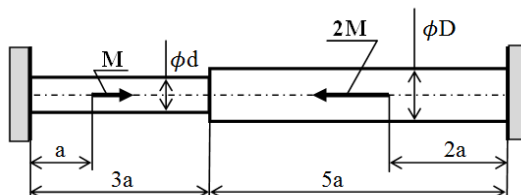
Rys. 2.16.

2.19. Pręt o stopniowanych średnicach został obustronnie sztywno zamocowany i obciążony momentami skręcającymi jak pokazuje Rys.2.17. Zaprojektować przekroje prętów oraz wykonać wykresy momentów skręcających i kątów obrotu przekrojów poprzecznych. Dane: $M_1=5$ kNm; $M_2=20$ kNm; $a=40$ cm; $D=2d$; $k_t=80$ MPa; $E=2\cdot 10^5$ MPa; $\nu=0,3$.



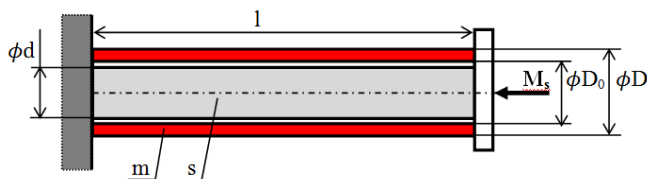
Rys. 2.17.

2.20. Zaprojektować średnice pręta stopniowanego obustronnie sztywno zamocowanego obciążonego dwoma momentami skręcającymi jak pokazuje Rys.2.18. Dane: $M=4$ kNm; $d=2/3 D$; $k_t=60$ MPa.



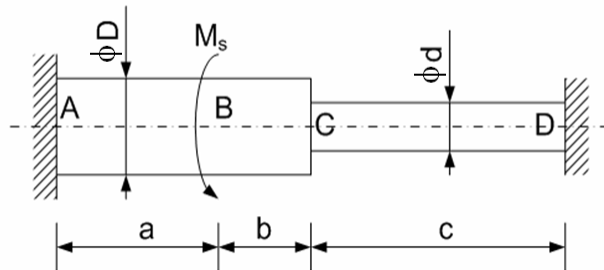
Rys. 2.18.

2.21. Stalowy walec i miedziana tuleja zamocowane są, jednym końcem do ściany, a drugim do sztywnej płyty jak przedstawia Rys.2.19. Zaprojektować wymiary poprzeczne wałka i tulei jeśli układ ma przenosić moment skręcający M_s . Dane: $M_s=3$ kNm; $l=1$ m; $D=1,6d$; $D_0=1,2d$; $k_{ts}=60$ MPa; $k_{tm}=40$ MPa; $G_s=2G_m=8\cdot 10^4$ MPa.



Rys. 2.19.

2.22. Pręt obustronnie zamurowany (Rys. 2.20) jest skręcany momentem M_s jak na rysunku. Wyznaczyć wartości naprężeń stycznych na poszczególnych odcinkach pręta.



Rys. 2.20.

Dane:

	M_s [kNm]	D [mm]	d [mm]	a [cm]	b [cm]	c [cm]
1	2	100	70	100	30	50
2	4	120	80	90	60	110
3	6	140	100	130	40	150

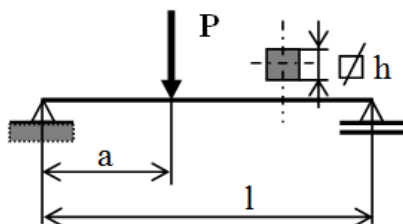
Odpowiedzi:

	M_A [kNm]	M_D [kNm]	τ_{AB} [MPa]	τ_{BC} [MPa]	τ_{CD} [MPa]
1	1,409	0,591	7,157	-3,011	-8,78
2	3,491	0,509	10,288	-1,501	-5,066
3	4,955	1,045	9,196	-1,94	-5,3232

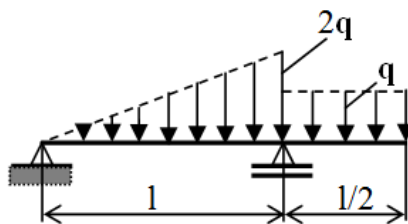
3. Belki

3.1. Belki o przekrojach poprzecznych prostokątnych

3.1. Obliczyć wymiary przekroju poprzecznego belki obciążonej siłą P jak pokazuje Rys.3.1. Wymagane jest spełnienie warunku wytrzymałościowego i warunku sztywności. Dane: $P=16$ kN; $l=2$ m; $a=0,8$ m; $k_r=160$ MPa; $f_{dop}=1/2000$; $E=2 \cdot 10^5$ MPa.



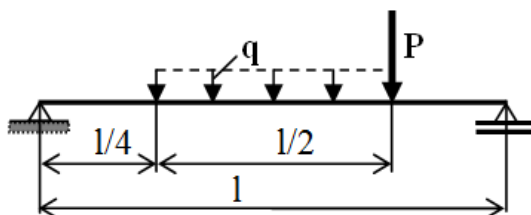
Rys. 3.1.



Rys. 3.2.

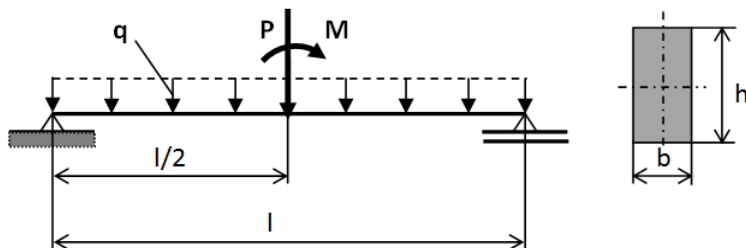
3.2. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.2. Przyjąć przekrój poprzeczny $b \times h$. Dane: $q=20 \text{ kN/m}$; $l=6 \text{ m}$; $h=2b$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.

3.3. Dla belki pokazanej na Rys.3.3 wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz obliczyć wymiary przekroju poprzecznego. Przyjąć przekrój poprzeczny kwadratowy. Dane: $q=2 \text{ kN/m}$; $l=8 \text{ m}$; $P=ql$; $k_r=k_c=140 \text{ MPa}$.



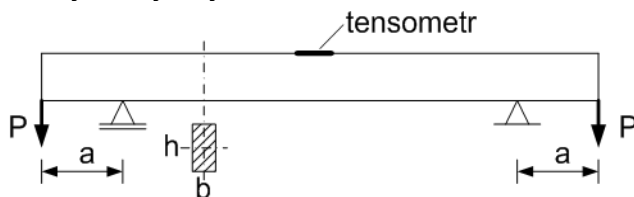
Rys. 3.3.

3.4. Zaprojektować prostokątny przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.4. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: $q=20 \text{ kN/m}$; $l=8 \text{ m}$; $P=ql/2$; $M=ql^2/4$; $h=2b$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$.



Rys. 3.4.

3.5. Belka o wymiarach $B \times h$ (Rys. 3.5), poddana jest w części środkowej czystemu zginaniu. Na górnej powierzchni belki przyklejony jest tensometr, którego wskazanie wynosi ε dla obciążenia P wywołującego w belce naprężenia dopuszczalne k_r . Wyznaczyć wymiar belki h .

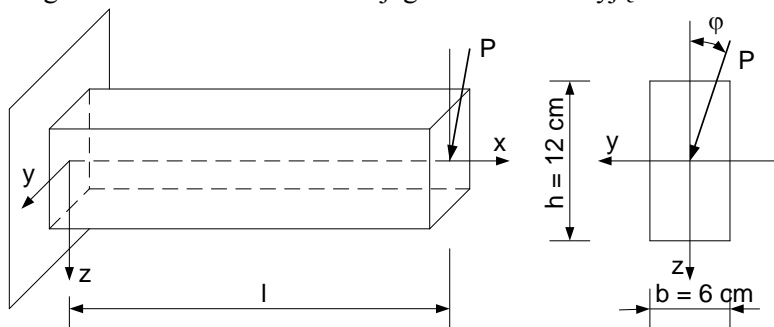


Rys. 3.5.

	Dane					Odpowiedzi	
	P [kN]	a [cm]	b [mm]	E [GPa]	ε [$\mu\text{m/m}$]	k_r [MPa]	h [mm]
1	10	30	30	210	600	126	69,07
2	15	40	35	210	800	108	78,246
3	20	50	40	210	1000	210	84,515

3.6. Obliczyć największą długość l belki jednostronnie utwierdzonej (Rys. 3.6), o przekroju prostokątnym, obciążonej siłą $P = 10 \text{ kN}$ działająca w płaszczyźnie nachylonej do osi pionowej pod kątem $\varphi = 30^\circ$ tak, aby maksymalne naprężenia rozciągające nie przekroczyły wartości $k_r = 120 \text{ MPa}$.

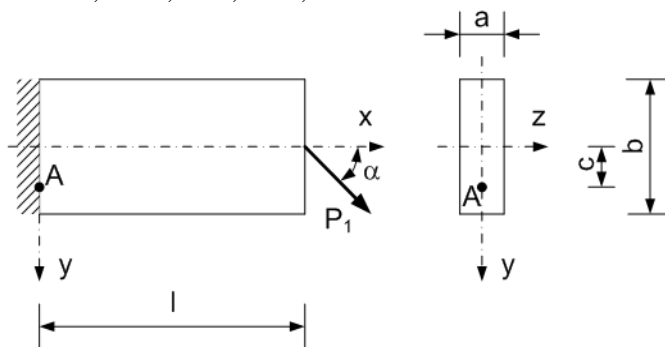
Przyjmując obliczoną długość l wyznaczyć całkowite przemieszczenie swobodnego końca belki oraz określić jego kierunek. Przyjąć $E = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Rys. 3.6.

Odpowiedź: $l < 92,6 \text{ cm}$, ugięcie belki w kierunku osi „z” $0,27 \text{ cm}$, ugięcie belki w kierunku osi „y” $0,61 \text{ cm}$, ugięcie wypadkowe $0,67 \text{ cm}$

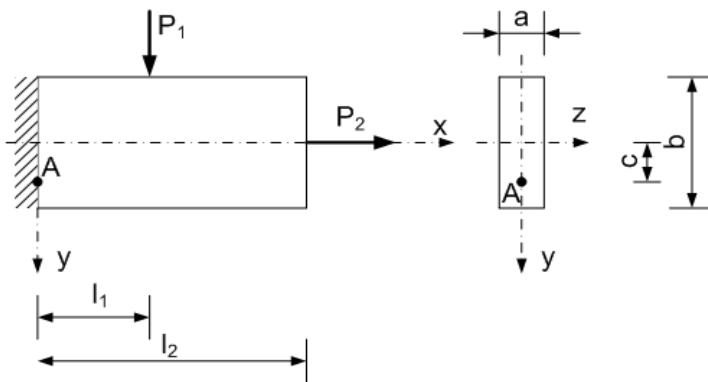
3.7. W punkcie A (Rys. 3.7), będącym w płaskim stanie naprężenia wyznaczyć wartości naprężeń głównych oraz określić kierunki ich działania. Wyniki przedstawić także w formie graficznej za pomocą koła Mohra. Przy wyznaczaniu naprężeń stycznych skorzystać ze wzoru Żurawskiego. Dane: $P = 5 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, $a = 1 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 0,5 \text{ cm}$, $l = 0,3 \text{ m}$.



Rys. 3.7.

Odpowiedź: $\sigma_{\max} = 2,317 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min} = -15,934 \text{ MPa}$, $\alpha = 20,875^\circ$

3.8. W punkcie A (Rys. 3.8), będącym w płaskim stanie naprężenia wyznaczyć wartości naprężeń głównych oraz określić kierunki ich działania. Wyniki przedstawić także w formie graficznej za pomocą koła Mohra. Przy wyznaczaniu naprężeń stycznych skorzystać ze wzoru Żurawskiego. Dane: $P_1 = 4 \text{ kN}$, $P_2 = 6 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 2 \text{ cm}$, $l_1 = 0,1 \text{ m}$, $l_2 = 0,3 \text{ m}$.

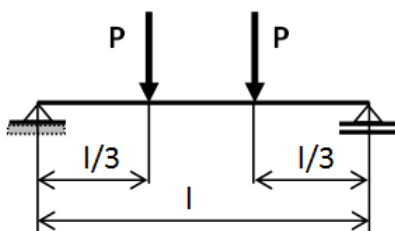


Rys. 3.8.

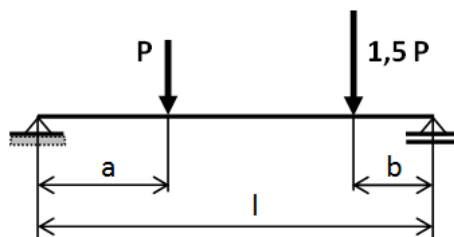
Odpowiedź: $\sigma_{\max} = 1,165 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min} = -6,79 \text{ MPa}$, $\alpha = 22,5^\circ$

3.2. Belki o przekrojach poprzecznych kołowych

3.9. Dla belki pokazanej na Rys.3.9. wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących. Przyjmując, że belka ma być rurą o średnicy wewnętrznej $d=10$ cm zaprojektować średnicę zewnętrzną D . Pozostałe dane: $P=12$ kN; $l=9$ m; $k_r=k_c=120$ MPa.



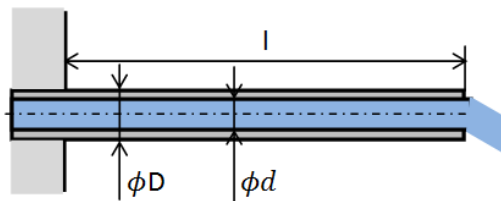
Rys. 3.9.



Rys. 3.10.

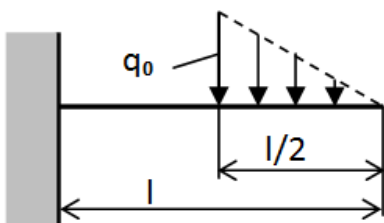
3.10. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.10 w postaci rury o stosunku średnic $d/D=0,8$. Dane: $P=18$ kN; $a=1,5$ m; $l=3a$; $b=0,6a$; $E=2 \cdot 10^5$ MPa; $k_r=k_c=160$ MPa; $f_{dop}=l/1000$ -dopuszczalna strzałka ugięcia belki.

3.11. Obliczyć jaka może być maksymalna długość rurki odprowadzającej wodę pokazanej na Rys.3.11, obciążonej ciężarem własnym i ciężarem wody. Dane: $D=40$ mm; $d=36$ mm; $\gamma_s=78,5$ kN/m³-ciężar właściwy stali; $k_r=k_c=100$ MPa.

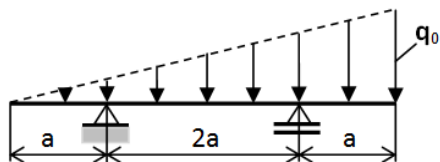


Rys. 3.11.

3.12. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących dla belki pokazanej na Rys.3.12. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki w postaci rury o średnicy zewnętrznej D i grubości ścianki δ . Dane: $q_0=40$ kN/m; $l=8$ m; $D=12\delta$; $k_{r,c}=140$ MPa.



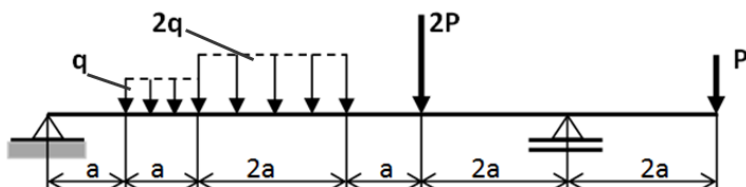
Rys. 3.12.



Rys. 3.13.

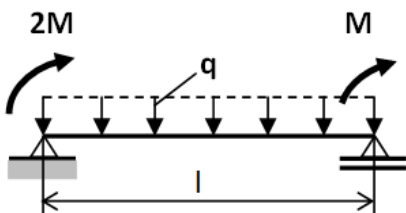
3.13. Dla belki podpartej i obciążonej jak pokazuje Rys.3.13 zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci rury o stosunku średnic $d/D=0,9$. Pozostałe dane: $q_0=54 \text{ kN/m}$; $a=4 \text{ m}$; $k_r=160 \text{ MPa}$.

3.14. Belka spoczywa na dwóch podporach i obciążona jest jak pokazuje Rys.3.14. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci rury o stosunku średnic $d/D=0,8$. Pozostałe dane: $q=40 \text{ kN/m}$; $a=1 \text{ m}$; $P=4qa$; $k_{r,c}=160 \text{ MPa}$.

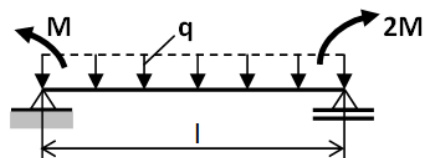


Rys. 3.14.

3.15. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących dla belki pokazanej na Rys.3.15 oraz zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci rury o stosunku średnic $d/D=0,6$. Pozostałe dane: $q=48 \text{ kN/m}$; $l=10 \text{ m}$; $M=ql^2/2$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$.



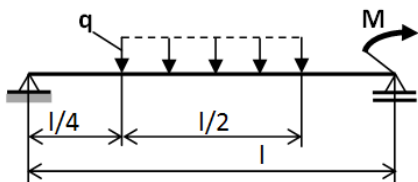
Rys. 3.15.



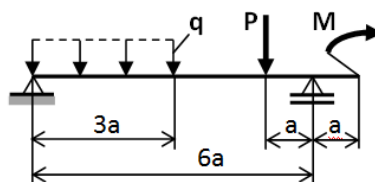
Rys. 3.16.

3.16. Belka podparta jest i obciążona jak na Rys.3.16. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz zaprojektować przekrój poprzeczny belki w postaci rury o stosunku średnic $d/D=0,8$. Pozostałe dane: $q=32 \text{ kN/m}$; $l=4 \text{ m}$; $M=ql^2/4$; $k_{r,c}=100 \text{ MPa}$.

3.17. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki w postaci rury o stosunku średnic $D/d=4/3$ podpartej i obciążonej jak pokazuje Rys.3.17. Pozostałe dane: $q=40 \text{ kN/m}$; $l=8 \text{ m}$; $M=q l^2/20$; $k_{r,c}=200 \text{ MPa}$.



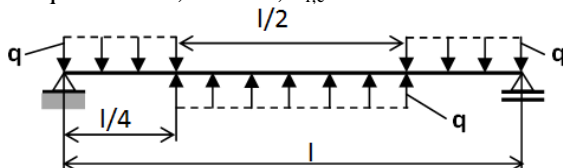
Rys. 3.17.



Rys. 3.18.

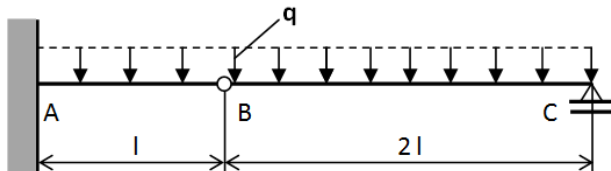
3.18. Dla belki pokazanej na Rys.3.18 wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci rury o stosunku średnic $D/d=5/4$. Pozostałe dane: $q=12 \text{ kN/m}$; $a=2 \text{ m}$; $P=2qa$; $M=qa^2/4$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$.

3.19. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.19 w postaci rury wg PN. Dane: $q=80 \text{ kN/m}$; $l=16 \text{ m}$; $k_{r,c}=200 \text{ MPa}$.



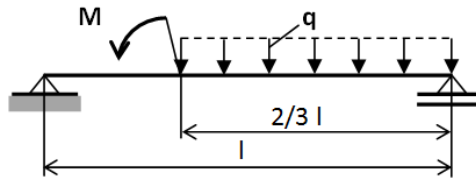
Rys. 3.19.

3.20. Belka z przegubem B utwierdzona jest i obciążona jak pokazuje Rys.3.20. Na odcinku AB belka ma mieć przekrój rurowy o stosunku średnic $d/D=0,8$, a na odcinku BC przekrój kołowy pełny. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz obliczyć wartości wymiarów przekrojów poprzecznych dla poszczególnych odcinków belki. Pozostałe dane: $q=12 \text{ kN/m}$; $l=4 \text{ m}$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.



Rys. 3.20.

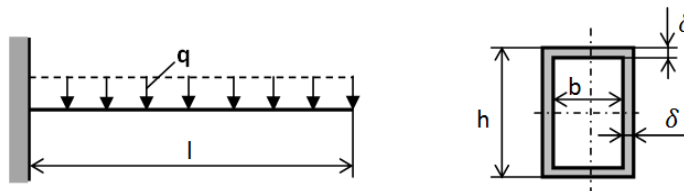
3.21. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki przedstawionej na Rys.3.21 w postaci rury wg PN-EN 10210-2:2000. Dane: $q=24 \text{ kN/m}$; $l=12 \text{ m}$; $M=ql^2/2$; $k_{r,c}=160 \text{ MPa}$.



Rys. 3.21.

3.3. Belki o przekrojach poprzecznych rurowych niekołowych

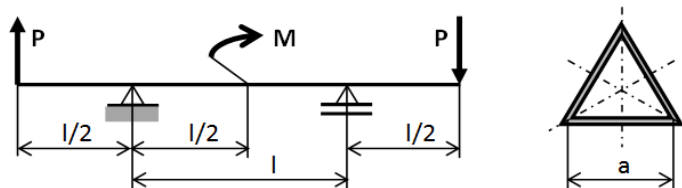
3.22. Obliczyć wymiary przekroju poprzecznego belki pokazanej na Rys.3.22. Dane: $q=8 \text{ kN/m}$; $l=3 \text{ m}$; $b=5\delta$; $h=8\delta$; $k_r=200 \text{ MPa}$; $k_c=150 \text{ MPa}$.



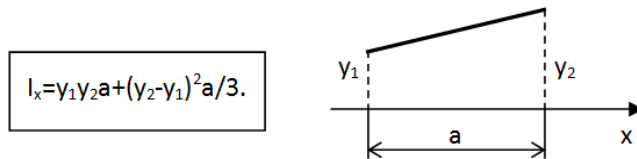
Rys. 3.22.

3.23. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.23. Przyjąć przekrój poprzeczny w postaci cienkościennej rury o konturze trójkąta równobocznego i grubości ścianki $\delta=3 \text{ mm}$. Pozostałe dane: $P=24 \text{ kN}$; $l=2 \text{ m}$; $M=2Pl$; $k_{r,c}=180 \text{ MPa}$.

Wskazówka: Moment bezwładności linii pokazanej na Rys.3.24 względem osi x obliczamy z wzoru

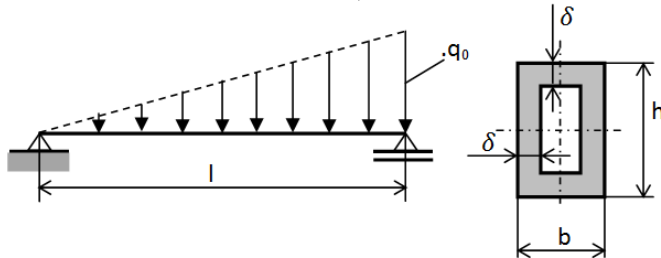


Rys. 3.23.



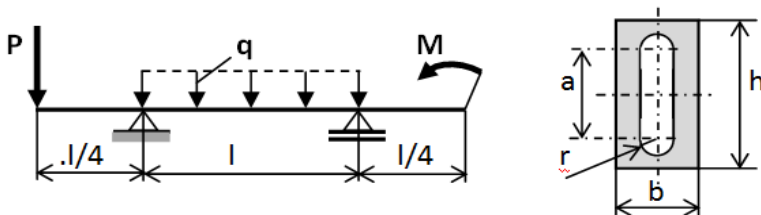
Rys. 3.24

3.24. Obliczyć wymiary przekroju poprzecznego belki pokazanej na Rys.3.25.
Dane: $q_0 = 48 \text{ kN/m}$; $l = 4 \text{ m}$; $b = 4\delta$; $h = 6\delta$; $k_{r,c} = 140 \text{ MPa}$.



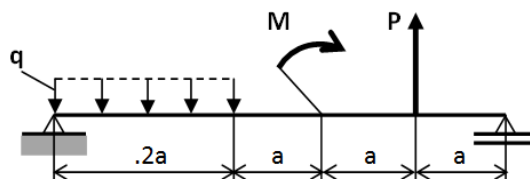
Rys. 3.25.

3.25. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.26. Dane:
 $q = 24 \text{ kN/m}$; $l = 4 \text{ m}$; $P = ql/4$; $M = ql^2/16$; $b = 5r$; $h = 10r$; $a = 6r$; $k_{r,c} = 200 \text{ MPa}$.



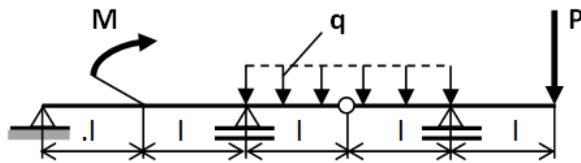
Rys. 3.26.

3.26. Dla belki przedstawionej na Rys.3.27 wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz zaprojektować przekrój poprzeczny o dowolnie wybranym kształcie wg PN. Dane: $q = 8 \text{ kN/m}$; $a = 2 \text{ m}$; $P = qa$; $M = qa^2$; $k_{r,c} = 150 \text{ MPa}$.



Rys. 3.27.

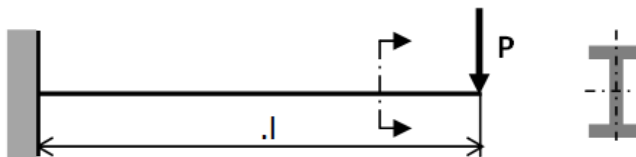
3.27. Belka z przegubem podparta jest i obciążona jak pokazuje Rys.3.28. Wykonać wykres momentów gnących i zaprojektować przekrój poprzeczny belki wg PN. Dane: $q=12 \text{ kN/m}$; $l=2 \text{ m}$; $P=ql/2$; $M=ql^2/4$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.



Rys. 3.28.

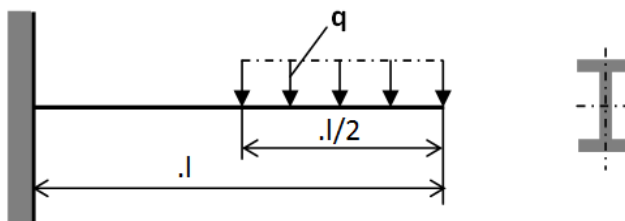
3.4. Belki o przekrojach z kształtowników hutniczych i innych niekołowych

3.28. Obliczyć długość l belki wspornikowej o przekroju poprzecznym w postaci dwuteownika 300 wg PN-91/H-93407 obciążonej na końcu siłą P (Rys.3.29) taką ażeby, w przekroju poprzecznym, maksymalne naprężenia normalne były równe maksymalnym naprężeniom stycznym.



Rys. 3.29.

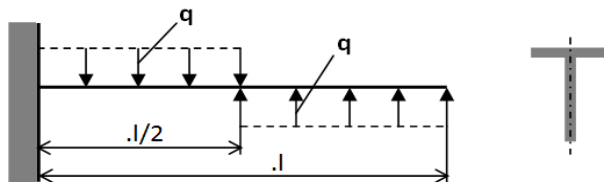
3.29. Belka wspornikowa o przekroju dwuteowy 100 wg PN-91/H-93407 obciążona jest jak pokazuje Rys.3.30. Z pomiarów doświadczalnych wynika, że maksymalne naprężenia normalne w przekroju poprzecznym belki wynoszą 120 MPa . Sprawdzić czy spełniony jest warunek sztywności jeśli dopuszczalna strzałka ugięcia belki wynosi $f_{dop} < l/1600$. Pozostałe dane: $l=4 \text{ m}$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Rys. 3.30

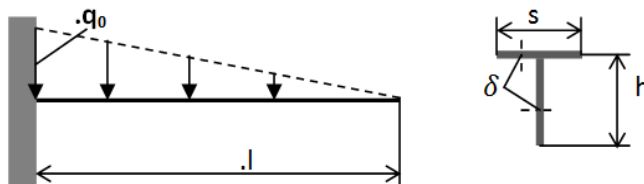
3.30. Zaprojektować dla belki wspornikowej pokazanej na Rys.3.31 przekrój poprzeczny w postaci teownika wg PN-EN 10055:1999 (teownik wysoki),

zwróconego półką do góry. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących.
Dane: $q=12 \text{ kN/m}$; $l=6 \text{ m}$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.



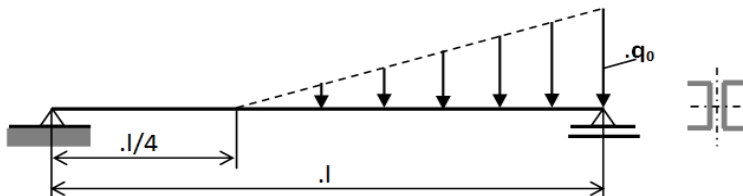
Rys. 3.31.

3.31. Dla belki wspornikowej obciążonej jak na Rys.3.32 wykonać wykresy sił wewnętrznych i zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci pokazanego teownika. Dane: $q_0=8 \text{ kN/m}$; $l=5 \text{ m}$; $s=h=6\delta$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$.



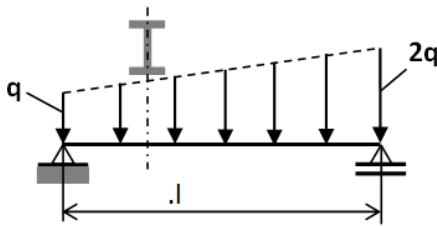
Rys. 3.32.

3.32. Zaprojektować belkę o przekroju poprzecznym w postaci dwóch ceowników wg PN-86/H-93403 podpartą i obciążoną jak pokazuje Rys.3.33. Wykonać dla belki wykresy sił wewnętrznych. Dane: $q=30 \text{ kN/m}$; $l=12 \text{ m}$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.

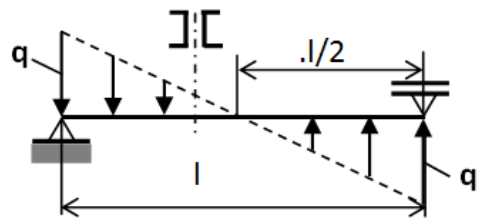


Rys. 3.33.

3.33. Dla belki pokazanej na Rys.3.34 zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci dwuteownika wg PN-91/H-93407. Dane: $q=20 \text{ kN/m}$; $l=8 \text{ m}$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$.



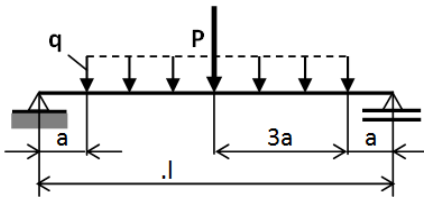
Rys. 3.34.



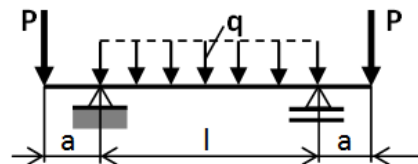
Rys. 3.35.

3.34. Dla belki pokazanej na Rys.3.35 wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci dwóch ceowników wg PN-86/H-93403. Dane: $q=90 \text{ kN/m}$; $l=6 \text{ m}$; $k_{r,c}=160 \text{ MPa}$.

3.35. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki w postaci dwuteownika według PN-91/H-93407 dla belki pokazanej na Rys.3.36. Dane: $P=30 \text{ kN}$; $q=20 \text{ kN/m}$; $l=10 \text{ m}$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$; $f_{dop}=l/600$.



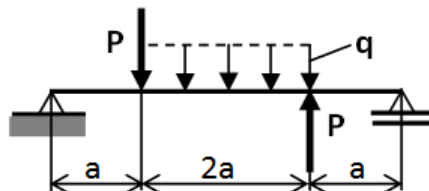
Rys. 3.36.



Rys. 3.37.

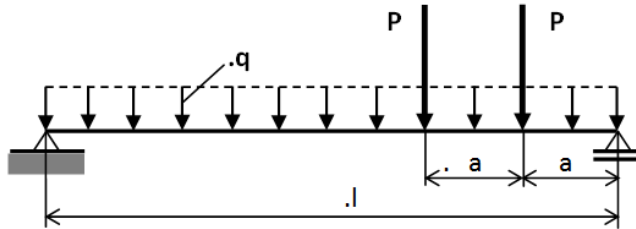
3.36. Zaprojektować przekrój dwuteowy wg PN-91/H-93407 belki pokazanej na Rys.3.37 jeśli dopuszczalna strzałka ugięci $f_{dop}=l/800$. Obliczyć jakie wtedy wystąpią maksymalne naprężenia od zginania. Pozostałe dane: $q=30 \text{ kN/m}$; $a=1 \text{ m}$; $l=4a$; $P=4/3 ql$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

3.37. Dobrać przekrój poprzeczny w postaci dwuteownika wg PN dla belki pokazanej na Rys.3.38. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: $q=100 \text{ kN/m}$; $a=1 \text{ m}$; $P=2qa$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.



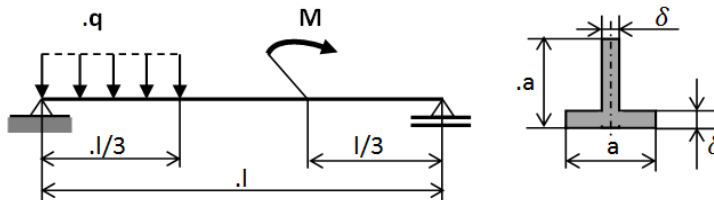
Rys. 3.38.

3.38. Obliczyć obciążenia jakie można dopuścić dla belki dwuteowej 450 według PN-91/H-93407 pokazanej na Rys.3.39 jeśli w przekroju poprzecznym belki dopuszczalne są naprężenia normalne $k_r=160$ MPa oraz naprężenia styczne $k_t=80$ MPa. Pozostałe dane: $a=2$ m; $l=6a$; $P=5qa$.



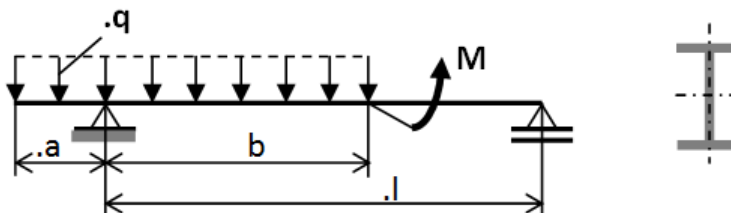
Rys. 3.39.

3.39. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazany na Rys.3.40. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: $q=8$ kN/m; $l=6$ m; $Mql^2/12$; $a=5\delta$; $k_{r,c}=150$ MPa.



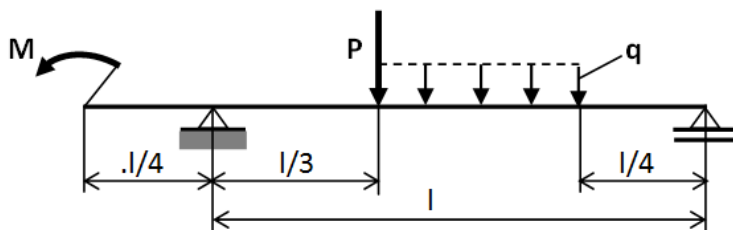
Rys. 3.40.

3.40. Dobrać przekrój dwuteowy wg PN-91/H-93407 dla belki podpartej i obciążonej jak pokazuje Rys.3.41. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: $q=60$ kN/m; $a=1$ m; $M=2qa^2$; $l=5a$; $b=3a$; $k_{r,c}=160$ MPa.



Rys. 3.41.

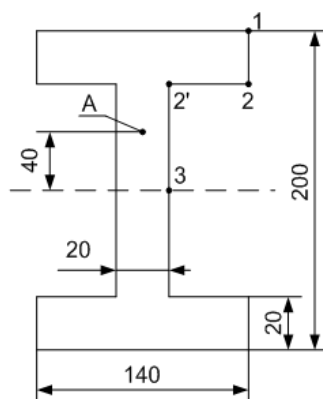
3.41. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki obciążonej jak pokazuje Rys.3.42 w postaci dwuteownika wg PN-91/H-93407. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: $q=36$ kN/m; $l=12$ m; $P=ql/3$; $M=ql^2/16$; $k_{r,c}=140$ MPa.



Rys. 3.42.

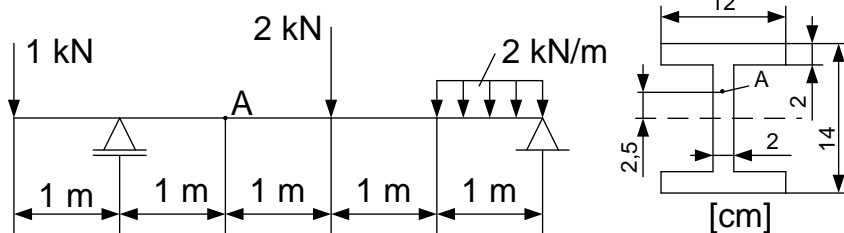
3.42. Belka o przekroju dwuteowym (Rys. 3.43) obciążona jest siłą poprzeczną $T = 20$ kN oraz momentem zginającym $M = 15$ kNm. Narysować wykresy naprężeń normalnych i stycznych w przekroju. W punkcie A znaleźć naprężenia i kierunki główne oraz narysować koło Mohra.

$$\sigma_{\max} = 13,8 \text{ MPa}, \sigma_{\min} = -2,365 \text{ MPa}, \alpha = 22,48^\circ$$



Rys. 3.43.

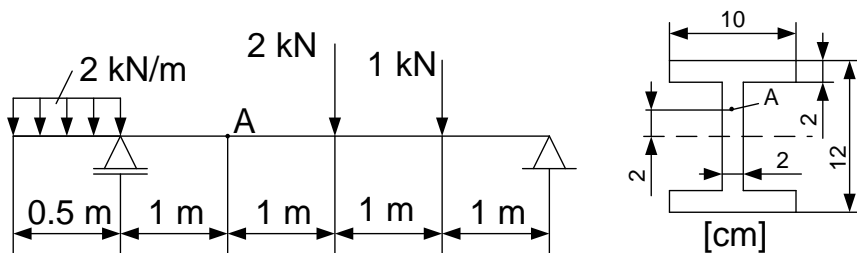
3.43. Dla belki jak na rysunku 3.44 wyznaczyć stan naprężeń głównych w punkcie A, określić kierunki główne oraz narysować koło Mohra.



Rys. 3.44.

Odpowiedź: $\sigma_{\max} = 1,04 \text{ MPa}, \sigma_{\min} = -0,389 \text{ MPa}, \alpha = -31^\circ$.

3.44. Dla belki jak na rysunku 3.45 wyznaczyć stan naprężeń głównych w punkcie A, określić kierunki główne oraz narysować koło Mohra.

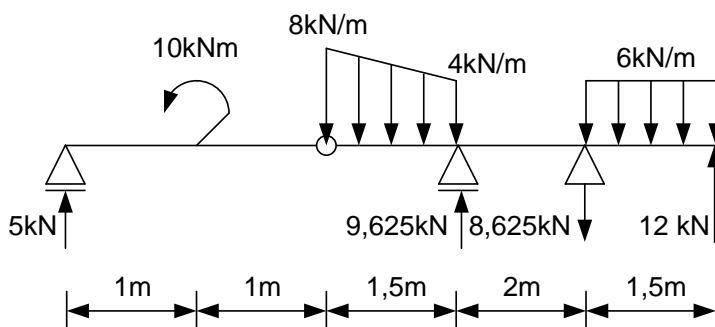


Rys. 3.45.

Odpowiedź: $\sigma_{\max} = 2,142\text{MPa}$, $\sigma_{\min} = -0,208\text{MPa}$, $\alpha = -17,31^\circ$.

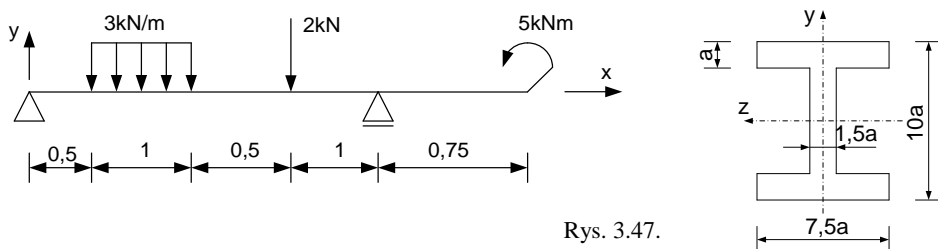
3.45. Wyznaczyć linię ugięcia metodą Clebsch'a dla belki przedstawionej na rysunku 3.46. Przekrój stanowi stalowy profil kwadratowy 100x100x4 dla którego $J_x=J_y=233\text{cm}^4$ oraz moduł Younga $E=2,1\cdot 10^5\text{MPa}$. Poniżej podpór podano wartości reakcji.

Odległość od l. p. [m]	Ugięcie [mm]	Odległość od l. p. [m]	Ugięcie [mm]	Odległość od l. p. [m]	Ugięcie [mm]
0	0	2,5	8,6	5	-5
0,5	2,9	3	4	5,5	0
1	7	3,5	0	6	10,4
1,5	11,2	4	-3,6	6,5	25,3
2	14	4,5	-5,7	7	42,8



Rys. 3.46.

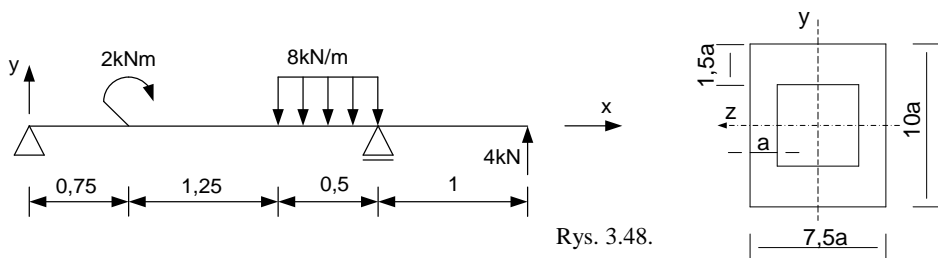
3.46. Wyznaczyć parametr a przekroju belki pokazanej na rysunku 3.47, jeżeli dopuszczalne naprężenia wynoszą $k_c = k_r = 90\text{MPa}$. Wykonać wykresy naprężeń normalnych i stycznych w niebezpiecznym przekroju.



Rys. 3.47.

Odpowiedź: $a > 9,16 \text{ mm}$

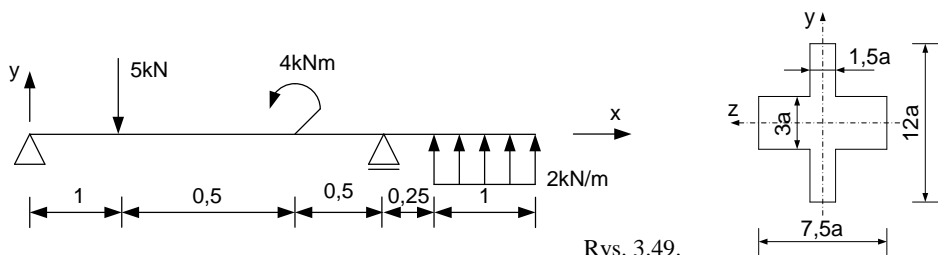
3.47. Wyznaczyć parametr a przekroju belki pokazanej na rysunku 3.48, jeżeli dopuszczalne naprężenia wynoszą $k_c = k_r = 100 \text{ MPa}$. Wykonać wykresy naprężeń normalnych i stycznych w niebezpiecznym przekroju.



Rys. 3.48.

Odpowiedź: $a > 7,83 \text{ mm}$

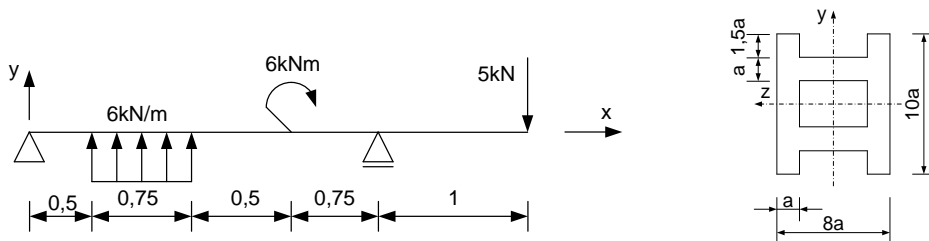
3.48. Wyznaczyć parametr a przekroju belki pokazanej na rysunku 3.49, jeżeli dopuszczalne naprężenia wynoszą $k_c = k_r = 110 \text{ MPa}$. Wykonać wykresy naprężeń normalnych i stycznych w niebezpiecznym przekroju.



Rys. 3.49.

Odpowiedź: $a > 10,73 \text{ mm}$

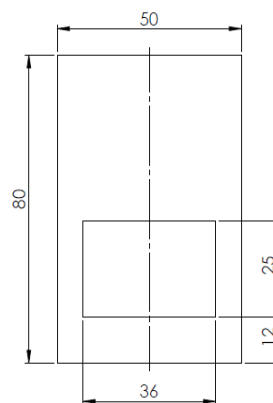
3.49. Wyznaczyć parametr a przekroju belki pokazanej na rysunku 3.50, jeżeli dopuszczalne naprężenia wynoszą $k_c = k_r = 120 \text{ MPa}$. Wykonać wykresy naprężeń normalnych i stycznych w niebezpiecznym przekroju.



Rys. 3.50.

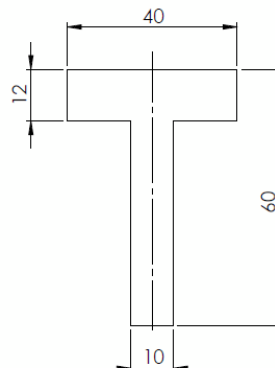
Odpowiedź: $a > 11,03 \text{ mm}$

3.50. Na rysunku 3.51 pokazano przekrój belki, będącej w stanie czystego zginania i wyginanej wypukłością ku dołowi. Jaki maksymalny moment może wystąpić w przekroju, jeśli belka wykonana jest z żeliwa Zl 150, dla którego $k_c = 145 \text{ MPa}$, $k_r = 45 \text{ MPa}$. Wymiary na rysunku podano w milimetrach.



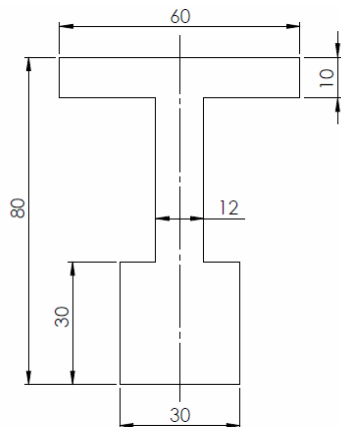
Rys. 3.51.

3.51. Na rysunku 3.52 pokazano przekrój belki, będącej w stanie czystego zginania i wyginanej wypukłością ku górze. Jaki maksymalny moment może wystąpić w przekroju, jeśli belka wykonana jest z żeliwa Zl 200, dla którego $k_c = 195 \text{ MPa}$, $k_r = 55 \text{ MPa}$. Wymiary na rysunku podano w milimetrach.



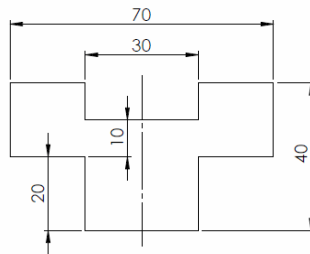
Rys. 3.52.

3.52. Na rysunku 3.53 pokazano przekrój belki, będącej w stanie czystego zginania i wyginanej wypukłością ku dołowi. Jaki maksymalny moment może wystąpić w przekroju, jeśli belka wykonana jest z żeliwa Zl 250, dla którego $k_c = 245 \text{ MPa}$, $k_r = 70 \text{ MPa}$. Wymiary na rysunku podano w milimetrach.



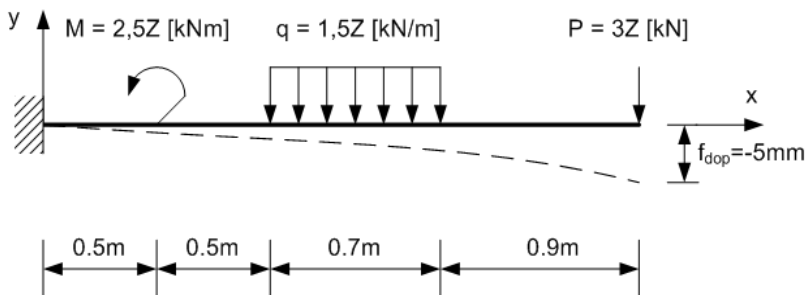
Rys. 3.53.

3.53. Na rysunku 3.54 pokazano przekrój belki, będącej w stanie czystego zginania i wyginanej wypukłością ku górze. Jaki maksymalny moment może wystąpić w przekroju, jeśli belka wykonana jest z żeliwa Zl 300, dla którego $k_c = 290 \text{ MPa}$, $k_r = 85 \text{ MPa}$. Wymiary na rysunku podano w milimetrach.



Rys. 3.54.

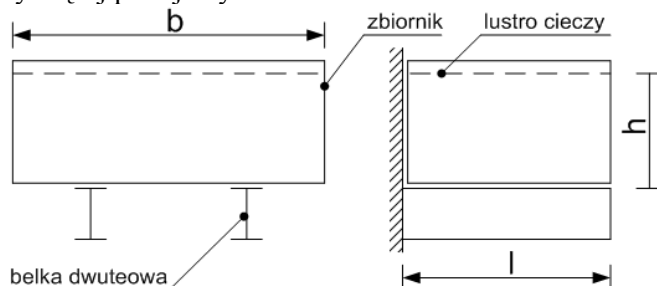
3.54. Ile powinien wynosić parametr Z , aby ugięcie na końcu belki (Rys. 3.55) nie przekroczyło 5 mm ? Moduł sprężystości wzdlużnej $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $J = 1568 \text{ cm}^4$.



Rys. 3.55.

Odpowiedź: $z \leq \frac{EJ}{3292,8 \cdot \text{kNm}^2}$

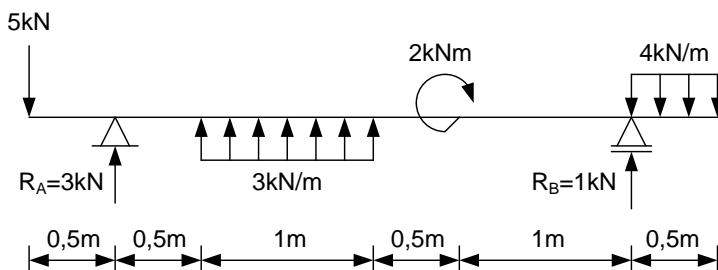
3.55. Zbiornik o wymiarach $b \times l \times h$ spoczywa na dwóch belkach dwuteowych I80 zamurowanych w ścianie (Rys. 3.56). Jaki może być maksymalny poziom cieczy h w zbiorniku aby w materiale belek nie zostały przekroczone dopuszczalne naprężenia $k_c = k_r = 120 \text{ MPa}$. Ciężar właściwy cieczy 9810 N/m^3 , $b = 150 \text{ cm}$, $l = 70 \text{ cm}$. Moment bezwładności dla belki dwuteowej $J = 77,8 \text{ cm}^4$. Wpływ ciężaru zbiornika i siły tnącej pomijamy.



Rys. 3.56.

Odpowiedź: $h < 1,294 \text{ m}$

3.56. Dla belki obciążonej jak na rysunku 3.57 wyznaczyć ugięcie w połowie jej rozpiętości. Przekrój belki stanowi dwuteownik I80, moduł sprężystości podłużnej $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

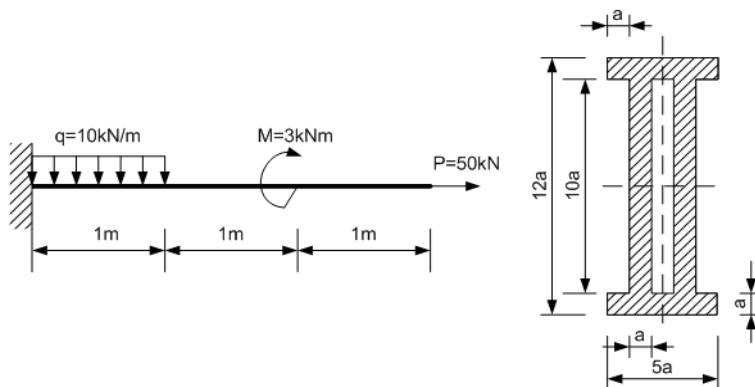


Rys. 3.57.

Odpowiedź: $y = 18 \text{ mm}$

3.57. Belka jednym końcem zamurowana w ścianie (Rys. 3.58) jest obciążona siłą rozciągającą P , momentem skupionym M oraz obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym q . Znając naprężenia dopuszczalne dla materiału belki $k_r = 20 \text{ MPa}$ należy wyznaczyć parametr a przekroju poprzecznego.

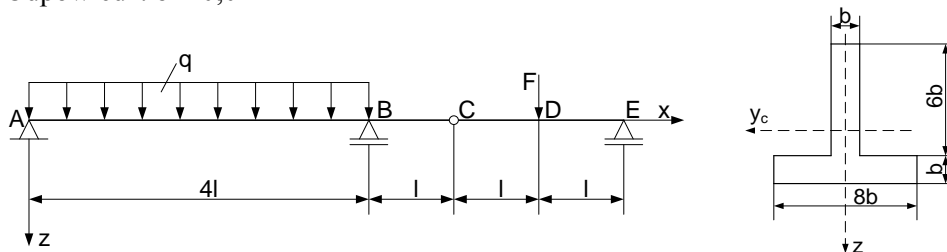
Odpowiedź: $a = 17,4 \text{ mm}$



Rys. 3.58.

3.58. Dla belki przedstawionej na rysunku 3.59 sporządzić wykresy sił tnących i momentów gnących, obliczyć wartości ekstremalne momentu gnącego, a następnie dobrać wymiar b przekroju poprzecznego. Dane $q = 0,01 \text{ MN/m}$, $F = 0,016 \text{ MN}$, $l = 1 \text{ m}$, naprężenia dopuszczalne dla materiału belki: $k_r = 100 \text{ MPa}$, $k_c = 160 \text{ MPa}$. W miejscu występowania maksymalnego momentu gnącego wykonać wykres rozkładu naprężeń normalnych w przekroju. Dla punktu B wykonać wykres rozkładu naprężeń stycznych w przekroju.

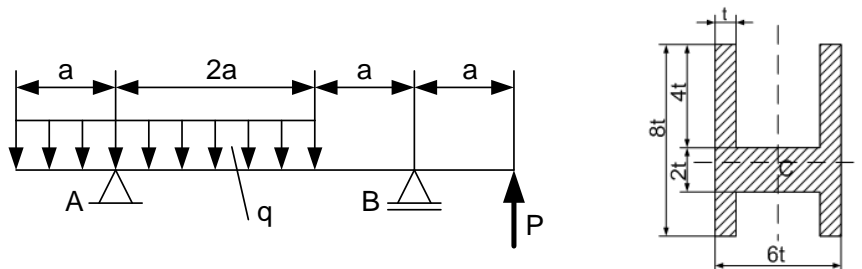
Odpowiedź: $b > 0,02 \text{ m}$



Rys. 3.59.

3.59. Wyznaczyć wymiar t przekroju w kształcie litery H swobodnie podpartej belki (Rys. 3.60), obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem $q = 30 \text{ kN/m}$ i siłą skupioną $P = 0,7qa$, jeżeli dopuszczalne naprężenia wynoszą: $k_r = 40 \text{ MPa}$ oraz $k_c = 120 \text{ MPa}$. Wyznaczyć również naprężenia ścinające wywołane siłą tnącą w przekroju A oraz wykonać wykresy rozkładu naprężeń normalnych i ścinających w przekrojach niebezpiecznych. $a = 0,8 \text{ m}$.

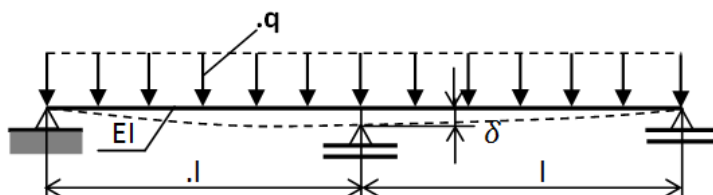
Odpowiedź : $t > 26,6 \text{ mm}$, $\tau_{\max} = 5,67 \text{ MPa}$



Rys. 3.60.

3.5. Zadania statycznie niewyznaczalne

3.60. Środkowa podpora belki pokazanej na Rys.3.61 została zamontowana niżej o wartość δ . Zaprojektować wartość obciążenia ciągłego q dla którego reakcje wszystkich trzech podpór będą jednakowe. Dane: $\delta=1$ cm; $l=4$ m; $EI=800$ kNm².

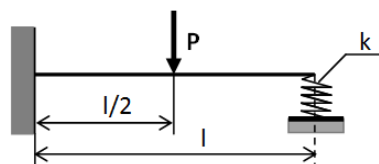
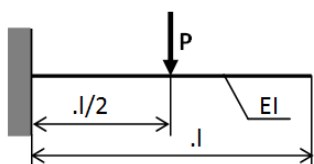


Rys. 3.61.

3.61. Dla zmniejszenia ugięcia swobodnego końca belki wspornikowej (Rys.3.62a) zastosowano podporę sprężystą (Rys.3.62b). Zaprojektować stałą sprężystości k tej podpory ażeby ugięcie końca belki zmniejszyło się dwukrotnie. Dane: $P=20$ kN; $l=4$ m; $EI=1,2 \cdot 10^7$ kNcm².

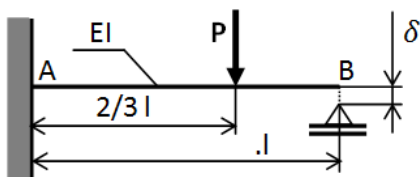
a.)

b.)

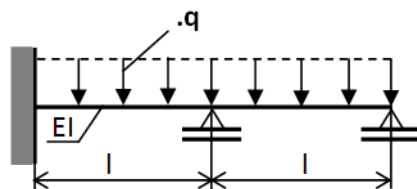


Rys. 3.62.

3.62. Zaprojektować odległość δ sztywnej podpory B od swobodnego końca belki wspornikowej (Rys.3.63) w stanie nieobciążonym, ażeby po obciążeniu jej siłą P reakcje pionowe na podporach A i B były jednakowe. Dane: $P=4$ kN; $l=3$ m; $EI=2000$ kNm².



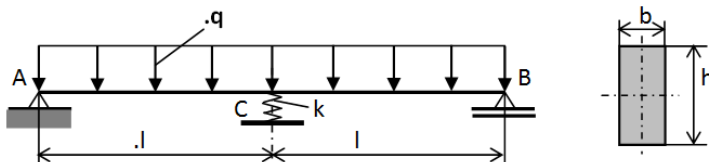
Rys. 3.63.



Rys. 3.64.

3.63. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.64, w postaci dwuteownika wg PN-91/H-93407. Dane: $q=64 \text{ kN}$; $l=2 \text{ m}$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$.

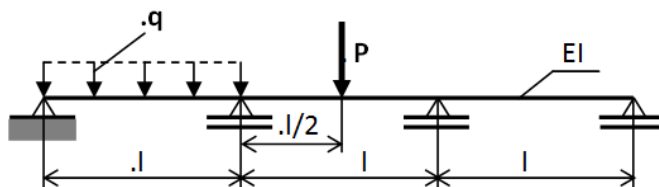
3.64. Belka spoczywająca na sztywnych podporach A i B oraz podporze sprężystej C obciążona jest jak pokazuje Rys.3.65. Zaprojektować wartość sztywności k podpory C, taką ażeby reakcje wszystkich podpór były jednakowe. Dane: $q=30 \text{ kN}$; $l=2 \text{ m}$; $b=10 \text{ cm}$; $h=2b$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Rys. 3.65.

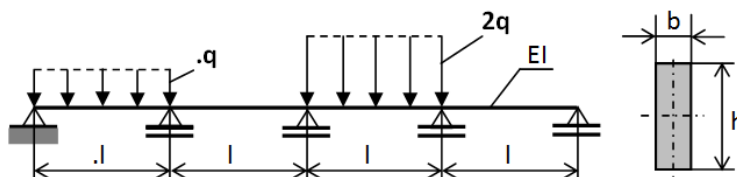
3.65. Określić dwuteowy przekrój wg PN-91/H-93407 dla belki pokazanej na Rys.3.66. Obliczyć reakcje podpór.

Dane: $q=48 \text{ kN/m}$; $l=3 \text{ m}$; $P=2ql$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$; $EI=\text{const.}$



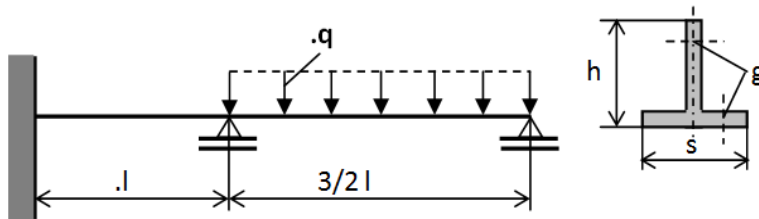
Rys. 3.66.

3.66. Zaprojektować wymiary przekroju poprzecznego belki pokazanej na Rys.3.67. Dane: $q=80 \text{ kN/m}$; $l=4 \text{ m}$; $h=3b$; $k_{r,c}=160 \text{ MPa}$; $EI=\text{const.}$



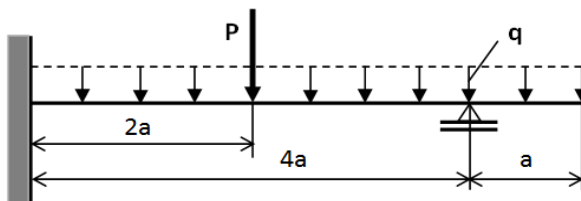
Rys. 3.67.

3.67. Obliczyć konieczne wartości wymiarów teowego przekroju poprzecznego belki zamocowanej i obciążonej jak na Rys.3.68. Dane: $q=120 \text{ kN/m}$; $l=4 \text{ m}$; $h=s=8g$; $k_{r,c}=160 \text{ MPa}$; $EI=\text{const.}$.



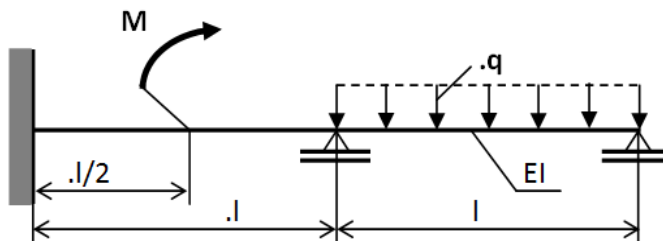
Rys. 3.68.

3.68. Zaprojektować przekrój poprzeczny w postaci dwuteownika wg PN- 91/H-93407 dla przedstawionej na Rys.3.69. Dane: $q=60 \text{ kN/m}$; $a=1 \text{ m}$; $P=4/3 qa$; $k_{r,c}=160 \text{ MPa}$; $v=0,5\text{cm}$ - dopuszczalna wartość ugięcia belki w punkcie przyłożenia siły P ; $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



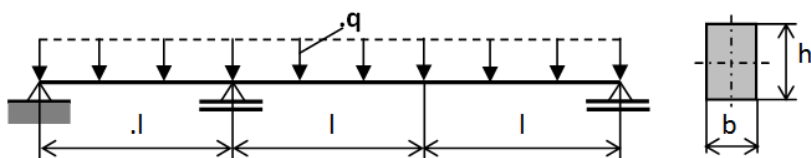
Rys. 3.69.

3.69. Zaprojektować przekrój poprzeczny o postaci dowolnego kształtownika hutniczego wg PN dla belki przedstawionej na Rys.3.70. Dane: $q=18 \text{ kN/m}$; $M=ql^2/4$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$; $EI=\text{const.}$.



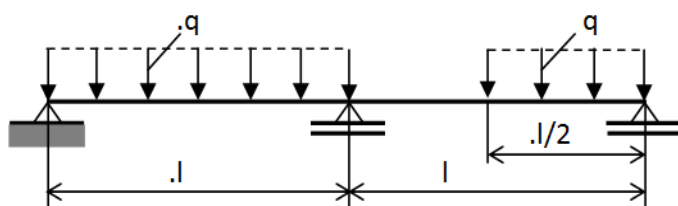
Rys. 3.70.

3.70. Belka obciążona jest jak pokazuj Rys.3.71. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz obliczyć wymagane wymiary przekroju poprzecznego. Dane: $q=36 \text{ kN/m}$; $l=3 \text{ m}$; $h=3/2 b$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.



Rys. 3.71.

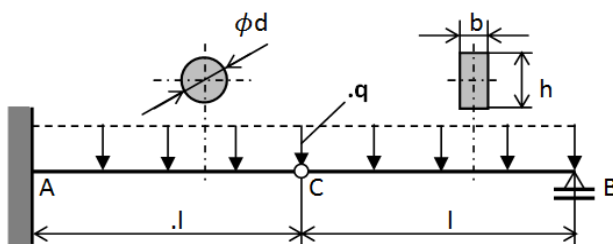
3.71. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących oraz zaprojektować przekrój poprzeczny belki (Rys. 3.72) w postaci dwuteownika wg PN-91/H-93407. Dane: $q=24 \text{ kN/m}$; $l=4 \text{ m}$; $k_{r,c}=120 \text{ MPa}$.



Rys. 3.72.

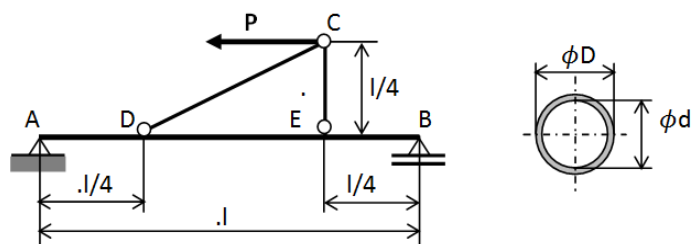
3.6. Zadania różne

3.72. Zaprojektować wymiary poprzeczne przęseł AC i CB belki z przegubem C pokazanej na Rys.3.73. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: $q=20 \text{ kN/m}$; $l=4 \text{ m}$; $h=2b$; $k_{r,c}=160 \text{ MPa}$.



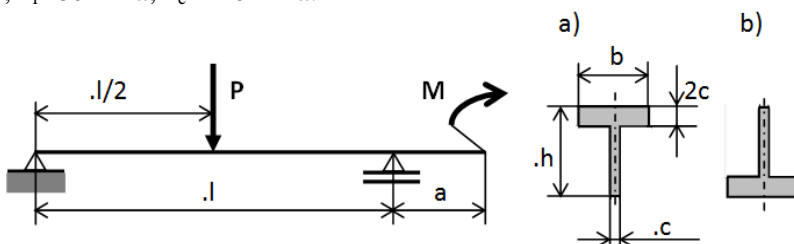
Rys. 3.73.

3.73. Belka AB obciążona jest poprzez pręty CD i CE jak pokazuje Rys.3.74. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki AB w postaci rury o stosunku średnic $d/D=0,8$. Pozostałe dane: $P=40 \text{ kN}$; $l=8 \text{ m}$; $k_{r,c}=140 \text{ MPa}$.



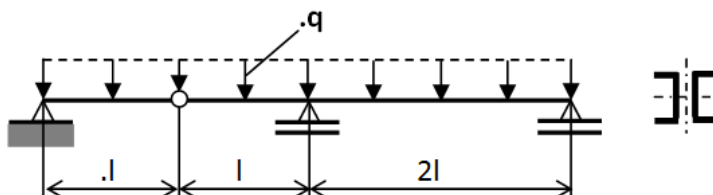
Rys. 3.74.

3.74. Teowa belka żeliwna obciążona jest jak przedstawia Rys.3.75. Zaprojektować korzystniejsze wytrzymałościowo położenie przekroju a) lub b). Jaką będzie wtedy wartość siły P. Dane: $l=2$ m; $a=l/4$ $M=Pa$; $c=16$ mm; $b=8c$; $h=10c$; $k_r=80$ MPa; $k_c=240$ MPa.



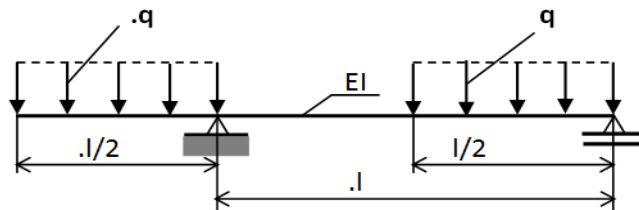
Rys. 3.75.

3.75. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących dla belki z przegubem pokazanej na Rys.3.76 oraz zaprojektować wymiary przekroju poprzecznego w postaci dwóch ceowników wg PN-86/H-93403. Dane: $q=120$ kN/m; $l=2$ m; $k_{r,c}=150$ MPa.



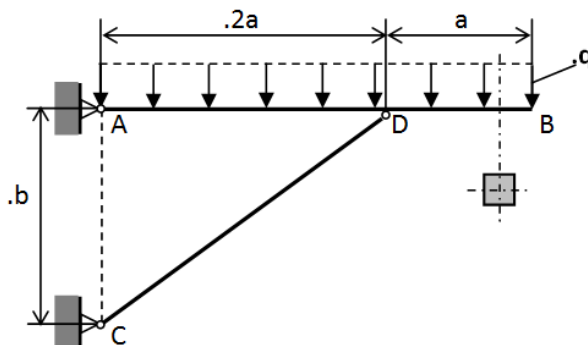
Rys. 3.76.

3.76. Obliczyć największą dopuszczalną wartość obciążenia q dla belki pokazanej na Rys.3.77 jeśli strzałka ugięcia $f_{dop}=l/1000$. Pozostałe dane: $l=4$ m; $EI=2 \cdot 10^3$ kNm².



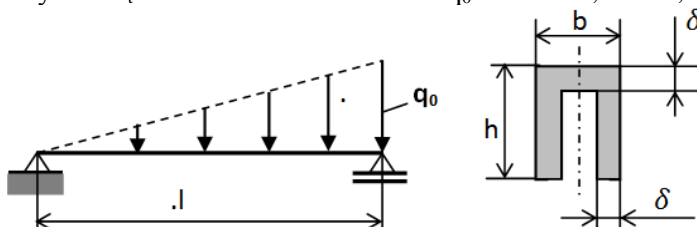
Rys. 3.77.

3.77. Belka AB zamocowana jest przegubowo do ściany i podparta prętem CD jak pokazano na Rys.3.78. Wykonać wykresy momentów gnących i sił tnących dla belki AB poddanej obciążeniu ciągłemu q oraz zaprojektować jej przekrój poprzeczny w postaci kwadratu $h \times h$. Dane: $q=90 \text{ kN/m}$; $a=2 \text{ m}$; $b=3/2a$; $k_{r,c}=150 \text{ MPa}$.



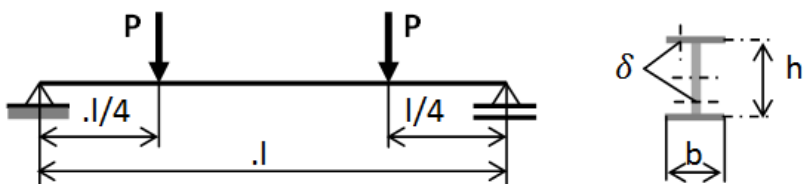
Rys. 3.78.

3.78. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.79 jeśli w przekrojach poprzecznych dopuszcza się naprężenia normalne $k_r=140 \text{ MPa}$ i naprężenia styczne $k_t=70 \text{ MPa}$. Pozostałe dane: $q_0=20 \text{ kN/m}$; $l=4 \text{ m}$; $b=4\delta$; $h=6\delta$.



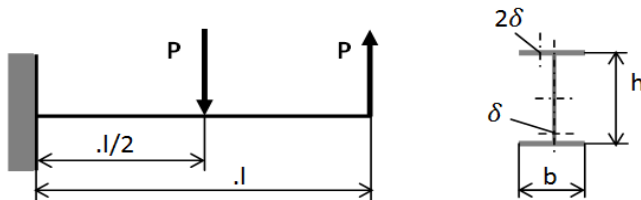
Rys. 3.79.

3.79. Zaprojektować długość l belki pokazanej na Rys.3.80, dla której maksymalne naprężenia styczne w przekroju poprzecznym będą stanowiły 10% maksymalnych naprężeń od zginania. Obliczyć wartości tych naprężeń. Dane: $P=20 \text{ kN}$; $\delta=5 \text{ mm}$; $b=20\delta$; $h=40\delta$.



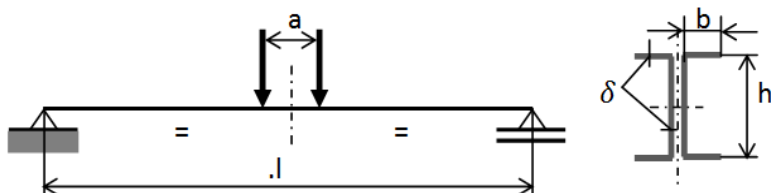
Rys. 3.80.

3.80. Zaprojektować przekrój poprzeczny belki pokazanej na Rys.3.81 jeśli dopuszczalne są w nim naprężenia normalne $k_r=120$ MPa i naprężenia styczne $k_t=60$ MPa. Pozostałe dane: $P=8$ kN; $l=2$ m; $b=16\delta$; $h=32\delta$.



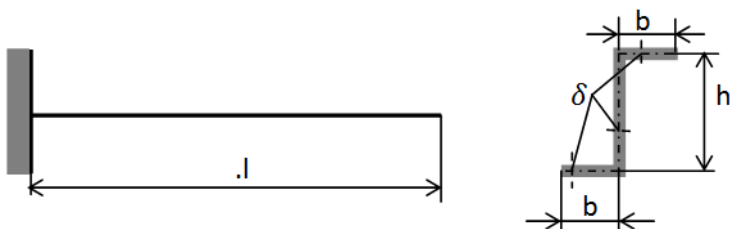
Rys. 3.81.

3.81. Belka złożona z dwóch cienkościennych ceowników obciążona jest jak pokazuje Rys.3.82. Zaprojektować wymiary poprzecznego przekroju ceownika jeśli dopuszcza się w nim naprężenia rozciągające $k_r=160$ MPa i naprężenia styczne $k_t=80$ MPa. Pozostałe dane: $P=100$ kN; $l=8$ m; $a=1$ m; $b=10\delta$; $h=32\delta$.



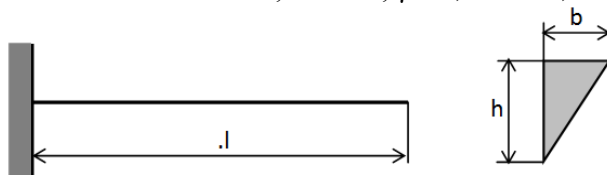
Rys. 3.82.

3.82. Obliczyć maksymalną dopuszczalną długość belki wspornikowej o przekroju zetowym (Rys.3.83) obciążonej ciężarem własnym. Dane: $b=4$ cm; $h=6$ cm; $\delta=4$ mm; $\gamma=78,5$ kN/m³; $k_{r,c}=100$ MPa.



Rys. 3.83.

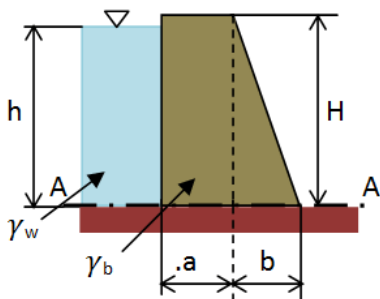
3.83. Belka wspornikowa o przekroju trójkątnym i długości l jak pokazuje Rys.3.84 obciążona jest ciężarem własnym. Zaprojektować wymiary poprzeczne belki jeśli dopuszcza się przemieszczenie pionowe swobodnego końca belki 5 cm. Obliczyć dla takiej belki ekstremalne naprężenia normalne w przekroju poprzecznym. Pozostałe dane: $l = 8$ m; $h = 3/2 b$; $\gamma = 78,5$ kN/m³; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



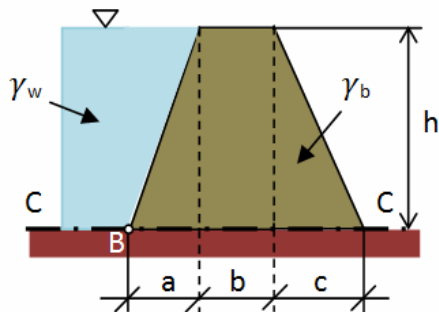
Rys. 3.84.

3.84. Zaprojektować wysokość ogrodzenia z muru ceglanego o grubości $b = 30$ cm, jeśli ciężar właściwy muru $\gamma = 2$ kN/m³, przewidywane maksymalne parcie wiatru $q = 600$ N/m² i dopuszczalne naprężenia $k_r = 0,1$ MPa; $k_c = 1,6$ MPa.

3.85. Zaprojektować wymiar b przekroju poprzecznego zapory wodnej pokazanej na Rys.3.85, dla którego nie wystąpią w przekroju A-A u podstawy naprężenia rozciągające. Dane: $H = 18$ m; $h = 16$ m; $a = 4$ m; $\gamma_w = 10$ kN/m³; $\gamma_b = 2,6$ kN/m³.



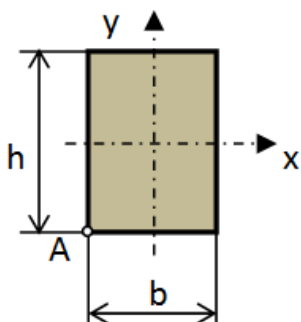
Rys. 3.85.



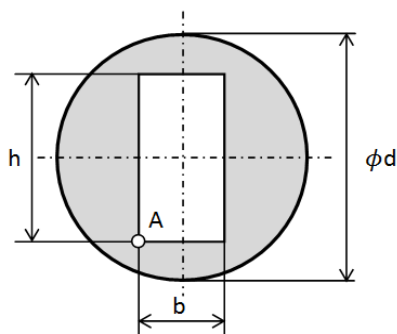
Rys. 3.86

3.86. Zaprojektować wysokość h tamy pokazanej na Rys.3.86, dla której po wypełnieniu zbiornika wodą naprężenia normalne w punkcie B przekroju C-C będą równe zero. Dane: $a=b=4\text{ m}$; $c=2a$; $\gamma_w=10\text{ kN/m}^3$; $\gamma_b=20\text{ kN/m}^3$.

3.87. Słup o przekroju prostokątnym (Rys.3.87) ściskany jest mimośrodowo siłą P przyłożoną w punkcie A. Napisać równanie warstwy obojętnej i wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych na konturze przekroju. Dane: $P=600\text{ kN}$; $b=20\text{ cm}$; $h=30\text{ cm}$.



Rys. 3.87.

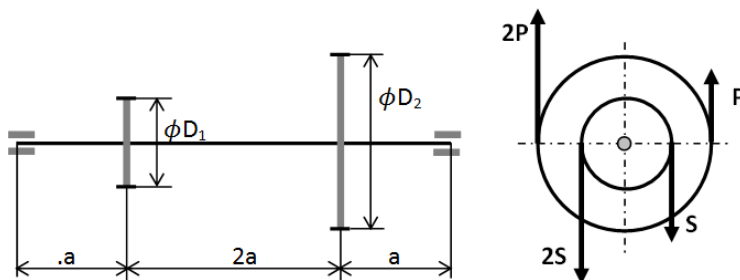


Rys. 3.88.

3.88. Zaprojektować wymiary przekroju poprzecznego słupa (Rys.3.88), który ściskany jest siłą P przyłożoną w punkcie A. Dane: $P=600\text{ kN}$; $d=3b$; $h=2b$; $k_t=80\text{ MPa}$; $k_c=240\text{ MPa}$.

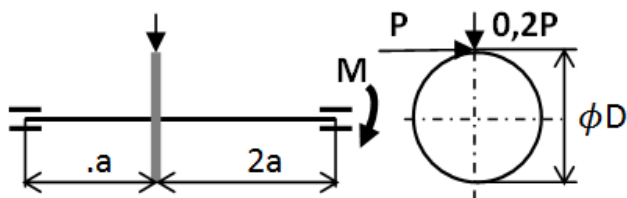
4. Wybrane przypadki wytrzymałości złożonej

4.1. Wał obciążony jest poprzez koła pasowe jak pokazuje Rys.4.1. Obliczyć jaką powinna być średnica wału wg hipotezy Hubera. Dane: $P=1,2\text{ kN}$; $a=50\text{ cm}$; $D_1=80\text{ cm}$; $D_2=40\text{ cm}$; $k_t=100\text{ MPa}$.



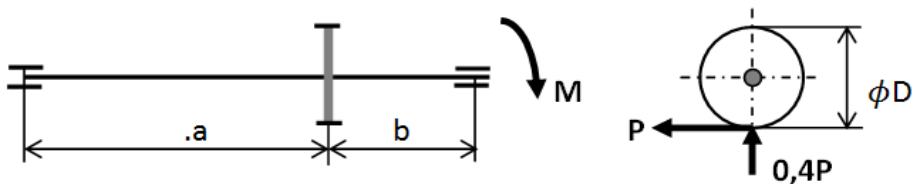
Rys. 4.1.

4.2. Obliczyć średnicę wałka obciążonego jak na Rys.4.2 wg: a) hipotezy τ_{\max} , b) hipotezy Hubera. Porównać ciężary obu wersji. Dane: $P=2 \text{ kN}$; $a=10 \text{ cm}$; $D=8 \text{ cm}$; $k_f=160 \text{ MPa}$.



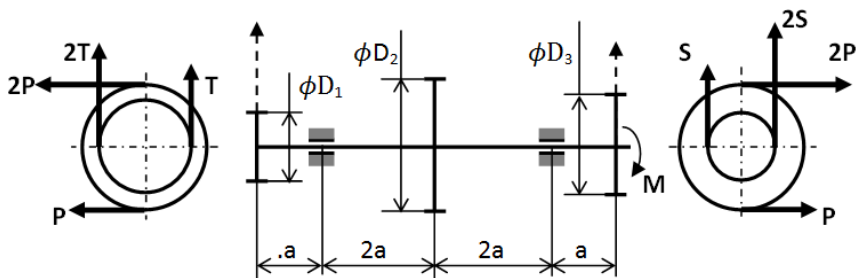
Rys. 4.2.

4.3. Zaprojektować średnicę wałka obciążonego jak na Rys.4.3 wg: a) hipotezy Hubera, b) hipotezy τ_{\max} . Która wersja daje wałek cięższy i ile procent. Dane: $M=3 \text{ kNm}$; $a=60 \text{ cm}$; $b=20 \text{ cm}$; $D=16 \text{ cm}$; $k_f=140 \text{ MPa}$.



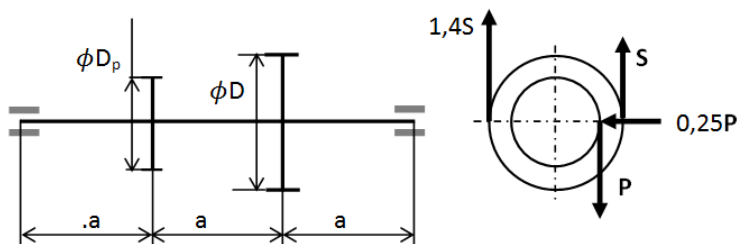
Rys. 4.3.

4.4. Zaprojektować średnicę wałka napędowego obciążonego poprzez koła pasowe jak pokazuje Rys.4.4. Dane: $a=20 \text{ cm}$; $D_1=20 \text{ cm}$; $D_2=40 \text{ cm}$; $D_3=30 \text{ cm}$; $S=6,4 \text{ kN}$; $P=4,5 \text{ kN}$; $T=3,2 \text{ kN}$; $k_f=150 \text{ kN}$.



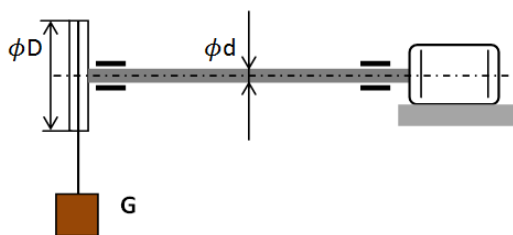
Rys. 4.4.

4.5. Obliczyć średnicę wału na którym osadzone są koło pasowe i koło zębate przenoszące napęd jak pokazuje Rys.4.5. Dane: $a=80$ cm; $D=40$ cm; $D_p=20$ cm; $S=0,5$ kN; $k_t=150$ MPa.



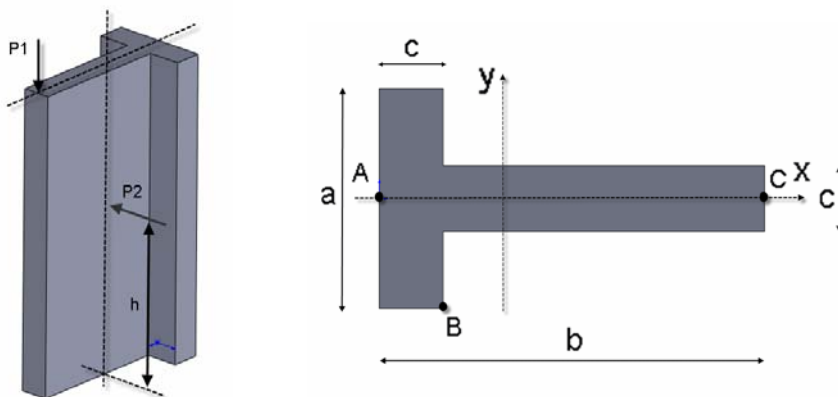
Rys. 4.5.

4.6. Ciężar G zawieszony na cięgnie podnoszony jest ze stałą prędkością poprzez nawijanie go na koło pasowe o średnicy D (Rys. 4.6). Obliczyć średnicę d wałka napędowego. Dane: $D=40$ cm; $G=6$ kN; $k_t=80$ MPa.



Rys. 4.6.

4.7. Stalowy element konstrukcji jest obciążony jak na rysunku 4.7 pionową siłą P_1 oraz poziomą siłą P_2 , której kierunek działania znajduje się w odległości h od utwardzenia. Korzystając z hipotezy Hubera wyznaczyć naprężenia zredukowane w punktach A, B i C



Rys. 4.7.

Dane:

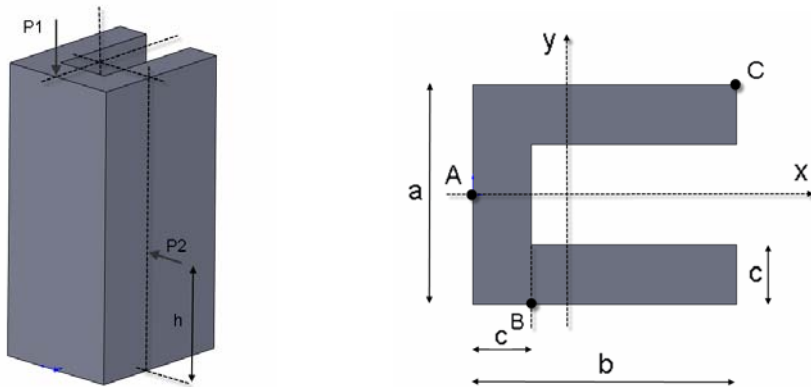
	a [mm]	b [mm]	c [mm]	h [mm]	P_1 [kN]	P_2 [kN]
1	100	180	30	50	10	15
2	120	200	30	60	15	20
3	140	220	30	70	20	25
4	100	180	40	80	25	30
5	120	200	40	50	30	35
6	140	220	40	60	35	40
7	100	180	50	70	40	45
8	120	200	50	80	45	50
9	140	220	50	50	50	55

Odpowiedzi:

	J_x [mm ⁴]	J_y [mm ⁴]	S_x [mm]	σ_{redA} [MPa]	σ_{redB} [MPa]	σ_{redC} [MPa]
1	2837500	23242500	69	3,391	12,687	7,188
2	4702500	33655948	73,62	3,623	14,578	9,244
3	7287500	46722500	78,33	3,744	15,899	10,917
4	4080000	28580000	72,50	6,943	28,96	13,859
5	6613333	41721904	77,14	6,311	15,275	14,347
6	10106666	58301666	81,87	5,82	15,885	14,79
7	5520833	33087137	75,87	10,114	28,75	18,454
8	8762500	48645833	80,56	8,761	27,346	17,86
9	13204166	68377553	85,32	7,744	14,326	17,466

S_x – położenie środka ciężkości na osi x, mierzone od punktu A.

4.8. Stalowy element konstrukcji jest obciążony jak na rysunku 4.8. pionową siłą P_1 oraz poziomą siłą P_2 , której kierunek działania znajduje się w odległości h od utwierdzenia. Korzystając z hipotezy Hubera wyznaczyć naprężenia zredukowane w punktach A, B i C



Rys. 4.8.

Dane:

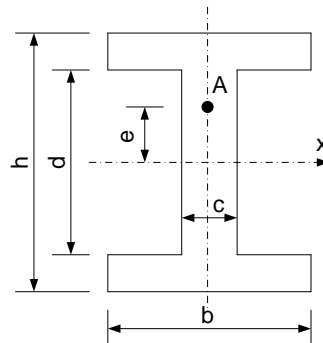
	a [mm]	b [mm]	c [mm]	h [mm]	P_1 [kN]	P_2 [kN]
1	220	270	60	60	40	15
2	240	290	60	80	45	20
3	260	310	60	100	50	25
4	220	270	70	40	55	30
5	240	290	70	60	60	35
6	260	310	70	80	65	40
7	220	270	80	100	70	45
8	240	290	80	40	75	50
9	260	310	80	60	80	55

Odpowiedzi:

	J_x [mm ⁴]	J_y [mm ⁴]	S_x [mm]	σ_{redA} [MPa]	σ_{redB} [MPa]	σ_{redC} [MPa]
1	222080000	254444062	118,59	4,21	1,528	0,723
2	300960000	324946571	125,29	4,566	1,475	0,464
3	396880000	407502368	131,97	4,876	1,411	0,222
4	231046666	280695860	122,1	6,321	1,653	1,083

5	315746666	359640784	128,82	6,4	1,537	0,71
6	419486666	452336531	135,54	6,466	1,432	0,393
7	236160000	303988000	125,5	8,164	0,229	0,072
8	325120000	390607272	132,27	7,982	1,698	1,201
9	434880000	492585555	139,03	7,828	1,531	0,764

4.9. W przekroju dwuteowym belki występuje moment gnący M oraz siła tnąca T . Korzystając z hipotezy Hubera, wyznaczyć naprężenia zredukowane w punkcie A (Rys. 4.9). Przy wyznaczaniu naprężeń stycznych skorzystać ze wzoru Żurawskiego.



Rys. 4.9.

Dane:

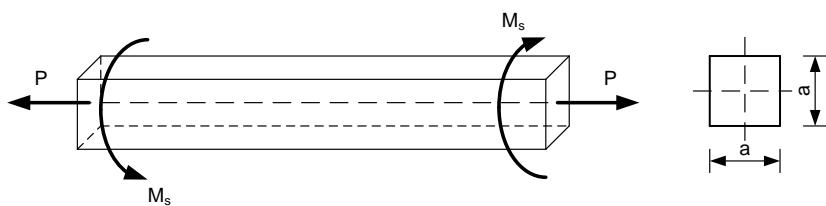
	M [kNm]	T [kN]	b [cm]	h [cm]	d [cm]	c [cm]	e [cm]
1	1,5	8	6	12	8	1,5	3
2	2	12	8	16	12	2	4
3	2,5	14	10	20	16	2,5	5

Odpowiedzi :

	σ [MPa]	τ [MPa]	σ_{red} [MPa]
1	6,696	5,179	11,194
2	4,286	4,243	8,507
3	3,044	3,119	6,201

4.10. Dla pręta stalowego (Rys. 4.10) o przekroju kwadratowym poddanego skręcaniu momentami $M_s = 100 \text{ Nm}$ i rozciąganego siłą $P = 20 \text{ kN}$ wyznaczyć wymiar „a” przekroju pręta. Naprężenia dopuszczalne $k_r = 100 \text{ MPa}$, przyjąć hipotezę największego naprężenia stycznego.

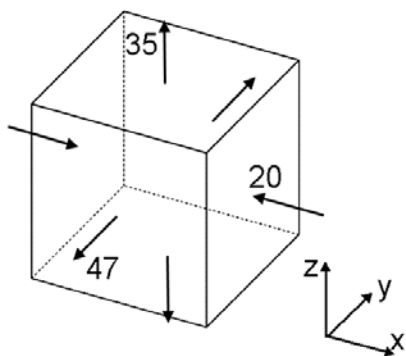
Odpowiedź: $a = 22 \text{ mm}$.



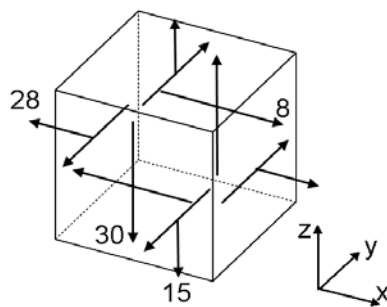
Rys. 4.10.

4.11. W elemencie konstrukcji występuje stan naprężenia jak na rysunku 4.11. Dla przyjętego układu współrzędnych należy wprowadzić odpowiednie indeksy dla poszczególnych składowych naprężeń stycznych i normalnych oraz wyznaczyć naprężenia zredukowane korzystając z hipotezy Hubera. Wartości podano w MPa.

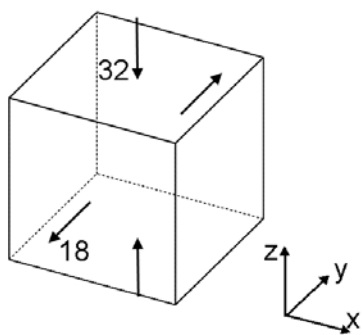
a)



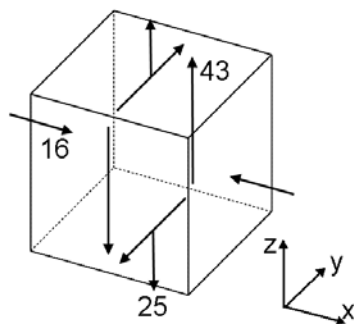
b)



c)



d)

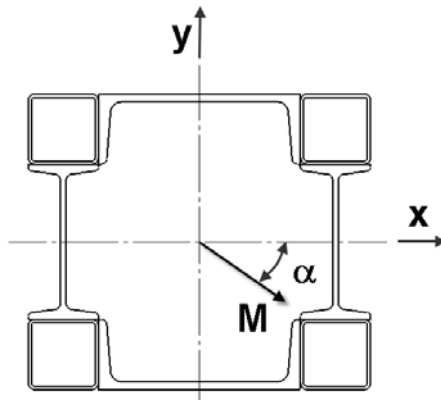


Rys. 4.11.

4.12. W przekroju poprzecznym belki stwierdzono występowanie momentu gnącego $M=25\text{kNm}$, którego wektor jest skierowany pod kątem $\alpha=30^\circ$ jak na rysunku 4.12. Wyznaczyć momenty bezwładności względem głównych centralnych osi. Określić położenie osi obojętnej oraz wskazać miejsce i wartość maksymalnych naprężeń.

Przekrój składa się z następujących kształtowników:

- dwuteownik I200 PN-91/H-93407
- ceownik C260 PN-86/H-93403
- profil kwadratowy 90x90x4 PN-EN 10210-2:2000



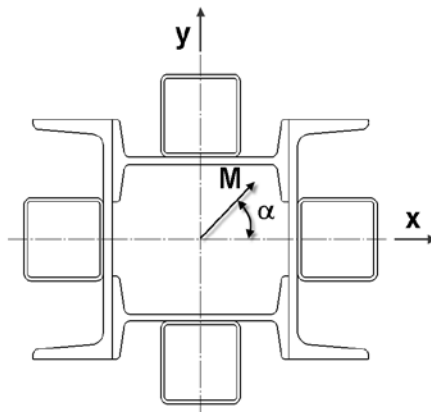
Rys. 4.12.

Odpowiedź: $J_x=43496,6\text{cm}^4$, $J_y=47358,9\text{cm}^4$, $\beta=-27,9^\circ$ w stosunku do dodatnio skierowanej osi x , $\sigma_{\max}=15,25\text{MPa}$

4.13. W przekroju poprzecznym belki stwierdzono występowanie momentu gnącego $M=30\text{kNm}$, którego wektor jest skierowany pod kątem $\alpha=60^\circ$ jak na rysunku 4.13. Wyznaczyć momenty bezwładności względem głównych centralnych osi. Określić położenie osi obojętnej oraz wskazać miejsce i wartość maksymalnych naprężeń.

Przekrój składa się z następujących kształtowników:

- dwuteownik I200 PN-91/H-93407
- ceownik C260 PN-86/H-93403
- profil kwadratowy 90x90x4 PN-EN 10210-2:2000



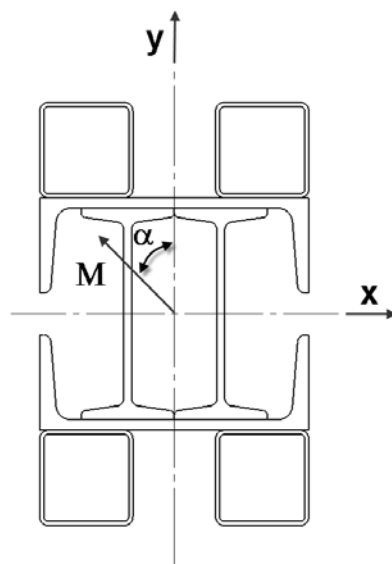
Rys. 4.13.

Odpowiedź: $J_x=20135,7\text{cm}^4$, $J_y=26742,3\text{cm}^4$, $\beta=52,5^\circ$ w stosunku do dodatnio skierowanej osi x , $\sigma_{\max}=28,13\text{MPa}$

4.14. W przekroju poprzecznym belki stwierdzono występowanie momentu gnącego $M=35\text{kNm}$, którego wektor jest skierowany pod kątem $\alpha=20^\circ$ jak na rysunku 4.14. Wyznaczyć momenty bezwładności względem głównych centralnych osi. Określić położenie osi obojętnej oraz wskazać miejsce i wartość maksymalnych naprężeń.

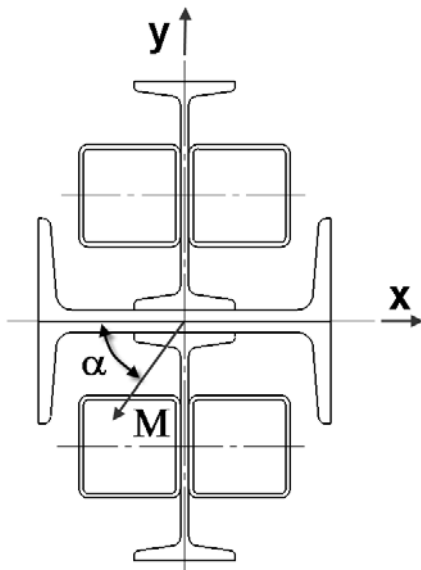
Przekrój składa się z następujących kształtowników:

- dwuteownik I200 PN-91/H-93407
- ceownik C260 PN-86/H-93403
- profil kwadratowy 90x90x4 PN-EN 10210-2:2000



Rys. 4.14.

Odpowiedź: $J_x=25580,54\text{cm}^4$,
 $J_y=15740,56\text{cm}^4$, $\beta=77,37^\circ$ w stosunku
do dodatnio skierowanej osi x ,
 $\sigma_{\max}=36,5\text{MPa}$



Rys. 4.15.

4.15. W przekroju poprzecznym belki stwierdzono występowanie momentu gnącego $M=40\text{kNm}$, którego wektor jest skierowany pod kątem $\alpha=35^\circ$ jak na rysunku 4.15. Wyznaczyć momenty bezwładności względem głównych centralnych osi. Określić położenie osi obojętnej oraz wskazać miejsce i wartość maksymalnych naprężeń.

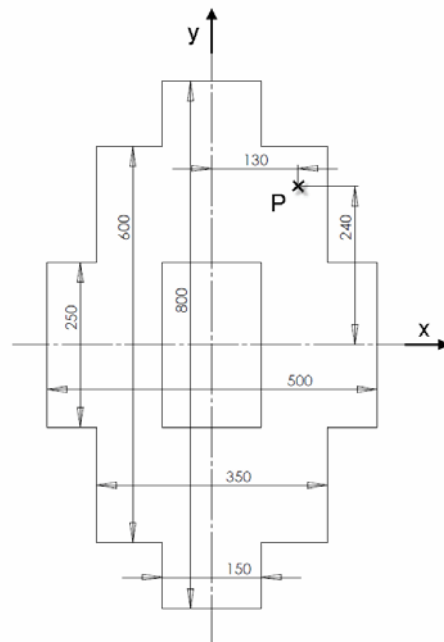
Przekrój składa się z następujących kształtowników:

- dwuteownik I200 PN-91/H-93407
- ceownik C260 PN-86/H-93403
- profil kwadratowy 90x90x4 90x90x4 PN-EN 10210-2:2000

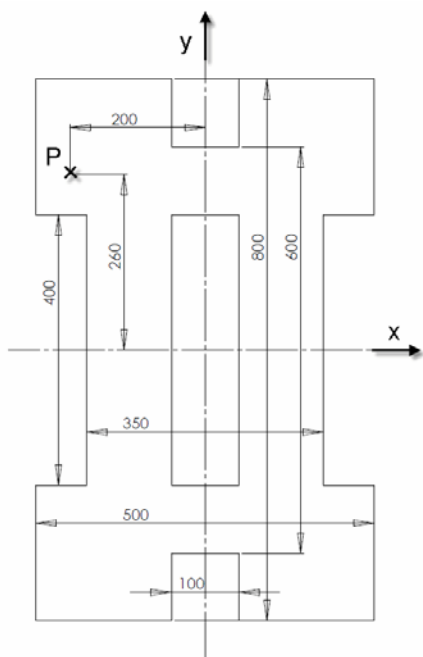
Odpowiedź: $J_x=20650,4\text{cm}^4$, $J_y=11797,8\text{cm}^4$, $\beta=50,78^\circ$ w stosunku do dodatnio skierowanej osi x , $\sigma_{\max}=42,79\text{MPa}$

4.16. Słup o niewielkiej wyniosłości, wykonany z żeliwa ZI50 dla którego $k_r = 45\text{MPa}$, $k_c = 145\text{MPa}$ jest ściskany siłą P przyłożoną jak na rysunku 4.16. Obliczyć momenty bezwładności przekroju poprzecznego słupa, wyznaczyć położenie osi obojętnej, określić dopuszczalną wartość siły P oraz wykonać rysunek obrazujący maksymalne naprężenia normalne.

Odpowiedź: $J_x=1\cdot 10^6\text{cm}^4$, $J_y=3,84\cdot 10^5\text{cm}^4$, współrzędne punktów przez które przechodzi oś obojętna (0, -173,6mm), (-123,09, 0), $P<5,65\text{MN}$



Rys. 4.16.



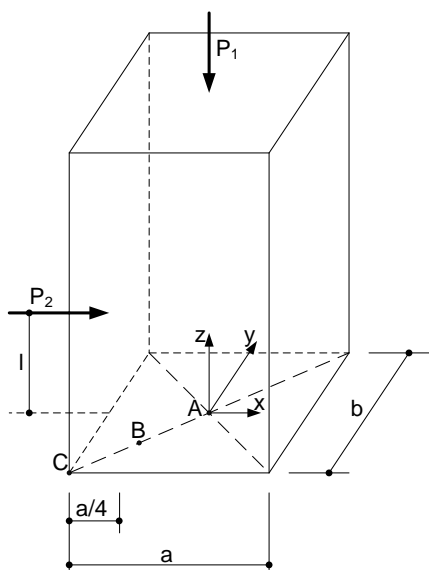
Rys. 4.17.

4.17. Słup o niewielkiej wyniosłości, wykonany z żeliwa Z300 dla którego $k_r = 85\text{MPa}$, $k_c = 290\text{MPa}$ jest ściskany siłą P przyłożoną jak na rysunku 4.17. Obliczyć momenty bezwładności przekroju poprzecznego słupa, wyznaczyć położenie osi obojętnej, określić dopuszczalną wartość siły P oraz wykonać rysunek obrazujący maksymalne naprężenia normalne.

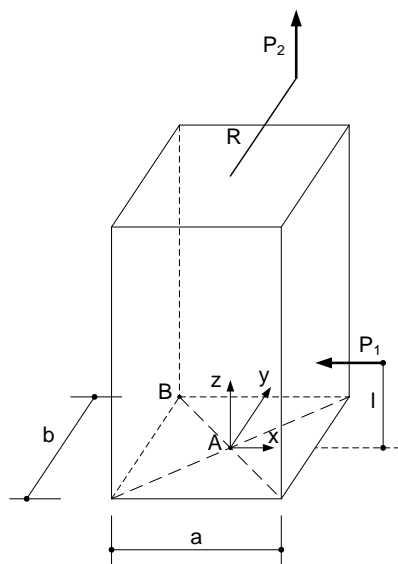
Odpowiedź: $J_x = 1,7533 \cdot 10^6 \text{cm}^4$, $J_y = 5,5458 \cdot 10^5 \text{cm}^4$, współrzędne punktów przez które przechodzi oś obojętna $(0, -240,82)$, $(99,02, 0)$, $P < 7,47\text{MN}$

4.18. Stosując hipotezę Hubera wyznaczyć wartości naprężeń zredukowanych w punktach A, B i C leżących w utwardzonej podstawie (Rys. 4.18).

	Dane					Odpowiedzi		
	a [mm]	b [mm]	l [mm]	P_1 [kN]	P_2 [kN]	σ_{redA} [MPa]	σ_{redB} [MPa]	σ_{redC} [MPa]
1	30	60	20	20	12	20,57	13,17	15,55
2	32	62	22	22	14	21,42	14,18	18,01
3	34	64	24	24	16	22,05	15,03	20,11
4	36	66	26	26	18	22,52	15,74	21,88
5	38	68	28	28	20	22,84	16,33	23,38
6	40	70	30	30	22	23,05	16,82	24,64
7	42	72	32	32	24	23,17	17,21	25,69
8	44	74	34	34	26	23,26	17,52	26,58
9	46	76	36	36	28	23,21	17,77	27,31

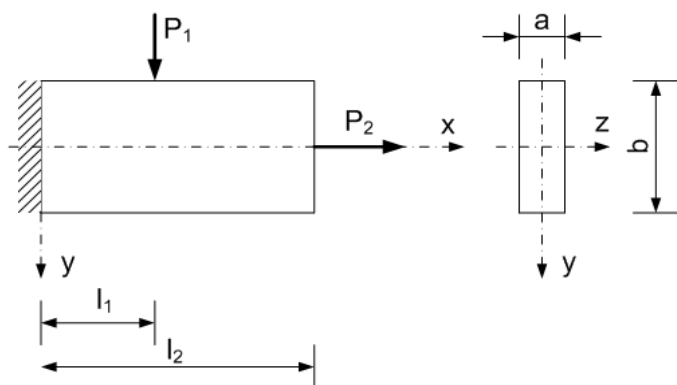


Rys. 4.18.



Rys. 4.20.

4.19. Stosując hipotezę Hubera – Misesa, sprawdzić, czy w najbardziej wyężonym miejscu przekroju (Rys. 4.19) nie zostaną przekroczone dopuszczalne naprężenia $R = 140\text{MPa}$. Do obliczeń przyjąć uśrednione naprężenia styczne. Dane: $P_1 = 3\text{kN}$, $P_2 = 10\text{kN}$, $l_1 = 0,3\text{m}$, $l_2 = 0,7\text{m}$, $a = 2\text{cm}$, $b = \text{cm}$.



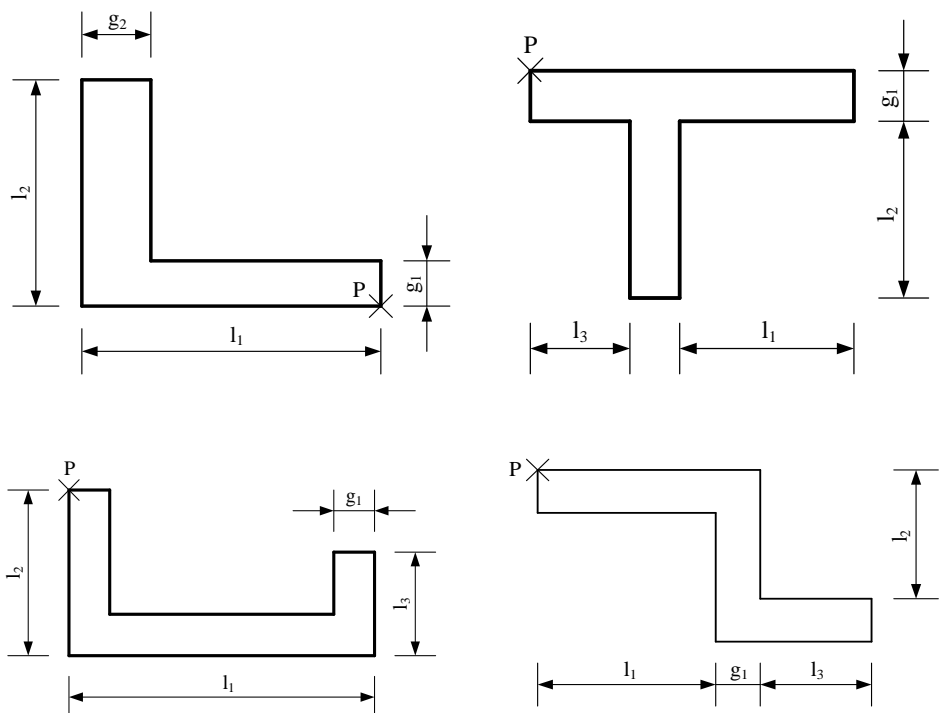
Rys. 4.19

$$\sigma_{\text{red}} = 83,446\text{MPa}$$

4.20. Stosując hipotezę Hubera wyznaczyć wartości naprężeń zredukowanych w punktach A i B leżących w utwardzonej podstawie (Rys. 4.20).

	Dane						Odpowiedzi	
	a [mm]	b [mm]	l [mm]	R [mm]	P ₁ [kN]	P ₂ [kN]	σ_{redA} [MPa]	σ_{redB} [MPa]
1	30	60	20	100	20	12	29,62	28,89
2	32	62	22	105	22	32	29,66	33,01
3	34	64	24	110	24	34	29,58	36,46
4	36	66	26	115	26	36	29,42	39,35
5	38	68	28	120	28	38	29,19	41,78
6	40	70	30	125	30	40	28,92	43,82
7	42	72	32	130	32	42	28,61	45,54
8	44	74	34	135	34	44	28,28	46,97
9	46	76	36	140	36	46	27,92	48,17

4.21. Dla słupa o małej wyniosłości obliczyć dopuszczalną wartość mimośrodowo przyłożonej siły P (Rys. 4.21). Sporządzić wykresy naprężeń normalnych. Wyznaczyć rdzeń przekroju.

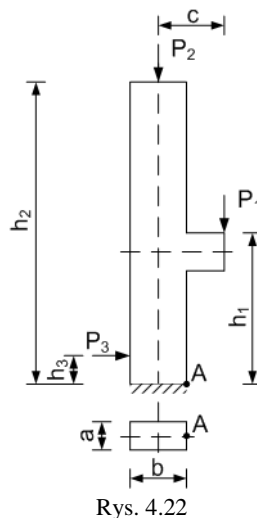


Rys. 4.21.

4.22. Sprawdzić czy w skrajnym punkcie A (Rys. 4.22) w utwierdzeniu nie zostaną przekroczone dopuszczalne naprężenia $k = 50$ MPa. Skorzystać z hipotezy Hubera. Przyjąć do obliczeń uśrednione naprężania styczne.

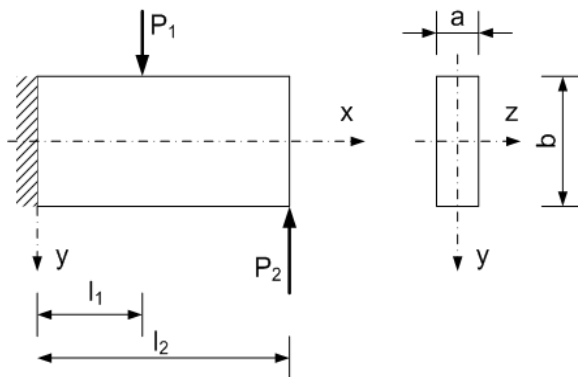
Dane: $P_1 = 5$ kN, $P_2 = 2$ kN, $P_3 = 18$ kN, $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $c = 40$ cm, $h_1 = 1$ m, $h_2 = 3$ m, $h_3 = 0,2$ m.

Odpowiedź: $\sigma_{redA} = 18,861$ MPa



Rys. 4.22

4.23. Stosując hipotezę Hubera – Misesa, sprawdzić, czy w najbardziej wyężonym miejscu przekroju (Rys. 4.23) nie zostaną przekroczone dopuszczalne naprężenia $R = 230$ MPa. Do obliczeń przyjąć uśrednione naprężenia styczne. Dane: $P_1 = 4$ kN, $P_2 = 2,5$ kN, $l_1 = 0,3$ m, $l_2 = 0,7$ m, $a = 1$ cm, $b = 4$ cm.

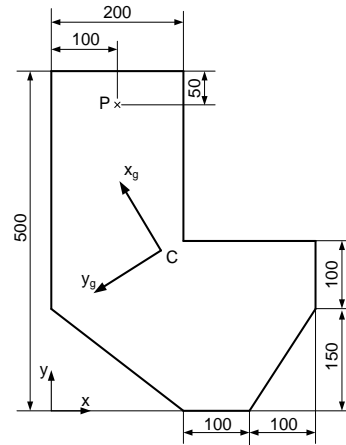


Rys. 4.23.

$\sigma_{red} = 375,15$ MPa

4.24. Słup o niewielkiej wyniosłości jest ściskany siłą $P=200\text{kN}$ (Rys. 4.24). Znaleźć oś obojętną oraz maksymalne wartości naprężeń. Dane: $J_{xg} = 837444852,76\text{mm}^4$, $J_{yg}=2681243872,73\text{mm}^4$, $A=127500\text{mm}^2$, $x_c=166,67\text{mm}$, $y_c=236,27\text{mm}$.

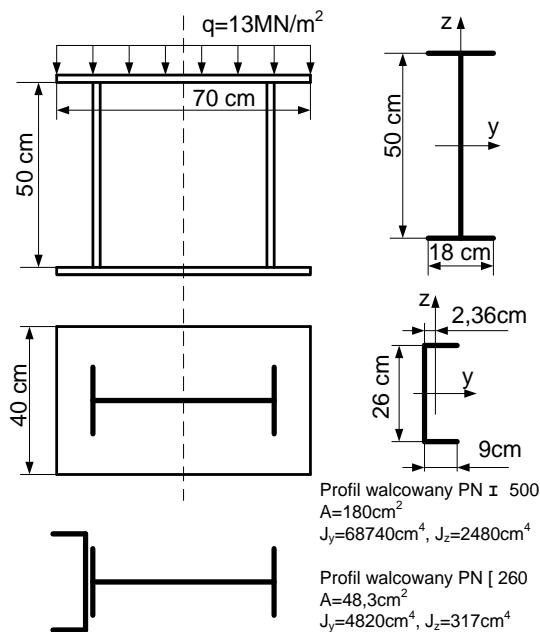
Odpowiedź: maksymalne naprężenia rozciągające $\sigma=3,639\text{MPa}$, ściskające $\sigma=-6,651\text{MPa}$.



Rys. 4.24.

4.25. Stalowy słup wykonany z dwuteownika I 500, przenosi osiowo równomiernie rozłożone obciążenie $q=13\text{MN/m}^2$ ze sztywnej żeliwnej płyty o wymiarach $b \times h=0,7 \times 0,4\text{m}$ (Rys. 4.25). Słupek postanowiono wzmocnić przyspawanym ceownikiem [260 na całej jego wysokości. Sprawdzić, jak zmieniają się wartości naprężeń normalnych w wyniku wzmocnienia, wyznaczyć wykresy naprężeń normalnych w przekrojach słupka przed i po wzmocnieniu.

Odpowiedź: naprężenia przed wzmocnieniem $\sigma=-202,22\text{MPa}$, naprężenia po wzmocnieniu $\sigma=-226,03\text{MPa}$ oraz $\sigma=-98,53\text{MPa}$, wzmocnienie pogorszy stan mechaniczny słupka.

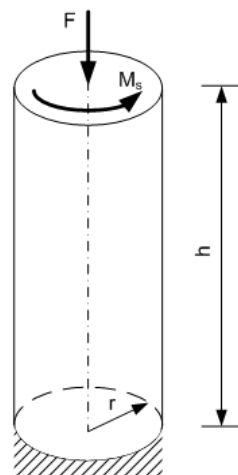


Rys. 4.25.

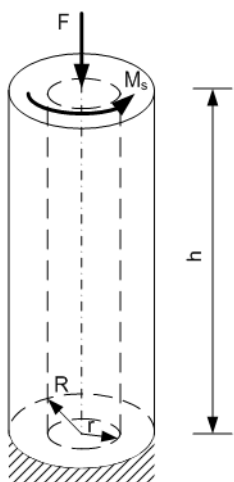
4.26. Słup żeliwny jest obciążony momentem skręcającym M_s oraz osiowo działającą siłą ściskającą F (Rys. 4.26). Sprawdzić czy w materiale nie zostaną przekroczone dopuszczalne naprężenia $k = 50 \text{ MPa}$. Skorzystać z hipotezy Hubera – Misesa.

Dane : $r = 5 \text{ cm}$, $M_s = 5 \text{ kNm}$, $F = 50 \text{ kN}$, $h = 3 \text{ m}$.

Odpowiedź: $\sigma_{\text{red}}=44,563\text{MPa}$



Rys. 4.26.



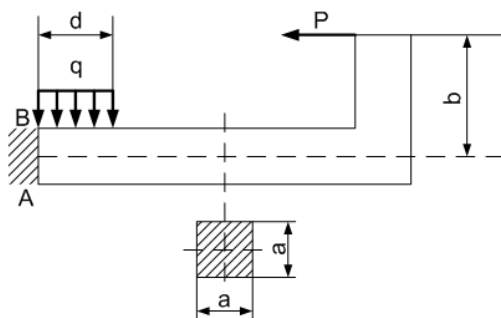
Rys. 4.27.

4.27. Słup żeliwny jest obciążony momentem skręcającym M_s oraz osiowo działającą siłą ściskającą F (Rys. 4.27). Sprawdzić czy w materiale nie zostaną przekroczone dopuszczalne naprężenia $k = 40 \text{ MPa}$. Skorzystać z hipotezy Hubera – Misesa.

Dane : $r = 3 \text{ cm}$, $R = 12 \text{ cm}$, $M_s = 30 \text{ kNm}$,
 $F = 50 \text{ kN}$, $h = 3 \text{ m}$.

Odpowiedź: $\sigma_{\text{red}} = 10,4 \text{ MPa}$.

4.28. Sprawdzić czy w skrajnych punktach A i B (Rys. 4.28) w utwierdzeniu nie zostaną przekroczone dopuszczalne naprężenia $k = 50 \text{ MPa}$. Skorzystać z hipotezy Hubera. Przyjąć do obliczeń uśrednione naprężania styczne. Dane: $q = 10 \text{ MPa}$, $a = 15 \text{ cm}$, $b = 50 \text{ cm}$, $d = 20 \text{ cm}$, $P = 100 \text{ kN}$.

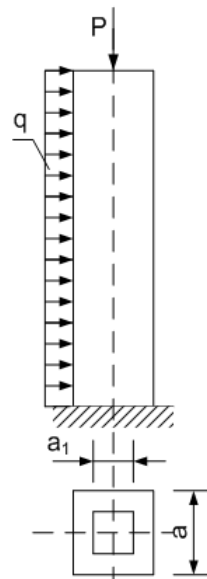


Rys. 4.28.

Odpowiedź: $\sigma_{\text{redA}} = 38,746 \text{ MPa}$,
 $\sigma_{\text{redB}} = 46,188 \text{ MPa}$.

4.29. Słup żeliwny o wysokości $h = 5 \text{ m}$ i przekroju pokazanym na rysunku jest obciążony siłą osiową $P = 6 \text{ T}$ oraz parciem wiatru (Rys. 4.29). Obciążenie wywołane wiatrem działa poziomo i jest rozłożone równomiernie wzdłuż całej wysokości słupa. Obliczyć jaką największą wartość może mieć to obciążenie q w kG/m^2 , aby maksymalne naprężenie normalne we włóknach ściskanych nie przekraczało 100 kG/cm^2 . Dane: $a = 20 \text{ cm}$, $a_1 = 14 \text{ cm}$.

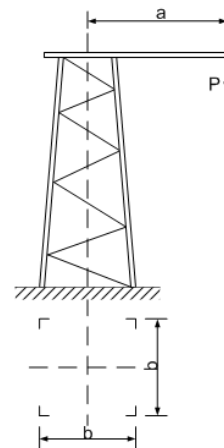
Odpowiedź: $q = 286 \text{ kG/m}^2 = 2800 \text{ N/m}^2$.



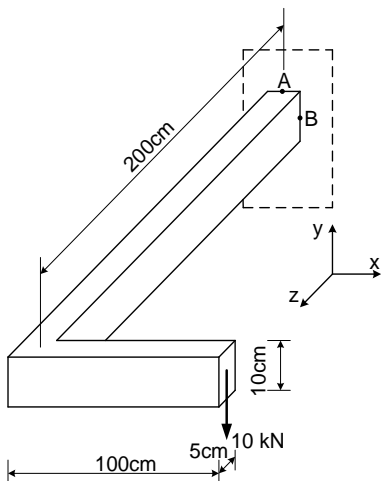
Rys. 4.29.

4.30. Słup podtrzymujący przewody elektryczne jest otworzony z czterech kątowników równobocznych $60 \times 60 \times 6$, połączonych ze sobą za pomocą poprzeczek usztywniających (Rys. 4.30). Wyznaczyć wartość największych naprężeń normalnych w najniższym przekroju słupa, jeżeli wypadkowa sił przekazywanych przez przewody na słup jest pionową siłą wypadkową $P = 20000 \text{ N}$ przyłożoną w odległości $a = 60 \text{ cm}$ od osi słupa. Dane: ciężar własny słupa $Q = 1500 \text{ N}$, $b = 30 \text{ cm}$.

Odpowiedź: Największe naprężenia normalne występują we włóknach ściskanych $\sigma = -44 \text{ MPa}$.



Rys. 4.30.



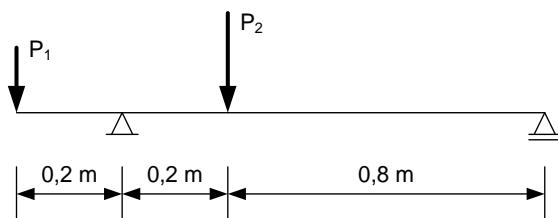
Rys. 4.31.

4.31. Posługując się hipotezą krańcowej energii odkształcenia postaciowego obliczyć wyężenie materiału w punktach A i B układu podanego na rysunku 4.31. Granica plastyczności materiału $R_e = 800 \text{ MPa}$.

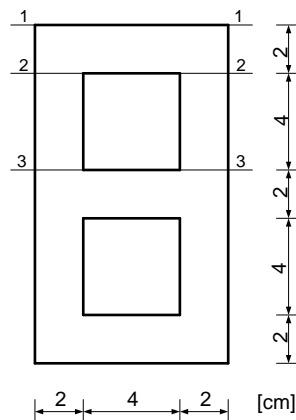
Odpowiedź: $W^A = 0,41$, $W^B = 0,707$.

4.32. Dla belki o schemacie statycznym i przekroju poprzecznym przedstawionym na rysunku 4.32 wyznaczyć wartość naprężenia σ_{red} wg hipotezy energii odkształcenia postaciowego w punktach leżących: a) naprostuj 1-1, b) na prostej 2-2, c) na prostej 3-3. W obliczeniach przyjąć $P_1 = 4 \text{ kN}$, $P_2 = 20 \text{ kN}$.

Odpowiedź: a) 17,05 MPa, b) 12,59 MPa, c) 4,91 MPa.



Rys. 4.32.



4.33. Korzystając z hipotezy energii odkształcenia postaciowego wyznaczyć wartość dopuszczalnego ciśnienia jakie może panować w zbiorniku walcowym, wiedząc, że dopuszczalne naprężenia na rozciąganie wynoszą k_r . Dla wyznaczonego ciśnienia określić jakie będą wskazania mostka tensometrycznego $[\mu\text{m}/\text{m}]$ dla tensometrów naklejonych wzdłuż dwóch kierunków głównych. Moduł Younga $E=210 \text{ GPa}$, liczba Poissona $\nu=0,3$.

	Dane			Odpowiedzi				
	g [mm]	k_r [MPa]	D [m]	p [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	ε_1 [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ε_2 [$\mu\text{m}/\text{m}$]
1	5	160	0,8	2,309	184,75	92,376	747,8	175,95
2	6	180	1,0	2,494	207,84	103,92	841,28	197,94
3	7	200	1,2	2,694	230,94	115,47	934,75	219,94
4	8	160	0,8	3,695	184,75	92,376	747,806	175,95
5	9	180	1,0	3,741	207,84	103,92	841,282	197,949
6	10	200	1,2	3,849	230,94	115,47	934,758	219,94
7	11	160	0,8	5,081	184,75	92,376	747,806	175,954
8	12	180	1,0	4,988	207,846	103,923	841,282	197,949
9	13	200	1,2	5,004	230,94	115,47	934,75	219,94

4.34. Korzystając z hipotezy energii odkształcenia postaciowego wyznaczyć wartość średnicy zbiornika walcowego D, wiedząc, że dopuszczalne naprężenia na rozciąganie wynoszą k_r . Dla wyznaczonej średnicy określić jakie będą wskazania mostka tensometrycznego [$\mu\text{m}/\text{m}$] dla tensometrów naklejonych wzdłuż dwóch kierunków głównych. Moduł Younga $E=210\text{GPa}$, liczba Poissona $\nu=0,3$

	Dane			Odpowiedzi				
	g [mm]	k_r [MPa]	p [MPa]	D [m]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	ε_1 [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ε_2 [$\mu\text{m}/\text{m}$]
1	5	160	0,8	2,309	184,75	92,37	747,806	175,954
2	6	180	1,0	2,494	207,84	103,92	841,28	197,94
3	7	200	1,2	2,694	230,94	115,47	934,75	219,94
4	8	160	0,8	3,695	184,752	92,376	747,8	175,95
5	9	180	1,0	3,741	207,84	103,92	841,28	197,94
6	10	200	1,2	3,849	230,94	115,47	934,75	219,943
7	11	160	0,8	5,081	184,75	92,37	747,806	175,954
8	12	180	1,0	4,988	207,846	103,923	841,282	197,949
9	13	200	1,2	5,004	230,94	115,47	934,75	219,94

5. Połączenia spawane

5.1. Zaprojektować wymiary spoin łączących kątownik równoramienny 60x60x6 (PN-EN 10056-1:2000) z blachą węzłową przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu kątownika siłą rozciągającą. Dane: $k_r=120$ MPa.

5.2. Zaprojektować wymiary spoin łączących kątownik nierównoramienny 60x40x6 (PN-EN 10056-1:2000) z blachą węzłową kratownicy przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu kątownika siłą rozciągającą. Dane: $k_r=140$ MPa

5.3. Zaprojektować wymiary spoin łączących kątownik równoramienny 100x100x10 (PN-EN 10056-1:2000) z blachą węzłową przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu kątownika siłą rozciągającą. Dane: $k_r=120$ MPa.

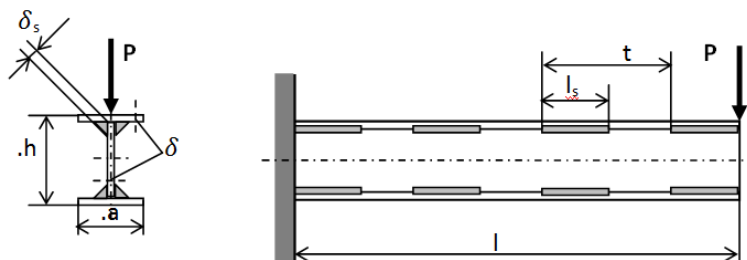
5.4. Zaprojektować wymiary spoin łączących kątownik nierównoramienny 100x50x8 (PN-EN 10056-1:2000) z blachą węzłową przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu kątownika siłą rozciągającą. Dane: $k_r=120$ MPa.

5.5. Zaprojektować wymiary spoin łączących kątownik równoramienny 40x40x5 (PN-EN 10056-1:2000) z blachą węzłową przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu kątownika siłą rozciągającą. Dane: $k_r=140$ MPa.

5.6. Zaprojektować wymiary dwóch nakładek symetrycznych przyspawanych do połączenia doczołowo spawanego dwóch płaskowników, celem jego wzmocnienia, przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu płaskowników siłą rozciągającą.

Dane: $P=100$ kN-siła rozciągająca połączenie spawane; $g_p=10$ mm-grubość płaskowników; $k_r=100$ MPa- dopuszczalne naprężenia rozciągające dla płaskowników; $k_r=70$ MPa-dopuszczalne naprężenia rozciągające dla spoin; $k_t=60$ MPa-dopuszczalne naprężenia styczne dla spoin; $b_n=0,6b_p$ - relacja szerokości nakładki (n) i szerokości pasa (p).

5.7. Belka dwuteowa wykonana jest z elementów płaskich zespawanych spoinami o długości l_s i podziałce t (Rys.5.1). Obliczyć dopuszczalną wartość siły P z warunku $\sigma_{\max} \leq k_r$, a następnie określić najmniejszy dopuszczalny stosunek l_s/t . Dane: $l=1$ m; $h=12$ cm; $a=8$ cm; $\delta=4$ mm; $\delta_s=0,7\delta$; $k_r=200$ MPa; $k_t=100$ MPa-dla spoiny.



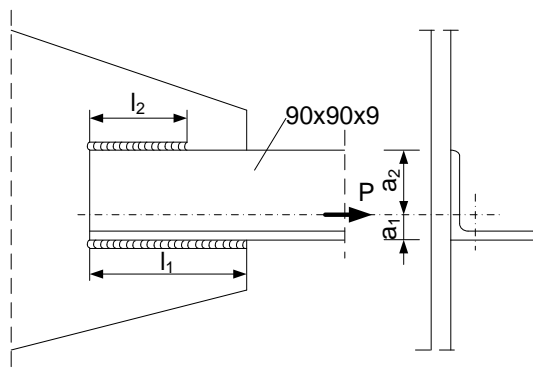
Rys. 5.1

5.8. Zaprojektować wymiary dwóch nakładek (n) symetrycznie przyspawanych do połączenia doczołowo spawanego dwóch płaskowników (p), celem jego wzmocnienia, przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu płaskowników siłą rozciągającą P . Dane: $P=160$ kN; $g_p=15$ mm; $b_n=0,6b_p$; $k_r=120$ MPa; $k_r'=0,8k_r$; $k_t'=0,65k_r$; (k_r', k_t' - dopuszczalne naprężenia dla spoin).

5.9. Zaprojektować wymiary spoin łączących kątownik równoramienny 150x150x15 (PN-EN 10056-1:2000) z blachą węzłową przy pełnym dopuszczalnym obciążeniu kątownika siłą rozciągającą. Dane: $k_r=100$ MPa.

5.10. Kątownik 90x90x9 należy przyspawać do blachy węzłowej za pomocą spoin pachwinowych (Rys. 5.2). Dobrać odpowiednie długości l_1 i l_2 spoiny, jeśli wiadomo, że dopuszczalne naprężenia rozciągające dla materiału kątownika wynoszą $k_r=120$ MPa, a dopuszczalne naprężenie na ścinanie dla spoiny $k_{ts}=80$ MPa. Pole przekroju kątownika wynosi $A=15,5$ cm², a położenie środka ciężkości przekroju określa wymiar $a_1=2,54$ cm ($a_2=6,46$ cm).

Odpowiedź: $l_1 = 26,5$ cm, $l_2 = 10,4$ cm przy założeniu tych samych grubości obliczeniowych spoiny równych $0,7$ grubości półki kątownika.

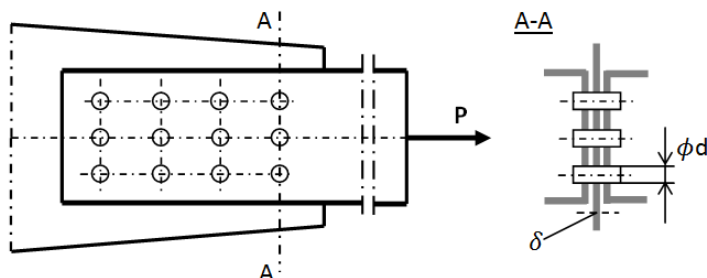


Rys. 5.2

6. Połączenia nitowe

6.1. Zaprojektować połączenie nitowe zakładkowe dwurzędowe rozciągane siłą $P=50$ kN.

6.2. Pręt rozciągany siłą P stanowią dwa ceowniki 180 wg PN połączone z elementem płaskim poprzez nitowanie jak pokazuje Rys.6.1. Obliczyć dopuszczalną wartość siły P jaką może przenieść to połączenie nitowe przy założeniu równomiernego obciążenia nitów. Pozostałe dane: $d=16$ mm; $\delta=15$ mm; $k_t=80$ MPa (dla nitów); $k_r=160$ MPa (dla ceownika); $p_{dop}=300$ MPa.



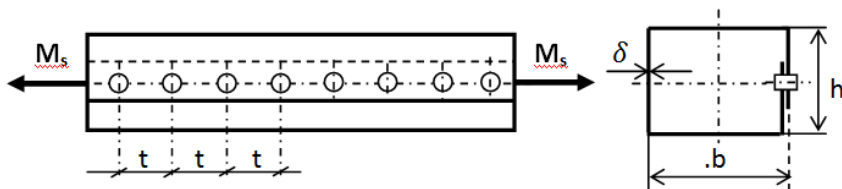
Rys. 6.1.

6.3. Zaprojektować połączenie nitowe zakładkowe jednoszeregowo rozciągane siłą $P=30$ kN.

6.4. Zaprojektować połączenie nitowe dwustronne symetryczne, trzyczędowe niepełne rozciągane siłą $P=300$ kN.

6.5. Zaprojektować połączenie nitowe dwustronne niesymetryczne przenoszące siłę rozciągającą $P=100$ kN.

6.6. Rurę, skręcaną momentem M_s o przekroju poprzecznym prostokątnym (Rys.6.2) wykonano z arkusza blachy przez zwiniecie i znitowanie na zakładkę. Zaprojektować średnice nitów przy założeniu równomiernego ich obciążenia. Dane: $M_s=10$ kNm; $b=3/2 h=36$ cm; $\delta=3$ mm; $t=25$ mm; $k_t=55$ MPa (dla nitu).



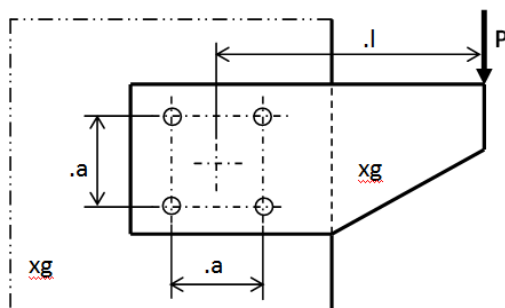
Rys. 6.2.

6.7. Zaprojektować połączenie nitowe jednostronne dwurzędowe rozciągane siłą $P=160$ kN.

6.8. Zaprojektować połączenie nitowe zakładkowe jednorzędowe rozciągane siłą $P=20$ kN.

6.9. Zaprojektować połączenie nitowe jednostronne ze szwem dwurzędowym, przenoszące siłę rozciągającą $P=120$ kN.

6.10. Zaprojektować średnice nitów i grubości elementów łączonych dla mimośrodowo obciążonego połączenia nitowego przedstawionego na Rys.6.3.
Dane: $P=50$ kN; $l=60$ cm; $a=20$ cm; $k_t=60$ MPa (dla nitów); $p_{dop}=300$ MPa.



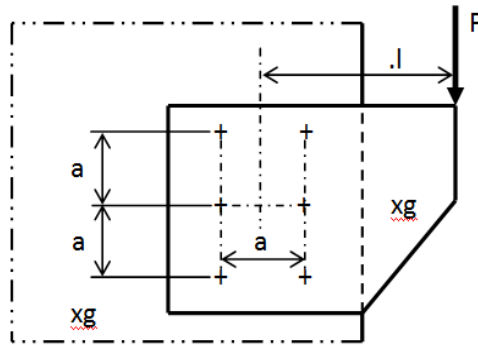
Rys. 6.3.

6.11. Zaprojektować połączenie nitowe dwustronne symetryczne ze szwem dwurzędowym, przenoszące siłę rozciągającą $P=200$ kN.

6.12. Zaprojektować połączenie nitowe jednoszeregowe jednostronne łączące dwa kątowniki rozciągane siłą $P=80$ kN.

6.13. Zaprojektować połączenie nitowe dwustronne symetryczne przenoszące siłę rozciągającą $P=240$ kN.

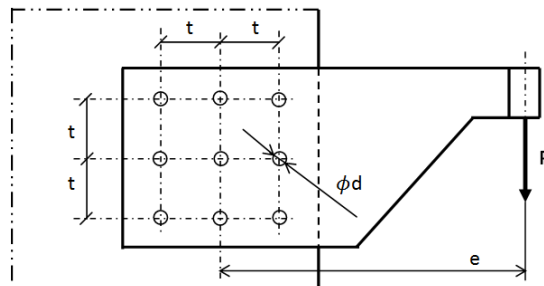
6.14. Zaprojektować średnice nitów i grubości elementów łączonych dla połączenia nitowego obciążonego mimośrodowo jak pokazuje Rys.6.4.
Dane: $P=80$ kN; $a=20$ cm; $l=50$ cm; $k_t=55$ MPa (dla nitu); $p_{dop}=320$ MPa.



Rys. 6.4.

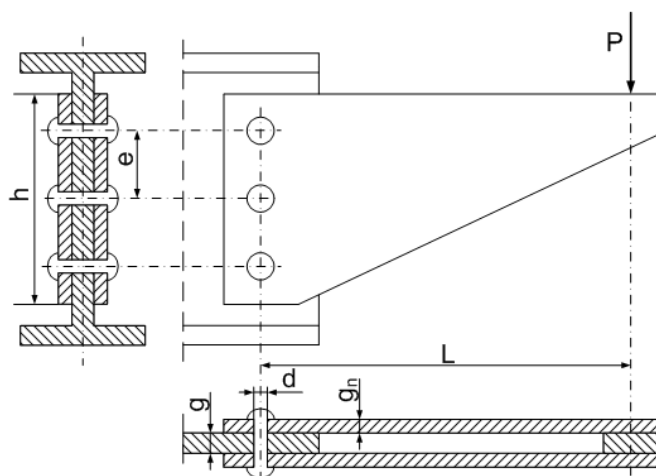
6.15. Sprzęgło kołnierzowe łączy dwa wały sześcioma równomiernie rozmieszczonymi nitami na średnicy D . Obliczyć średnicę D i średnice wałów d . Dane: $d_0=8$ mm – średnica nitu; $M=2,4$ kNm - moment obrotowy przenoszony przez sprzęgło; $k_t=60$ MPa - naprężenia dopuszczalne na ścinanie dla wałów i dla nitów.

6.16. Wspornik z blachy przynitowany jest do płaskiego elementu oraz obciążony jak pokazuje Rys.6.5. Obliczyć naprężenia tnące w poszczególnych nitach. Dane: $P=32$ kN; $d=20$ mm; $t=8$ cm; $e=80$ cm.



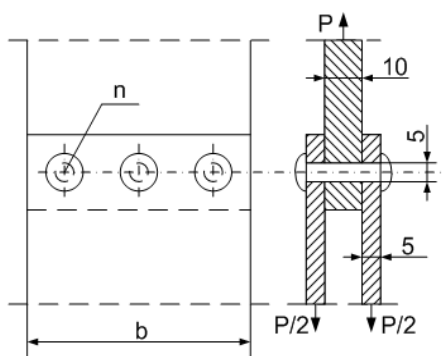
Rys. 6.5.

6.17. Wyznaczyć wartość siły P jaką może przenieść połączenie nitowe wspornika z belką dwuteową (Rys. 6.6). Dane: $L = 30$ cm, $d = 10$ mm, $g_n = 7$ mm, $g = 10$ mm, $e = 2,5 d$, $h = 90$ mm, naprężenia dopuszczalne na ścinanie dla materiału nitów $k_t = 75$ MPa, naprężenia dopuszczalne na zginanie dla materiału wspornika $k_g = 145$ MPa.
Odpowiedź: $P=1,96$ kN



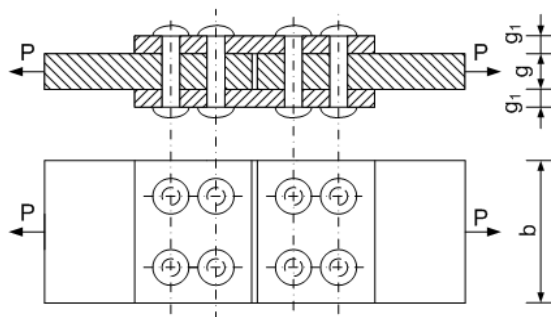
Rys. 6.6

6.18. Dobrać szerokość blach „b” w połączeniu nitowym dwunakładowym (Rys. 6.7). Wyznaczyć ponadto liczbę nitów „n”. Dane: $P = 10 \text{ kN}$, $k_r = 140 \text{ MPa}$, $k_t = 100 \text{ MPa}$, $k_d = 280 \text{ MPa}$.



Rys. 6.7.

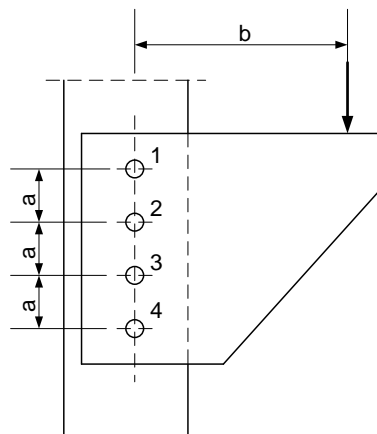
6.19. Sprawdzić, czy liczba nitów przyjętych w połączeniu osiowo rozciąganego płaskownika stalowego, spełnia warunki wytrzymałości (Rys. 6.8). Dane: $P = 340 \text{ kN}$, średnica nitów $d = 21 \text{ mm}$, $g = 16 \text{ mm}$, $g_l = 10 \text{ mm}$, $b = 150 \text{ mm}$, $k_r = 220 \text{ MPa}$, $k_d = 420 \text{ MPa}$, $k_t = 210 \text{ MPa}$.



Rys. 6.8.

6.20. Wspornik wykonany z dwóch blach przymocowano do słupa czterema nitami dwuciętymi i obciążono jak na Rys 6.9. Określić, który nit jest najbardziej obciążony i wyznaczyć naprężenia styczne w przekrojach ścinanych tego nitu.

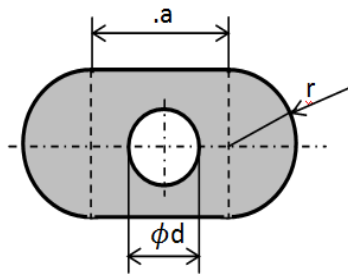
Dane: $a = 60 \text{ mm}$, $b = 150 \text{ mm}$, średnica nitu $d = 16 \text{ mm}$, $F = 24 \text{ kN}$.



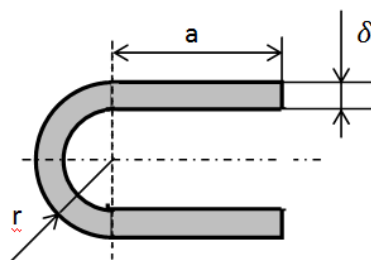
Rys. 6.9.

7. Zagadnienia związane z wybranymi charakterystykami figur płaskich

7.1. Obliczyć wartości momentów głównych centralnych dla przekroju pokazanego na Rys. 7.1. Dane: $r = 12 \text{ cm}$; $d = r$; $a = 2r$.



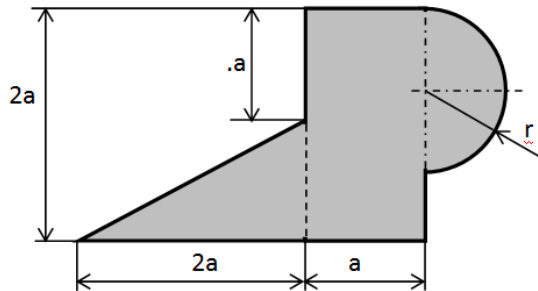
Rys. 7.1.



Rys. 7.2.

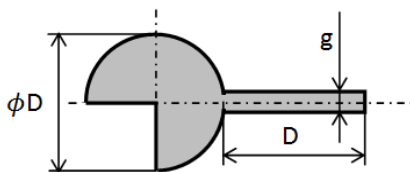
7.2. Obliczyć główne centralne momenty bezwładności dla przekroju pokazanego na Rys.7.3. Dane: $\delta=1$ cm; $r=5\delta$; $a=10\delta$.

7.3. Znaleźć położenie osi głównych centralnych dla przekroju pokazanego na Rys.7.4 oraz obliczyć wartości momentów bezwładności względem tych osi. Dane: $r=10$ cm; $a=12$ cm.

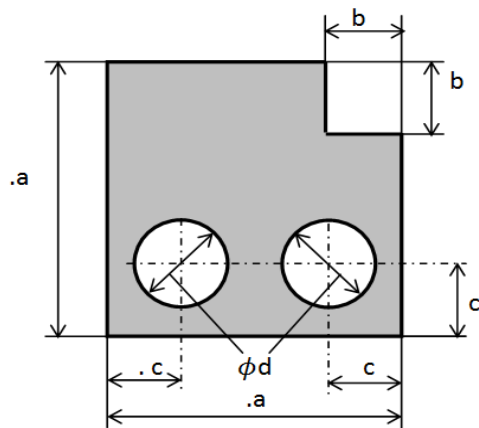


Rys. 7.4.

7.4. Obliczyć momenty bezwładności względem osi głównych centralnych dla przekroju pokazanego na Rys.7.5. Dane: $D=16$ cm; $g=D/8$.



Rys. 7.5.



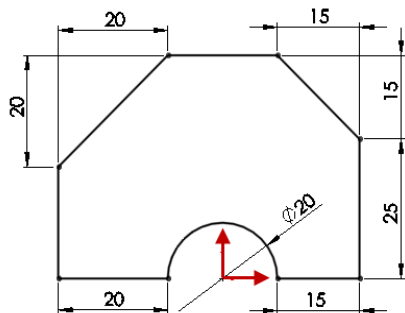
Rys. 7.6.

7.5. Wyznaczyć położenie osi głównych centralnych i obliczyć momenty bezwładności względem tych osi dla przekroju pokazanego na Rys.7.6.

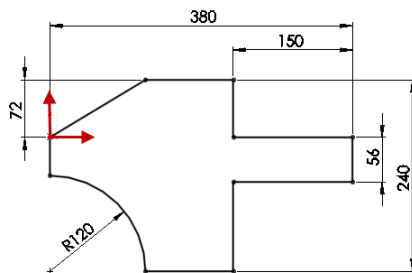
Dane: $a=36$ cm; $b=c=a/4$; $d=0,3a$.

7.6. Wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności I_1 i I_2 dla przekroju pokazanego na rysunku 7.7. Wymiary na rysunku podano w milimetrach.

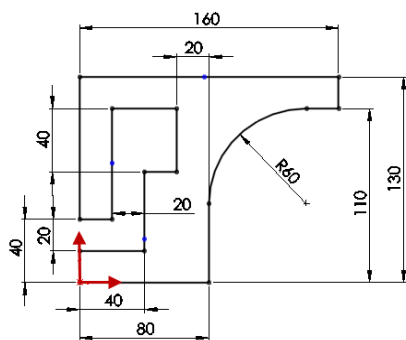
1)



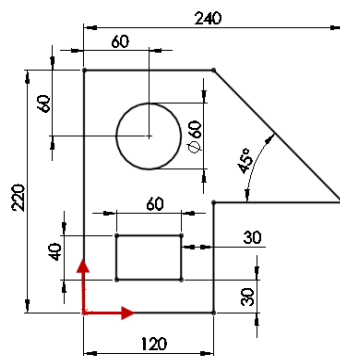
2)



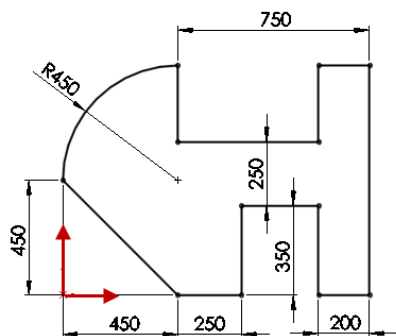
3)



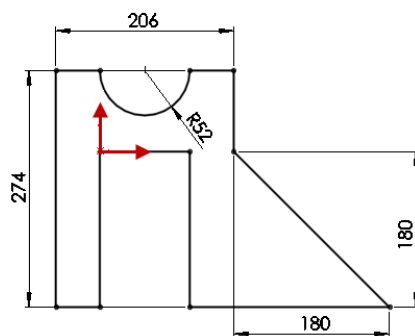
4)



5)



6)



Rys. 7.7.

Odpowiedzi:

		1	2	3	4	5	6
I	A [cm ²]	17,3	479,7	97,73	283,73	6652,93	496,77
II	x [cm]	-0,18	17,01	5,96	8,54	63,07	10,52
	y [cm]	1,89	-3,69	7,59	11,77	44,18	-6,02
III	I _{xx} [cm ⁴]	80,35	22333,92	7320,67	49346,15	16,176·10 ⁶	49498,27
	I _{yy} [cm ⁴]	40,47	171943,7	4915,76	29662,51	34,67·10 ⁶	104838,6
	I _{xy} [cm ₄]	-3,47	-31492,3	4987,8	29829,66	18,08·10 ⁶	-48702,62
IV	I _{xx} [cm ⁴]	18,45	15816,83	1692,54	10037,06	3,18·10 ⁶	31479,84
	I _{yy} [cm ⁴]	39,92	33096,88	1447,79	8981,27	8,2·10 ⁶	49907,5
	I _{xy} [cm ₄]	-2,36	1411,14	-569,86	-1317,20	4,49·10 ⁵	17241,97
V	I _x [cm ⁴]	18,19	15702,35	987,32	8090,12	3,14·10 ⁶	21144,24
	I _y [cm ⁴]	40,17	33211,36	2153,02	10928,20	8,24·10 ⁶	60243,10
	α [°]	6,2	-4,64	51,06	55,92	-5,08	-30,94

I – obszar,

II – położenie środka ciężkości względem wyjściowego układu współrzędnych,

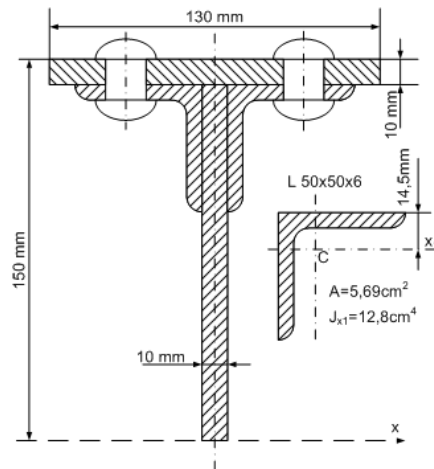
III – momenty bezwładności względem wyjściowego układu współrzędnych,

IV – momenty bezwładności względem centralnego układu współrzędnych,

V – główne centralne momenty bezwładności oraz kąt obrotu.

7.7. Określić moment bezwładności przekroju dźwigara nitowanego, przedstawionego na rysunku 7.8, względem osi centralnej x . Dźwigar składa się ze środnika o przekroju 280x10, z dwóch pasów o przekroju 130x10 oraz z czterech kątowników 50x50x6. Średnica nitów $d=17\text{mm}$.

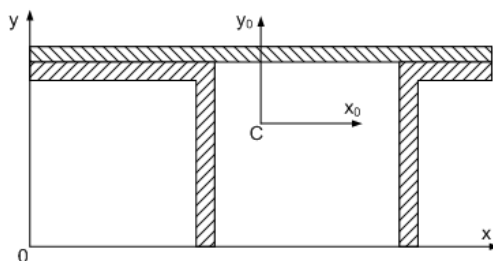
Odpowiedź : $J_x=9338\text{cm}^4$



Rys. 7.8.

7.8. Przekrój składa się z kątownika 60x60x6, kątownika 30x60x6 oraz płaskownika 150x5, znaleźć (Rys. 7.9) :

- 1) położenie środka ciężkości,
- 2) momenty bezwładności względem osi centralnych x_0 , y_0 ,
- 3) moment dewiacji względem osi centralnych x_0 , t_0 ,
- 4) położenie głównych centralnych osi bezwładności,
- 5) wartości głównych centralnych momentów bezwładności.



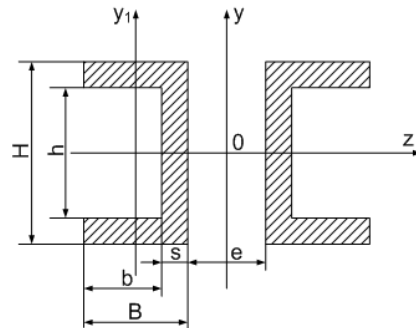
Rys. 7.9.

Odpowiedź: $x_0=7,72\text{cm}$, $y_0=4,91\text{cm}$,
 $J_{x0}=64,5\text{cm}^4$, $J_{y0}=375,7\text{cm}^4$, $J_{x_0y_0}=-25,5\text{cm}^4$,
 $\alpha_0=-4^{\circ}40'$, $J_1=377,8\text{cm}^4$, $J_2=62,4\text{cm}^4$

7.9. Wyznaczyć odległość e między dwoma jednakowymi ceownikami przy warunku, by momenty bezwładności względem osi y i z były sobie równe (Rys. 7.10).

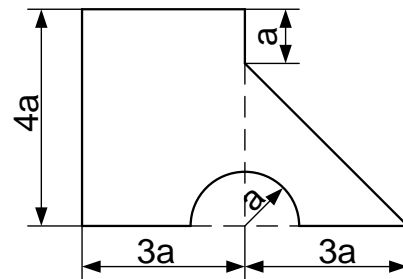
Dane: $H = 12 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ mm}$,
 $B = 5 \text{ mm}$, $b = 4 \text{ mm}$, $s = 1 \text{ mm}$.

Odpowiedź: $e = 5,35 \text{ mm}$



Rys. 7.10

7.10. Wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności I_1 i I_2 dla przekroju pokazanego na rysunku 7.11.
 Odpowiedź: $I_1 = 34,06a^4$, $I_2 = 14,09a^4$,
 $\alpha = -26,4^\circ$



Rys. 7.11

Dodatek

8. Zastosowanie studenckiej wersji programu Abaqus przy rozwiązywaniu zadań z wytrzymałości materiałów

8.1. Informacje dotyczące programu Abaqus

Abaqus jest programem służącym do analizy nieliniowej układów z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) w zakresie skomplikowanych badań inżynierskich. Stosowany jest w zagadnieniach mechaniki ciała stałego, mechaniki płynów, do oceny wytrzymałościowej elementów maszyn i konstrukcji z uwzględnieniem różnych typów obciążeń np. siły skupione, obciążenia rozłożone, siły masowe, strumienie ciepła. Główne zastosowanie to: przemysł maszynowy, kosmonautyka, budownictwo, przemysł obronny, energetyka i inne.

Program posiada dwa moduły obliczeniowe (ang. solver): Standard oraz Explicite.

Abaqus/Standard – jest to moduł ogólnego przeznaczenia do przeprowadzenia analiz metodą elementów skończonych. Zawiera wszystkie procedury analizy poza dynamiczną analizą nieliniową stosującą całkowanie równań ruchu metodą jawną. Pakiet napisany jest w języku Fortran. Jego pierwsza wersja powstała w 1978 roku.

Abaqus/Explicite – Moduł przeznaczony do rozwiązywania zagadnień dynamicznych z użyciem metody jawnej całkowania równań ruchu. Stosowany do analiz przy ekstremalnych obciążeniach mechanicznych, siłowych lub termicznych. Wprowadzony w 1991 r.

Dużym skokiem w ewolucji programu Abaqus było wprowadzenie w roku 1999 modułu graficznego CAE (ang. *Complete ABAQUS Environment*). To środowisko dostarcza prostego i spójnego interfejsu do tworzenia, zlecania, monitorowania i przetwarzania wyników otrzymanych z symulacji ABAQUS/Standard i ABAQUS/Explicit. Pakiet CAE podzielony jest na moduły, z których każdy definiuje logiczny aspekt procesu tworzenia i analizowania modelu, np. definiowanie geometrii, własności materiału czy obciążeń. Przechodząc przez kolejne moduły, na bieżąco aktualizowany jest plik wejściowy (z rozszerzeniem .inp), który następnie zostaje wysłany do jednego z dwóch wspomnianych modułów obliczeniowych. Solver czyta plik wejściowy, dokonuje obliczeń podczas których wysyła informacje do CAE pozwalające śledzić postępy, na końcu umieszcza rezultaty w bazie wyników (plik z rozszerzeniem .odb). Wyniki zapisane w bazie można wczytać do CAE i dalej przetwarzać.

Podczas tworzenie pliku wejściowego (przechodzenia przez kolejne moduły w środowisku CAE) należy pamiętać, że Abaqus nie posiada jakiegokolwiek systemu jednostek.

8.2. Informacje dotyczące wersji studenckiej Abaqus

Oprócz wersji komercyjnej, Research oraz Teaching dostępna jest także wersja studencka (SE). Zawiera ona zarówno środowisko graficzne CAE jak i dwa moduły obliczeniowe Standard i Explicit oraz pełną dokumentację. Głównie ograniczenie wersji studenckiej stanowi fakt, że użytkownik nie może przeliczać zadań gdzie liczba węzłów jest większa niż 1000. W wersji studenckiej nie można także dołączać tzw. procedur własnych użytkownika. Bazy modeli powstałe w Abaqus SE są zgodne z bazami powstałymi w ramach licencji akademickich (Research i Teaching), ale nie są zgodne z bazami licencji komercyjnych. Abaqus SE jest przeznaczony tylko do użytku indywidualnego lub edukacyjnego i nie może być wykorzystywany do celów komercyjnych.

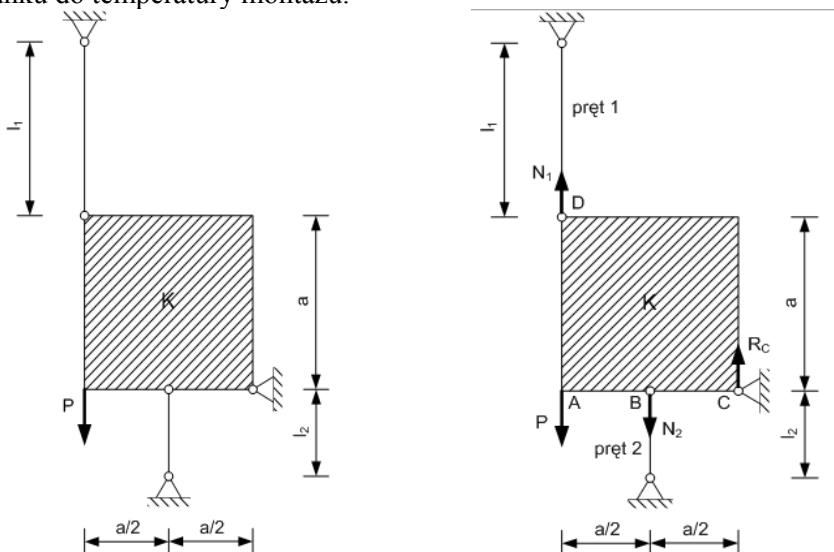
W celu zapoznania się krok po kroku z programem Abaqus poniżej przedstawiono dwa przykłady podczas których użytkownik zapozna się m.in. z takimi funkcjami programu jak:

- obsługą szkicownika,
- pracą z modelem 2D oraz 3D,
- tworzeniem sekcji kratownicowej i bryłowej
- wykorzystaniem symulacji cieplno – przemieszczeniowej,
- tworzeniem połączeń przegubowych
- tworzeniem wiązań
- nakładaniem i zagęszczaniem siatki.

8.3. Układ prętowo – tarczowy statycznie niewyznaczalny

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie naprężeń w prętach układu statycznie niewyznaczalnego pokazanego na rysunku metodą analityczną oraz z wykorzystaniem programu Abaqus.

Przedmiotem badań będzie układ składający się ze sztywnej tarczy K oraz dwóch prętów sprężystych, których zamocowania są przegubowe. Układ obciążony jest siłą P oraz obniżeniem temperatury pręta o długości l_1 , w stosunku do temperatury montażu.



Pręty wykonane są ze stali dla której moduł Younga wynosi $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$.

Długości prętów oraz ich pola poprzecznego przekroju wynoszą odpowiednio: $l_1=1\text{m}$, $A_1=10\text{cm}^2$, $l_2=0,5\text{m}$, $A_2=10\text{cm}^2$. Długość boku $a=1\text{m}$. Obciążenie P wynosi 10 kN zaś spadek temperatury -20 K.

Poniżej przedstawiono sposób analityczny wyznaczenia naprężeń w prętach oraz w dalszej kolejności opis wykorzystania programu Abaqus.

Rozwiązanie zadania

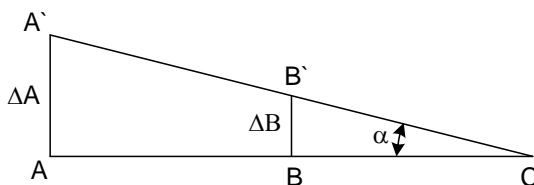
Zastępując pręty 1 oraz 2 siłami N_1 i N_2 możemy zapisać warunek równowagi

$$\Sigma M_{ic} = P \cdot a + N_2 \cdot 0,5 \cdot a - N_1 \cdot a \quad (1)$$

Tarcza ulegnie obrotowi o kąt α względem punktu C. Przyjmując, że kąt α jest bardzo mały ($\cos\alpha=1$) warunek geometryczny możemy zapisać w postaci

$\Delta A - a$

$$\Delta B - 0,5 \cdot a \quad (2)$$



Rozwiązanie przypadków statycznie niewyznaczalnych staje się prostsze w przypadku zastosowania zasady mówiącej o sposobie znakowania i łączenia poszczególnych wpływów działających jednocześnie. Zasada ta pozwala na wyznaczenie w sposób jednoznaczny całkowitego odkształcenia elementu wywołanego sumą wszystkich wpływów.

Związki między odkształceniami różnych elementów łączymy w równania korzystając z warunków geometrycznych.

Zasada ogólna brzmi następująco:

Gdy przyjęta zmiana długości pręta jest zgodna z danymi oraz założonymi wpływami, to uzyskuje ona znak plus (+), w przypadku przeciwnym minus (-).

Omówienie: Na początku rozwiązania zadania zakładamy przypuszczalne odkształcenie układu oraz zakładamy siły, wraz z kierunkami i zwrotami.

Gdy efekty działania poszczególnych założonych sił (tzn. odkształcenia wywołane przez nie) są zgodne z założonymi odkształceniami, to otrzymują one znak (+). Gdy zadane wpływy (siły, zmiany temperatury, błędy montażowe) wywołują odkształcenia zgodne z założonymi, to odkształcenia te uzyskują znak dodatni. W przeciwnych przypadkach, składowe odkształceń otrzymują znak minus (-).

Jeśli założyliśmy wydłużenie pręta, to odkształcenie uzyskuje znak (+)

gdy:

- siła w pręcie jest rozciągająca,
 - pręt uległ ogrzaniu,
 - pręt wykonano za długi
- zaś znak minus (-), gdy:
- siła w pręcie jest ściskająca,
 - pręt uległ oziębieniu,
 - pręt wykonano za krótki.

Jeżeli założyliśmy skrócenie pręta, to odkształcenie uzyska znak plus (+)

gdy:

- siła w pręcie jest ściskająca,

- pręt uległ oziębieniu,
- pręt wykonano za krótki,
zaś znak minus (-), gdy:
- siła w pręcie jest rozciągająca,
- pręt uległ ogrzaniu,
- pręt wykonano za długi.

Zakładamy skrócenie pręta 1, siła w pręcie jest rozciągająca, pręt uległ oziębieniu, zatem:

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} \quad \Delta l_{1r} = \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t \quad \Delta A = \Delta l_1 + \Delta l_{1r} \quad (3)$$

Zakładamy wydłużenie pręta 2, siła w pręcie jest rozciągająca, zatem :

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} \quad \Delta B = \Delta l_2 \quad (4)$$

Wstawiając zależności (3) oraz (4) do proporcji (2) rozwiązujemy układ równań (1) i (2) szukając sił w poszczególnych prętach.

$$N_2 = \frac{\alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t \cdot E \cdot A_1 \cdot A_2 - P \cdot l_1 \cdot A_2}{2 \cdot l_2 \cdot A_1 + 0,5 \cdot l_1 \cdot A_2} \quad N_1 = P + \frac{N_2}{2}$$

Po podstawieniu wartości otrzymujemy:

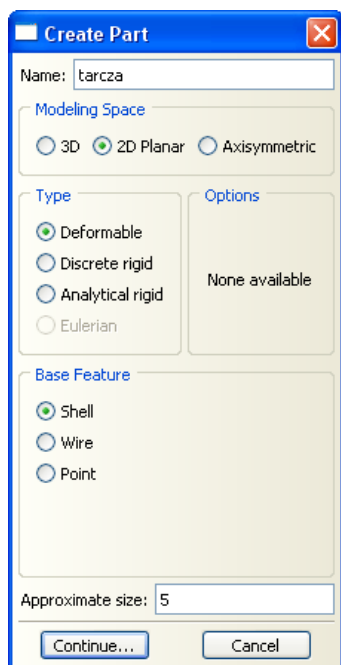
$$N_2 = 20kN \quad N_1 = 20kN$$


Naprężenia w prętach wyniosą odpowiednio:


$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \quad \sigma_1 = 20MPa \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \quad \sigma_2 = 20MPa$$



1. Utworzenie modeli prętów oraz tarczy (moduł Part)

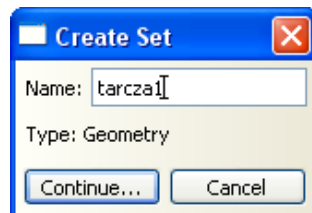
Zadanie będziemy traktować jako dwuwymiarowe złożenie trzech elementów: sztywnej tarczy oraz dwóch prętów sprężystych o różnych długościach i jednakowych polach przekroju. Kolejność tworzenia modeli nie ma znaczenia, rozpoczniemy od tarczy.



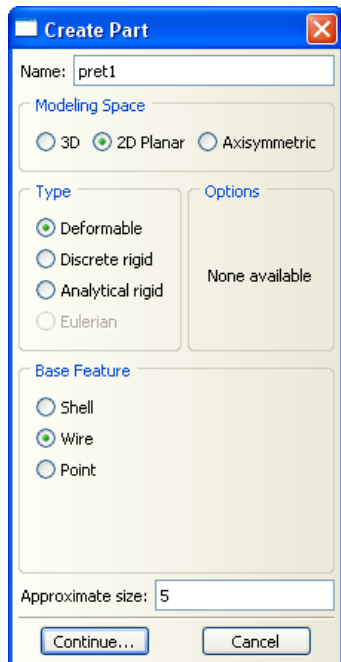
Z drzewa modelu, poprzez dwukrotne kliknięcie, wybieramy pozycję *Parts*  *Parts*. W oknie *Create Part*, w polu nazwa *Name* podajemy *tarcza*, przestrzeń modelowania *Modeling Space* wybieramy jako dwuwymiarową *2D Planar*, typ tworzonego modelu - odkształcalny *Deformable*, który będzie utworzony jako model „skorupowy” *Shell*. Będziemy operować w metrach, więc przybliżony rozmiar *Approximate size* naszego modelu to 5m. By przejść do tworzenia szkicu klikamy *Continue*.

Będąc w szkicowniku kreślimy kwadrat z punktu (0,0) wykorzystując narzędzie *Create Lines: Rectangle (4 Lines)* . Jako przeciwległy narożnik *opposite corner* wskazujemy kursorem myszki lub podajemy w polu dialogowym punkt (1,-1) gdyż bok kwadratu ma długość 1m. Wychodzimy z polecenia klawiszem *Esc* oraz z tworzenia szkicu zatwierdzając *Done*.

W miejscach, gdzie tarcza będzie się łączyć z prętami należy utworzyć tzw. punkty nastawcze *Sets*. Z drzewa modelu (po rozwinięciu składników przy pozycji *tarcza*) wybieramy *Sets*, w oknie dialogowym *Create Set* podajemy nazwę *tarcza1* i zatwierdzamy *Continue*. W oknie roboczym wskazujemy lewy górny róg, który miał współrzędne (0, 0), gdy zmieni kolor na czerwony zatwierdzamy *Done*. Kolejny punkt nastawczy leży w połowie dolnej podstawy. By go utworzyć należy najpierw wykonać odpowiednie partycje wspomnianej krawędzi. W tym celu rozwijamy narzędzia przy ikonie *Partition Cell: Specify Parameter by Location*  i wybieramy *Partition Edge: Enter Parameter* . Wskazujemy dolną podstawę i gdy




podświetli się na czerwono zatwierdzamy *Done*. Nasz pręt jest umocowany w połowie długości, więc zostawiamy domyślną wartość 0,5 i zatwierdzamy *Create Partition* oraz *Done*.



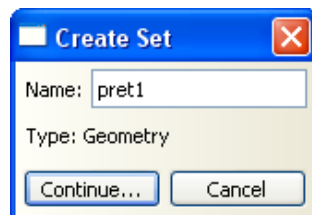
Powtarzamy procedurę i tworzymy drugi punkt nastawczy o nazwie *tarcza2*.

W następnej kolejności zostanie utworzony model pręta1. W oknie *Create Part* wpisujemy nazwę *pret1*. Wybieramy przestrzeń modelowania *Modeling Space* jako dwuwymiarową *2D Planar*, typ – odkształcalny *Deformable*, który będzie tworzony jako model drutowy *Wire*. Pozostawiamy wcześniej ustanowioną wartość w polu *Approximate size* i zatwierdzamy *Continue*.

Za pomocą narzędzia *Create Lines*:

Connected  kreślimy linię od punktu (0, 0) do (0, 1) gdyż długość pręta wynosi 1m. Wychodzimy z polecenia klawiszem *Esc* oraz ze szkicownika wybierając przycisk *Done*. Pozostało jeszcze utworzenie jednego punktu nastawczego, który w dalszej kolejności będzie służył do połączenia z tarczą.

W tym celu rozwijamy drzewo przy pozycji *pret1* i poprzez dwukrotne kliknięcie wybieramy *Sets*. W oknie dialogowym *Create Set* podajemy nazwę *pret1* i zatwierdzamy *Continue*. Wskazujemy punkt pręta, który miał współrzędne (0, 0) i gdy podświetli się na czerwono zatwierdzamy *Done*.




W analogiczny sposób tworzymy kolejny model drutowy o nazwie *pret2*, którego końce (w celu ułatwienia późniejszego złożenia) będą miały współrzędne (0.5, -1) oraz (0.5, -1.5). Po tej czynności należy także utworzyć punkt nastawczy o nazwie *pret2*, który w szkicowniku miał współrzędną (0.5, -1).

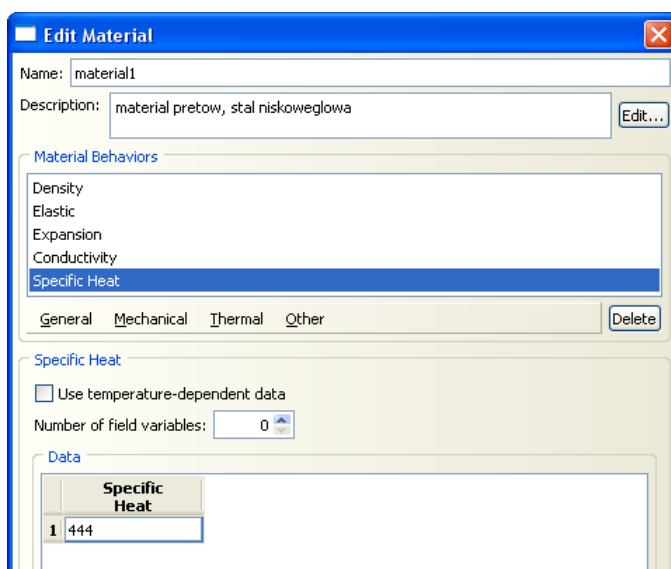
2. Definiowanie materiałów (moduł Property)

W symulacji będziemy korzystać z kroku skojarzonego cieplno – przemieszczeniowego, gdyż temperatura jednego z prętów uległa spadkowi w stosunku do temperatury montażu.

Oprócz podanego w treści zadania modułu Younga oraz rozszerzalności termicznej konieczne będzie także zdefiniowanie takich własności jak: gęstość, ciepło właściwe oraz przewodność cieplna. Dla stali niskowęglowej poniżej podano wspomniane własności wyznaczone przy temperaturze 0°C.

Gęstość [kg/m ³]	Ciepło właściwe [J/kgK]	Przewodność cieplna [W/mK]
7803	444	40

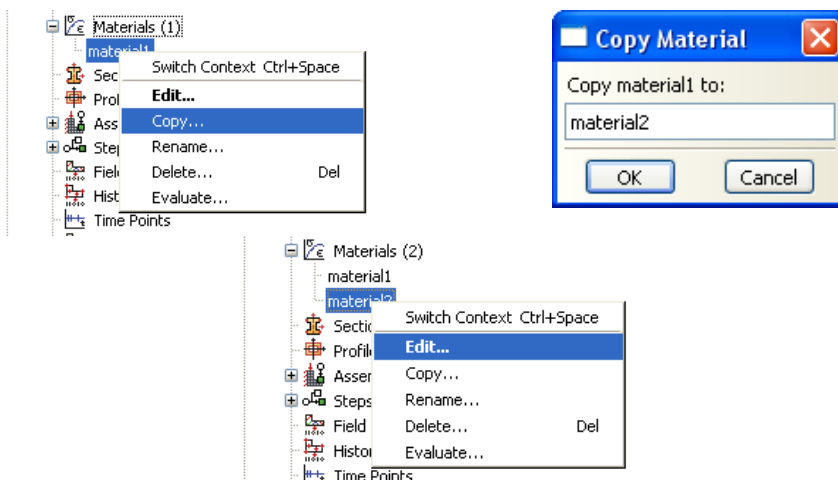
W celu utworzenie materiału, w drzewie modelu klikamy dwukrotnie na pozycję *Materials*  *Materials*. W oknie *Edit Material* wpisujemy nową *Name* – *material1*, w polu opisowym *Description* umieszczamy komentarz – *material prętów, stal niskowęglowa*, klikając *Edit*.




Rozwijamy zakładkę *General* i wybieramy pozycję gęstość *Density*. Podajemy wartość jak w powyższej tabelce. Klikamy na właściwości mechaniczne *Mechanical* a następnie wybieramy właściwości sprężyste *Elasticity / Elastic*. Będziemy operować w niutonach i metrach, więc w polu *Young's Modulus* wpisujemy *2e11* oraz *Poisson's Ratio* *0.3*. W zakładce *Mechanical* znajduje się również pozycja dotycząca rozszerzalności cieplnej *Expansion*. Należy ją wybrać i w polu *Expansion Coeff alpha* podajemy wartość *1e-5*. Z zakładki własności cieplnych *Thermal* wybieramy przewodność cieplną *Conductivity* a następnie ciepło właściwe *Specific Heat* i w obu przypadkach podajemy wartość z tabeli. W oknie *Edit Material* powinno znajdować się pięć własności.

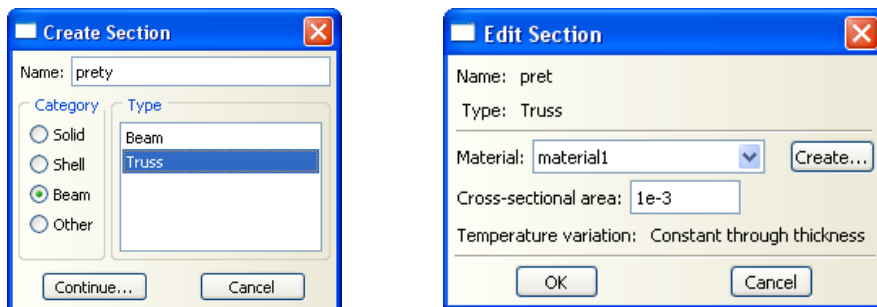
W naszej symulacji tarcze będziemy traktować jako ciało nieodkształcalne. Dokonamy tego poprzez utworzenie drugiego materiału różniącego się tylko zwiększony 100 krotnie modulem sprężystości wzdłużnej.

W tym celu klikamy prawym przyciskiem myszy na pozycję *material1* i wybieramy kopiowanie. W oknie dialogowym *Copy Material* podajemy nazwę *material2* i zatwierdzamy *OK*. Prawym przyciskiem myszy klikamy na nową pozycję *material2* i tym razem wybieramy edycję *Edit*. W oknie dialogowym *Edit Material* zmienimy opis – *material tarczy, modul Younga zwiększony 100 krotnie* – klikając *Edit* przy polu *Description*. Przechodzimy do własności sprężystych *Elastic* i edytujemy odpowiednie pole wpisując *2e13*



3. Utworzenie sekcji (moduł Property)

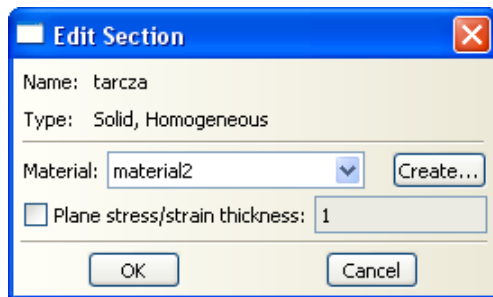
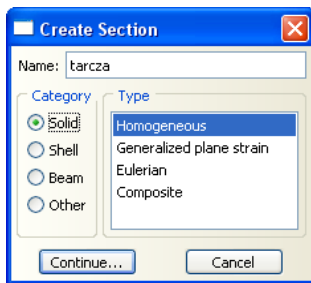
Z drzewa modelu poprzez dwukrotne kliknięcie należy wybrać pozycję *Sections*  *Sections*.



W pierwszej kolejności utworzymy sekcję dotyczącą prętów, więc w oknie dialogowym *Create Section* w polu *Name* podajemy np. *pret*, wybieramy

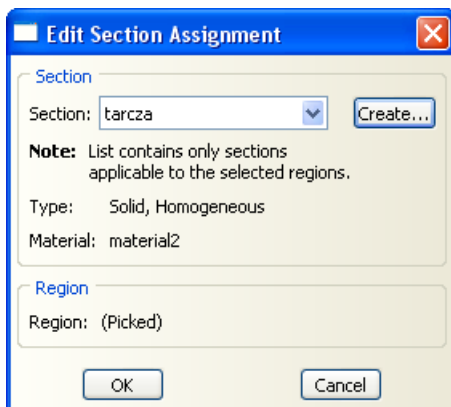
kategorię belka *Beam* oraz następnie typ kratownicowy *Truss* i klikamy *Continue*. W oknie *Edit Section* wybieramy *material1* oraz definiujemy pole przekroju poprzecznego pręta, pamiętając że należy je podać w metrach kwadratowych. Zatwierdzamy *OK*.

W sposób analogiczny tworzymy sekcję dla tarczy, wybierając kategorię bryłową *Solid* oraz typ jednorodny *Homogeneous* i przypisując *material2*.



4. Przypisanie sekcji do modeli (moduł Property)

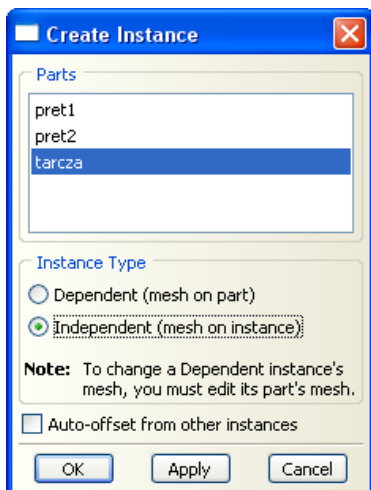
Z drzewa modelu należy wybrać pozycję *Section Assignments*. Rozwijając drzewo, klikając na „krzyżyk” przy pozycji *tarcza*..



Pod oknem roboczym pojawił się komunikat by wybrać regiony do których ma być przypisana sekcja *Select the regions to be assigned a section*. Klikamy na wcześniej utworzony model (kwadrat), po zaznaczeniu potwierdzamy *Done*. W nowym oknie *Edit Section Assignment* nie dokonujemy żadnych zmian, klikamy *OK*. Obiekt zmienia kolor na jasnozielony.

W analogiczny sposób postępujemy przy przypisywaniu sekcji do prętów. Jeśli jednak w zadaniu występują pręty o różnych polach przekroju poprzecznego to należy utworzyć dwie osobne sekcje i przypisać je do odpowiednich modeli drutowych.

5. Utworzenie złożenia (moduł Assembly)




W celu utworzenia złożenia w drzewie modelu należy rozwinąć „krzyżyk” przy pozycji *Assembly* i dwukrotnie kliknąć

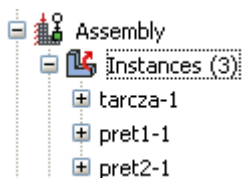


na pozycję *Instances*. W oknie *Create Instance* mamy do wyboru trzy części *Parts*: *pret1*, *pret2* oraz *tarcza*. Nie ma znaczenia od którego modelu rozpoczniemy złożenie. Po wybraniu np. *tarcza* oraz opcji *Independent* zatwierdzamy *OK*. Ponownie klikamy na pozycję *Instances* i tym razem wybieramy kolejną część. Jeśli wszystkie modele były tworzone zgodnie z instrukcją w odniesieniu do współrzędnych punktów, to

powinniśmy otrzymać widok jak na rysunku na następnej stronie. Jeśli jednak modele były tworzone dowolnie, co nie jest błędem, należy podczas ich wstawiania do złożenia zaznaczyć opcję *Auto-offset from other instances*, która nie pozwoli na nałożenie się części, co mogłoby utrudnić ich późniejsze prawidłowe usytuowanie. Do przemieszczenia części używamy narzędzia

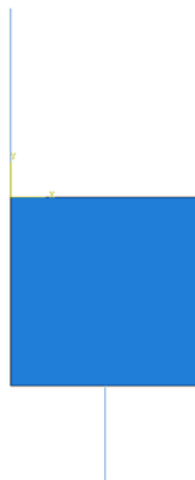
Translate Instance  i postępujemy zgodnie ze wskazówkami spod okna roboczego.



W drzewie modelu pod pozycją *Assembly/Instances* powinny znajdować się trzy elementy.

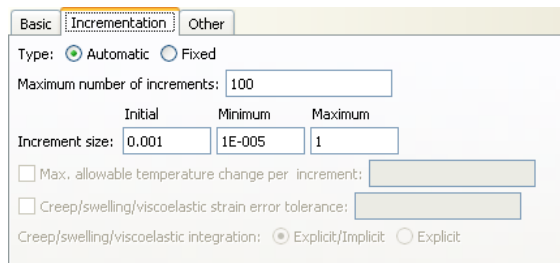
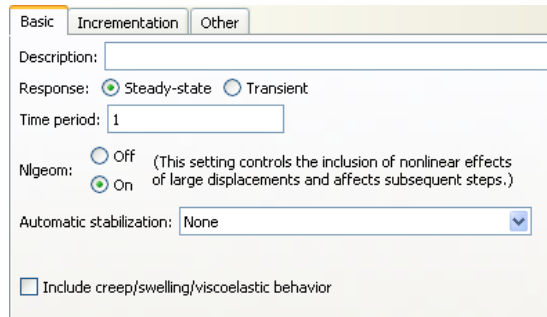
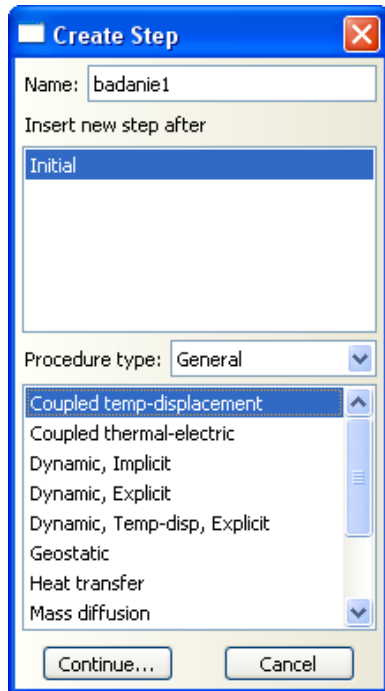


6. Utworzenie kroku analizy (moduł Step)

Krokiem, który umożliwia rozwiązywanie zagadnień dotyczących wyznaczania np. naprężeń cieplnych lub odkształceń spowodowanych rozszerzalnością termiczną jest skojarzona symulacja cieplno – przemieszczeniowa *Coupled temp-displacement*.

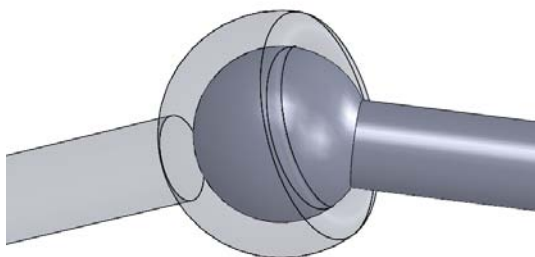
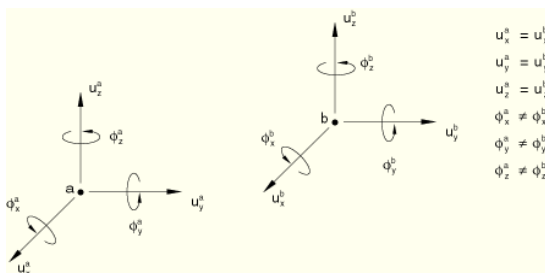


W celu jej utworzenia należy z drzewa modelu dwukrotnie kliknąć na pozycję *Steps*  *Steps (1)* lub po przejściu do modułu *Step* wybrać polecenie *Create Step* . W oknie *Create Step* w polu *Name* wpisujemy nazwę np. *badanie1*. Typ procedury zmieniamy na wspomniany wyżej i przechodzimy do kolejnego okna klikając *Continue*.




W oknie dialogowym *Edit Step*, w zakładce podstawowy *Basic* zmieniamy odpowiedź *Response* na stan ustalony *Steady-state* oraz uwzględniamy nieliniowości wybierając *On* przy pozycji *Nlgeom*. Przechodzimy do zakładki *Incrementation* i zmniejszamy wartość początkowego przyrostu *Initial* z *1* na *0.001*. Zmiany zatwierdzamy przyciskiem *OK*.

7. Utworzenie połączeń przegubowych prętów z płytą (moduł Interaction)



Narzędziem, które pozwala na narzucanie więzów pomiędzy stopniami swobody dla dwóch różnych węzłów modeli jest *Multi-Point Constraint (MPC)*. Jednym z typów MPC jest wiązanie *PIN*. Nadawane jest ono pomiędzy dwoma punktami różnych modeli i zapewnia równość ich przemieszczeń lecz dopuszcza niezależne obroty każdego z nich. Wspomniane wiązanie możemy zatem traktować jako przegub kulisty.

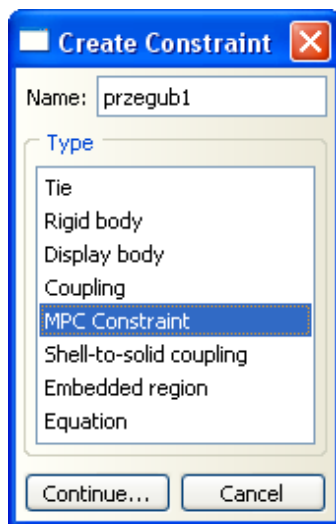
W celu utworzenia wiązania *PIN*, z drzewa modelu poprzez dwukrotne kliknięcie wybieramy

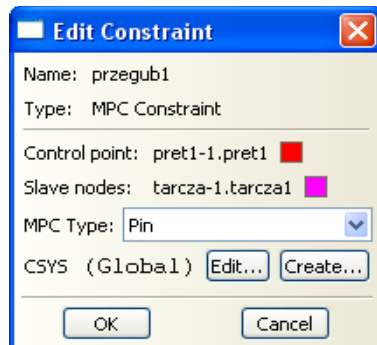
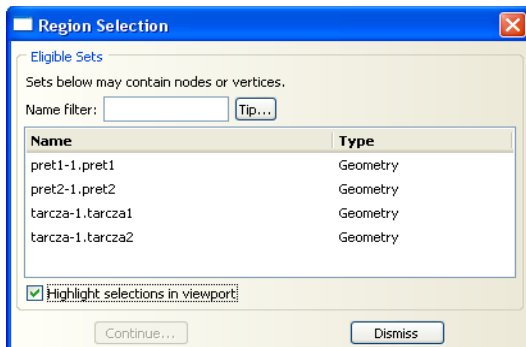
pozycję *Constraints*  *Constraints*. W oknie dialogowym *Create Constraint* wprowadzamy nazwę przegub1 oraz z typów wybieramy *MPC Constraint* po czym klikamy *Continue*.

Pod oknem dialogowym pojawił się komunikat *Select the MPC control point* oraz po prawej stronie przycisk *Sets...* który należy wybrać.

W oknie dialogowym *Region Selection* widnieją wcześniej utworzone punkty nastawcze, będą one tworzyć dwie pary (przeguby).

Korzystnie jest najpierw zaznaczyć opcję *Highlight selections in the viewport* celem upewnienia się, że punkty nastawcze zostały utworzone prawidłowo w miejscu występowania przegubów. Po tej czynności klikamy na pierwszą pozycję *pret1* a następnie *Continue*, wskazujemy kolejny punkt *tarcza1* i po raz drugi zatwierdzamy *Continue*.

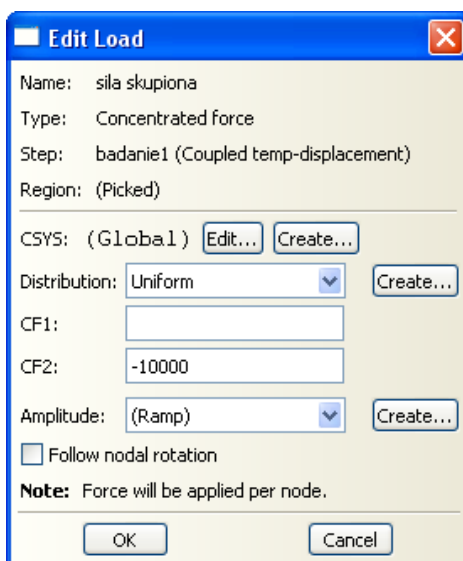
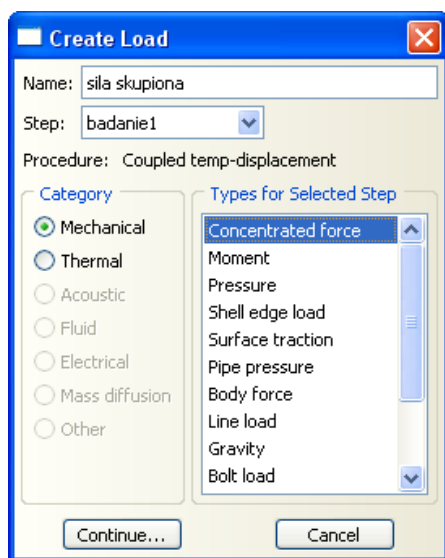




W nowym oknie *Edit Constraint* z rozwijalnego menu wybieramy pozycję *Pin* o której była wyżej mowa i zatwierdzamy *OK*. W oknie roboczym, w lewym górnym rogu tarczy pojawił się zielony napis *MPC Pin* informujący, że zostało utworzone wiązanie.

Postępujemy w sposób analogiczny tworząc drugi przegub o nazwie *przegub2*.

8. Przyłożenie obciążenia (moduł Load)

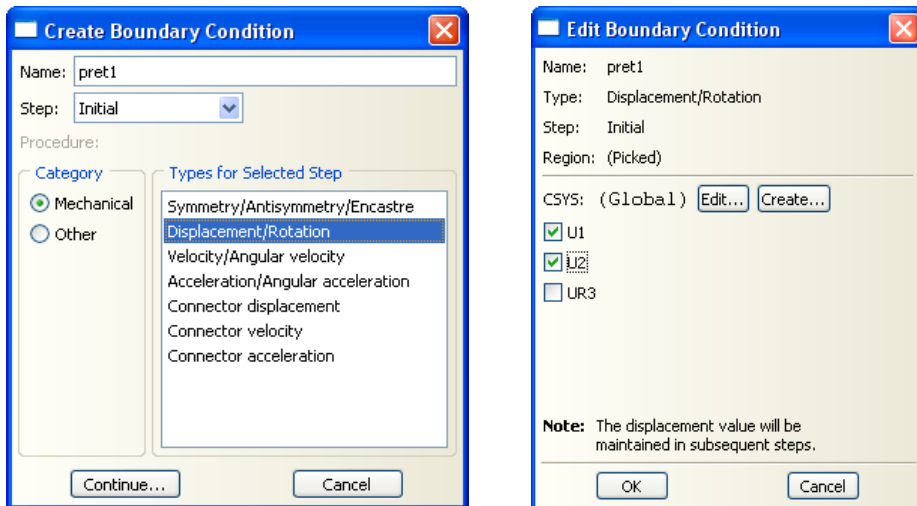


Do lewego dolnego rogu tarczy przyłożona jest siła skupiona o wartości 10 kN. W celu jej zdefiniowania z drzewa modelu poprzez dwukrotne kliknięcie wybieramy pozycję *Loads*. W oknie dialogowym *Create Load* podajemy nazwę

siła skupiona, która będzie przypisana do kroku *badanie1*. Z typów obciążenia pozostawiamy domyślną *Concentrated force* i klikamy *Continue*.

Jeśli po tej czynności pojawiło się okno *Region Selection* to należy go zamknąć i następnie kursorem myszy wskazać odpowiedni punkt przyłożenia siły po czym zatwierdzić *Done*. W oknie dialogowym *Edit Load* podajemy wartość -10000 N na kierunku 2.

9. Warunki brzegowe (moduł Load)

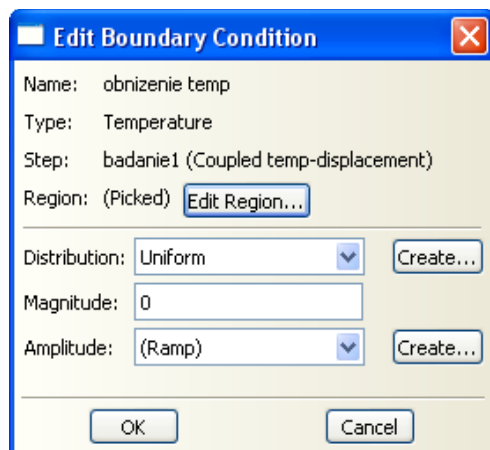
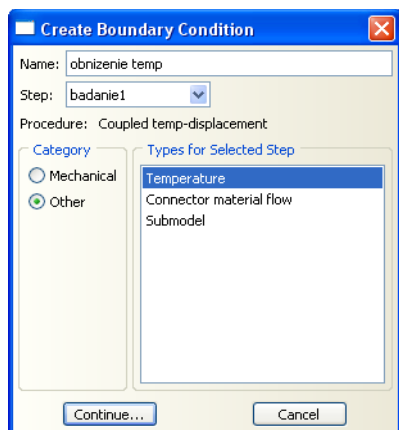


W zadaniu występują trzy podpory nieprzesuwne zapewniające jednak obrót końcom prętów oraz narożnikowi tarczy w punkcie C.

Zatem z drzewa modelu wybieramy pozycję *BCs* i następnie w oknie *Create Boundary Condition* wpisujemy nazwę *pret1*, wybieramy krok *Initial* oraz jako typ wybieramy przemieszczenie/obróty *Displacement/Rotation* i klikamy *Continue*. W oknie roboczym wskazujemy koniec pręta 1, który miał współrzędną (0, 1) i zatwierdzamy *Done*. W oknie *Edit Boundary Condition* blokujemy dwa przemieszczenia *U1* oraz *U2* i zatwierdzamy *OK*.

W analogiczny sposób postępujemy jeszcze dwukrotnie tworząc warunki brzegowe o nazwie *pret2* oraz *podporaC*.

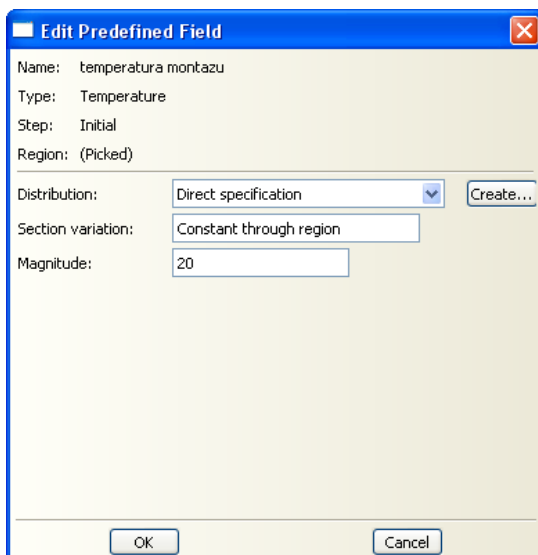
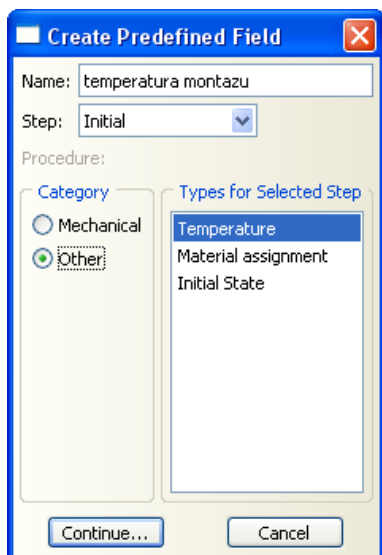
Czwartym i ostatnim warunkiem brzegowym będzie przypisanie odpowiedniej temperatury dla pręta 1. Zakładamy, że montaż następował w temperaturze 20°C , zaś w treści zadania podano, że temperatura uległa obniżeniu o 20°C , dlatego pręt 1 będzie miał temperaturę 0°C .




W tym celu, w oknie dialogowym *Create Boundary Condition* podajemy nazwę *obniżenie temp*, zmieniamy krok z *Initial* na *badanie1*, wybieramy kategorie inne *Other* oraz typ *Temperature* i klikamy *Continue*. W oknie roboczym wskazujemy pręt 1 i gdy podświetli się na czerwono, zatwierdzamy *Done*. W oknie dialogowym *Edit Boundary Condition*, jako wielkość *Magnitude* podajemy 0 i zatwierdzamy *OK*.

10. Warunki początkowe (moduł Load)

Jak wspomniano wyżej temperatura montażu wynosiła 20 °C, dlatego należy przypisać warunki początkowe dla elementów złożeń.

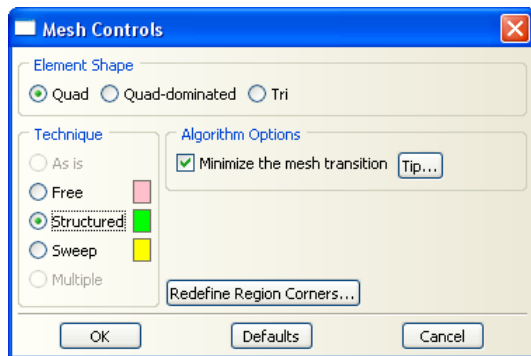


W tym celu z drzewa modelu poprzez dwukrotne kliknięcie wybieramy pozycję *Predefined Fields* lub z paska narzędziowego ikonę *Create Predefined*


Fields . W oknie dialogowym *Create Predefined Fields* podajemy nazwę np. *temperatura montażu*, wybieramy krok *Initial*, zmienimy kategorie na inne *Other* oraz typ dla zaznaczonego kroku *Temperature*, po czym zatwierdzamy *Continue*. Postępujemy zgodnie ze wskazówkami spod okna roboczego i wskazujemy trzy elementy złożenia przytrzymując jednocześnie klawisz *Shift*, zatwierdzając *Done*. W kolejnym oknie dialogowym *Edit Predefined Fields*, w polu wartość *Magnitude* podajemy temperaturę montażu 20 °C zatwierdzając *OK*.

11. Utworzenie siatki elementów skończonych (moduł Mesh)


Po przejściu do modułu *Mesh*, próbka zmienia kolor na jasno różowy. Kolory oznaczają techniki nakładania siatek. W tym przypadku jest to technika wolna *Free*, która jest bardziej elastyczna w odróżnieniu do techniki strukturalnej *Structured*. Topologia regionów, które poddaje się nakładaniu siatki techniką *Free* może być bardziej złożona, dlatego jest ona ustawiona jako domyślna. W naszym przypadku mamy do czynienia z kwadratem, więc zmienimy technikę na strukturalną, której wzór jest przewidywalny w przeciwieństwie do techniki *Free*.




Z paska narzędzi pomiędzy oknem roboczym a drzewem modelu wybieramy ikonę *Assign*


Mesh Controls  po czym wskazujemy obszar tarczy i zatwierdzamy *Done*. W oknie dialogowym *Mesh Controls* zmieniany kształt elementu na czterowęzłowy *Quad* oraz technikę nakładania siatki na strukturalną *Structured*. Zmiany zatwierdzamy *OK*, próbka

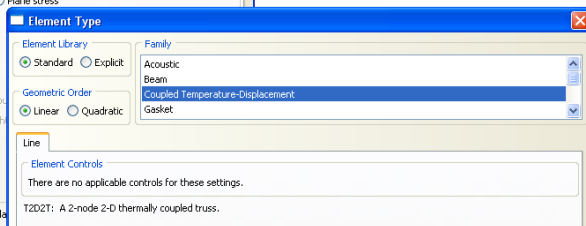
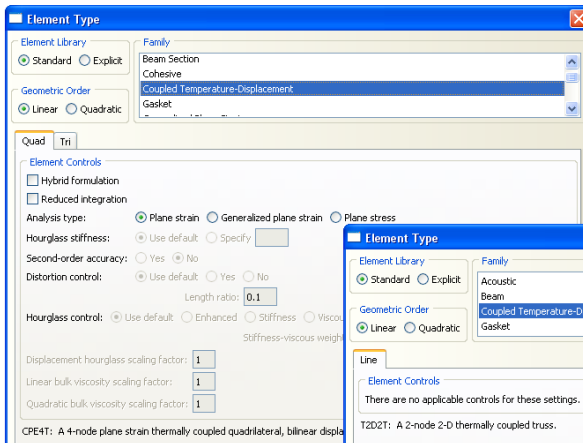
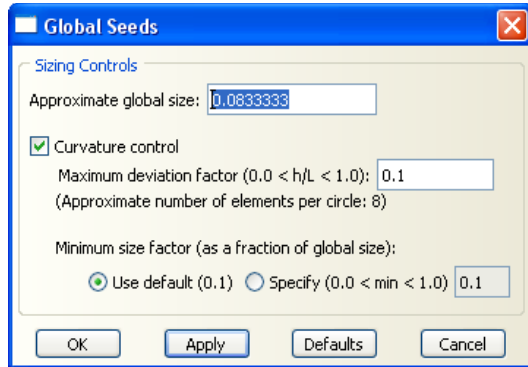
zmienia kolor na zielony.

Kolejny krok to przypisanie globalnej wielkości elementu. W tym celu klikamy na ikonę *Seed Part Instance* , przytrzymując klawisz *Shift* zaznaczymy tarczę oraz dwa pręty zatwierdzając *Done*. W oknie dialogowym *Global Seeds* pozostawiamy wartość domyślną i zatwierdzamy *OK*.

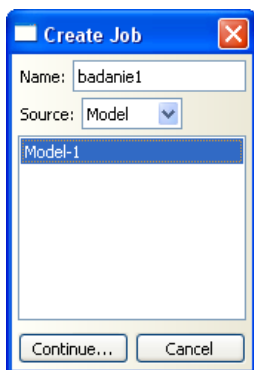
Konieczne jest także przypisanie odpowiedniego typu elementu skończonego do części złożenia. Z paska narzędzi należy wybrać ikonę *Assign*


Element Type  i zgodnie z poleceniem spod okna roboczego należy zaznaczyć dwa pręty (przy wciśniętym klawiszu *Shift*) i potwierdzić *Done*. W oknie dialogowym *Element Type* w polu *Family* należy zmienić rodzinę z *Beam* na *Coupled Temperature-Displacement* i zatwierdzić *OK*. Nie wychodząc z polecenia, należy następnie wskazać tarczę i zatwierdzić *Done*. Podobnie i w tym przypadku zmienimy rodzinę elementu na *Coupled Temperature-Displacement* i zatwierdzamy *OK*. Wychodzimy z polecenia klawiszem *Esc*.


Ostatni etap to wygenerowanie siatki elementów skończonych. Z paska narzędziowego wybieramy ikonę *Mesh Part Instance*  i przy wciśniętym klawiszu *Shift* zaznaczamy wszystkie części złożenia po czym zatwierdzamy *Done*.




12. Utworzenie zadania (moduł Job)




Ostatnim etapem przed uruchomieniem symulacji jest utworzenie zadania. W tym celu z drzewa modelu wybieramy pozycję *Jobs*  lub przechodzimy do modułu *Job* i wybieramy polecenie

Create Job . W oknie dialogowym *Create Job* podajemy dowolną nazwę *badanie1*, pamiętając, że będą ją nosiły wszystkie pliki wygenerowane przez program dla tego zadania. Przechodzimy do następnego okna klikając *Continue*. W oknie *Edit Job* nie dokonujemy żadnych zmian i zatwierdzamy *OK*.

13. Uruchomienie symulacji (moduł Job)


W drzewie modelu rozwijamy „krzyżyk”  przy pozycji *Jobs* a następnie prawym przyciskiem myszy klikamy na pozycję *badanie1* i z menu które się pojawiło wybieramy *Submit*, poddając tym samym wcześniej utworzone zadanie analizie.

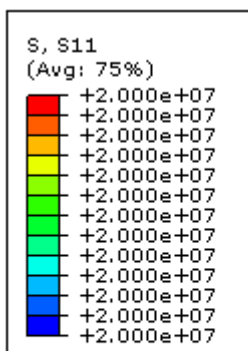
Ten sam efekt uzyskamy wybierając z paska narzędziowego polecenie *Job Manager*  i w oknie *Job Manager* klikamy *Submit*.

W kolumnie *Status* początkowo pojawi się komunikat *Submitted* następnie *Running* a w rezultacie *Complete* co oznacza, że zadanie zostało rozwiązane. Zamykamy okno wybierając *Dismiss*.


14. Wynik symulacji (moduł Visualization)

W oknie dialogowym *Job Manager* wybieramy przycisk *Results* lub klikamy prawym przyciskiem myszy w drzewie modelu na pozycję *badanie1* i wskazujemy wspomniane polecenie.

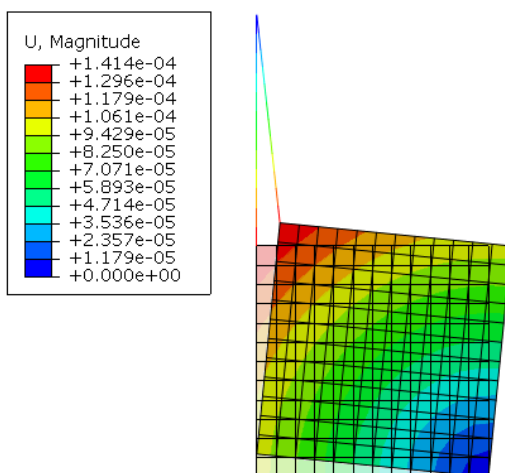
Klikając na ikonę *Plot Contours on Deformed Shape*  standardowo są wyświetlane naprężenia zredukowane Misesa. By wyniki były wyświetlane dla każdego pręta osobno należy w drzewie wyników rozwinąć jego strukturę po poziomie *Instances*. Pod wspomnianą pozycją istnieją trzy elementy złożenia, klikamy prawym przyciskiem myszy na pierwszy z nich o nazwie *PRET1-1* i wybieramy *Replace*. Naprężenia normalne S_{11} wynoszą 20 MPa. Podobnie postępujemy w przypadku drugiego pręta *PRET2-1* - naprężenia są także rozciągające i wynoszą 20 MPa co jest zgodne z wynikami teoretycznymi.



Interesuje nas jeszcze jak dany układ będzie się przemieszczał. W tym celu, w drzewie wyników, należy zaznaczyć wszystkie trzy elementy i klikając prawym przyciskiem myszy wybrać *Add*. Następnie w górnym rozwijalnym menu należy zmienić rodzaj wyświetlanych wyników z naprężeń S na przemieszczenia U . Z górnego menu wybieramy *Options/Common* i w oknie dialogowym *Common Plot Options* w polu *Deformation Scale Factor* zaznaczamy *Uniform* i podajemy skalę deformacji 1000 zatwierdzając *OK*.

By wyświetlić oba stany: początkowy i końcowy jednocześnie wybieramy ikonę *Plot Contours on both shapes* .

Podobne założenia co do kierunku obrotu tarczy poczyniliśmy na początku zadania.

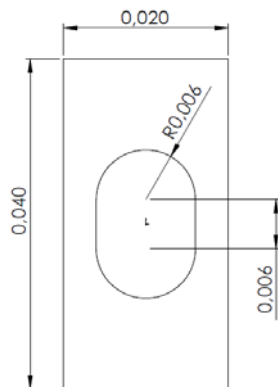


8.5. Ukośne zginanie

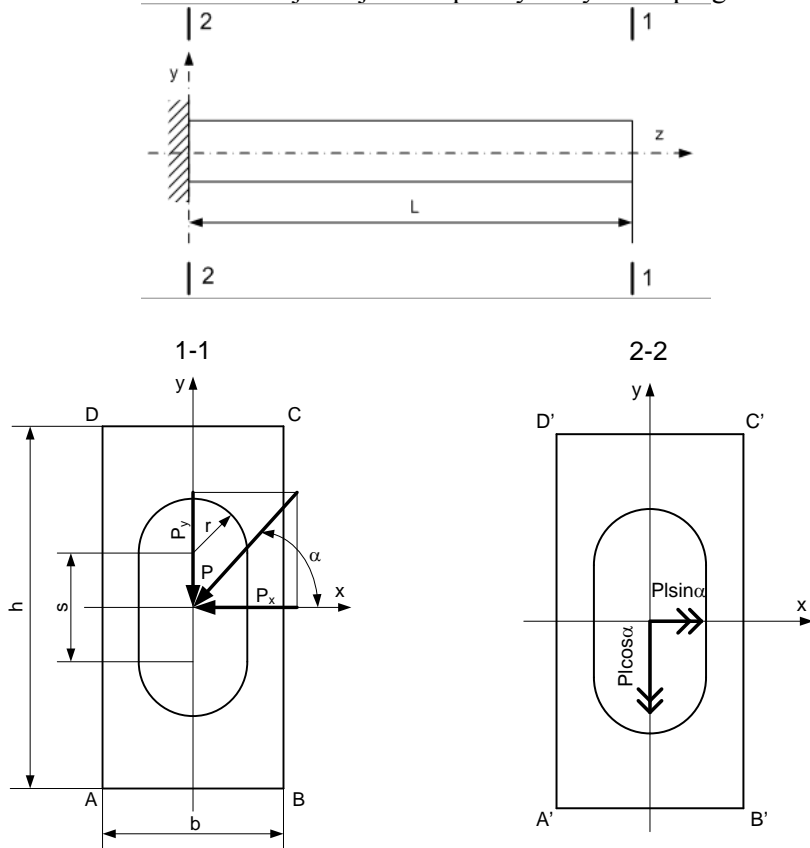
Celem ćwiczenia jest wyznaczenie naprężeń oraz przemieszczeń belki, zginanej ukośnie, metodą analityczną oraz z wykorzystaniem programu Abaqus.

Przedmiotem badań będzie belka stalowa o przekroju poprzecznym pokazany na poniższym rysunku.

Belka wykonana jest ze stali dla której moduł sprężystości wzdłużnej wynosi $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ oraz liczba Poissona $\nu = 0.3$. Belka ma długość 100 mm, z jednej strony jest utwierdzona zaś drugi do którego przyłożono siłę, jest swobodny.



Poniżej przedstawiono sposób analityczny wyznaczenia naprężeń i przemieszczeń oraz w dalszej kolejności opis wykorzystania programu Abaqus.



Wymiary przekroju poprzecznego:

$$h = 40\text{mm}, b = 20\text{mm}, r = 6\text{mm}, s = 6\text{mm}$$

Składowe obciążenia:

$$P_y = 200\text{N}, P_x = 100\text{N}$$

Moment bezwładności względem osi x

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{2 \cdot r \cdot s^3}{12} - 2 \cdot \left[0,1098 \cdot r^4 + 0,5 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (0,5 \cdot s + 0,4244 \cdot r)^2 \right]$$

Podstawiając wartości otrzymujemy

$$J_x = 1,027 \cdot 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

Moment bezwładności względem osi y

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{s \cdot (2 \cdot r)^3}{12} - 2 \cdot 0,3927 \cdot r^4$$

Po podstawieniu wartości otrzymujemy

$$J_y = 2,478 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

Równanie naprężeń normalnych

$$\sigma = \frac{P_y \cdot L \cdot y}{J_x} + \frac{P_x \cdot L \cdot x}{J_y} \quad \text{Położenie osi obojętnej } \sigma = 0$$

Równanie osi obojętnej

$$y = -\frac{P_x \cdot J_x}{P_y \cdot J_y} \cdot x$$

Nachylenie osi obojętnej do dodatnio skierowanej osi x

$$\beta = -a \tan \left(\frac{P_x \cdot J_x}{P_y \cdot J_y} \right)$$

Podstawiając wartości

$$\beta = -64,232^\circ$$

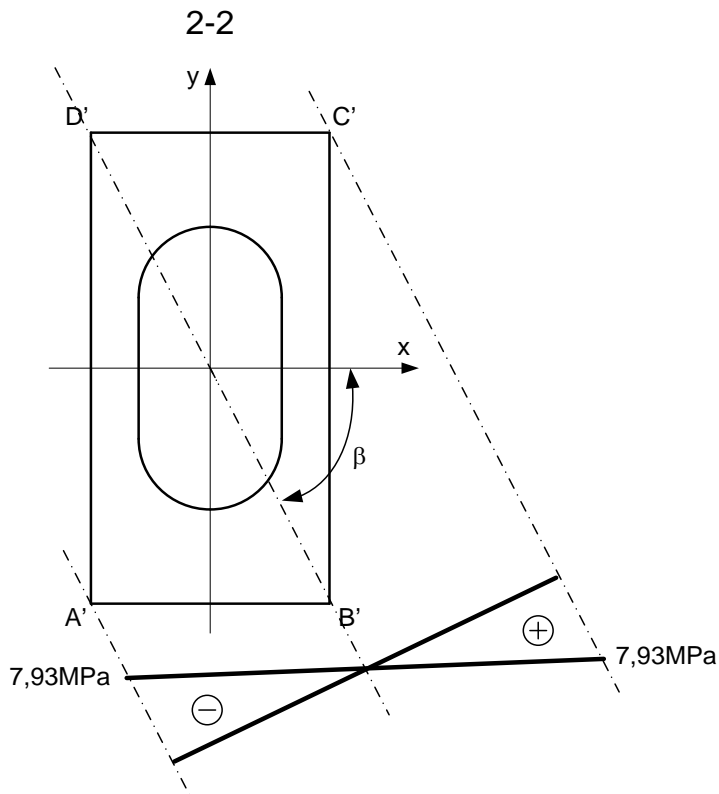
Naprężenia ekstremalne występują w punktach A' i C'

$$|\sigma_{A'}| = |\sigma_{C'}| = \frac{P_y \cdot L \cdot h}{2 \cdot J_x} + \frac{P_x \cdot L \cdot b}{2 \cdot J_y}$$

Po podstawieniu wartości otrzymujemy

$$\sigma_{A'} = -7,93 \text{ MPa} \quad \sigma_{C'} = 7,93 \text{ MPa}$$

Rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym w miejscu utwierdzenia pokazano na poniższym rysunku



Ugięcia belki wyniosą


$$f_x = \frac{-P_x \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_y} \quad f_x = -6,725 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

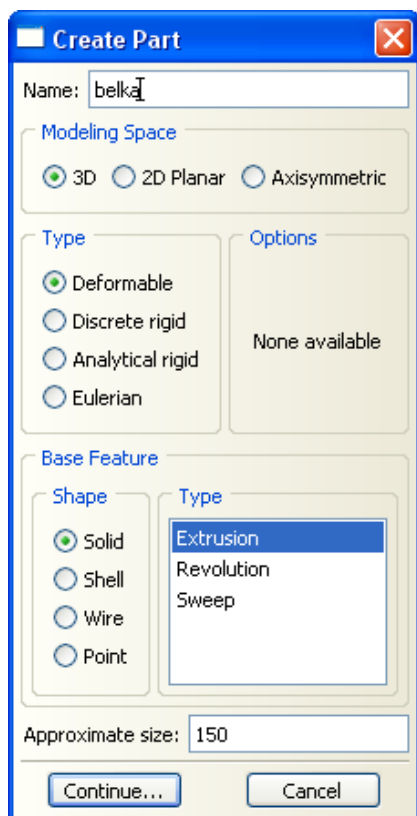
$$f_y = \frac{-P_y \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_x} \quad f_y = -3,246 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Ugięcie wypadkowe wyniesie


$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad f = 7,467 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

1. Utworzenie geometrii belki (moduł Part)


Z drzewa modelu, poprzez dwukrotne kliknięcie, wybieramy pozycję *Parts* . W oknie *Create Part*, jako nazwę *Name* podajemy np. belka, przestrzeń modelowania *Modeling Space* jako trójwymiarową 3D, typ tworzonego modelu jako odkształcalny *Deformable*, kształt *Shape* jako bryłowy *Solid*, który będzie utworzony poprzez wyciągnięcie *Extrusion*. W polu przybliżony kształt *Approximate size* wpisujemy wartość 150. By przejść do tworzenia szkicu klikamy *Continue*.





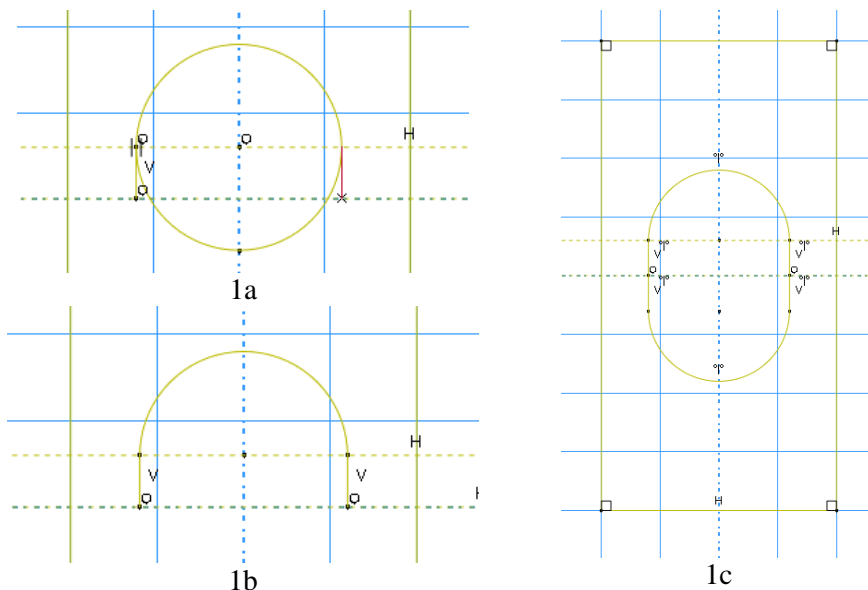
Wymiary zewnętrzne przekroju belki to $b \times h$ 20mm x 40mm. W celu narysowania prostokąta wybieramy narzędzie *Create Lines: Rectangle* (4


 *Lines*). Pod oknem roboczym pojawił się komunikat *Pick a starting corner for the rectangle—or enter X, Y*. Możemy zatem kliknąć myszką w oknie szkicownika na punkt (-10,20), o czym informują nas współrzędne w lewym górnym rogu, lub wprowadzić wspomniane współrzędne z klawiatury w polu pod oknem roboczym. Kolejny komunikat informuje nas o podaniu współrzędnej przeciwnego narożnika *Pick the opposite corner for the rectangle—or enter X, Y*. Podajemy wartość (10,-20). Kolejnym etapem jest utworzenie otworu. Półokrąg będzie kreślony z punktu (0,3), w tym celu wybieramy narzędzie *Create Circle: Center and Perimeter*. Pod oknem roboczym pojawił się komunikat wraz z polem by wpisać współrzędną punktu z którego będzie kreślony okrąg. Kolejny komunikat informuje nas by podać drugą


współrzędną dla utworzenia promienia, wpisujemy (0,-3) gdyż promień ma 6 mm. Następny krok to utworzenie dwóch poziomych linii konstrukcyjnych: przechodzącej przez środek utworzonego okręgu oraz przez środek ciężkości prostokąta (punkt 0,0). W tym celu należy użyć narzędzia *Create Construction:*

Oblique Line Thru 2 Points . Następnie wybierając narzędzie *Create Lines:*

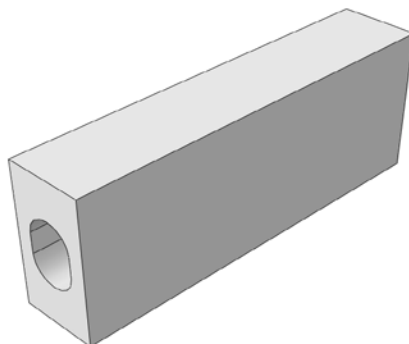
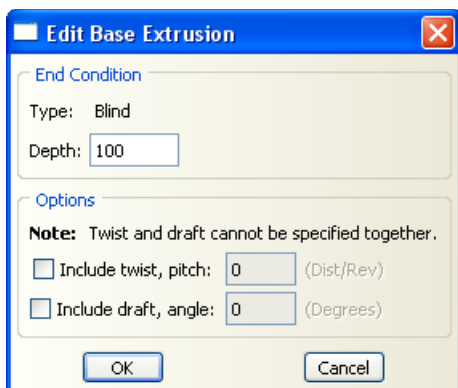
Connected  kreślimy dwie pionowe linie jak pokazano na rysunku 1a. Należy zwrócić uwagę, że punkty przecięcia, są sygnalizowane krzyżykiem przy kursorze. Zbędne fragmenty okręgu należy usunąć używając narzędzia *Auto-Trim* . Szkic powinien wyglądać jak na rysunku 1b.



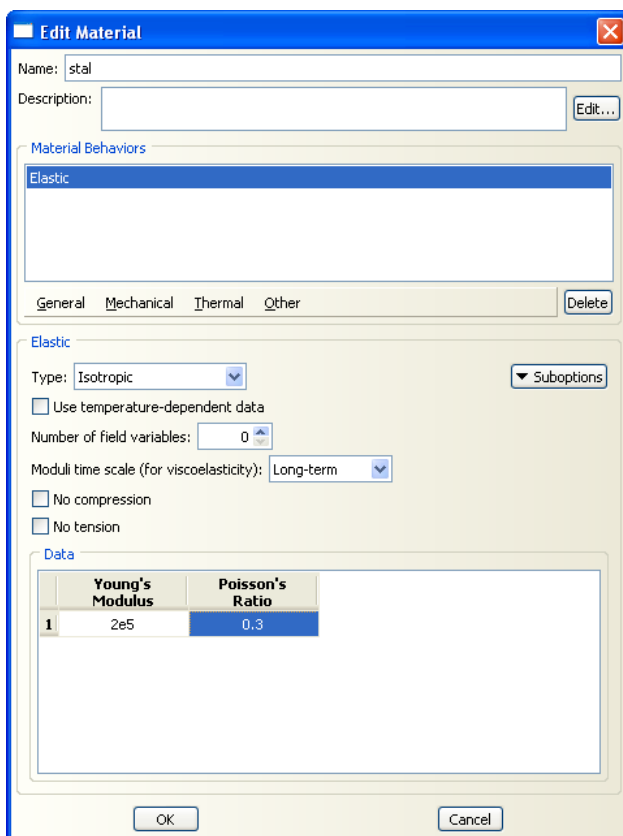
Ostatnim etapem będzie utworzenie odbicia lustrzanego szkicu otworu. W tym celu należy rozwinąć polecenia przy narzędziu *Translate*  i wybrać

lustro *Mirror* . Pod oknem roboczym pojawi się pytanie czy ma to być kopia czy tylko przemieszczenie, wybieramy *Copy* i postępujemy zgodnie z dalszymi poleceniami wskazując oś odbicia po czym kolejno odcinki szkicu otworu. Należy pamiętać by przytrzymać klawisz *Shift* celem zaznaczenia wszystkich odcinków. Zatwierdzamy *Done*, po czym wychodzimy z polecenia klawiszem *Esc*.

Wyniki powinien być taki jak na rysunku 1c. Tworzenie szkicu dobiegło końca, więc przyciskiem *Done* przechodzimy do okna związanego z operacją bryłową. W oknie *Edit Base Extrusion* podajemy wartość wyciągnięcia jako 100 i zatwierdzamy OK. W efekcie powinniśmy otrzymać model bryłowy jak na poniższym rysunku.




2. Definiowanie materiału (moduł Property)




Rozważana belka jest wykonana ze stali dla której moduł sprężystości wzdłużnej wynosi

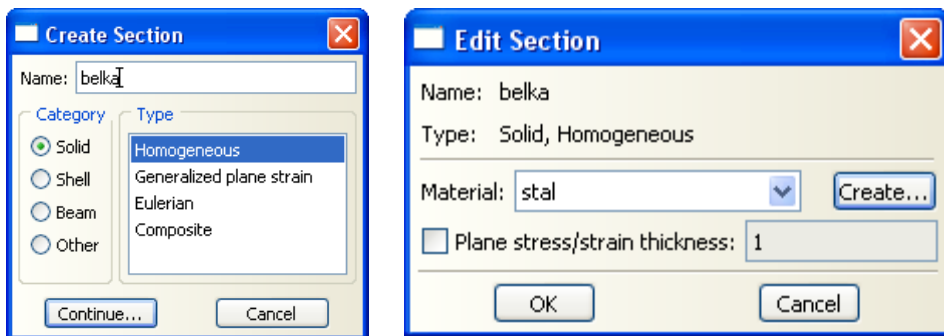
$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ oraz liczba Poissona $\nu = 0.3$.

W celu utworzenie materiału, w drzewie modelu klikamy dwukrotnie na pozycję *Materials*  *Materials*. W oknie *Edit Material* wpisujemy nawę *Name* - stal, pole opisowe *Description* pozostawiamy puste. Poniżej, klikamy na właściwości mechaniczne *Mechanical* a następnie wybieramy właściwości sprężyste *Elasticity* / *Elastic*. Będziemy

operować w niutonach i milimetrach, więc w polu *Young's Modulus* wpisujemy $2e5$ oraz *Poisson's Ratio* 0.3 (nie używamy przecinków tylko kropek). Pozostałe pola zostawiamy niezmienione i zatwierdzamy OK.

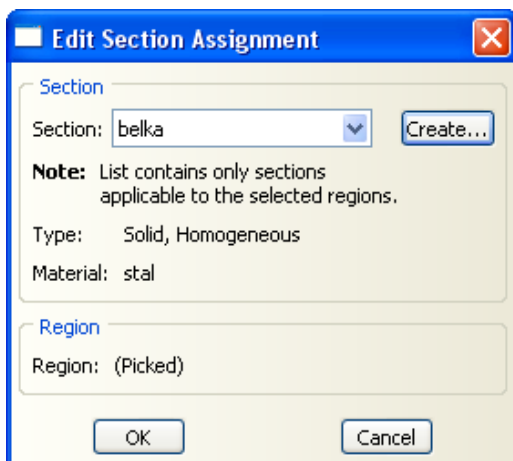
3. Utworzenie sekcji (moduł Property)

Z drzewa modelu poprzez dwukrotne kliknięcie należy wybrać pozycję *Sections*  *Sections*.






W oknie *Create Section* podajemy dowolną nazwę np. belka. Z kategorii wybieramy jako jeden z czterech element bryłowy *Solid* oraz typ jako jednorodny *Homogeneous*. Klikamy na przycisk *Continue*, w nowym oknie *Edit Section* nie dokonujemy żadnych zmian. Zatwierdzamy OK.

4. Przypisanie sekcji do modelu (moduł Property)



Z drzewa modelu należy wybrać pozycję *Section Assignments*

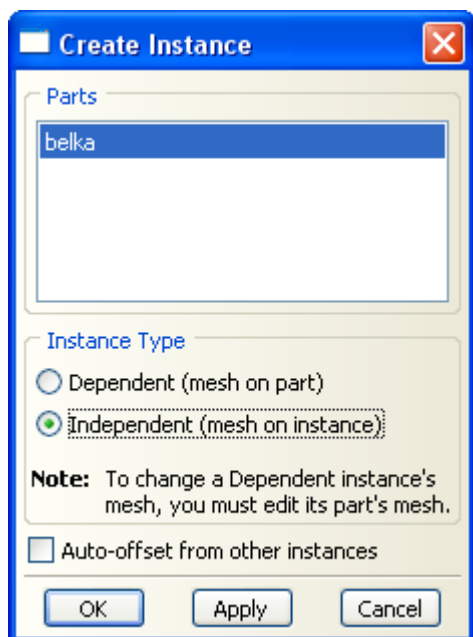
 *Section Assignments* rozwijając drzewo klikając na „krzyżyk”  przy pozycji *Parts*. Można tego również dokonać z paska narzędzi wybierając ikonę

Assign Section  . Pod oknem roboczym pojawił się komunikat by wybrać regiony do którego ma być

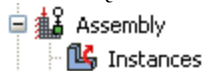
przypisana sekcja (*Select the regions to be assigned a section*). Klikamy na wcześniej utworzoną belkę i potwierdzamy *Done*.
W nowym oknie *Edit Section Assignment* klikamy *OK*.

5. Utworzenie złożenia (moduł Assembly)

W celu utworzenia złożenia z drzewa modelu należy rozwinąć



„krzyżyk” przy pozycji *Assembly* i dwukrotnie kliknąć na pozycję



Instances

Można również przejść do modułu *Assembly* i z paska narzędziowego wybrać polecenie wstaw część,



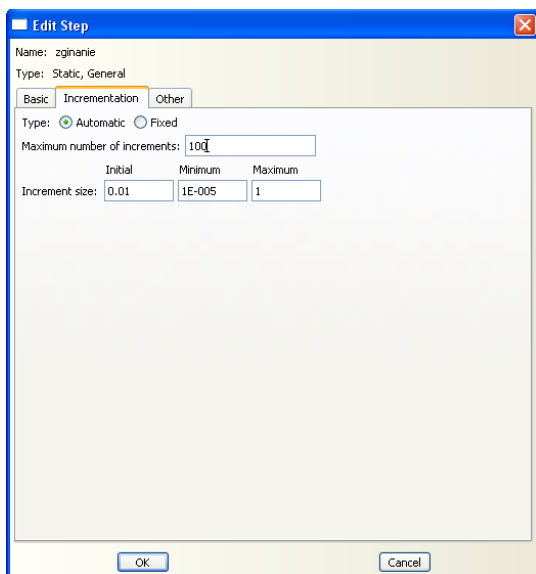
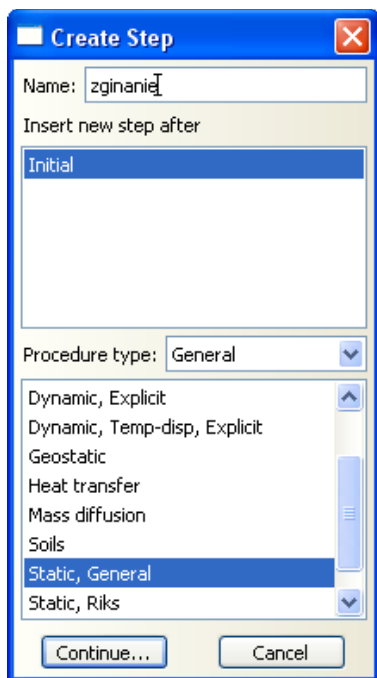
Instance Part. W oknie *Create Instance* widnieje tylko jedna część o nazwie *belka*. Zaznaczamy także opcje *Independent* i zatwierdzamy klikając *OK*. *Belka* w oknie roboczym zmieniła kolor na niebieski.

6. Utworzenie kroku analizy (moduł Step)

W celu utworzenia kroku analizy należy z drzewa modelu dwukrotnie kliknąć na pozycje *Steps* lub po przejściu do modułu *Step* wybrać



polecenie *Create Step*. W oknie *Create Step* w polu *Name* wpisujemy dowolną nazwę np. *zginanie*. Belkę będziemy obciążać statycznie siłą skupioną dlatego typ procedury pozostawiamy jako *Static, General* i przechodzimy do kolejnego okna klikając *Continue*.



W oknie *Edit Step*, przechodzimy z zakładki *Basic* do *Incrementation*. Zmniejszymy rozmiar przyrostu z wartości 1 na 0,01. Maksymalna liczba przyrostów pozostawimy jako domyślną 100. Wartości te zależą od stopnia skomplikowania zadania, właściwości kontaktów bądź nieliniowości zadania. Zmiany zatwierdzamy przyciskiem OK.



7. Utworzenie punktu przyłożenia siły (moduł Interaction)

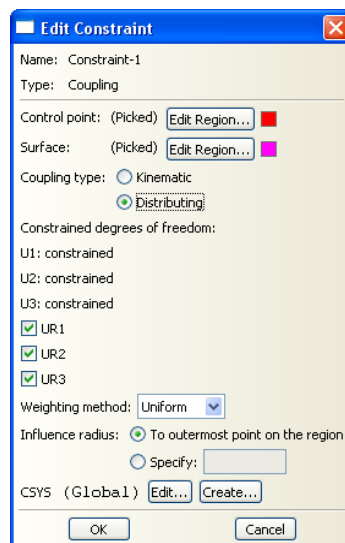
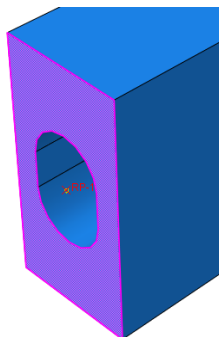
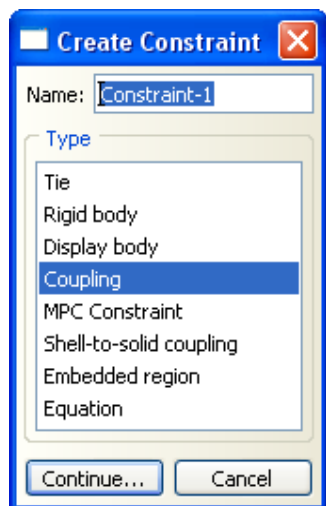
Punkt przyłożenie siły będzie się znajdował w środku ciężkości przekroju wolnego końca belki. Sposób postępowania będzie polegał na utworzeniu punktu referencyjnego we wspomnianym miejscu oraz jego powiązaniu ze ścianą przekroju w którym się on znajduje.

Będąc w module *Interaction*, po wybraniu narzędzia *Create Reference Point* widzimy, że nie istnieje punkt położony w środku ciężkości przekroju. Klawiszem *Esc* wychodzimy z polecenia. W celu utworzenia punktu szczególnego w interesującym nas miejscu, rozwijamy polecenia przy ikonie *Create Datum Point: Enter Coordinates* i wybieramy pozycję. *Create Datum Point: Midway Between 2 Points*. Wskazujemy zatem dwa punkty (np. leżące w środku krótszych boków) tak by otrzymać punkt leżący w środku ciężkości. Powtarzamy procedurę dotyczącą tworzenia punktu referencyjnego i

w oknie roboczym klikamy na wcześniej utworzony punkt szczególny. W środku ciężkości powinien pojawić się „krzyżyk” wraz z opisem *RP-1*.



Kolejny etap to powiązanie punktu z płaszczyzną w której się on znajduje. Dokonujemy tego poprzez dwukrotne kliknięcie na pozycję *Constraints*

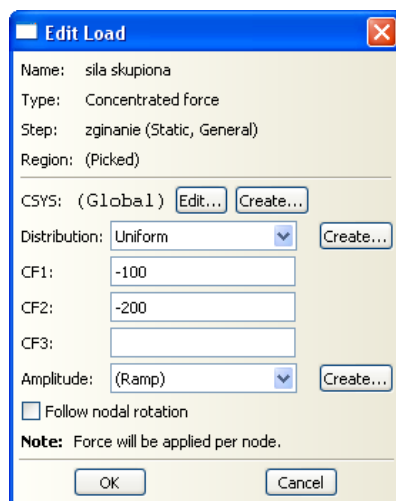
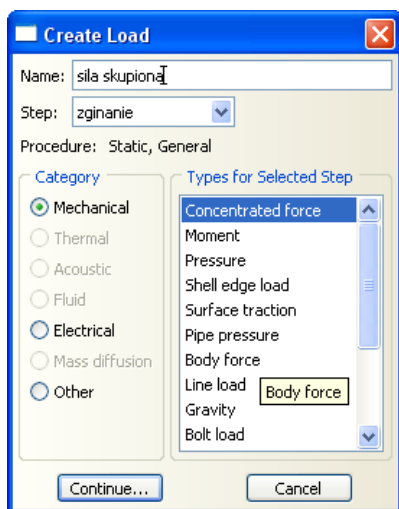
 *Constraints* w drzewie modelu, lub wybierając z paska narzędziowego polecenie *Create Constraint* .



W oknie dialogowym *Create Constraint* pozostawiamy domyślną nazwę i jako typ ograniczenia wybieramy połączenie *Coupling*. Pod oknem roboczym pojawiał się komunikat *Select the Constraint control point*, należy więc wskazać wcześniej utworzony punkt *RP-1*. Program następnie pyta użytkownika czy punkt kontrolny ma być związany z powierzchnią czy z węzłem, w naszym przypadku wybieramy powierzchnię *Surface*, wskazujemy płaszczyznę swobodnego końca i zatwierdzamy *Done*. W oknie dialogowym *Edit Constraint* zmieniamy typ połączenia z kinematycznego na rozproszony *Distributing*, zakładamy, że wszystkie stopnie swobody pomiędzy punktem kontrolnym a płaszczyzną mają być odebrane, więc nie dokonujemy innych zmian, zatwierdzając dotychczasowe przyciskiem *OK*.

8. Definiowanie obciążenie pręta (moduł Load)

W celu przyłożenie siły skupionej do utworzonego punktu referencyjnego, z drzewa modelu należy wybrać pozycję *Loads*  *Loads* lub po przejściu do modułu *Load* użyć ikony *Create Load* .





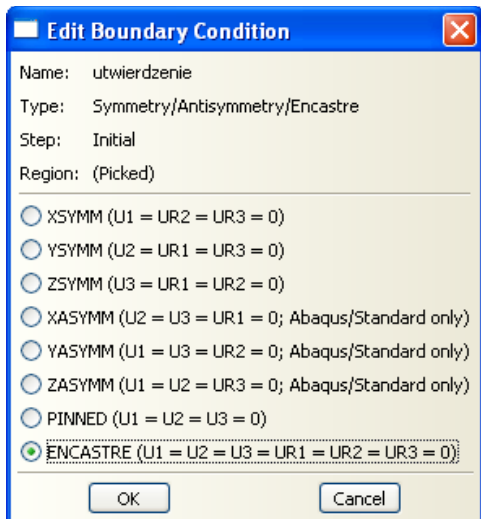
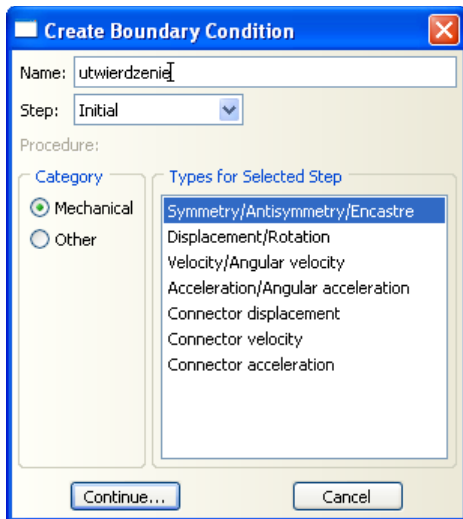
W oknie *Create Load*, wpisujemy dowolną nazwę np. siła skupiona. Z właściwości mechanicznych wybieramy typ *Concentrated force* i klikamy *Continue*. Poniżej okna dialogowego pojawia się komunikat by wskazać punkty dla przyłożenia siły (*select points for the load*). Wskazujemy punkt *RP-1* i potwierdzamy klikając *Done*.

W oknie *Edit Load* mamy możliwość zadania składowych na trzech kierunkach 1, 2, 3 które odpowiadają osiom x, y, z. Zadajemy dwie składowe siły ukośnej, na kierunku x – $CF1 = -100$ N oraz na kierunku y – $CF2 = -200$ N. Zmiany zatwierdzamy przyciskiem *OK*. W oknie roboczym powinny pojawić się dwa wektory sił, przyłożone w punkcie *RP-1*.


9. Warunki brzegowe (moduł Load)

Przeciwny koniec do płaszczyzny obciążenia będzie miał odebrane wszystkie stopnie swobody.

Z drzewa modelu wybieramy pozycję *BCs*  *BCs* lub z paska narzędziowego ikonę *Create Boundary Condition* .




W oknie dialogowym *Create Boundary Condition* podajemy nazwę np. utwierdzenie, wybieramy krok jako *Initial*, upewniamy się, że jest podświetlona opcja *Symmetry/Antisymmetry/Encaster* i klikamy na przycisk *Continue*. Pod oknem dialogowym pojawia się komunikat by wskazać regiony do nadania warunków brzegowych (*select regions for the boundary condition*). Musimy teraz obrócić belkę, by móc wskazać przeciwległą ścianę w stosunku do zadanego obciążenia. Możemy tego dokonać na kilka sposób np. z górnego

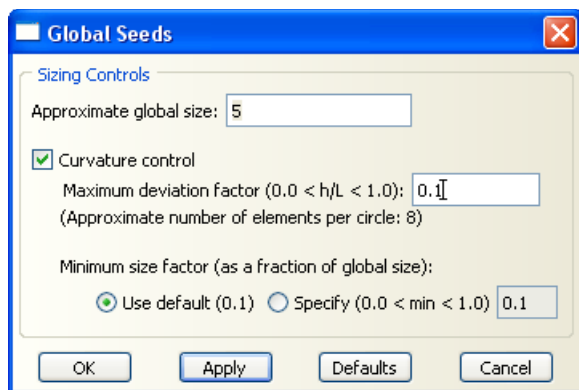
paska narzędziowego wybrać ikonę *Rotate View*  i przytrzymując lewy przycisk myszki dokonać obrotu belki. Z operacji wychodzimy klawiszem *Esc* i wskazujemy interesującą nas powierzchnię, po czym zatwierdzamy przyciskiem *Done*.

W oknie *Edit Boundary Condition* zaznaczamy opcje *Encastre*, która odbiera wszystkie stopnie swobody. Wybór zatwierdzamy przyciskiem *OK*.


10. Utworzenie siatki elementów skończonych (moduł Mesh)


Rozwijając kolejno pozycje *Assembly* w drzewie modelu, dochodzimy do polecenia *Mesh*. Ten sam efekt uzyskamy wybierając moduł *Mesh*. Nasza belka zmieniła kolor na żółty. Kolory oznaczają rodzaje elementów oraz techniki nakładania siatek. W naszym przypadku będą to elementy ośmiowęzłowe *Hex* nakładane z wykorzystaniem techniki *Sweep*, która pozwala na korzystne dopasowania siatki do krzywizn.

Pierwszym etapem jest nadanie odległości pomiędzy węzłami. W tym celu, z paska narzędziowego należy użyć polecenia *Seed Part Instance* .





W oknie dialogowym *Global Seeds* pozostawiamy wartość domyślną 5mm i klikamy OK. W oknie roboczym na rozważanym przecie pojawiły się schematycznie zaznaczone węzły. Poniżej okna dialogowego widzimy komunikat *seeding definition complete*, możemy teraz zatwierdzić

zmiany lub jeśli uznamy że ilość węzłów jest jeszcze niewystarczająca bądź jest ich zbyt, możemy powrócić do wcześniejszego okna wybierając przycisk  *go back to previous step*.



Drugim etapem jest wygenerowanie siatki elementów skończonych bazującej na wcześniej utworzonych węzłach. W tym celu z paska narzędziowego wybieramy polecenie *Mesh Part Instance* . Automatycznie pod oknem roboczym pojawia się zapytanie *OK to mesh part instance ?* Potwierdzamy *Yes*.


Wersja studencka ma ograniczenie tworzonej siatki do 1000 węzłów. Należy zatem sprawdzić czy ta wartość nie została przekroczona. W tym celu z górnego

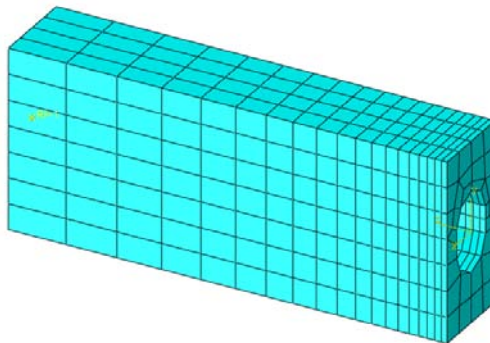
paska narzędziowego wybieramy ikonę zapytanie  *Query information* i z dostępnych pozycji wybieramy siatkę *Mesh*, zatwierdzając *Done*. W dolnym pasku komend możemy odczytać informację *Total number of nodes: 1155*. Jest

to wartość zbyt duża, należy powrócić do narzędzia *Seed Part Instance*  i w oknie *Global Seeds* podać wartość np. 5,4. Po ponownym nałożeniu siatki, ilość węzłów wynosi 940, siatka jest jednak bardziej zdegenerowana, co może być przyczyną błędnych wyników.



W celu ich poprawy można zagęścić siatkę bliżej powierzchni utwierdzenia, gdzie będą występować maksymalne naprężenia. Rozwijając polecenia przy

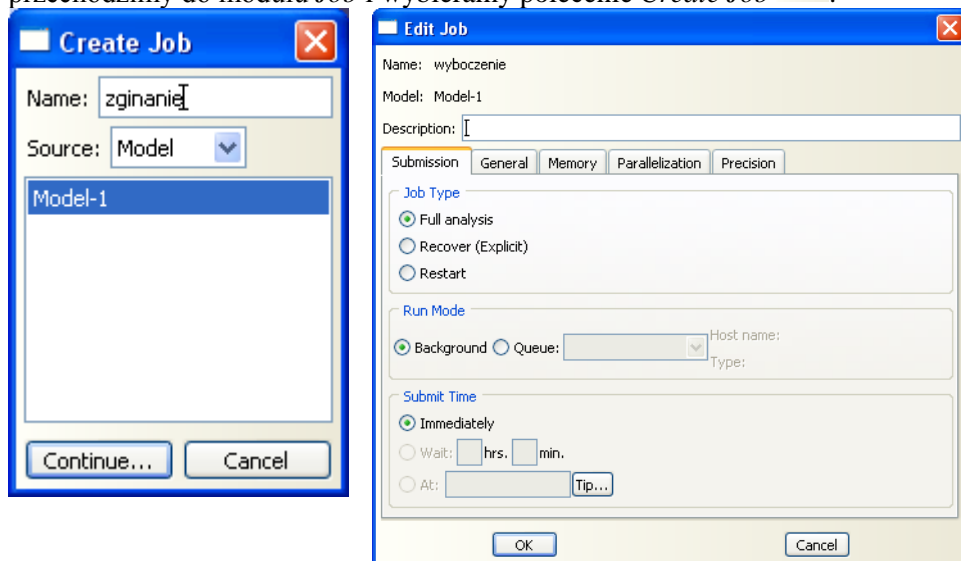
ikonie *Seed Part Instance*  wybieramy *Seed Edge: Biased* . Następnie, zgodnie z poleceniem spod okna roboczego, wskazujemy cztery krawędzie o długości 1 (klikamy bliżej powierzchni utwierdzenia, by obrać właściwy kierunek zagęszczania). Podczas wskazywania używamy klawisza *Shift*, by móc zaznaczyć na raz wszystkie krawędzie. Jako proporcje przesunięcia *Bias ratio* wpisujemy 10 i zatwierdzamy klawiszem *Enter*, pozostawiamy domyślną liczbę węzłów na krawędzi równą 19 naciskając *Enter* i w rezultacie *Done*.

Należy teraz ponownie wygenerować siatkę używając narzędzia *Mesh Part Instance* . Efekt końcowy powinien być jak na poniższym rysunku.



11. Utworzenie zadania (moduł Job)

Ostatnim etapem przed uruchomieniem symulacji jest utworzenie zadania. W tym celu z drzewa modelu wybieramy pozycję *Jobs*  lub przechodzimy do modułu *Job* i wybieramy polecenie *Create Job* .



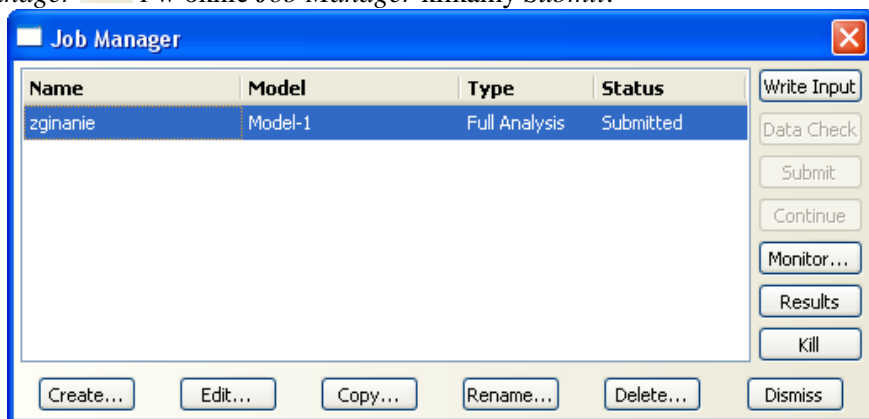
W oknie dialogowym *Create Job* podajemy dowolną nazwę np. zginanie, pamiętając, że będą ją nosiły wszystkie pliki wygenerowane przez program dla tego zadania. Przechodzimy do następnego okna klikając *Continue*. W oknie *Edit Job* warto przejść do zakładki *Memory* i np. zwiększyć ilość pamięci operacyjnej (standardowo jest to 50%) oraz w zakładce *Parallelization*

zaznaczyć opcję *use multiple processors* jeśli nasz komputer jest wyposażony np. w dwa rdzenie. Zatwierdzamy *OK*.

12. Uruchomienie symulacji (moduł Job)

W drzewie modelu rozwijamy „krzyżyk” przy pozycji *Jobs* a następnie prawym przyciskiem myszy klikamy na pozycję *zginanie* i z menu które się pojawiło wybieramy *Submit*, poddając tym samym wcześniej utworzone zadanie analizie.

Ten sam efekt uzyskamy wybierając z paska narzędziowego polecenie *Job Manager* i w oknie *Job Manager* klikamy *Submit*.



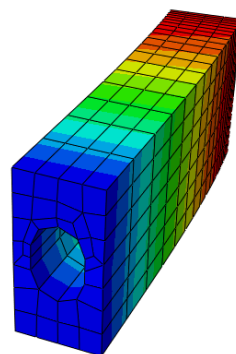
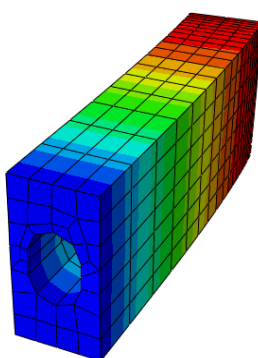
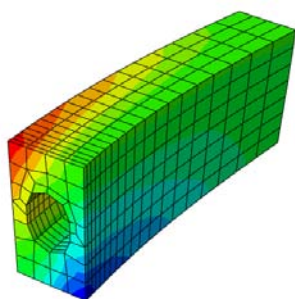
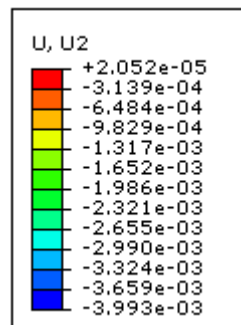
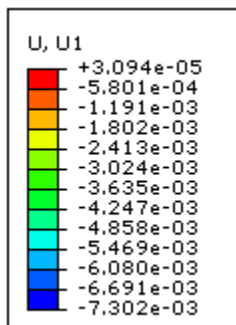
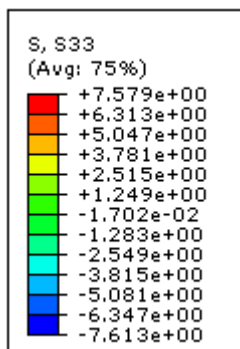
W kolumnie *Status* początkowo pojawi się komunikat *Submitted* następnie *Running* a w rezultacie *Complete* co oznacza, że zadanie zostało rozwiązane. Zamykamy okno wybierając *Dismiss*.

13. Wyniki symulacji (moduł Visualization)

W drzewie modelu przy pozycji *zginanie* również pojawiła się informacja o pomyślnie zakończonej symulacji. Klikamy prawym przyciskiem myszy na tę pozycję i z menu wybieramy wyniki *Results*. Program przechodzi do nowego środowiska związanego z podglądem wyników.

Po wybraniu narzędzia *Plot Contours on Deformed Shape* program wyświetla pola naprężeń zredukowanych *Misesa* w całej objętości belki. W celu otrzymania naprężeń normalnych na kierunku *z*, należy z górnego paska narzędziowego rozwinąć zakładkę i wybrać *S33*

Primary 5 S33. Teoretycznie wartości maksymalna i minimalna powinny być sobie równe co do wartości bezwzględnej. Różnica wynosi jednak około 0,44% i jest ona spowodowana złą jakością siatki.



Porównując wartości naprężeń $S33$ do teoretycznych, różnica wynosi około 4,3%

W celu wyświetlenia przemieszczeń na poszczególnych kierunkach należy rozwinąć zakładki i wybrać U oraz $U1$

Primary U U1

– przemieszczenie wzdłuż osi x. lub

$U2$ Primary U U2

- przemieszczenie wzdłuż osi y.