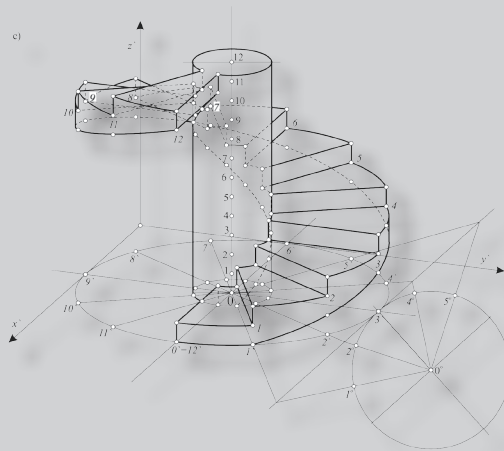
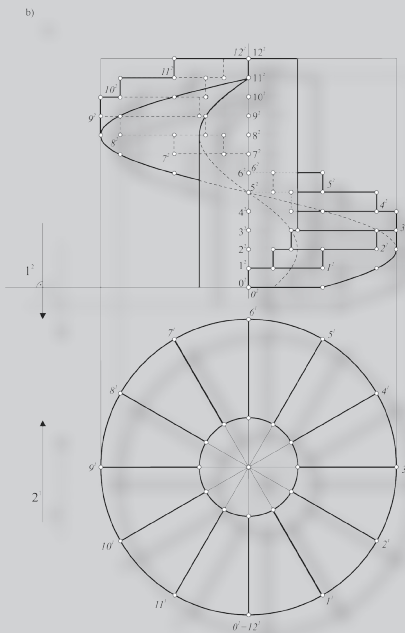




Zuzanna Karcz

# Geometria wykreślna



PODDRĘCZNIKI

# Geometria wykreślna

# Podręczniki – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska  
Wydział Budownictwa i Architektury  
ul. Nadbystrzycka 40  
20-618 Lublin

Zuzanna Karcz

# Geometria wykreślna



Politechnika Lubelska  
Lublin 2013

Recenzenci pierwszego wydania:

prof. dr hab. inż. Marian Palej

prof. dr hab. inż. Genowefa Łoskiewicz

Rysunki wykonał dr inż. Andrzej Raczkowski

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2013

ISBN: 978-83-7947-001-3

Wydawca: Politechnika Lubelska

ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej

Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej

ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin

tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl

[www.biblioteka.pollub.pl](http://www.biblioteka.pollub.pl)

Druk: TOP Agencja Reklamowa Agnieszka Łuczak

[www.agencjatorp.pl](http://www.agencjatorp.pl)

---

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL [www.bc.pollub.pl](http://www.bc.pollub.pl)

Nakład: 100 egz.

# SPIS TREŚCI

## Rozdział I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE .....	9
1. Wskazówki metodyczne .....	9
1.1. Przedmiot geometrii wykreślnej .....	9
1.2. Uwagi dydaktyczne .....	9
1.3. Oznaczenia stosowane na rysunkach .....	10
1.4. Wykreślanie niektórych konstrukcji pomocniczych oraz krzywych stożkowych .....	10
1.5. Pojęcia podstawowe, geometria euklidesowa .....	23
1.6. Przestrzeń rzutowa .....	23

## Rozdział II

WYBRANE RODZAJE RZUTOWAŃ I USTALANIE WIDOCZNOŚCI FIGURY ....	25
1. Wybrane rodzaje rzutowań .....	25
2. Ustalanie widoczności figury w rzutowaniu równoległym .....	26

## Rozdział III

RZUT CECHOWANY .....	28
1. Zasady odwzorowania, rzut cechowany punktu i figury .....	28
2. Rzut cechowany prostej .....	29
3. Wzajemne położenia prostych .....	32
4. Rzut cechowany płaszczyzny .....	32
5. Należenie i zawieranie się podprzestrzeni .....	35
6. Równoległość podprzestrzeni .....	36
7. Część wspólna podprzestrzeni (elementy wspólne) .....	39
8. Prostopadłość prostych i płaszczyzn .....	43
9. Obroty i kłady .....	48
9.1. Obrót punktu dookoła prostej (szczególne położenia) .....	48
9.2. Kład płaszczyzny rzutującej (kład prostokątny) .....	49
9.3. Kład płaszczyzny ogólnej .....	50
ZADANIA .....	56

## Rozdział IV

POWIERZCHNIE TOPOGRAFICZNE .....	60
1. Plan warstwiczny terenu .....	60
2. Profil terenu .....	61
3. Linia spadku powierzchni .....	62
4. Linia stokowa .....	63
5. Powierzchnia stokowa .....	64
6. Charakterystyczne linie i punkty powierzchni topograficznej .....	66
7. Zastosowania rzutów cechowanych w projektowaniu robót ziemnych .....	66
7.1. Plantowanie terenu .....	66
7.2. Geometryczne wyznaczanie zakresu robót ziemnych przy projektowaniu dróg, boisk ....	67

## Rozdział V

RZUTY MONGE’A .....	81
1. Zasady odwzorowania .....	81
2. Odwzorowanie prostych i płaszczyzn .....	83
2.1. Rzuty prostych .....	83
2.2. Wzajemne położenia prostych .....	85
2.3. Rzuty płaszczyzny .....	86
3. Należenie i zawieranie się podprzestrzeni (elementów) .....	89
ZADANIA .....	94
4. Część wspólna podprzestrzeni (elementy wspólne) .....	100
ZADANIA .....	107
5. Równoległość podprzestrzeni .....	111
5.1. Dwie proste równoległe .....	111
5.2. Prosta równoległa do płaszczyzny .....	112
5.3. Dwie płaszczyzny równoległe .....	112
ZADANIA .....	115
6. Prostopadłość podprzestrzeni .....	119
6.1. Dwie proste prostopadłe (przypadki szczególne) .....	119
6.2. Prosta i płaszczyzna wzajemnie prostopadłe .....	120
6.3. Dwie płaszczyzny prostopadłe .....	121
6.4. Dwie proste prostopadłe (ogólne) .....	123
ZADANIA .....	124
7. Obroty i kłady .....	130
ZADANIA .....	139
8. Zagadnienia miarowe .....	143
8.1. Odległość dwóch punktów .....	143
8.2. Odległość punktu od płaszczyzny .....	143
8.3. Odległość prostej równoległej do płaszczyzny od tej płaszczyzny .....	145
8.4. Odległość płaszczyzn równoległych .....	145
8.5. Odległość punktu od prostej .....	146
8.6. Odległość prostych równoległych .....	148
8.7. Odległość prostych skośnych .....	148
8.8. Kąt między prostymi przecinającymi się .....	150
8.9. Kąt prostych skośnych .....	151
8.10. Kąt między dwiema płaszczyznami .....	151
8.11. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny .....	153
ZADANIA .....	155
9. Transformacje .....	162
9.1. Transformacja prostej .....	165
9.2. Transformacja płaszczyzny .....	166
9.3. Rzut pośrednio związany .....	174
ZADANIA .....	177
10. Wielościany .....	180
10.1. Budowa wielościanów .....	181
ZADANIA .....	195

10.2. Przekroje wielościanów .....	200
10.3. Punkty przebicia wielościanów prostą .....	203
10.4. Rozwinięcia wielościanów .....	206
10.5. Przenikanie wielościanów .....	212
ZADANIA .....	213
11. Powierzchnie .....	214
11.1. Klasyfikacja powierzchni .....	214
11.2. Punkt zawarty w powierzchni .....	217
11.3. Budowa brył obrotowych .....	220
ZADANIA .....	231
11.4. Przekroje powierzchni .....	233
11.5. Punkty przebicia powierzchni prostą .....	246
11.6. Rozwinięcia powierzchni stożkowych i walcowych .....	250
11.7. Przenikanie powierzchni .....	254

## **Rozdział VI**

PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ POWIERZCHNI .....	256
1. Tworzenie łączników powierzchniowych .....	256
2. Łączniki płaskościenne .....	265
3. Łączenie przewodów rurowych obrotowych z przewodem płaskościennym .....	267
4. Łączniki pierścieniowe .....	271
5. Tworzenie niektórych powłok budowlanych .....	276
5.1. Powierzchnie stycznych .....	276
ZADANIA .....	286
5.2. Powłoki tworzone z powierzchni skośnych .....	287
5.3. Powłoki utworzone z powierzchni kinetycznych .....	306
5.3.1. Powierzchnie translacyjne .....	306
5.3.2. Powierzchnie rotacyjne .....	308
5.3.3. Powierzchnie spiralne .....	311
5.4. Powłoki tworzone z powierzchni obrotowych .....	314

## **Rozdział VII**

RZUT AKSONOMETRYCZNY .....	319
1. Aksonometria prostokątna .....	319
2. Aksonometria ukośna .....	329
ZADANIA .....	331

## **Rozdział VIII**

WYZNACZANIE DACHÓW .....	333
ZADANIA .....	339
SPIS OZNACZEŃ .....	341
BIBLIOGRAFIA .....	343





# Rozdział I

## WIADOMOŚCI WSTĘPNE

### 1. Wskazówki metodyczne

#### 1.1. Przedmiot geometrii wykreślnej.

Inżynier projektant przedstawia swoją koncepcję budowy np. maszyny, domu mieszkalnego, drogi, mostu, regulacji rzeki, przestrzennego zagospodarowania terenu itp., za pomocą rysunku. Zadaniem inżyniera jest również odczytanie myśli projektanta, realizowanie trójwymiarowych utworów, będących dziełami sztuki inżynierskiej. Musi więc on znać zasady rysunkowego przedstawiania elementów przestrzeni i musi umieć składać z tych elementów skomplikowane utwory przestrzenne. Umiejętności te zdobywa się przez studiowanie nauki o rzutach - geometrii wykreślnej. Obejmuje ona:

- a) metody odwzorowania (przedstawiania) utworów trójwymiarowych za pomocą rysunku sporządzanego na dwuwymiarowej płaszczyźnie arkusza rysunkowego,
- b) sposoby restytucji (odtworzenia) utworów trójwymiarowych za pomocą rysunku,
- c) sposoby badania związków i zależności wynikających z wzajemnych położenia elementów przestrzeni.

#### 1.2. Uwagi dydaktyczne

Studium geometrii wykreślnej rozbudza i rozwija zmysł wyobraźni. Procesy fizjologiczne zachodzące w mózgu w czasie pobudzania zmysłu wyobraźniania sobie otaczającej nas przestrzeni powodują szybkie zmęczenie umysłu. Wynika stąd wniosek, że materiał powinien być przyswajany małymi dawkami przez dłuższy okres czasu. Uczenie się przedmiotu na podstawie podręcznika wymaga przestrzegania następujących zasad:

- a) zdanie następne należy przeczytać po uprzednim zrozumieniu zdania poprzedniego,
- b) rysunki ilustrujące treść należy wykonać za pomocą przyborów, w miarę możliwości samodzielnie, na podstawie książkowego opisu słownego,
- c) po przerobieniu partii materiału należy go utrwalić przez rozwiązanie zadań kontrolnych,
- d) analizując zadanie należy początkowo w wyobraźni starać się go rozwiązać, ustalić kolejność czynności i dopiero przystąpić do wykreślania rysunku. Zwykle, rozwiązanie zadania składa się z kilku podstawowych konstrukcji.

W rozwiązywaniu zadań pomocne jest narysowanie odrębnie rysunku poglądowego, w którym przedstawiony jest wynik zadania, naniesienie nań elementów tematu i przeanalizowanie jakich konstrukcji należy użyć przy rozwiązywaniu zadania. Dużą pomocą w zrozumieniu materiału jest wykład. Korzystne jest śledzenie konstrukcji rysunku na tablicy z równoczesną pamięciową restytucją wprowadzanych elementów przestrzeni.

W skrypcie omówiono: rzut cechowany, rzuty Monge'a, i rzut aksonometryczny. Po każdym rozdziale umieszczone są zadania do rozwiązania przez uczącego się. Ponadto w skrypcie znajdują się przykłady niektórych zastosowań technicznych jak połączenia rurowe, roboty ziemne i geometria dachów, powłoki budowlane i sklepienia.

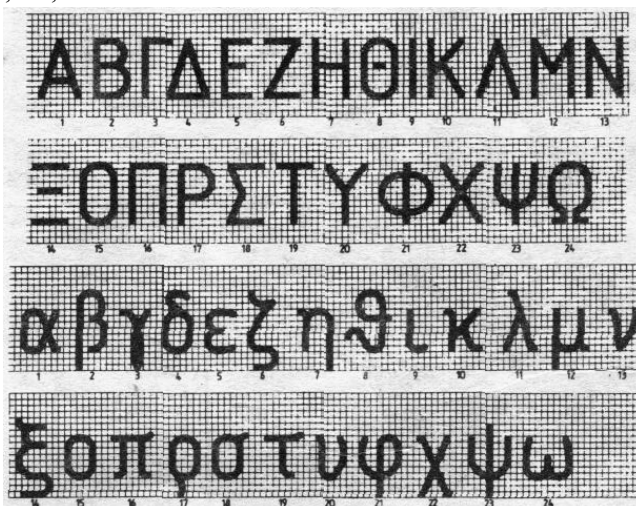
Jeżeli uczący się nie potrzebuje tak dużego zakresu materiału (tytuł rodzajów rzutowań) może rozpocząć naukę po zapoznaniu się z uwagami dydaktycznymi od interesującego go rozdziału.

### 1.3. Oznaczenia stosowane na rysunkach.

Rysunek powinien być wykonany starannie ołówkiem lub tuszem z zastosowaniem grubości linii. Najwygodniej, temat rysować linią średniej grubości, konstrukcję i linie pomocnicze cienko, a wynik linią grubą. Stosowanie takich linii zwiększa przejrzystość rysunku. Punkty rysujemy kółeczkami w miarę możliwości pustymi w środku. Do opisu rysunków należy stosować pismo techniczne i tak: punkty oznaczamy dużymi literami alfabetu łacińskiego np.: A, B, C..., względnie cyframi rzymskimi np.: I, II, III..., lub cyframi arabskimi np.: 1, 2, 3..., proste małymi literami alfabetu łacińskiego: a, b, c... z wyjątkiem prostych kierunkowych (kierunków rzutowania), które oznaczamy cyframi arabskimi: 1, 2, 3; płaszczyzny oznaczamy małymi literami alfabetu greckiego:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ..., figury geometryczne dużymi literami alfabetu greckiego: A, B,  $\Gamma$ , ... . Oznaczenia rzutów zapisujemy indeksem pisanym małą cyfrą arabską oznaczającą numer rzutu umieszczaną na górze np.:  $A^1$ ,  $B^2$ ,  $a^3$ , lub przecinkiem (w rzutach cechowanych), np.:  $a'$ ,  $M'$ ,  $t'$ .

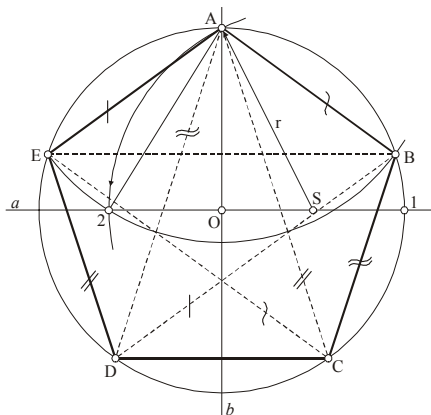
Alfabet grecki

Nr litery	Nazwa litery	Nr litery	Nazwa litery
1	alfa	13	ni
2	beta	14	ksi
3	gamma	15	omikron
4	delta	16	pi
5	epsilon	17	ro
6	dzeta	18	sigma
7	eta	19	tau
8	teta	20	ypsilon
9	jota	21	fi
10	kappa	22	chi
11	lambda	23	psi
12	mi	24	omega



### 1.4. Wykreślanie niektórych konstrukcji pomocniczych oraz krzywych stożkowych.

**Konstrukcja I** - pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o zadanym promieniu.

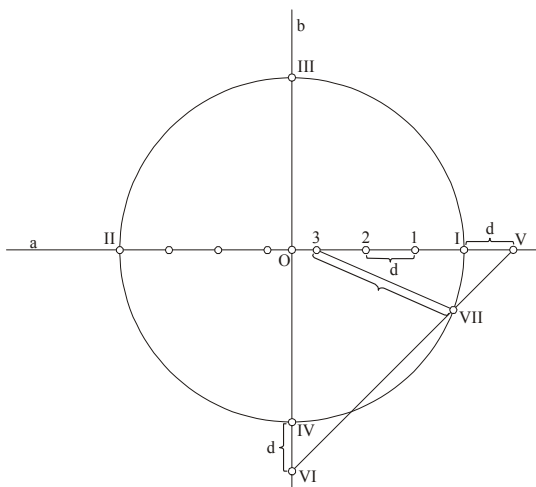


Rys. 1.1

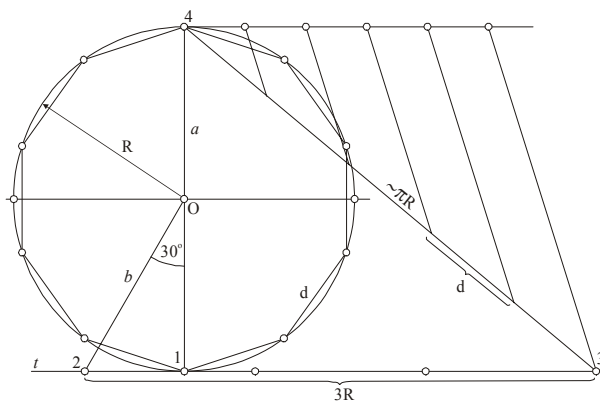
Przez środek okręgu  $O$  prowadzimy dwie prostopadłe proste  $a$  i  $b$ , przecinające okrąg w punktach  $A$  i  $I$ . Z punktu  $S$  będącego środkiem odcinka  $\langle I O \rangle$  zakreślamy łuk o promieniu  $r = |SA|$  i otrzymujemy na prostej  $a$  punkt  $2$ . Odcinek  $\langle 2A \rangle$  jest bokiem pięciokąta foremnego. Przekątne pięciokąta foremnego są równoległe do boków (rys. 1.1).

**Konstrukcja II** - dowolnego  $n$ -kąta wpisanego w okrąg o liczbie wierzchołków większej niż cztery.

*Sposób I.* Przez środek okręgu  $O$  kreślimy proste prostopadłe  $a$  i  $b$ , które przecinają okrąg w punktach  $I, II, III$  i  $IV$ . Odcinek  $\langle I II \rangle$  dzielimy na tyle części o długości równej  $d$ , jaki wielokąt chcemy wykreślić (np. na 7). Na prostych  $a$  i  $b$  należy dodać odcinki  $\langle I V \rangle = \langle IV VI \rangle = d$ . Wyznaczamy punkt  $VII$  w którym prosta  $V VI$  przecina okrąg i rysujemy odcinek  $\langle 3 VII \rangle$  który jest bokiem  $n$ -kąta foremnego (tu siedmiokąta) (rys. 1.2). Uwaga: bez względu na to jaki  $n$ -kąt rysujemy zawsze punkt  $VII$  łączymy z 3.



Rys. 1.2



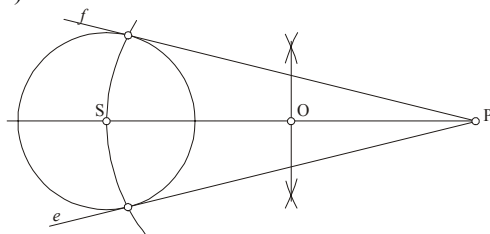
Rys. 1.3

*Sposób II.* Wykorzystujemy tu konstrukcję A. Kochańskiego, która służy do wyznaczenia długości okręgu w sposób graficzny. Ze środka  $O$  okręgu kreślimy prostą  $b$  nachyloną do średnicy  $a = 14$  pod kątem  $30^\circ$  do przecięcia ze styczną  $t$  do okręgu, wykreśloną z punktu  $1$ .  $b \cap t = 2$ . Na prostej  $t$  odmierzymy od punktu  $2$  trzy odcinki równe  $R$ , tak aby do odcinka  $\langle 2 3 \rangle$  należał punkt  $1$ . Odcinek  $\langle 4 3 \rangle$  jest równy w przybliżeniu  $\pi R$  czyli połowie długości ob-

wodu okręgu. W celu wyznaczenia n-kąta dzielimy odcinek  $\langle 3\ 4 \rangle$  na  $n$  równych części (tu 5) stosując twierdzenie Talesa. Każdy otrzymany odcinek jest cięciwą okręgu - w przybliżeniu bokiem n-kąta (tu 10-kąta) (rys. 1.3).

**Konstrukcja III** - stycznych do okręgu z punktu zewnętrznego.

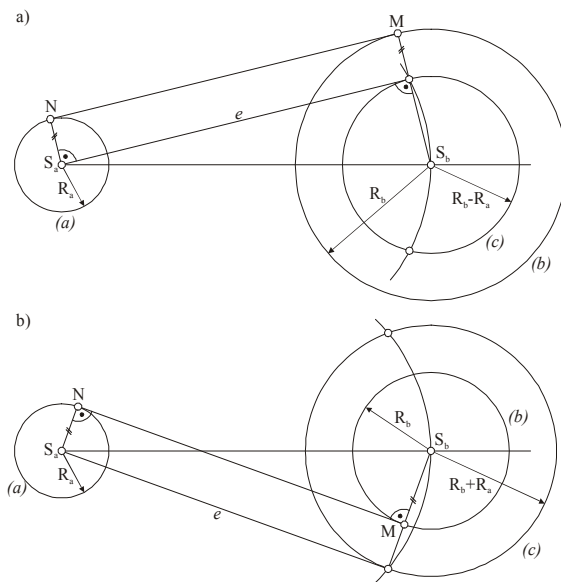
Kreślmy odcinek  $\langle SP \rangle$  ( $S$  - środek okręgu,  $P$  - punkt zewnętrzny) i wyznaczmy jego środek  $O$ . Z punktu  $O$  zakreślmy okrąg o promieniu równym  $|OS|$ . Punkty przecięcia się okręgu o środku  $O$  z okręgiem o środku  $S$  są punktami styczności stycznych  $e$  i  $f$  wykreślonych z punktu  $P$  (rys. 1.4).



Rys. 1.4

**Konstrukcja IV** - stycznych do dwóch okręgów o różnych promieniach.

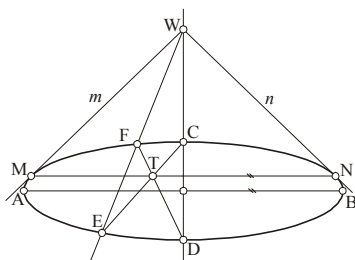
Aby wyznaczyć styczną zewnętrzną do dwóch okręgów  $(a)$  i  $(b)$  należy narysować okrąg  $(c)$  o środku  $S_b$  i promieniu  $R = R_b - R_a$ . Z punktu  $S_a$  narysować styczną do okręgu  $(c)$  oraz wyznaczyć punkt  $M$  w którym prosta prostopadła do  $e$  i zawierająca punkt  $S_b$  przecina okrąg  $(b)$ . Przez punkt  $S_a$  poprowadzić prostą równoległą do promienia  $\langle S_a M \rangle$ , która przecina okrąg  $(a)$  w punkcie  $N$ . Prosta  $MN$  jest styczną zewnętrzną, a punkty  $M$  i  $N$  punktami styczności (rys. 1.5a). Aby wyznaczyć styczną wewnętrzną rysujemy okrąg  $(c)$  o środku  $S_b$  i promieniu  $R = R_a + R_b$  i wyznaczamy z punktu  $S_a$  styczną  $e$  do okręgu  $(c)$ . Wyznaczamy punkt  $M$  w którym prosta prostopadła do  $e$  i przechodząca przez  $S_b$  przecina okrąg  $(b)$ . Przez punkt  $S_a$  prowadzimy równoległą do promienia  $\langle S_b M \rangle$ , która przecina okrąg  $(a)$  w punkcie  $N$ . Prosta  $MN$  jest styczna do dwóch okręgów i przecina je odpowiednio w punktach  $M$  i  $N$  (rys. 1.5b).



Rys. 1.5

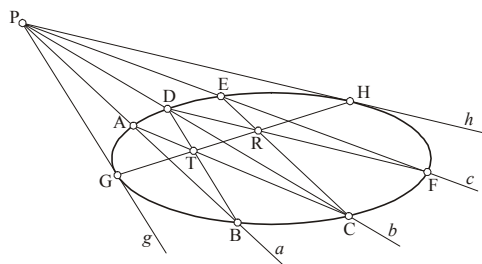
**Konstrukcja V** - stycznej do elipsy z punktu zewnętrznego.

Przypadek 1. Punkt zewnętrzny  $W$  zawarty jest w osi elipsy. Kreślimy sieczną elipsy zawierającą punkt  $W$ , która przecina elipsę w punktach  $E$  i  $F$ . Wyznaczamy przekątne czworokąta  $\langle CDEF \rangle$  (punkty  $CD$  są punktami przecięcia elipsy z osią). Przez punkt  $T$  przecięcia się przekątnych kreślimy prostą równoległą do osi  $AB$ . Przecina ona elipsę w punktach  $M$  i  $N$  które są punktami styczności stycznych  $m$  i  $n$  do elipsy, poprowadzonych z punktu  $W$  (rys. 1.6).



Rys. 1.6

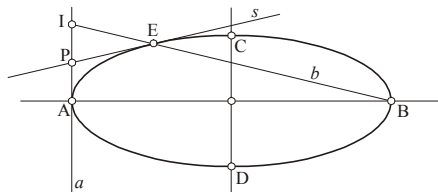
Przypadek 2. Wykreślanie stycznych do elipsy z dowolnego punktu  $P$  zewnętrznego, polega na dwukrotnym powtórzeniu poprzedniej konstrukcji. Z punktu  $P$  kreślimy trzy sieczne elipsy  $a, b, c$ . Otrzymujemy dwa czworokąty  $\langle ABCD \rangle$  i  $\langle CDEF \rangle$  których przekątne przecinają się w punktach  $T$  i  $R$ . Prosta  $TR$  przecina elipsę w punktach styczności  $G$  i  $H$ , stycznych  $g$  i  $h$ , poprowadzonych z punktu  $P$  (rys. 1.7).



Rys. 1.7

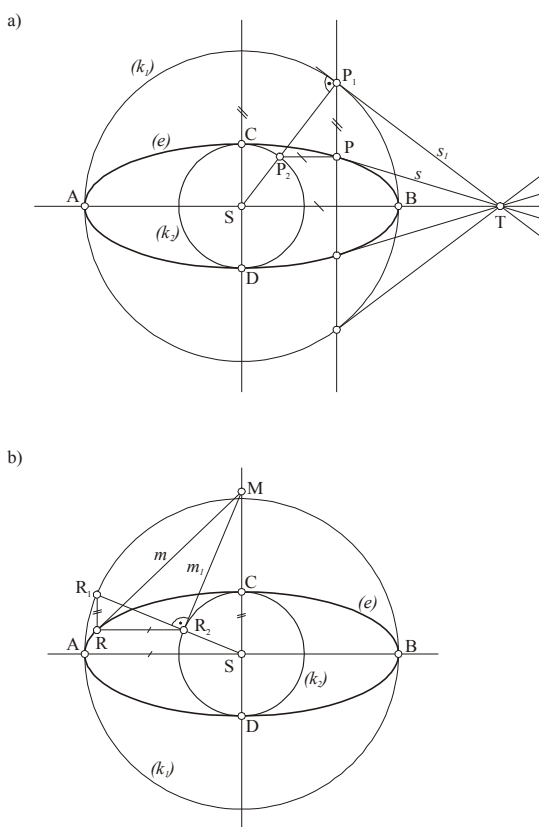
**Konstrukcja VI** - stycznej do elipsy z punktu na elipsie.

*Sposób I* (rys. 1.8). Dana jest elipsa wraz z jej odcinkami średnicowymi sprzężonymi lub z odcinkami osiowymi oraz punkt  $E$  na elipsie. Przez wierzchołek elipsy  $A$  (lub  $C$ ) kreślimy prostą  $a$  styczną do elipsy równoległą do osi  $CD$  ( $AB$ ). Przez wierzchołek przeciwległy  $B$  ( $D$ ) i przez punkt  $E$  kreślimy prostą  $b$  do przecięcia z  $a$  w punkcie  $I$ . Wyznaczamy środek  $P$  odcinka  $\langle AI \rangle$  ( $\langle CI \rangle$ ). Prosta  $PE$  jest styczną  $s$  do elipsy w punkcie  $E$ .



Rys.1.8

*Sposób II* (rys. 1.9). Oś główna elipsy jest osią powinowactwa osiowego przekształcającego elipsę  $e$  w okrąg  $(k_1)$  o odcinku średnicowym  $\langle AB \rangle$  - kierunkiem powinowactwa jest oś  $CD$ . Aby wyznaczyć styczną do elipsy w dowolnym punkcie  $P$  kreślimy prostą równoległą do prostej  $CD$ , do przecięcia z okręgiem  $(k_1)$  w punkcie  $P$ . Wyznaczamy w tym punkcie styczną  $s_1$  do okręgu  $(k_1)$ , prostopadłą do promienia  $\langle SP_1 \rangle$ . Przecina ona oś  $AB$  w punkcie  $T$ . Prosta  $s = TP$  jest styczną do elipsy. Zadanie można również rozwiązać w odwrotnej kolejności. Z punktu  $T$  należącego do osi głównej  $AB$  kreślimy styczną  $s_1$  do okręgu  $(k_1)$  w punkcie  $P_1$  i za pomocą prostej równoległej do  $CD$  wyznaczamy na elipsie punkt  $P$ , który jest punktem styczności stycznej  $s$  do elipsy (rys. 1.9a). Jeżeli chcemy poprowadzić styczną  $m$  do elipsy z punktu  $M$  należącego do osi pobocznej (rys. 1.9b), poprowadzimy najpierw prostą  $m_1$  w punkcie  $R_1$  do okręgu mniejszego  $(k_2)$  i z punktu  $R_2$  prostą równoległą do osi  $AB$ . Przecina ona elipsę w punkcie  $R$ , który wraz z  $M$  wyznacza styczną  $m$ . Istnieje sposób wyznaczania punktów elipsy za pomocą konstrukcji, którą łatwo można odczytać z rysunku 1.9a i b obierając punkty na okręgach  $(k_1)$  i  $(k_2)$ .

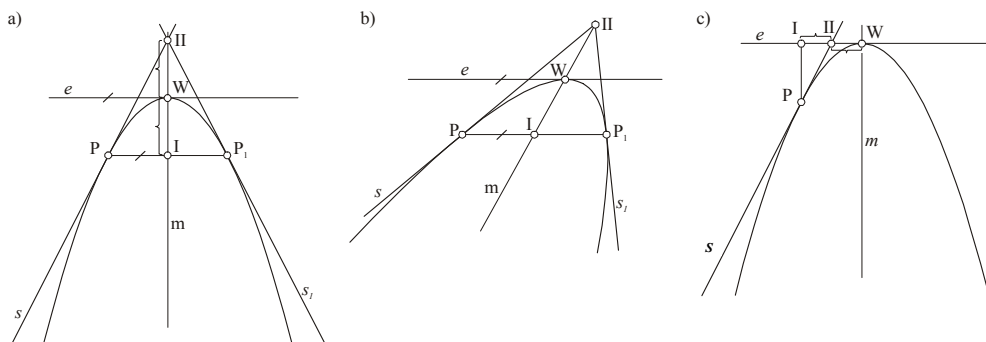


Rys. 1.9

**Konstrukcja VII** - stycznej do paraboli z punktu należącego do paraboli.

Dane: 1)  $m$  - oś paraboli,  $W$  - wierzchołek,  $e$  - styczna do paraboli w punkcie  $W$ , oraz punkt  $P$  należący do paraboli (rys. 1.10a). 2)  $m$  - średnica paraboli,  $e$  - styczna w punkcie  $W$  przecięcia średnicy z parabolą, oraz punkt  $P$  należący do paraboli (rys. 1.10b). W obu przypadkach przez punkt  $P$  kreślimy prostą równoległą do stycznej  $e$  przecinającą  $m$  w punkcie  $I$ . Odkładamy na prostej  $m$  odcinek  $\langle WI \rangle \equiv \langle W I \rangle$ . Punkty  $II$  i  $P$  wyznaczają styczną  $s$ . Styczna  $s_1$  jest symetryczna do  $s$ . Jeśli punkt  $II$  nie mieści się w granicy rysunku kreślimy przez  $P$  pro-

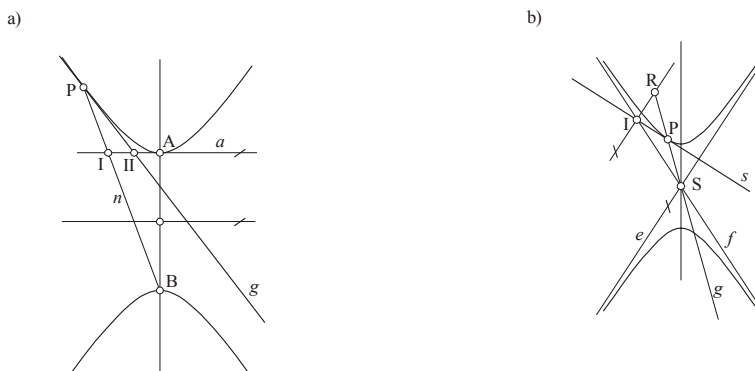
stą równoległą do  $m$ , która przecina  $e$  w punkcie I. Punkt II jest środkiem odcinka  $(IW)$ . P i II wyznaczają styczną  $s$  (rys. 1.10c).



Rys. 1.10

**Konstrukcja VIII** - stycznej do hiperboli z punktu należącego do hiperboli.

Na rysunku 1.11a dane są osie hiperboli, wierzchołki A i B i punkt P. Wyznaczyć styczną do hiperboli w punkcie P. Przez wierzchołek A prowadzimy styczną do hiperboli równoległą do osi pobocznej, a przez wierzchołek B i przez punkt P kreślimy prostą  $n$ .  $n \cap a = I$ . Wyznaczamy środek odcinka  $(IA)$ : II. Styczna  $s$  jest wyznaczona punktem P i II. Rysunek 1.11 b przedstawia wyznaczenie stycznej do hiperboli jeżeli dane są asymptoty hiperboli:  $e$  i  $f$ . Przez P i środek hiperboli (punkt przecięcia asymptot) S prowadzimy prostą  $g$ , na której wyznaczamy punkt R symetryczny z punktem S względem P. Przez R kreślimy prostą  $h \parallel e$ .  $h \cap f = I$ . Punkty I i P wyznaczają styczną  $s$ .



Rys. 1.11

Istnieje metoda wyznaczania stycznych do krzywych stożkowych jeżeli dane są ogniska tych krzywych, lub dzięki przekształceniom kolineacyjnym.

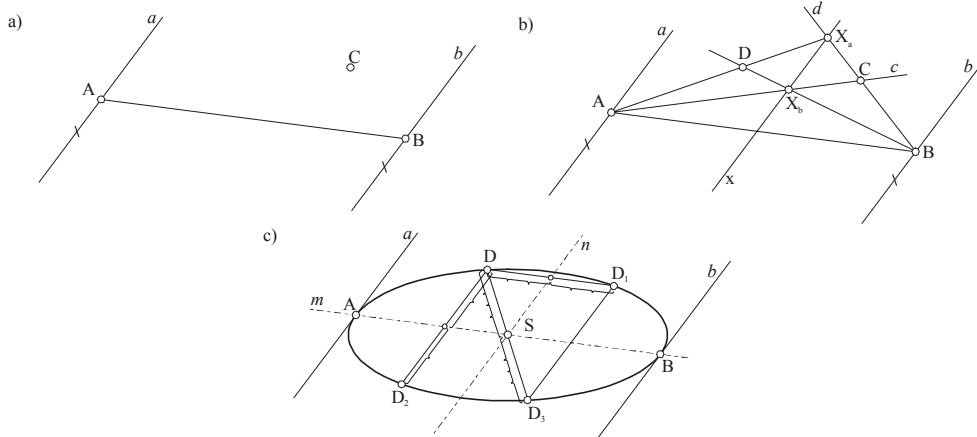
**Konstrukcja IX** - krzywej stożkowej przy założeniu, że dane są styczne  $a$  i  $b$  do krzywej w punktach styczności A i B oraz C - dowolny punkt stożkowej.

W przypadku jak na rysunku 1.12 i 1.13 obie proste styczne do stożkowej i punkty styczności A i B są podprzestrzeniami (elementami) właściwymi. Jeżeli punkt C znajduje się między prostymi  $a$  i  $b$  krzywa jest elipsą a w szczególnym przypadku okręgiem (rys. 1.12). Natomiast, gdy punkt C znajduje się na zewnątrz jednej z prostych stycznych krzywa jest hiperbolą (rys. 1.13). W przypadku jak na rysunku 1.14 styczna  $a$ , punkt A i punkt C są podprzestrzeniami właściwymi, zaś styczna  $b$  i punkt B są podprzestrzeniami niewłaściwymi.



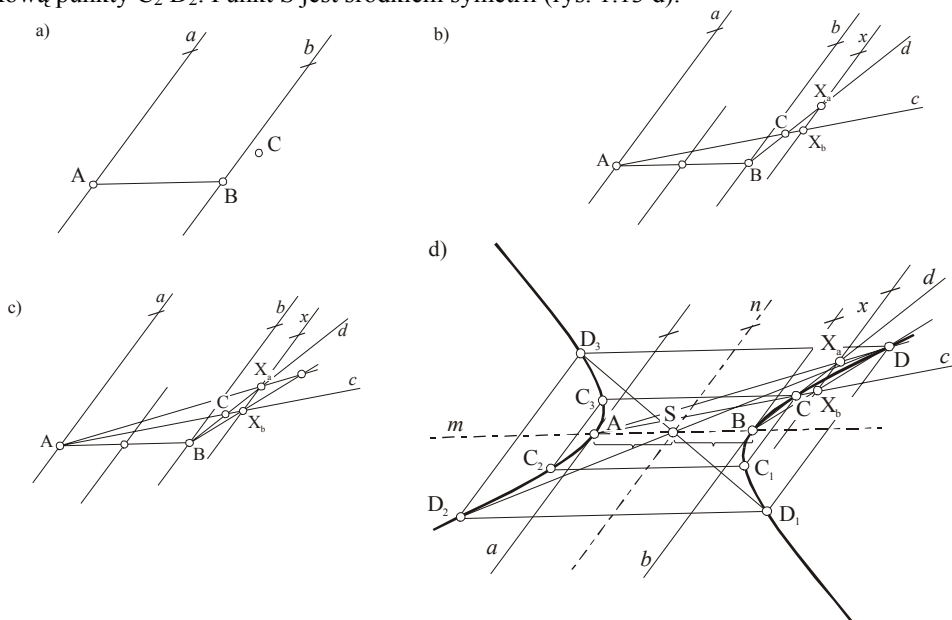
Punkt B dany jest za pomocą prostej  $m$ .  $B \in m$ . Krzywa jest parabolą.

**Elipsa.** Kreślimy proste  $c=AC$  i  $d=BC$  i przecinamy je prostą  $x \parallel a$  i  $b$  w punktach  $X_a=d \cap x$ ,  $X_b=c \cap x$ . Proste  $AX_a$  i  $BX_b$  przecinają się w punkcie elipsy D (rys. 1.12b). Proste  $m=AB$  i  $n(S \in n, n \parallel a \text{ i } b)$  są średnicami sprzężonymi elipsy, co oznacza, że jedna jest osią, a druga kierunkiem symetrii równoległej i na odwrót. Dzięki symetrii równoległej wyznaczamy punkty  $D_1$  i  $D_2$ , a dzięki symetrii środkowej o środku S - punkt  $D_3$  (rys. 1.12c).



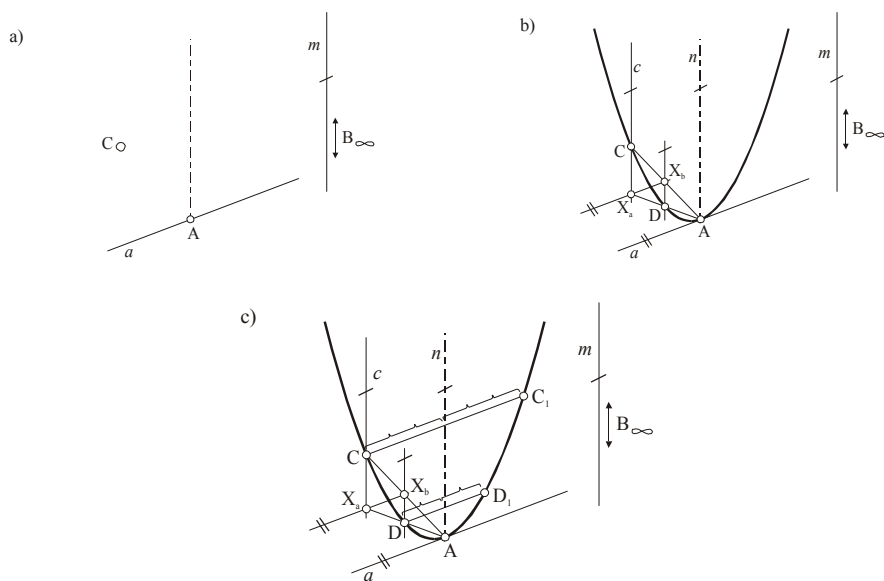
Rys. 1.12

**Hiperbola.** Podobnie jak przy kreśleniu elipsy rysujemy proste  $c=AC$  i  $d=BC$  i przecinamy je prostą  $x \parallel a$  i  $b$  (rys. 1.13b).  $X_a=d \cap x$ ,  $X_b=c \cap x$ . Proste  $AX_a$  i  $BX_b$  przecinają się w punkcie D hiperboli (rys. 1.13c). Prosta  $m=AB$  jest średnicą hiperboli. Przez środek S odcinka  $\langle AB \rangle$  przechodzi druga średnica  $n$  hiperboli ( $m$  i  $n$  są średnicami sprzężonymi). Dzięki symetrii równoległej otrzymujemy punkty  $C_1$   $D_1$  i  $C_3$   $D_3$ , a przez symetrię środkową punkty  $C_2$   $D_2$ . Punkt S jest środkiem symetrii (rys. 1.13 d).



Rys. 1.13

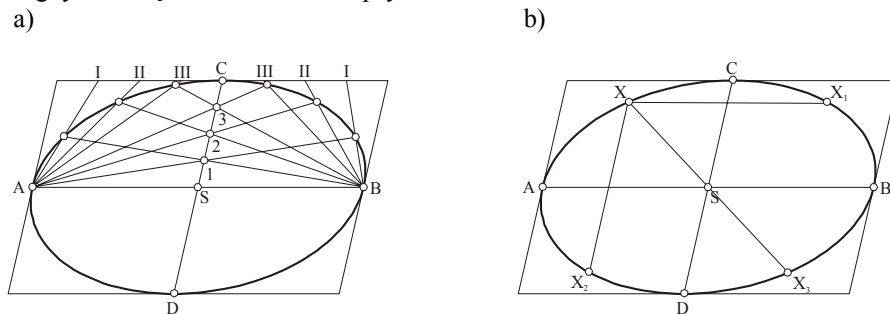
**Parabola.** Dane są nierównoległe proste  $a$  i  $m$ , punkt  $A \in a$  i  $C \notin a$ . Wyznaczyć parabolę przy założeniu, że prosta  $m$  jest średnicą paraboli, punkt  $A$  punktem styczności stycznej  $a$  do paraboli, zaś punkt  $C$  dowolnym punktem paraboli (rys. 1.14a). Przy założeniu, że punkt niewłaściwy  $B_\infty \in m$  jest punktem styczności stycznej  $b_\infty$  (niewłaściwej) do paraboli, konstrukcja jest taka sama jak elipsy i hiperboli (rys. 1.12 i 1.13). Proste  $c=B_\infty C$  i  $d=CA$  przecinamy prostą  $x \parallel a$ . Otrzymujemy punkty  $X_a = c \cap x$  i  $X_b = d \cap x$ . Proste  $AX_a$  i  $B_\infty X_b$  przecinają się w punkcie  $D$  paraboli (rys. 1.14b). Punkt symetryczny  $D_1$  otrzymujemy za pomocą osi symetrii równej średnicy paraboli  $n \parallel m$  i kierunku symetrii równoległego do stycznej  $a$  (rys. 1.14c).



Rys. 1.14

**Konstrukcja X - metoda równoległoboku.**

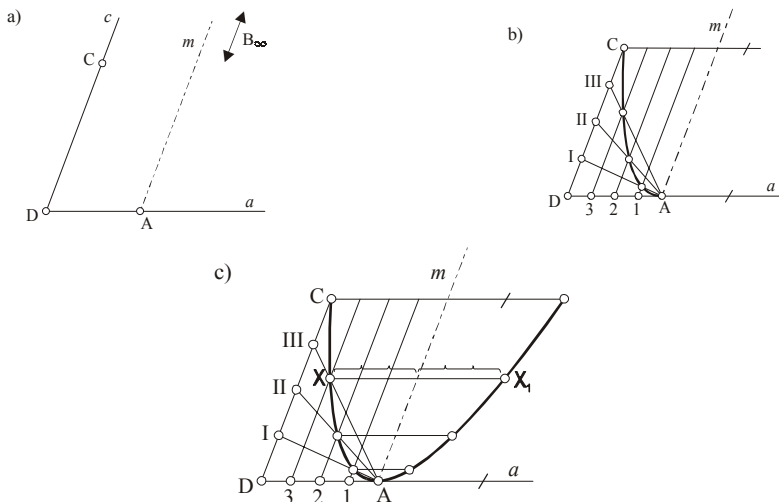
**Elipsa.** Dane są odcinki średnicowe sprzężone elipsy  $\langle AB \rangle$  i  $\langle CD \rangle$  (Rys. 1.15). Budujemy równoległobok o bokach równoległych do średnic zawierających punkty  $A, B, C, D$ . Odcinek  $\langle SC \rangle$  oraz obie połowy odpowiedniego boku równoległoboku dzielimy na jednakową ilość równych części po czym prowadzimy proste  $AI, AII, \dots$ , a z punktu  $B$  prowadzimy pęk prostych  $B1, B2$ . Punkty przecięcia prostych  $AI$  z  $B1$ ;  $AII$  z  $B2$ , itd. są punktami wykreślonej elipsy. Omówioną konstrukcję można stosować także gdy średnice sprzężone są prostopadłe tzn. gdy dane są odcinki osiowe elipsy.



Rys. 1.15

Podanym sposobem można wykreślić  $\frac{1}{4}$  część elipsy, pozostałe punkty można wyznaczyć za pomocą symetrii równoległej i symetrii środkowej (rys. 1.15b).

**Parabola.** Dane są:  $m$  - średnica paraboli, styczna  $a$  i punkt styczności  $A = a \cap m$ , oraz dowolny punkt  $C$  (rys. 1.16). Przez punkt  $C$  rysujemy prostą  $c \parallel m$ .  $c \cap a = D$ . Dzielimy odcinek  $\langle CD \rangle$  na pewną ilość równych części, oraz  $\langle AD \rangle$  na taką samą ilość części. Łączymy punkty I, II, III z wierzchołkiem  $A$ , a punkty 1, 2, 3 z wierzchołkiem  $B_\infty$ , który jest punktem niewłaściwym średnicy  $m$ . W punktach przecięcia prostych  $AI \cap B_\infty I$  są punkty paraboli np.  $X$  (rys. 1.16c). Dzięki symetrii równoległej o osi  $m$  i kierunku  $a$  można wyznaczyć tylko jeden dodatkowy punkt paraboli (rys. 1.16c). Parabola w odróżnieniu od elipsy i hiperboli nie jest krzywą środkowo symetryczną. Taką samą konstrukcję stosujemy, gdy  $m \perp a$ .

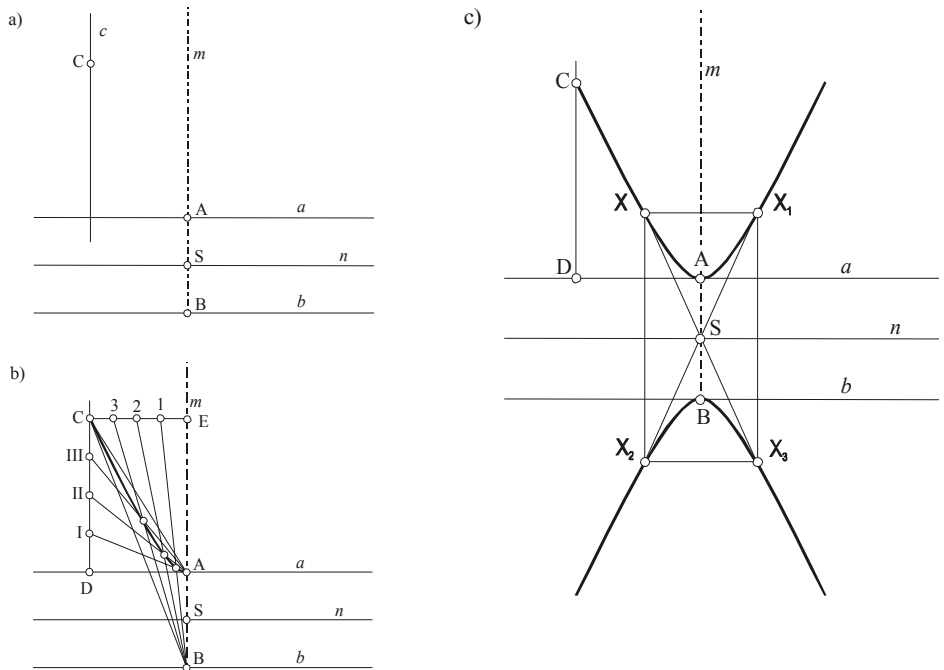


Rys.1.16

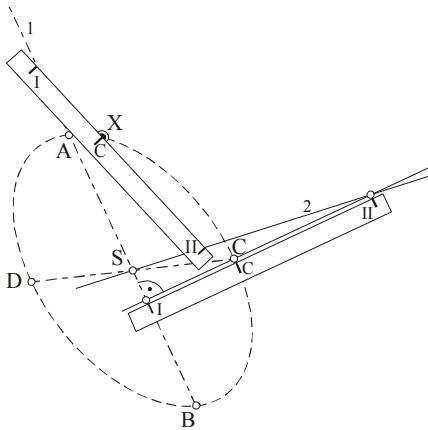
**Hiperbola.** Rysunek 1.17 przedstawia przypadek gdy dane są osie hiperboli  $m$  i  $n$  czyli proste prostopadłe, oraz dowolny punkt  $C$ . Konstrukcja jest taka sama gdy dane są średnice sprzężone hiperboli. W wierzchołkach  $A$  i  $B$  hiperboli kreślimy styczne  $a$  i  $b$  równoległe do osi (średnicy)  $n$ , oraz z punktu  $C$  prostą  $c$  równoległą do osi  $m$ .  $a \cap c = D$ . Dzielimy odcinek  $\langle DC \rangle$  na pewną ilość części i na taką samą ilość równych części dzielimy  $\langle CE \rangle \parallel a$ . Z wierzchołka  $A$  prowadzimy proste  $AI, AII, AIII$ , a z wierzchołka  $B$  proste  $B1, B2, B3$ . Punkty przecięcia się par prostych ( $AI$  i  $B1$ ;...) są punktami hiperboli (rys. 1.17b). Punkty  $X_1$  i  $X_2$  otrzymujemy dzięki symetriom równoległym o osi:  $m$  i kierunku  $n$ , oraz o osi  $n$  i kierunku  $m$ . Punkt  $X_3$  otrzymujemy dzięki symetrii środkowej o środku  $S = m \cap n$  (rys. 1.17c).

**Konstrukcja XI - metoda papierkowa.**

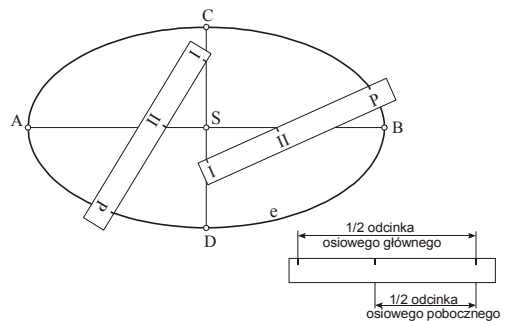
Wygodną metodą kreślenia elipsy jest metoda papierkowa. Dane są odcinki średnicowe sprzężone elipsy  $\langle AB \rangle$  i  $\langle CD \rangle$  (Rys.1.18). Przez jeden z końców odcinków średnicowych prowadzimy prostą  $n$  prostopadłą do tego odcinka w którym nie leży wybrany koniec; na rysunku 1.18 prostą  $n$  poprowadzono przez punkt  $C$  prostopadle do  $AB$ . W tym przypadku  $n$  przecina prostą  $l = AB$  w punkcie  $I$ . W prostej  $n$  odkładamy odcinek  $\langle CII \rangle = \langle SA \rangle$  w ten sposób, że punkt  $C$  leży między punktami  $I$  i  $II$ . Położenie punktów  $I, C, II$  przenosimy na prostolinijne obrzeże skrawka papieru i przez punkt  $II$  prowadzimy średnicę  $2$ . W każdym położeniu ustalonego w ten sposób przyrzędu punkt  $C$  skrawka jest punktem  $X$  elipsy, gdy punkty  $I$  i  $II$  leżą odpowiednio w średnicach  $1$  i  $2$ . Metoda papierkowa kreślenia elipsy jest prostsza w przypadku, gdy dane są odcinki osiowe elipsy (Rys. 1.19)



Rys. 1.17



Rys. 1.18



Rys. 1.19

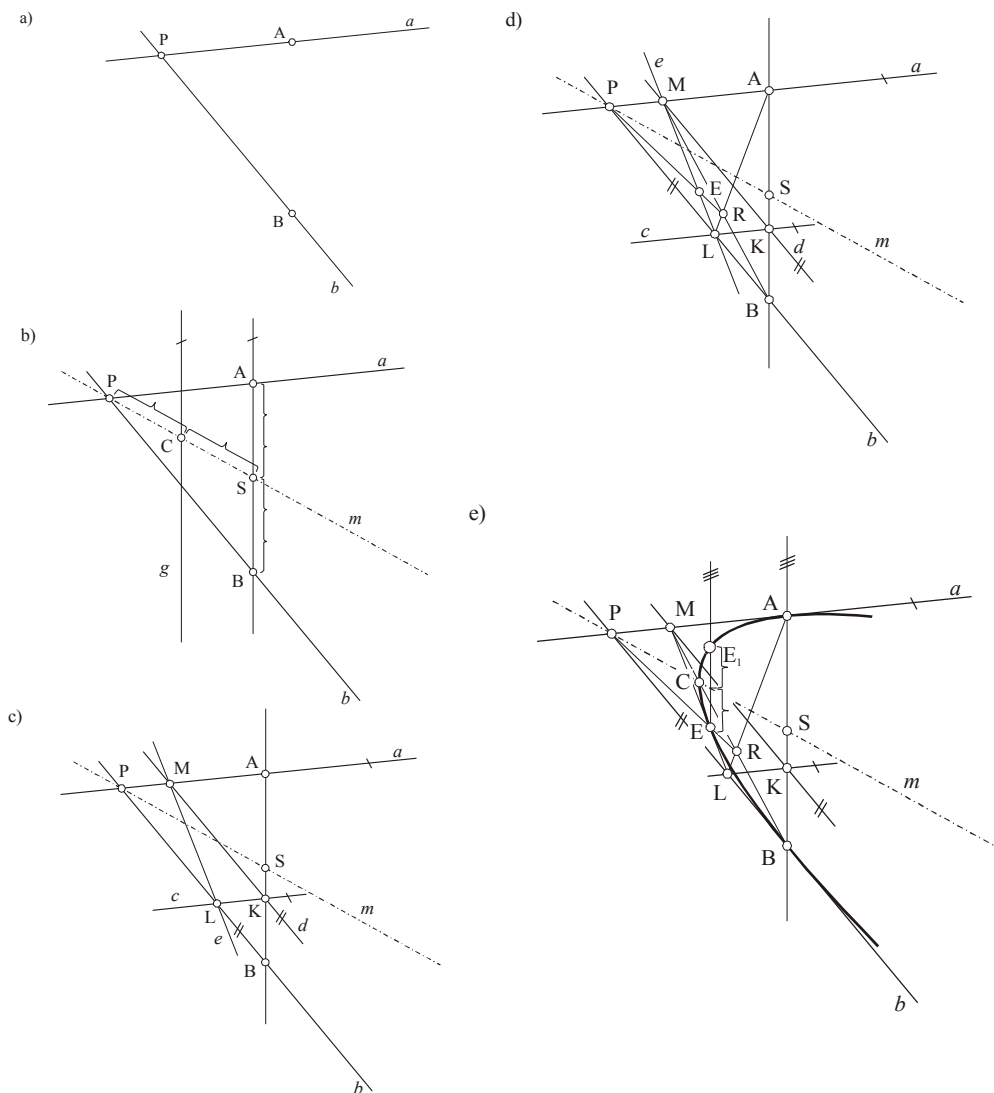
**Konstrukcja XII - metoda Ritza.**

Dane są odcinki średnicowe sprzężone elipsy; wyznaczyć odcinki osiowe (Rys.1.20). Obieramy jeden z danych odcinków średnicowych np.  $\langle AB \rangle$  i z punktu  $S$  kreślimy prostą prostopadłą do  $AB$  i odkładamy w niej odcinek  $\langle SE \rangle \equiv \langle SA \rangle$ . Kreślimy prostą  $CE$  i znajdujemy środek  $O$  odcinka  $\langle CE \rangle$ . Następnie kreślimy okrąg o środku  $O$  i promieniu  $\langle OS \rangle$ . Okrąg ten przecina prostą  $EC$  w punktach  $P$  i  $Q$ , które wraz z punktem  $S$  wyznaczają osie elipsy. W osi  $SQ$  odkładamy odcinek  $\langle SK \rangle \equiv \langle EQ \rangle$ , a w osi  $\langle SP \rangle$  odcinek  $\langle SM \rangle \equiv \langle EP \rangle$ . Punkty  $K$  i  $M$  są wierzchołkami elipsy.



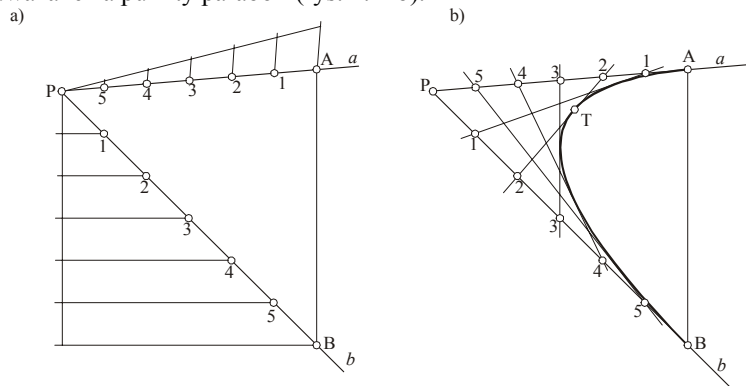
**Konstrukcja XV** - parabola (metoda stycznych).

Dane są proste  $a$  i  $b$  przecinające się w punkcie  $P$ , styczne do paraboli w punktach  $A$  i  $B$ . Wyznaczamy środek  $S$  odcinka  $\langle AB \rangle$  i wyznaczamy prostą  $PS = m$ , która jest średnicą paraboli. Punkt  $C$  środek odcinka  $\langle PS \rangle$  jest punktem paraboli a prosta  $g \parallel AB$  jest styczną w punkcie  $C$  (rys. 1.23b). Obieramy na odcinku  $\langle AB \rangle$  dowolny punkt  $K$  i przez ten punkt kreślimy prostą  $c \parallel a$  i  $d \parallel b$ . Przecinają one proste  $a$  i  $b$  w punktach  $L$  i  $M$  które wyznaczają styczną  $e$  do paraboli (rys. 1.23c). Aby wyznaczyć punkt  $E$  paraboli należący do stycznej  $e$  kreślimy przekątne czworokąta  $\langle ABLM \rangle$ . Punkt  $R$  przecięcia się przekątnych wraz z punktem  $P$  wyznaczają prostą, która przecina styczną  $e$  w punkcie  $E$  (rys. 1.23d). Punkt  $E_1$  symetryczny wraz z  $E$  w symetrii równoległej otrzymujemy kreśląc z  $E$  prostą równoległą do  $AB$ , która jest kierunkiem symetrii; osią symetrii jest średnica paraboli  $m$  (rys. 1.23e).

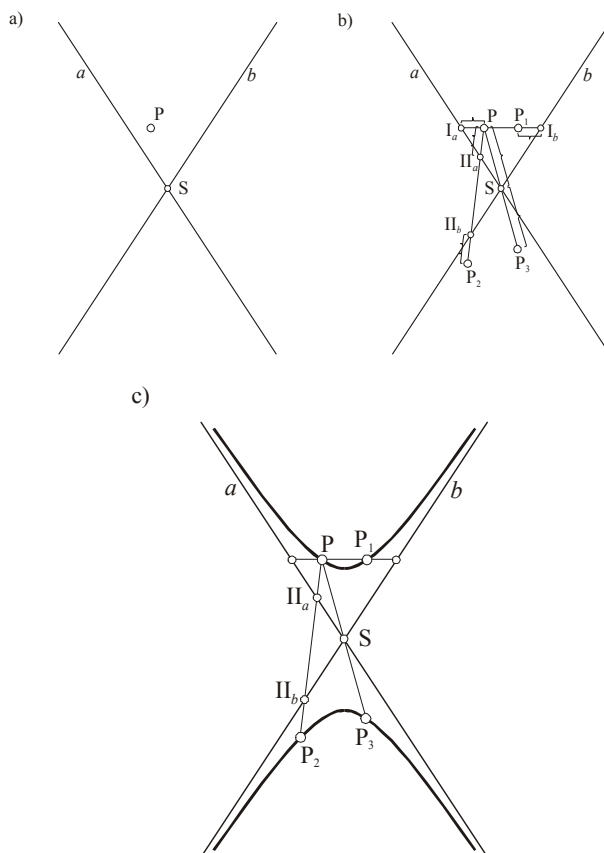


Rys.1.23

Uproszczoną metodę kreślenia paraboli za pomocą stycznych podaje rysunek 1.24. Odcinki  $\langle AP \rangle$  i  $\langle PB \rangle$  dzielimy na taką samą ilość równych części (np. sześć) i numerujemy punkty podziału. Jeżeli na odcinku  $\langle AP \rangle$  numeracja zaczyna się od A to na odcinku  $\langle PB \rangle$  zaczyna się od P (rys. 1.24a). Kreślimy proste wyznaczone przez punkty 1 i 1, 2 i 2, ... są to w przybliżeniu styczne do paraboli. Środki przecinających się odcinków stycznych (np. T) mogą być uważane za punkty paraboli (rys. 1.24b).



Rys. 1.24



Rys. 1.25

### **Konstrukcja XVI - hiperbola.**

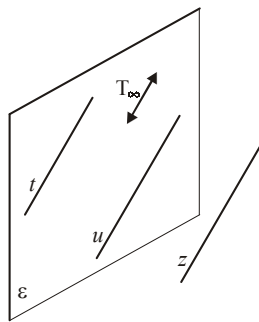
Dane są asymptoty hiperboli  $a$  i  $b$  oraz dowolny punkt  $P$  hiperboli. Korzystamy z dwóch symetrii: równoległej i środkowej. Dowolna prosta zawierająca punkt  $P$  przecina asymptoty w punktach  $I_a$  i  $I_b$ . Wielkość odcinka  $\langle I_a P \rangle$  zawartego w tej prostej jest taka sama jak odcinka  $\langle I_b P_1 \rangle$ . Punkt  $P_1$  jest punktem hiperboli. Również  $|PII_a| = |P_2 I_b|$  i  $|PS| = |SP_3|$  (rys. 1.25b). Powyższym sposobem możemy wyznaczyć dowolną ilość punktów hiperboli (rys. 1.25c).

### **1.5. Pojęcia podstawowe, geometria euklidesowa.**

Euklides żyjący w latach 330-275 p.n.e. był wykładowcą matematyki w Aleksandrii w czasach Ptolemeusza I. Przedstawił on w 13 księgach „Elementów” własne prace oraz wyniki dotychczasowych osiągnięć. W XIX wieku D. Hilbert podał w „Podstawach geometrii” aksjomatykę geometrii euklidesowej. Podstawowymi utworami (elementami) geometrii euklidesowej są: punkt, prosta i płaszczyzna. Są to pojęcia pierwotne. Pojęć podstawowych nie definiuje się, służą one do określania innych pojęć geometrycznych. Pomędzy utworami podstawowymi zachodzą związki podstawowe jak: „przynależność”, „uporządkowanie”, „przystawianie”, „ciągłość” i „równoległość”. Realizowany w szkole średniej kurs geometrii opiera się na związkach zachodzących w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E_3$  pojmowanej jako zbiór punktów właściwych.

### **1.6. Przestrzeń rzutowa.**

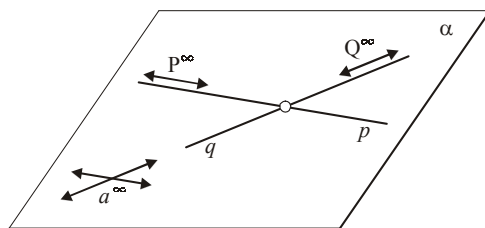
W kursie geometrii wykreślnej wygodne stało się powiększenie przestrzeni  $E_3$  o zbiór punktów niewłaściwych. Otrzymano w ten sposób przestrzeń rzutową  $W_3$ . W każdej prostej właściwej  $t$  zawartej w  $W_3$  istnieje dokładnie jeden punkt niewłaściwy  $T_\infty$ , będący punktem wspólnym tej prostej ze wszystkimi prostymi właściwymi przestrzeni  $W_3$ , różnymi od  $t$  i równoległymi do  $t$  (rys.1.26).



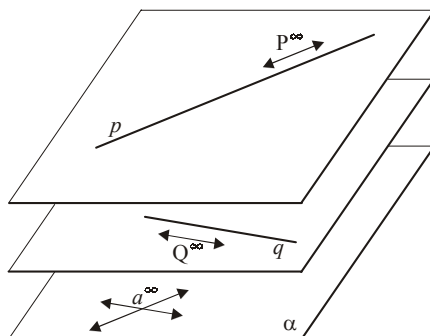
Rys. 1.26

W każdej właściwej płaszczyźnie  $\alpha$  zawartej w  $W_3$  istnieje jedna prosta niewłaściwa, będąca zbiorem punktów niewłaściwych należących do prostych, zawartych w płaszczyźnie  $\alpha$  (rys.1.27) i do wszystkich płaszczyzn równoległych do płaszczyzny  $\alpha$  (rys.1.28).





Rys. 1.27



Rys. 1.28

Zbiór wszystkich punktów niewłaściwych przestrzeni  $W_3$  nazywamy płaszczyzną niewłaściwą. Zawarte są w niej wszystkie proste niewłaściwe przestrzeni  $W_3$ .

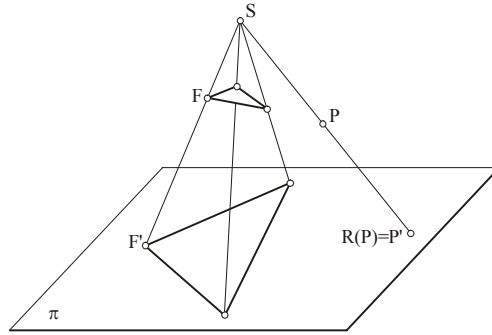
## Rozdział II

### WYBRANE RODZAJE RZUTOWAŃ I USTALANIE WIDOCZNOŚCI FIGURY

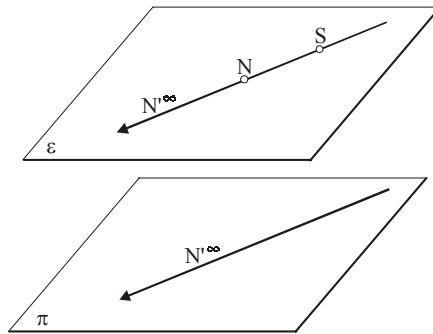
#### 1. Wybrane rodzaje rzutowań.

Przekształcenie  $R$ , które każdemu punktowi  $X \in W_3$  przyporządkowuje taki punkt  $X' \in \pi$ , że punkty  $X$  i  $X'$  należą do jednej i tej samej prostej nazywamy rzutowaniem.

Weźmy pod uwagę płaszczyznę  $\pi$  zwaną rzutnią oraz punkt  $S$ , nie należący do  $\pi$ , zwany środkiem rzutu, zawarte w przestrzeni  $W_3$ . Jeżeli punkt  $P$  jest różny od punktu  $S$ , to jako jego rzut  $R(P)$  uważany będzie za punkt  $P'$  wspólnej prostej  $SP$  i płaszczyzny  $\pi$ :  $R(P) = SP \cap \pi$  (rys. 2.1).



Rys. 2.1

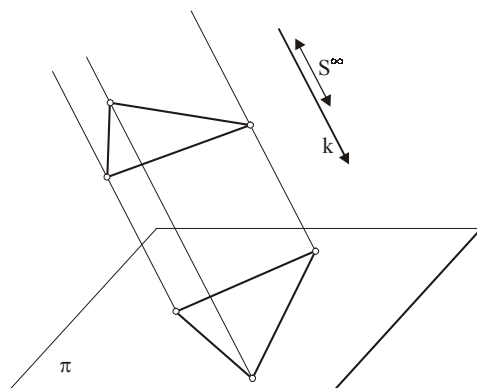


Rys. 2.2

Rzuty punktów płaszczyzny  $\epsilon$  równoległej do  $\pi$  i zawierającej  $S$  są punktami niewłaściwymi (rys. 2.2). Każdy więc punkt  $P$ , z wyjątkiem punktu  $S$  (środka rzutu), ma jednoznacznie określony punkt  $P'$ . Rzuty punktów należących do płaszczyzny  $\epsilon \parallel \pi$  i  $\epsilon \subset S$  są punktami niewłaściwymi, rzuty punktów nie należących do  $\epsilon$  są punktami właściwymi.

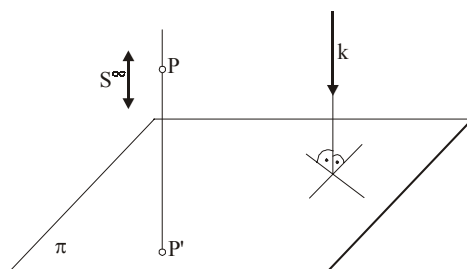
Jeżeli punkt  $S$  jest punktem właściwym - mamy do czynienia z rzutem środkowym (rys. 2.1).

Jeżeli punkt  $S$  jest punktem niewłaściwym i nie należącym do  $\pi$  - mamy do czynienia z rzutem równoległym (rys. 2.3).



Rys. 2.3

Wszystkie proste zawierające punkt  $S_\infty$ , należą do jednego kierunku ( $k$ ). Figura złożona z rzutni  $\pi$  i zorientowanej prostej kierunkowej  $k \not\parallel \pi$  oznaczona  $\{\pi, k\}$ , zwana dalej aparatem rzutowania równoległego, ustala jednoznacznie odwzorowanie  $R$ . Jeżeli  $k \perp \pi$ , to mamy do czynienia z rzutem prostokątnym (rys 2.4).



Rys. 2.4

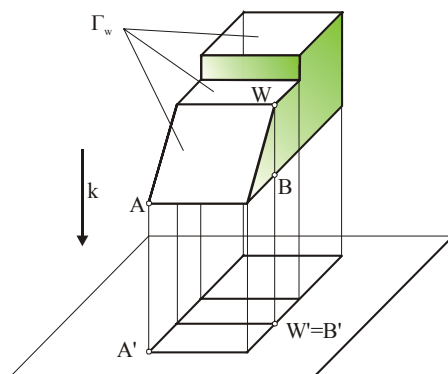
W dalszej części skryptu będziemy się zajmować rzutami Monge'a, rzutem cechowanym oraz rzutem aksonometrycznym.

Rzut cechowany jest to rzut prostokątny na jedną rzutnię. Rzuty Monge'a, są to rzuty prostokątne na dwie (lub więcej) prostopadłych rzutni. Rzut aksonometryczny może być rzutem prostokątnym lub ukośnym na jedną rzutnię, gdzie oprócz rzutu figury rzutujemy układ kartezjański trzech osi prostopadłych do siebie.

## 2. Ustalanie widoczności figury w rzutowaniu równoległym.

Rozpatrując rzut równoległy figury  $\Gamma$  jako jej widok na tle rzutni, przy odpowiednim kierunku i zwrocie prostej kierunkowej musimy uwzględnić zjawisko widoczności oraz niewidoczności pewnych części figury. Jeżeli prosta równoległa do kierunku rzutowania przebija figurę w jednym punkcie, to punkt ten uważamy za widoczny. Jeżeli prosta kierunkowa przebija figurę w więcej niż jednym punkcie, to punkt poprzedzający wszystkie pozostałe punkty jest punktem widocznym. Na rysunku 2.5 punktami widocznymi są  $A$  i  $W$ . Suma wszystkich punktów widocznych figury nazywa się figurą składową widoczną  $\Gamma_w$ , zaś suma

wszystkich pozostałych punktów figurą składową niewidoczną  $\Gamma_n(\Gamma_n = \Gamma - \Gamma_w)$ . Zagadnienie ustalania widoczności będzie omówione dokładniej na konkretnych przykładach w dalszej części skryptu. Ustalanie widoczności przedstawione w tym skrypcie jest zgodne z normą europejską stosowaną w rysunku technicznym.



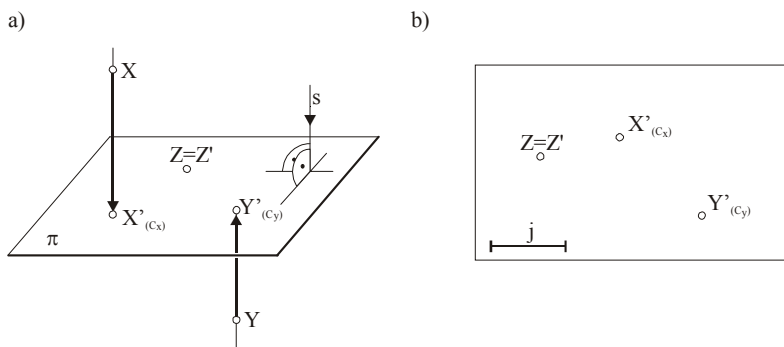
Rys. 2.5

# Rozdział III

## RZUT CECHOWANY

### 1. Zasady odwzorowania, rzut cechowany punktu i figury

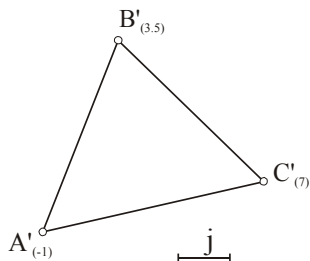
Rzut cechowany należy do grupy rzutów prostokątnych. Aparatem rzutowania jest rzutnia  $\pi$  oraz kierunek rzutowania  $s \perp \pi$ , gdzie  $s$  jest prostą zorientowaną. Rzut cechowany punktu  $X$  składa się z pary  $\{X', c_x\}$ , gdzie  $X'$  jest rzutem prostokątnym punktu  $X$  na  $\pi$ , a  $c_x$  jest cechą punktu (rys. 3.1a). Cecha punktu  $c_x$  jest to miara wektora  $\langle XX' \rangle$ , która jest liczbą dodatnią gdy wektor jest zgodnie zorientowany z kierunkiem rzutowania, a więc gdy punkt  $X$  (początek wektora) leży przed rzutnią (rys.3.1a). Gdy punkt  $Y$  leży za rzutnią wektor  $\langle YY' \rangle$  ma zwrot przeciwny, a gdy punkt zawarty jest w rzutni miara wektora równa jest zero i  $Z = Z'$ . Aby rzut cechowany punktu, np.  $X$  wyznaczał punkt z dokładnością do identyczności względem rzutni  $\pi$  obieramy na płaszczyźnie rysunku odcinek jednostkowy „ $j$ ” i przyjmujemy, że długość wektora  $\langle XX' \rangle$  jest równa długości odcinka  $\langle XX' \rangle$  którego miara jest równa „ $j$ ”  $\cdot |c_x|$ .



Rys. 3.1

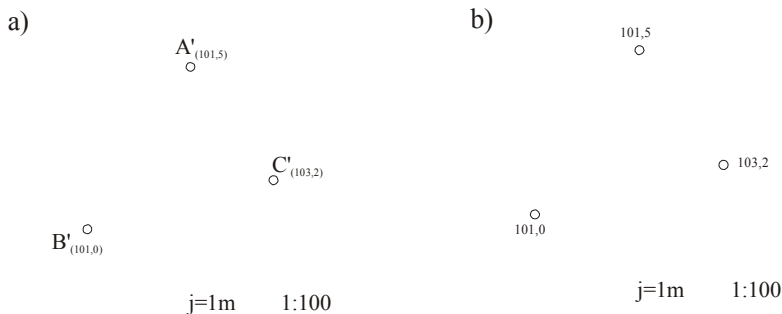
Cechę  $c_x$  zapisujemy w nawiasie na płaszczyźnie rysunku przy oznaczeniu rzutu punktu (rys. 3.1b).

Rzutem cechowanym figury nazywamy rzut cechowany wszystkich punktów tej figury. Oczywiście będziemy wyróżniać tylko niektóre punkty figury wystarczające do jej wyznaczenia i odtworzenia, np. rzut cechowany trójkąta  $\langle ABC \rangle$  przedstawiamy jako rzut cechowany jego wierzchołków (rys. 3.2).



Rys. 3.2

Rzut cechowany jest metodą stosowaną przy sporządzaniu planów robót ziemnych, w związku z tym na odcinek jednostkowy wybieramy, np. 1 cm, 1 m ... i rysunki sporządzamy w skali pomniejszającej (rys. 3.3a).

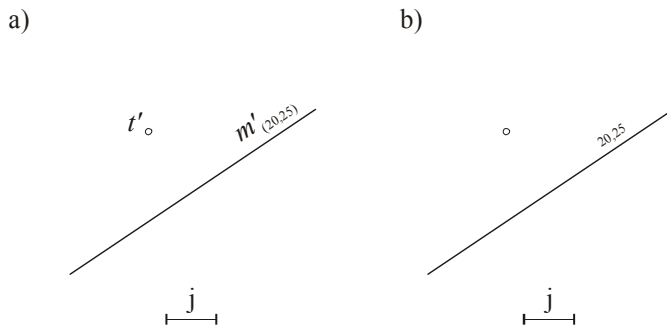


Rys. 3.3

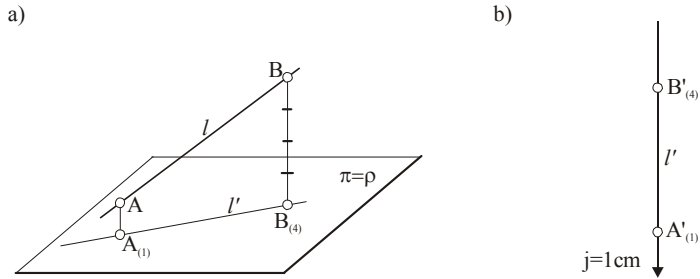
W zapisie uproszczonym, w technice, oznaczenia punktów A, B, C... pomijamy (rys. 3.3b) i liczby podające cechy punktów służą za ich nazwy.

## 2. Rzut cechowany prostej

Rzutem cechowanym prostej  $t$  prostopadłej do rzutni jest punkt  $t'$ . Prosta taka nazywa się rzutującą lub pionową. Rzutem cechowanym prostej  $m$  równoległej do rzutni jest prosta  $m'$  wraz z zapisaną w nawiasie cechą. Prosta  $m$  nazywa się warstwową lub poziomą. Rzuty prostych  $t \perp \pi$  i  $m \parallel \pi$  przedstawione są na rysunku 3.4a,b.



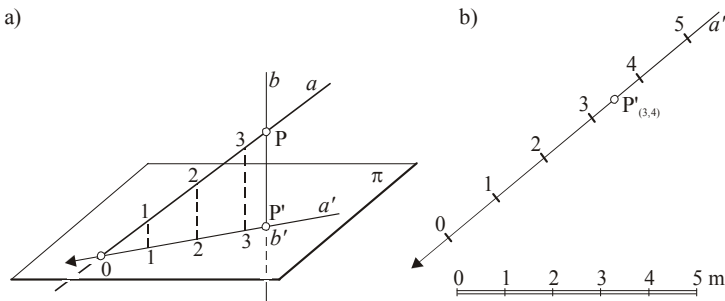
Rys. 3.4



Rys. 3.5

Rzut cechowany prostej ogólnej  $l$  ( $l \not\perp \pi \wedge l \not\parallel \pi$ ) może być dany za pomocą rzutów cechowanych dwóch punktów (rys. 3.5a, b). Kierunek obniżania się prostej  $l$  jest na obrazie  $l'$  prostej  $l$  zaznaczony strzałką i jest zgodny z kierunkiem zmniejszających się cech punktów należących na tej prostej. Kierunek ten nazywamy **zwrotem** prostej.

Każdy punkt prostej ogólnej ma inną cechę. Punkty prostej, których cechy są liczbami całkowitymi nazywamy **punktami głównymi**. Rzut prostej łącznie z jej punktami głównymi nazywamy **zestopniowanym rzutem prostej** (rys. 3.6a, b).



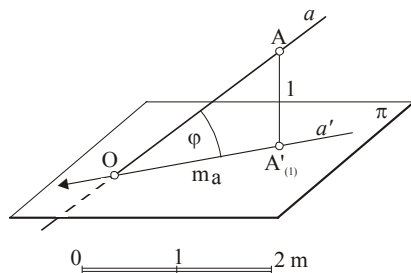
Rys. 3.6

Odległość rzutów dwóch punktów prostej, których różnica cech jest równa jeden, nazywa się **modułem prostej**. Moduł prostej  $a$  oznaczamy symbolem  $m_a$  (rys. 3.7). Modułem prostej prostopadłej do rzutni jest liczba zero. Prosta równoległa do rzutni nie posiada modułu. Jeżeli prosta  $a$  jest nachylona do rzutni pod kątem  $\varphi$  (rys. 3.7) i punkt  $A$  należący do  $a$  ma cechę równą 1, to z trójkąta  $\langle OAA' \rangle$  otrzymujemy:

$$\frac{|AA'|}{|OA'|} = \operatorname{tg} \varphi$$

Wstawiając za  $|AA'|$ : 1 oraz  $|OA'|$ :  $m_a$  otrzymujemy  $\frac{1}{m_a} = \operatorname{tg} \varphi$ .

Liczbę  $\operatorname{tg} \varphi$  nazywamy **nachyleniem** prostej względem rzutni i oznaczamy symbolem  $n_x$  ( $x$  - nazwa prostej). Nachylenie jest więc odwrotnością modułu, zatem w miarę wzrostu kąta nachylenia prostej moduł prostej maleje i odwrotnie.



Rys. 3.7

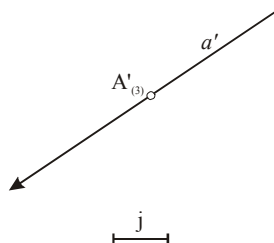
**Ćwiczenie 1**

Dana jest jednostka, rzut prostokątny prostej  $a$ , cecha punktu  $A$  należącego do prostej  $a$  oraz zwrot prostej (rys. 3.8a). Zestopniować prostą  $a$  tak, aby jej nachylenie wynosiło 2:3.

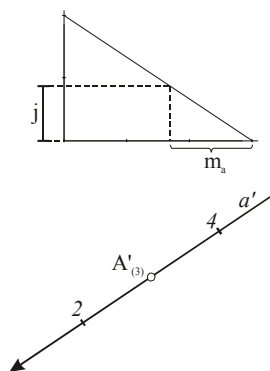
**Rozwiązanie**

Wyznaczamy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych dwóm i trzem jednakowym odcinkom. Przeciwnoprostokątna ma nachylenie 2:3. Następnie budujemy trójkąt podobny, którego jedną przyprostokątną jest jednostka, a drugą moduł. Tym modulem stopniujemy prostą  $a$  (rys. 3.8b).

a)



b)



Rys. 3.8

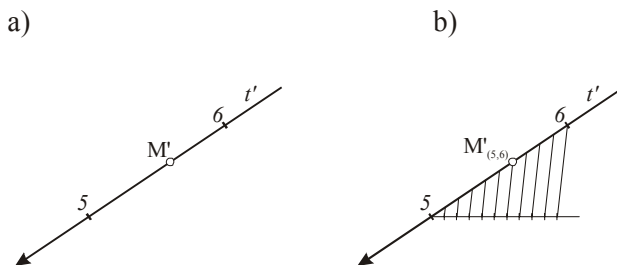
**Ćwiczenie 2**

Dany jest zestopniowany rzut prostej  $t$  oraz rzut punktu  $M$ , należącego do tej prostej. Wyznaczyć cechę punktu  $M$ .

**Rozwiązanie**

Odcinek  $\langle 5 \ 6 \rangle$  prostej  $t'$  dzielimy na 10 równych części. Na wykonanej w ten sposób podziałce odczytujemy cechę punktu  $M$  z dokładnością do dziesiątej części jednostki. Cecha punktu  $M$  wynosi 5,6 (rys. 3.9).





Rys. 3.9

### 3. Wzajemne położenia prostych

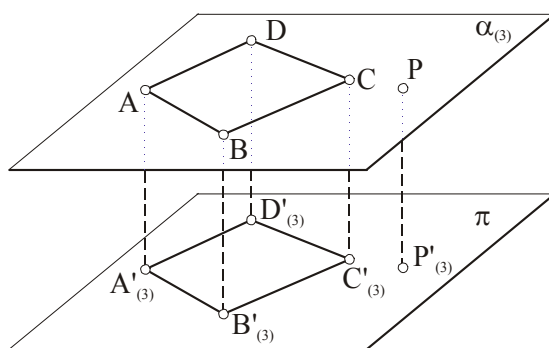
Proste mogą się przecinać, wtedy punkt przecięcia się rzutów prostych jest rzutem punktu wspólnego zawartego w obu prostych i ma cechę taką samą dla obu prostych (rys.3.15b). Zapisujemy np.  $P = m \cap n$ .

Proste mogą być równoległe (rys. 3.19) - omówione dokładnie w punkcie 6 „Równoległość podprzestrzeni”.

Proste mogą być skośne lub wchrowate. Takie proste nie mają punktu wspólnego, ani nie są do siebie równoległe (rys. 3.21a).

### 4. Rzut cechowany płaszczyzny

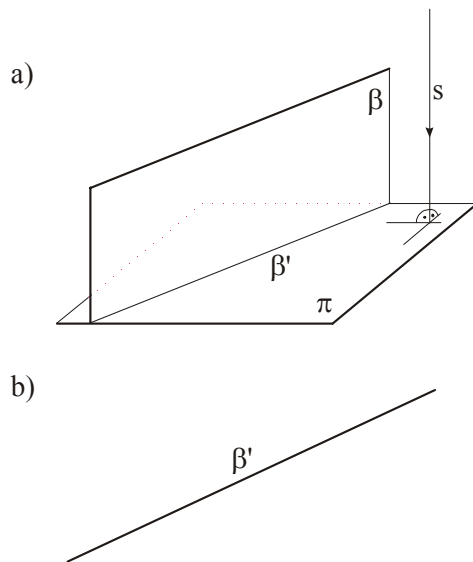
Płaszczyznę równoległą do rzutni nazywamy płaszczyzną warstwową. Wszystkie punkty płaszczyzny mają jednakowe cechy (rys.3.10).



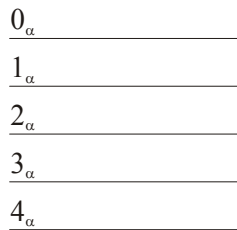
Rys. 3.10

Płaszczyzny warstwowe o cechach całkowitych nazywamy głównymi płaszczyznami warstwowymi. Płaszczyzna równoległa do kierunku rzutowania  $s$ , a tym samym prostopadła do rzutni nazywa się rzutującą. Jej rzutem jest prosta (rys. 3.11a,b). Płaszczyzna ogólna ( $a \not\perp \pi \wedge a \not\parallel \pi$ ). W celu odtworzenia położenia takiej płaszczyzny w przestrzeni można podać rzuty cechowane, np.:

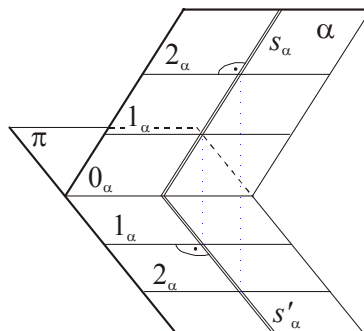
- 1° - trzech niewspółliniowych punktów,
- 2° - dwóch prostych przecinających się,
- 3° - dwóch prostych równoległych,
- 4° - prostej i nie należącego do niej punktu.



Rys. 3.11



Rys. 3.12

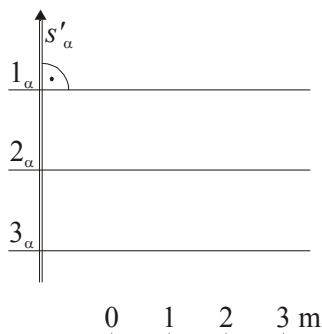


Rys. 3.13

Metoda rzutu cechowanego posługuje się także innym sposobem przedstawiania płaszczyzny: za pomocą tzw. prostej spad lub planu warstwicowego. Warstwicą płaszczyzny  $\alpha$  nazywamy każdą prostą warstwową zawartą w płaszczyźnie  $\alpha$ . Warstwicę płaszczyzny o cechach będących liczbami całkowitymi nazywamy warstwicami głównymi (rys. 3.12.) i oznaczamy  $0_\alpha, 1_\alpha, 2_\alpha$ . Zbiór warstwic głównych płaszczyzny nazywamy planem

warstwicowym płaszczyzny. Prosta zawartą w płaszczyźnie i prostopadłą do warstwic nazywamy prostą spadu płaszczyzny i oznaczamy  $s_\alpha$  (rys. 3.13).

Rzutowanie prostokątne zachowuje miarę kąta prostego, jeżeli jedno ramię kąta jest równoległe do rzutni, a drugie nie jest do rzutni prostopadłe. Z tej własności wynika, że rzut linii spadu jest prostopadły do rzutów warstwic tej płaszczyzny (rys. 3.14).

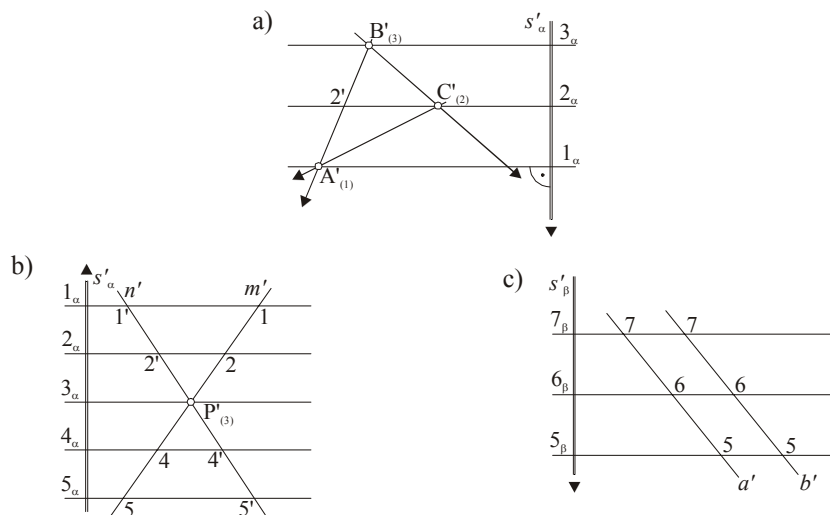


Rys. 3.14

Na rysunku 3.15a przedstawiony jest plan warstwicowy płaszczyzny wyznaczonej przez 3 punkty A, B, C - wyznaczonej za pomocą dwóch prostych przecinających się (rys. 3.15b) i dwóch prostych równoległych (rys. 3.15c). We wszystkich przypadkach została wyznaczona prosta spad.

Nachylenie i moduł płaszczyzny jest nachyleniem i modułem jej prostej spadu:

$$m_\alpha = m_{s_\alpha} \wedge n_\alpha = n_{s_\alpha}.$$



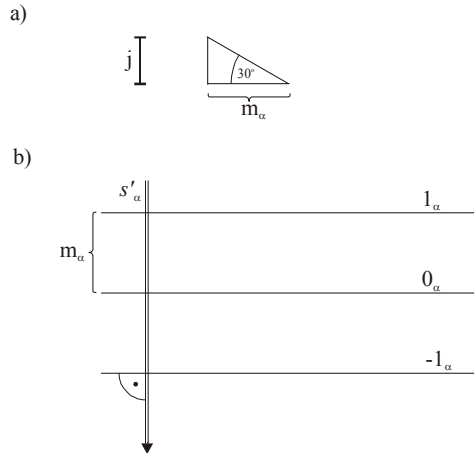
Rys. 3.15

### Ćwiczenie 3

Dana jest prosta warstwowa  $0_\alpha$ . Wykreślić rzut planu warstwicowego płaszczyzny  $\alpha$  którego kąt nachylenia do rzutni jest równy  $30^\circ$ .

### Rozwiązanie

Wyznaczamy moduł płaszczyzny  $\alpha$  z trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej równej  $j$  oraz o kątach ostrych  $60^\circ$  i  $30^\circ$ . Liniją spadu  $s_\alpha$  prostopadłą do prostej  $0_\alpha$  stopniujemy wyznaczonym modulem  $m_\alpha$  (rys. 3.16).



Rys. 3.16

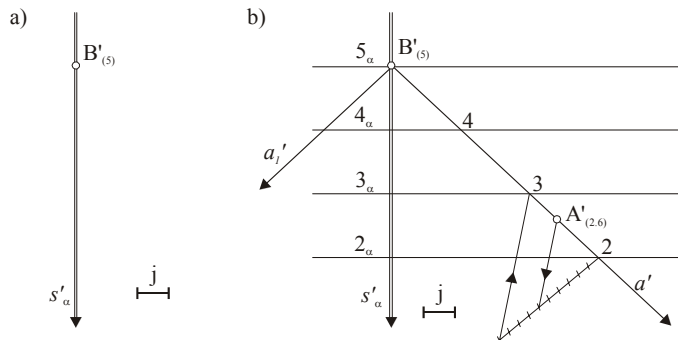
## 5. Należenie i zawieranie się podprzestrzeni

Punkt  $A$  należy do prostej  $a$ , jeżeli rzut  $A' \in a'$  i cecha punktu  $A$  równa się cesze punktu prostej, którego rzut jednoczy się z rzutem punktu  $A$ .

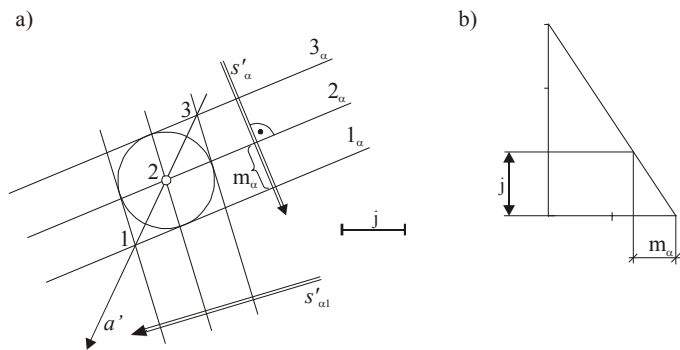
W przypadku jak na rysunku 3.17 cechę punktu  $A$  zawartego w prostej  $a$  znajdujemy z twierdzenia Talesa. Dzielimy odcinek  $\langle 2\ 3 \rangle$  na 10 części i określamy cechę punktu  $A$  z dokładnością do dziesiątej części jednostki.

Prosta  $a$  zawarta jest w płaszczyźnie  $\alpha$  jeżeli ma z nią dwa punkty wspólne. Przy danym planie warstwicowym punkty główne prostej należą do głównych warstwic płaszczyzny (rys. 3.17 , 318).

Punkt należy do płaszczyzny jeżeli należy do prostej zawartej w płaszczyźnie (rys. 3.17)



Rys. 3.17



Rys. 3.18

#### Ćwiczenie 4

Dane są:  $j = 0,5$  cm i rzut prostokątny prostej spadu  $s_\alpha$  z zaznaczonym na niej zwrotem oraz rzut cechowany punktu  $B \in s_\alpha$ . Wyznaczyć plan warstwiczny płaszczyzny  $\alpha$ , której moduł  $m_\alpha = 2$  oraz przez punkt B poprowadzić prostą  $a$  o nachyleniu  $n_\alpha = 1:3$ . (rys. 3.17a).

#### Rozwiązanie

Stopniujemy prostą  $s'_\alpha$  odmierzając od punktu  $B'_{(5)}$  kolejne odcinki o długościach  $m_s \cdot j = m_\alpha \cdot j = 2j = 1$  cm. Przez otrzymane punkty prowadzimy warstwicę płaszczyzny prostopadłe do  $s'_\alpha$  o cechach malejących zgodnie ze zwrotem prostej  $s'_\alpha$  (rys. 3.17b). W drugiej części ćwiczenia wyznaczamy moduł prostej  $a$ :  $m_a = \frac{1}{n_\alpha} = 3 \cdot j = 1,5$  cm. Z punktu B kreślimy łuk o promieniu  $r = m_a = 1,5$  cm do przecięcia z sąsiednią warstwicą. Punkt przecięcia należy do prostej  $a$ . Istnieją dwa rozwiązania.

#### Ćwiczenie 5

Dany jest stopniowany rzut prostej  $a$ . Wyznaczyć rzut płaszczyzny  $\alpha$  o nachyleniu  $n_\alpha = 3:2$  zawierającej prostą  $a$ ,  $j = 1$  cm.

#### Rozwiązanie

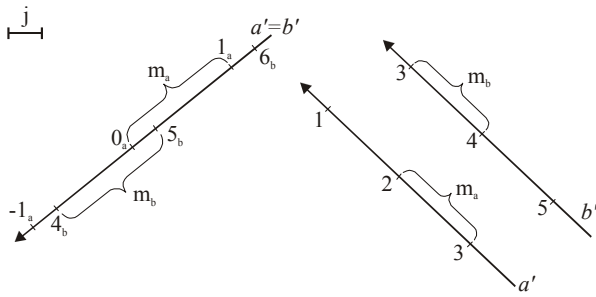
Moduł płaszczyzny  $m_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} = \frac{2}{3} \cdot 1$  cm. Budujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 i 2 i sposobem podanym na rys. 3.18b wyznaczamy moduł płaszczyzny. Wykreśliśmy okrąg o promieniu  $r = m_\alpha$  o środku w punkcie głównym prostej  $a$ , np. 2 i przez punkt 1 wyznaczamy warstwicę  $1_\alpha$  styczną do okręgu (rys. 3.18a). Pozostałe warstwicę są równoległe. Prosta spadu jest prostopadła do warstwic. Możliwe są dwa rozwiązania.

## 6. Równoległość podprzestrzeni

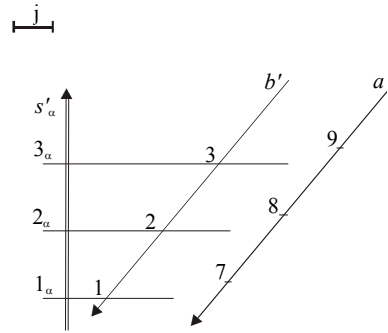
Jeżeli dwie proste  $a$  i  $b$  są równoległe, to ich rzuty cechowane spełniają następujące warunki (rys. 3.19):

- rzuty prostokątne prostych są równoległe lub jednoczą się:  $a' \parallel b'$  lub  $a' = b'$ ,
- moduły prostych są równe  $m_a = m_b$ ,
- zwroty zgodne.

Prosta  $a$  i płaszczyzna  $\alpha$  są równoległe, jeżeli w płaszczyźnie zawarta jest prosta  $b \parallel a$  (rys.3.20)



Rys. 3.19



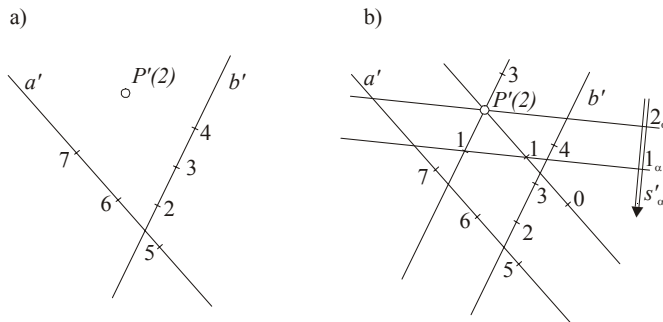
Rys. 3.20

**Ćwiczenie 6**

Dane są rzuty cechowane prostych skośnych  $a$  i  $b$ , oraz punktu  $P$  o cesze 2. Wyznaczyć rzut cechowany płaszczyzny  $\alpha$  zawierającej punkt  $P$  i równoległej do prostych  $a$  i  $b$  (rys.3.21a).

*Rozwiązanie*

Przez punkt  $P'_{(2)}$  kreślimy rzuty prostych  $c$  i  $d$  równoległych odpowiednio do  $a$  i  $b$ . Wyznaczamy plan warstwicy płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 3. 21b).



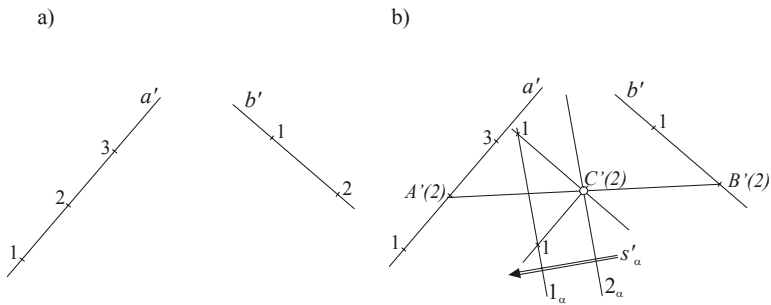
Rys.3.21

**Ćwiczenie 7**

Dane są rzuty cechowane prostych skośnych  $a$  i  $b$ . Wykreślić rzut planu warstwicy płaszczyzny  $\alpha$  równoległej do prostych  $a$  i  $b$  oraz równoodległej od nich (rys. 3.22a).

*Rozwiązanie*

Obieramy na prostych:  $a$  punkt  $A$ , a na  $b$  punkt  $B$ , najwygodniej o jednakowych cechach (na rysunku 3.22 -cecha 2). Wyznaczamy środek odcinka  $\langle AB \rangle$  punkt  $C_{(2)}$ . Przez punkt  $C$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  równoległą do prostych  $a$  i  $b$ . Jest ona również równoodległa od nich.

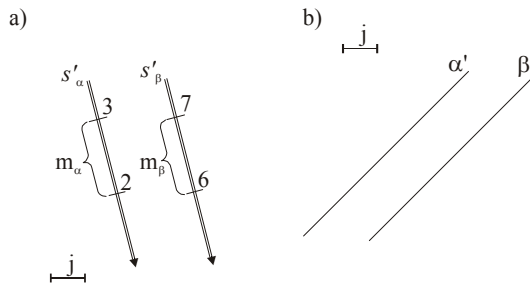


Rys.3.22

Rzuty cechowane płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  równoległych nierztujących spełniają następujące warunki:

- a) rzuty prostych spadły są równoległe  $s'_\alpha \parallel s'_\beta$
- b) moduły płaszczyzn są równe  $m_\alpha = m_\beta$
- c) zwroty są zgodne.

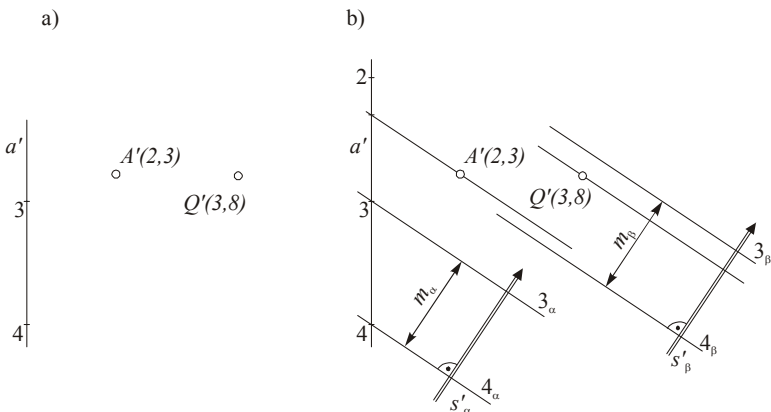
Płaszczyzny rzutujące równoległe  $\alpha$  i  $\beta$  przedstawione są na rysunku 3.23b.



Rys. 3.23

### Ćwiczenie 8

Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  rzutem cechowanym  $A'_{(2,3)}$  punktu A i zestopniowaną prostą  $a'$  oraz dany jest rzut cechowany  $Q'_{(3,8)}$  punktu Q. Wyznaczyć rzut cechowany planu warstwiowego płaszczyzny  $\beta$  przechodzącej przez punkt Q i równoległej do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 3.24a).



Rys. 3.24

*Rozwiązanie*

Przez punkt A i prostą  $a$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  a następnie przez punkt Q płaszczyznę  $\beta \parallel \alpha$  (rys. 3.24b).

## 7. Część wspólna podprzestrzeni (elementy wspólne)

Rzut cechowany punktu przecięcia dwóch prostych  $m$  i  $n$  został przedstawiony na rysunku 3.15b - jest to punkt o cesze 3.

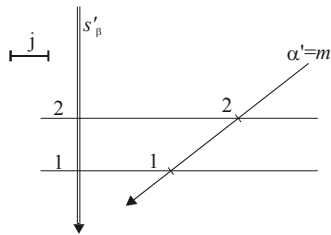
### Ćwiczenie 9

Wyznaczyć prostą wspólną (krawędź) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  w przypadkach:

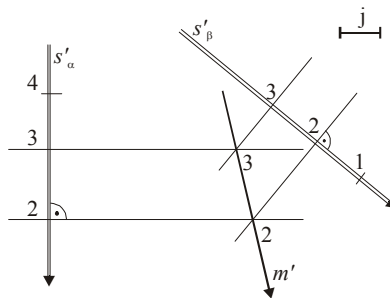
- $\alpha \perp \pi, \beta$  - ogólna,
- $\alpha$  ogólna,  $\beta$  ogólna i  $s'_\alpha \nparallel s'_\beta$ ,
- $\alpha$  ogólna,  $\beta$  ogólna i  $s'_\alpha \parallel s'_\beta$  zwroty prostych  $s'_\alpha$  i  $s'_\beta$  są przeciwne.

*Rozwiązanie - przypadek a)*

Rzut krawędzi  $m$  spełnia warunek  $m' \in \alpha'$ . Warstwy płaszczyzny  $\beta$  przecinają prostą  $m$  stopniując ją i wyznaczają punkty główne (rys. 3.25).



Rys. 3.25



Rys. 3.26

*Rozwiązanie - przypadek b)*

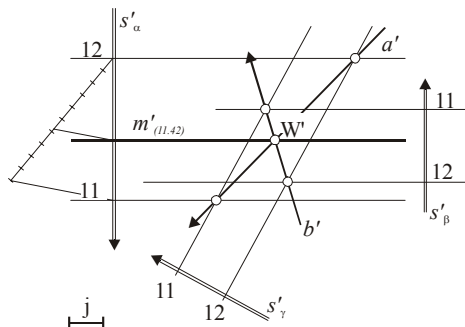
Stopniujemy proste spadku  $s_\alpha$  i  $s_\beta$  tak, aby wyznaczyć dwie jednoimienne warstwy, np.  $2_\alpha, 3_\alpha$  i  $2_\beta, 3_\beta$ . Przecinają się one w punktach 2, 3, które są kolejnymi punktami głównymi prostej  $m$  (rys. 3.26).

*Rozwiązanie - przypadek c)*

Ponieważ proste warstwowe są równoległe (przecinają się w punkcie niewłaściwym) krawędź  $m$  jest również do nich równoległa. Dowolny punkt krawędzi wyznaczamy wprowa-



dzając trzecią dowolną płaszczyznę  $\gamma$ , której  $s'_\gamma \parallel s'_\alpha(s'_\beta)$ . Wyznaczamy krawędź  $a$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\gamma$  oraz krawędź  $\beta \cap \gamma = b$ ,  $a \cap b = W$ , punkt wspólny trzech płaszczyzn:  $W = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ . Przez punkt  $W$  prowadzimy prostą  $m$  równoległą do warstwie płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 3.27). Cechę prostej  $m$  wyznaczamy dzieląc odcinek  $\langle 11, 12 \rangle$  na prostej spadku korzystając z twierdzenia Talesa. W tym przypadku na 10 części - dokładność jest więc do 0,1.



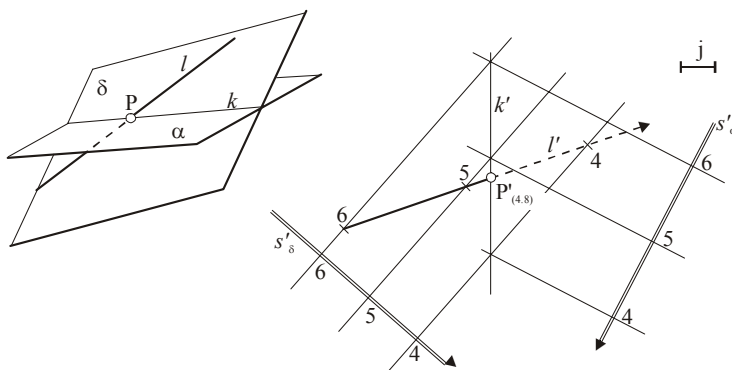
Rys. 3.27

### Ćwiczenie 10

Wyznaczyć punkt przebiecia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $l$ .

*Rozwiązanie*

Przez prostą  $l$  prowadzimy dowolną płaszczyznę  $\delta$ , wyznaczamy krawędź  $k = \alpha \cap \delta$ , punkt przecięcia się krawędzi z prostą jest szukanym punktem przebiecia (rys. 3.28).



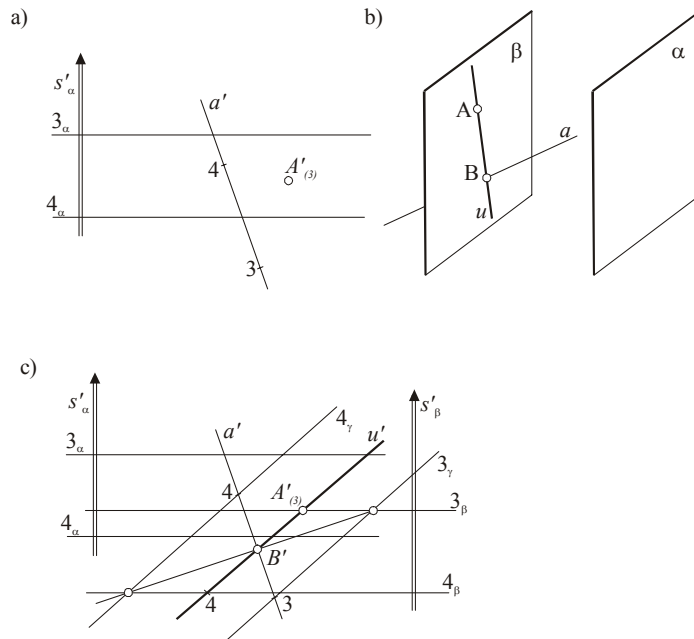
Rys. 3.28

### Ćwiczenie 11

Dane są rzuty cechowane punktu  $A$ , prostej  $a$  i płaszczyzny  $\alpha$ . Wykreślić rzut cechowany prostej  $u$  przechodzącej przez punkt  $A$ , równoległej do płaszczyzny  $\alpha$  i przecinającej prostą  $a$  (rys. 3.29a).

*Rozwiązanie*

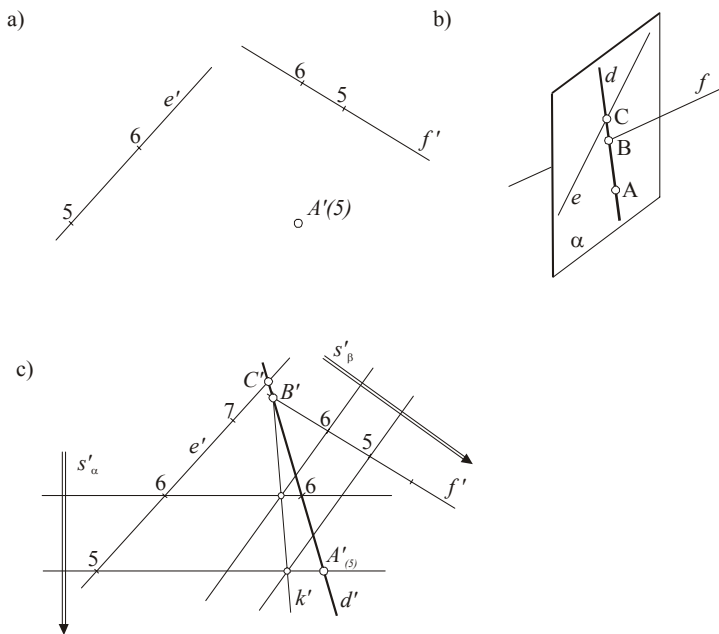
Prowadzimy płaszczyznę  $\beta$  równoległą do  $\alpha$  i zawierającą punkt  $A$ . Wyznaczamy punkt przebiecia  $B$  prostej  $a$  z płaszczyzną  $\beta$ . Prosta  $u$  jest wyznaczona punktami  $A$  i  $B$  (rys. 3.29b i c).



Rys. 3.29

**Ćwiczenie 12**

Dane są: punkt  $A_{(5)}$  oraz proste skośne  $e$  i  $f$ . Wyznaczyć prostą  $d$  zawierającą punkt  $A$  i przecinającą proste  $e$  i  $f$ . Wyznaczyć punkty przecięcia prostych.



Rys. 3.30

*Rozwiązanie*

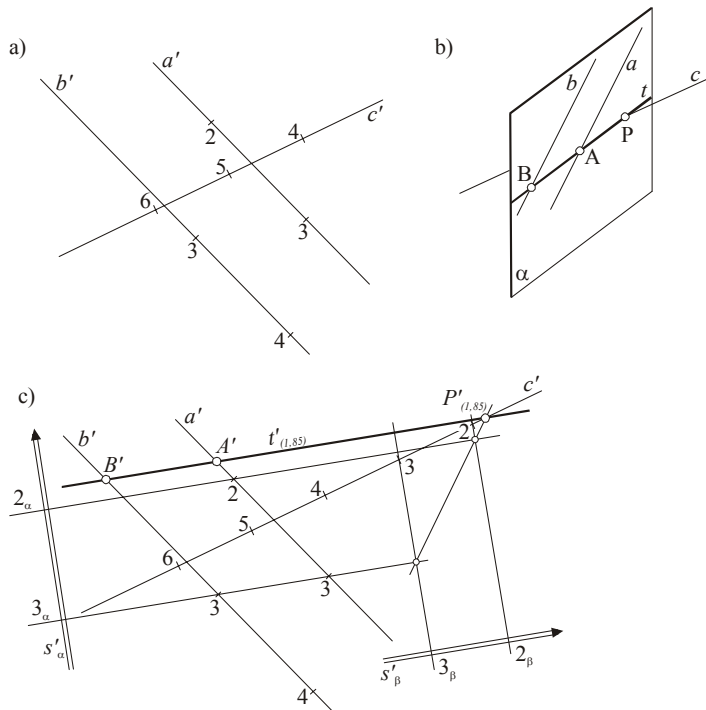
Wykreślamy warstwice płaszczyzny  $\alpha$  wyznaczonej przez punkt A i jedną prostą (w tym przypadku  $e$ ). Następnie wyznaczamy punkt przecięcia prostej  $f$  z płaszczyzną  $\alpha$ . W tym celu przez prostą  $f$  prowadzimy płaszczyznę  $\beta$  planem warstwicowym. Prosta  $k$  będąca krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  przecina prostą  $e$  w punkcie przecięcia B. Prosta  $d$  jest wyznaczona punktami A i B i przecina prostą  $e$  w punkcie C (rys. 3.30b i c).

**Ćwiczenie 13**

Dane są dwie proste równoległe  $a$  i  $b$  oraz prosta skośna  $c$  względem  $a$  i  $b$ . Wyznaczyć prostą  $t$  przecinającą wszystkie trzy proste i równoległą do rzutni (warstwową) (rys. 3.31a).

*Rozwiązanie*

Wyznaczamy plan warstwicowy płaszczyzny  $\alpha$  zawierającej proste równoległe  $a$  i  $b$ . Przez prostą  $c$  prowadzimy dowolną płaszczyznę  $\beta$ , krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  przecina prostą  $c$  w punkcie przecięcia P prostej  $c$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Prosta  $t$  będąca rozwiązaniem zawiera punkt P i jest prostą warstwową płaszczyzny  $\alpha$ . Cechy punktu P i prostej  $t$  są identyczne (rys. 3.31b i c).

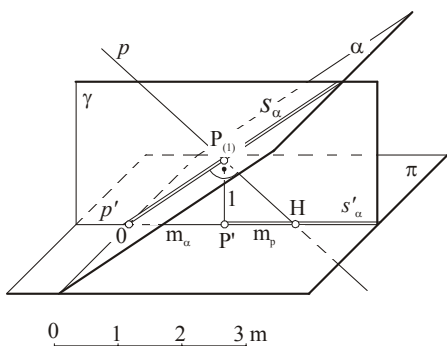


Rys. 3.31

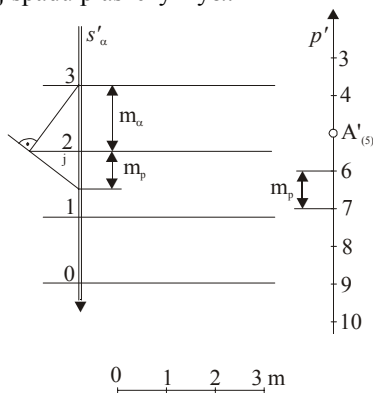
## 8. Prostopadłość prostych i płaszczyzn

Prosta prostopadła do płaszczyzny jest prostopadła do wszystkich prostych zawartych w płaszczyźnie. Opierając się na elementarnych wiadomościach ze stereometrii można udowodnić, że zostaną zachowane kąty proste w rzucie prostokątnym dowolnej prostej z prostymi warstwowymi (rys. 3.32.), a tym samym rzut prostej prostopadłej do płaszczyzny jest równoległy do rzutu prostej spad. Niech cecha punktu  $P$  wynosi  $l$ , to z trójkąta prostokątnego  $\langle HPO \rangle$  wynika, że  $m_\alpha \cdot m_p = l$ , a więc  $m_p = \frac{l}{m_\alpha}$  i odwrotnie  $m_\alpha = \frac{l}{m_p}$ . Trójkąt  $\langle HPO \rangle$  nazywa się trójkątem modułów. Zwróćmy uwagę, że kierunki obniżania się prostej i płaszczyzny są przeciwne. Reasumując, można powiedzieć, że prosta  $p$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$ , jeżeli:

- rzut prostej jest równoległy do rzutu prostej spad płaszczyzny:  $p' \parallel s'_\alpha$ ,
- moduł prostej jest odwrotnością modułu płaszczyzny:  $m_p = \frac{1}{m_\alpha}$ ,
- zwrot prostej  $p$  jest przeciwny do zwrotu prostej spad płaszczyzny  $\alpha$ .



Rys. 3.32



Rys.3.33

### Ćwiczenie 14

Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  planem warstwicowym oraz rzut cechowany  $A'(5)$ . Przez punkt  $A$  poprowadzić prostą  $p$  prostopadłą do  $\alpha$ .

#### Rozwiązanie

Przez punkt  $A'$  prowadzimy rzut  $p' \parallel s'_\alpha$  (rys.3.33). Kreślimy trójkąt modułów (który jest przeniesionym kładem płaszczyzny rzutującej zawierającej prostą  $s_\alpha$  (omówionym w p. 9.1) i wyznaczamy  $m_\alpha$

Wyznaczonym modulem  $m_p$  stopniujemy prostą  $p'$  tak, aby zwrot jej był przeciwny do zwrotu  $s_\alpha$ .

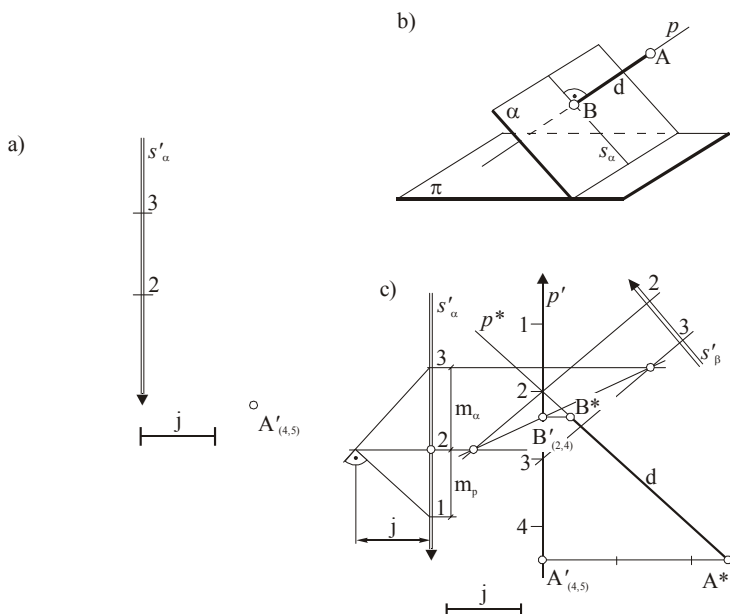
### Ćwiczenie 15

Wyznaczyć odległość punktu  $A$  od płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 3.34a).

#### Rozwiązanie

Rozwiązaniem jest długość odcinka zawartego między punktem  $A$  i jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę  $\alpha$  (rys.3.34b,c). Przez punkt  $A$  prowadzimy prostą  $p$  prostopadłą do  $\alpha$ . W celu wyznaczenia punktu przebiecia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $p$  prowadzimy płaszczyznę do-

wolną  $\beta$  i wyznaczamy krawędź  $k$ .  $k' \cap p' = B'$ .  $B'$  jest rzutem punktu przebiecia. Wykonujemy kład prostokątny odcinka  $\langle AB \rangle$ . Długość odcinka  $\langle A^*B^* \rangle$  jest miarą odległości  $A$  od  $\alpha$  (rys. 3.34c). Inne rozwiązanie jest przedstawione w ćwiczeniu 21.



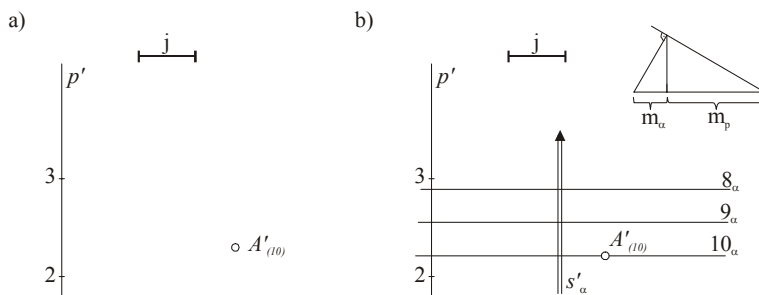
Rys. 3.34

### Ćwiczenie 16

Dany jest rzut cechowany punktu  $A$ :  $A'_{(10)}$  oraz rzut prostej  $p$ , określonej punktami o cechach 2 i 3. Narysować warstwicę płaszczyzny  $\alpha$  zawierającej punkt  $A$  i prostopadłej do prostej  $p$  (rys. 3.35a).

#### Rozwiązanie

Przez punkt  $A'_{(10)}$  kreślimy warstwicę  $10_\alpha$ , prostopadłą do prostej  $p'$ . Z trójkąta modułów wyznaczamy moduł płaszczyzny  $\alpha$ , który jest także modulem jej prostej spadu. Rzut prostej spadu, prostopadły do warstwiczy  $10_\alpha$  może być narysowany w dowolnym miejscu. Stopniujemy prostą spadu modulem  $m_\alpha$  pamiętając, aby zwroty  $p'$  i  $s'_\alpha$  były przeciwne (rys. 3.35b).



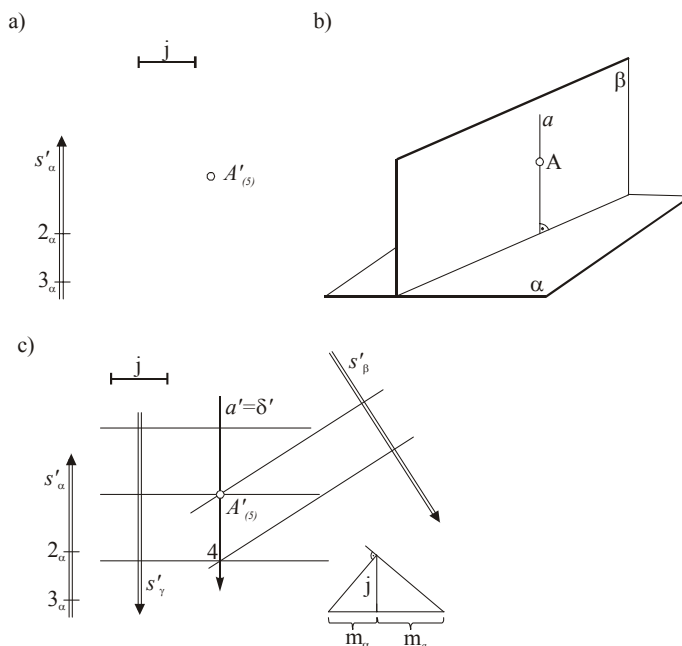
Rys. 3.35

### Ćwiczenie 17

Dany jest punkt A i płaszczyzna  $\alpha$ . Przez punkt A poprowadzić płaszczyzny  $\beta, \gamma, \delta$ .. prostopadłe do płaszczyzny  $\alpha$  (rys.3.36a).

#### Rozwiązanie

Przez punkt A wyznaczamy prostą  $a$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ .  $A'_{(5)} \in a' \parallel s'_\alpha$ . Wyznaczamy moduł  $m_a$  z trójkąta modułów i tym modulem stopniujemy prostą  $a'$  pamiętając o przeciwnym zwrocie (kierunku obniżania się) prostej  $a$  i płaszczyzny  $\alpha$ . Każda płaszczyzna zawierająca prostą  $a$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$ . Jest nią np. płaszczyzna  $\beta, \gamma$  oraz rzutująca płaszczyzna  $\delta$  (rys. 3.36 b i c).



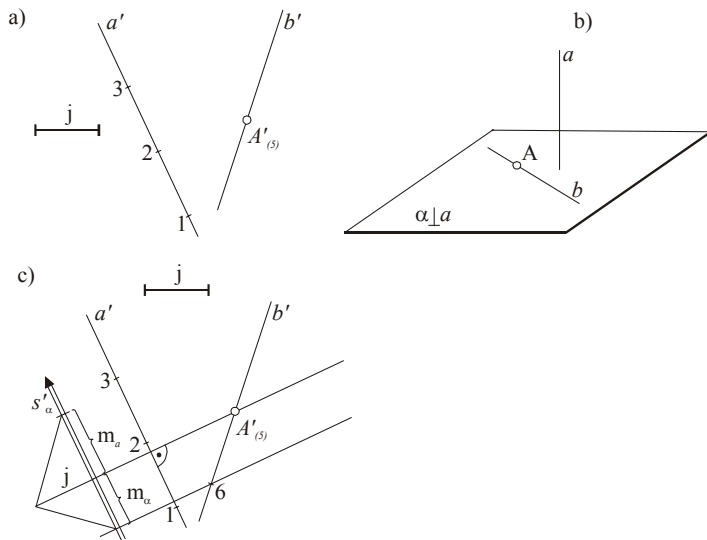
Rys. 3.36

### Ćwiczenie 18

Dane są: prosta  $a$ , punkt A(5) oraz rzut prostokątny prostej  $b$  zawierającej punkt A. Ze-stopniować prostą  $b$  tak, aby była prostopadła do prostej  $a$  (rys. 3.37a).

#### Rozwiązanie

Prostą  $b$  należy umieścić w płaszczyźnie  $\alpha$  prostopadłej do prostej  $a$ . W tym celu przez punkt A prowadzimy warstwicę  $5_\alpha$  prostopadłą do  $a'$ . Wyznaczamy trójkąt modułów i modulem  $m_a$  stopniujemy prostą  $s_\alpha$  pamiętając, aby zwroty  $a'$  i  $s'_\alpha$  były przeciwnie. Warstwicę tej płaszczyzny stopniują prostą  $b$  (rys. 3.37 b i c).

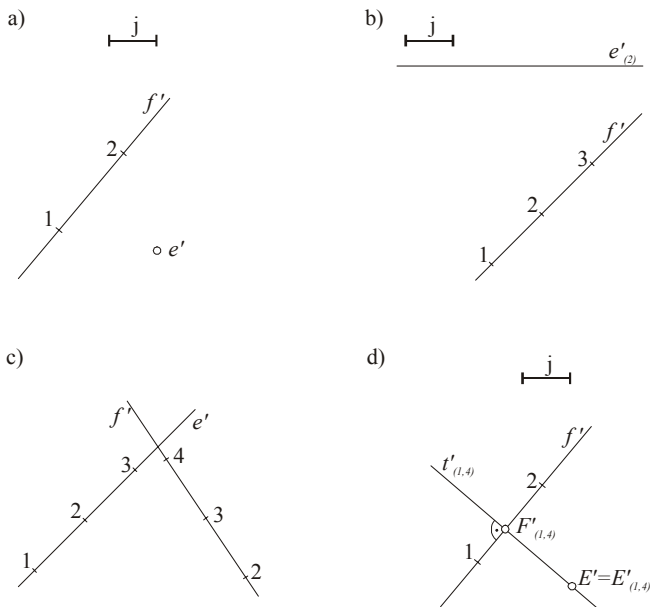


Rys. 3.37

**Ćwiczenie 19**

Dane są proste skośne  $e$  i  $f$ . Wyznaczyć prostą  $t$  prostopadłą do prostych  $e$  i  $f$  przecinającą je. Zadanie rozwiązać w przypadkach, gdy prosta  $f$  jest ogólna, zaś prosta  $e$  jest:

- 1) rzutująca (rys. 3.38a),
- 2) warstwowa (rys. 3.38b),
- 3) ogólna (rys. 3.38 c).

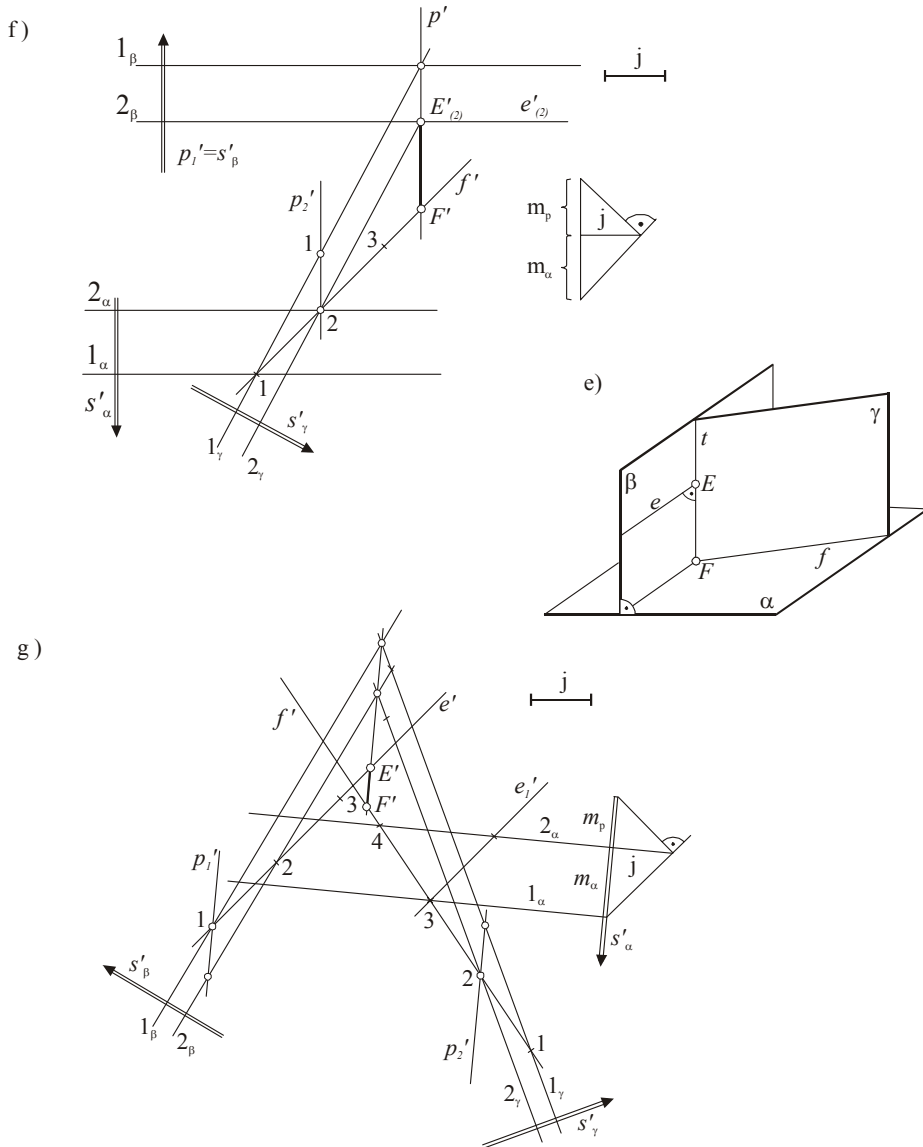


Rys. 3.38a,b,c,d

Rozwiązanie

1) Prosta  $t$  prostopadła do prostej  $e$  jest prostą warstwową i w związku z tym zachowany jest kąt prosty między  $f'$  i  $t'$ . Cechę punktów prostej wyznacza punkt przecięcia z prostą  $f$  (rys. 3.38d).

Rozwiązanie można uzyskać w sposób przedstawiony na rysunku poglądowym 3.38e. Przez jedną z prostych np.  $f$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  równoległą do drugiej prostej  $e$ . Następnie przez prostą  $e$  prowadzimy płaszczyznę  $\beta$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ , a przez prostą  $f$  płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ . Krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 3.38e,f,g



2) Na rysunku 3.38f płaszczyzna  $\alpha$  jest równoległa do prostej  $e$  warstwowej, zawiera prostą  $f$  i ma warstwicę równoległą do prostej  $e$ . Płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  poprowadzone są przez proste  $e$  i  $f$  i przecinające je proste  $p_1 = s_\beta$  i  $p_2$  prostopadłe do płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $p \parallel p_1$  i  $p \parallel p_2$  jest krawędzią tych płaszczyzn i przecina proste  $e$  i  $f$  w punktach E i F.

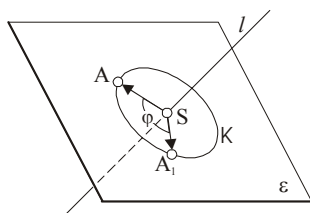
3) Gdy obie proste są ogólne (rys. 3.38g) zadanie rozwiązuje się tak samo jak w przypadku 2), z tym że płaszczyzna  $\alpha$  poprowadzona jest za pomocą prostej  $e_1 \parallel e$ ;  $e_1 f = \alpha$ .

## 9. Obroty i kłady

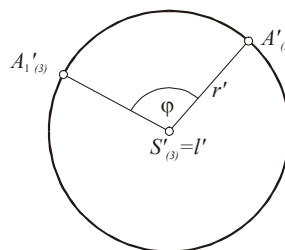
### 9.1. Obrót punktu dookoła prostej (szczególne położenia).

Ruch punktu A po pewnym okręgu dookoła prostej  $l$  nazywa się obrotem. Prosta  $l$  nazywa się osią obrotu, okrąg obrotu znajduje się w płaszczyźnie obrotu zawierającej punkt A i prostopadłej do osi obrotu  $l$ . Punkt wspólny osi obrotu i płaszczyzny obrotu nazywa się środkiem obrotu S (rys.3.39). Możemy jeszcze wyróżnić: kierunek obrotu i kąt obrotu. Promień obrotu jest to odcinek  $\langle AS \rangle$ . (Uwaga: w mechanice za dodatni kierunek obrotu uważa się ruch przeciwny do ruchu wskazówek zegara, ujemny - zgodny z ruchem wskazówek zegara).

Na rysunku w rzucie prostokątnym najłatwiej przedstawić obrót gdy oś obrotu  $l$  jest prostopadła do rzutni (rys. 3.40). W tym przypadku gdy  $l \perp \pi$ , płaszczyzna obrotu  $\varepsilon$  jest równoległa do rzutni, rzut środka obrotu  $S' = l'$ , rzut okręgu obrotu jest przystający do okręgu.  $A'_1$  jest rzutem nowego położenia punktu A.

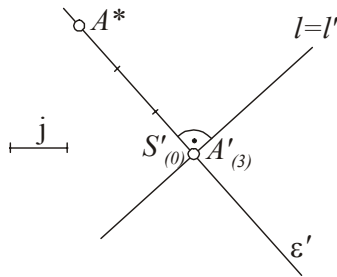


Rys. 3.39

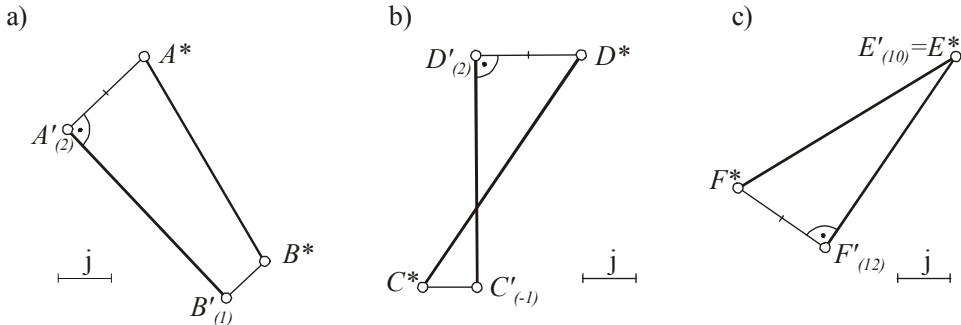


Rys. 3.40

Jeżeli prosta  $l$  zawarta jest w rzutni a rzut  $A'$  punktu A jednoczy się z  $l'$  dokonujemy obrotu o kąt  $90^\circ$  (rys. 3.41). Płaszczyzna obrotu  $\varepsilon$  jest rzutująca, więc  $\varepsilon' \perp l'$ . Punkt po obrocie oznaczony  $A^*$  znajdzie się na rzutni w odległości równej różnicy cech punktu A od prostej  $l$ . (W tym wypadku odległość ta jest równa trzem jednostkom). Punkt  $A^*$  nazywamy kładem prostokątnym punktu A na rzutnię. Za pomocą takiego kładu znajdujemy długości odcinków na rzutnię (rys. 3.42a,b) lub płaszczyznę warstwową równoległą do rzutni (rys. 3.42c). Rzut i kład tego samego punktu zawarte są w prostej którą będziemy nazywać prostą wiążącą.



Rys. 3.41



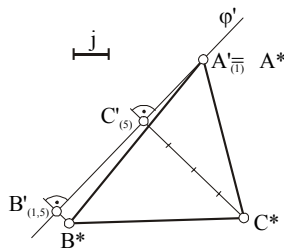
Rys. 3.42

## 9.2. Kład płaszczyzny rzutującej (kład prostokątny)

Kładem płaszczyzny nazywamy warstwowe położenie płaszczyzny. Kład płaszczyzny dokonuje się za pomocą obrotu punktu zawartego w płaszczyźnie dookoła prostej warstwowej tej płaszczyzny tak, aby cechy punktów się zównały. W przypadku płaszczyzny rzutującej jest to obrót płaszczyzny o  $90^\circ$  do położenia warstwowego.

### Ćwiczenie 20

Wyznaczyć wielkość trójkąta  $\langle A_{(1)}, B_{(1,5)}, C_{(5)} \rangle$  zawartego w płaszczyźnie rzutującej  $\varphi$ .



Rys. 4.43

### Rozwiązanie

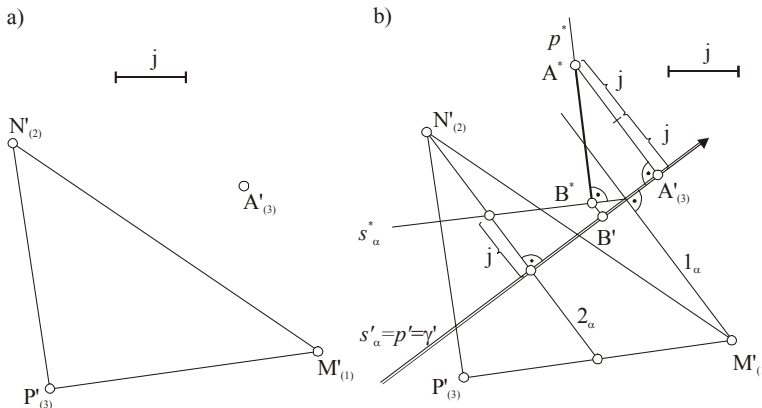
Zamiast rzutni przyjmujemy płaszczyznę porównawczą warstwową o cesze 1. Po obrocie płaszczyzny  $\varphi$  o kąt  $90^\circ$  odkładamy na prostych wiążących prostopadłych do  $\varphi'$  odcinki o długości równej różnicy cech, pomnożonej przez jednostkę. Różnica cech dla punktu B wynosi  $1,5 - 1 = 0,5$ , dla punktu C:  $5 - 1 = 4$ . Cecha punktu A względem płaszczyzny  $\varphi$  wynosi 0 (rys. 3.43)  $\langle A^*B^*C^* \rangle \equiv \langle ABC \rangle$ .

### Ćwiczenie 21

Wyznaczyć odległość punktu  $A_{(3)}$  od płaszczyzny trójkąta o wierzchołkach  $M_{(1)}$ ,  $N_{(2)}$ ,  $P_{(3)}$ . (rys. 3.44a).

#### Rozwiązanie

Wyznaczamy warstwicę płaszczyzny  $\alpha$  trójkąta, a następnie prowadzimy przez punkt A prostą  $p \perp \alpha$  (rys.3.44b). Zadanie można rozwiązać bez stopniowania prostej  $p$ , a mianowicie wprowadzając przez prostą  $p$  płaszczyznę  $\gamma \perp \pi$ . Krawędź  $\gamma$  i  $\alpha$  jest prostą spadu  $s_\alpha$ . Kreślimy kład prostokątny płaszczyzny  $\gamma$  wraz z kładem prostej  $s_\alpha$  i punktu A. W kładzie kreślimy z punktu  $A^*$  prostą  $p^* \perp s_\alpha^*$ . Punkt  $B^* = p^* \cap s_\alpha^*$ . Długość odcinka  $\langle A^*B^* \rangle$  jest miarą odległości.



Rys. 3.44

### 9.3. Kład płaszczyzny ogólnej.

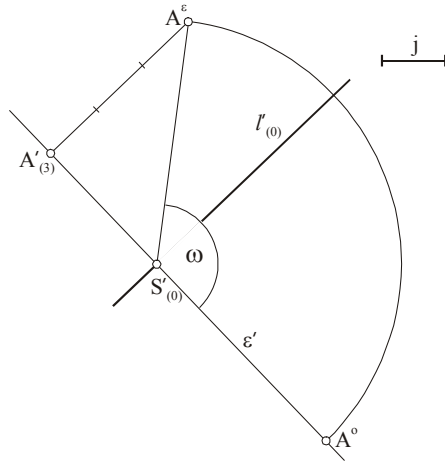
Obróćmy płaszczyznę  $\alpha$  wyznaczoną prostą  $l_{(0)}$  i punktem  $A_{(3)}$  do położenia warstwowego. W tym celu przez punkt  $A_{(3)}$  poprowadźmy płaszczyznę obrotu  $\varepsilon$  prostopadłą do prostej  $l$  która jest osią obrotu (rys. 3.45)  $A' \in \varepsilon' \perp l'$ . Zaznaczamy środek obrotu  $S = l \cap \varepsilon$ . Aby wyznaczyć promień obrotu  $r = \langle SA \rangle$  wykonujemy kład prostokątny płaszczyzny  $\varepsilon$ . Promieniem obrotu  $r$  zakreślamy łuk do przecięcia z  $\varepsilon'$ . Uzyskany punkt  $A^\circ$  jest obróconym punktem A dookoła osi  $l$  o kąt  $\omega$  taki, aby punkt A znalazł się na rzutni ( $A^\circ$  jest kładem punktu A na rzutnię).

### Ćwiczenie 22

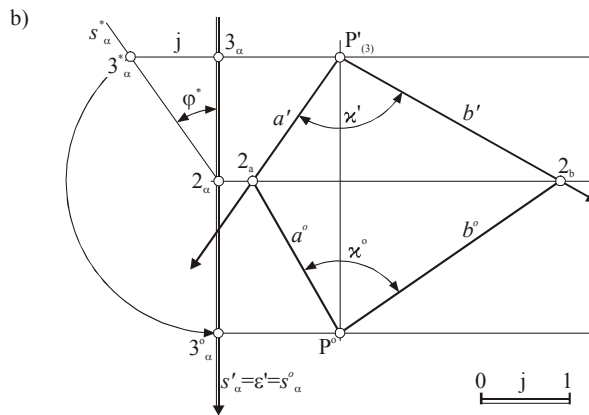
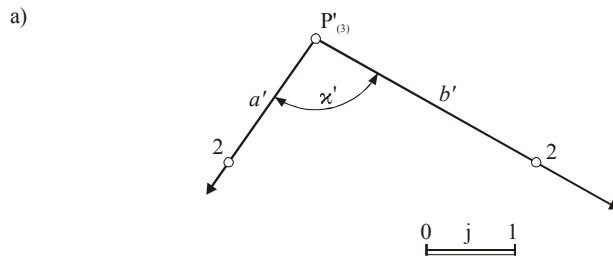
Wyznaczyć miarę kąta zawartego między prostymi przecinającymi się  $a$  i  $b$  (Rys. 3.46a) oraz miarę kąta zawartego między płaszczyzną  $\alpha = ab$  i rzutnią  $\pi$ .

#### Rozwiązanie

Kreślimy warstwicę płaszczyzny  $\alpha$  zawierającej proste  $a$  i  $b$  (rys. 3.46b). Następnie przez prostą spadu  $s_\alpha$  prowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$  obrotu i obracamy ją wraz z prostą  $s_\alpha$  o  $90^\circ$  na płaszczyznę porównawczą o cesze równej 2. Oś obrotu jest drugą warstwicą płaszczyzny  $\alpha$ . Odcinek  $\langle 2\ 3^* \rangle$  zawarty w  $s_\alpha^*$  jest promieniem obrotu dla punktu 3. Okrąg obrotu przecina  $\varepsilon'$  w punkcie  $3^\circ$ , przez który przechodzi kład warstwy 3. Kład punktu  $P_{(3)}$ :  $P^\circ$  otrzymujemy na przecięciu warstwy  $3^\circ_\alpha$  z prostą wiążącą wyznaczoną przez punkt  $P'$ . Kreślimy klady prostych  $a$  i  $b$ ;  $\kappa^\circ(a^\circ b^\circ)$  jest szukanym kątem. Kąt  $\varphi^\circ$  jest kątem między  $\alpha$  i  $\pi$ .



Rys. 3.45



Rys.3.46

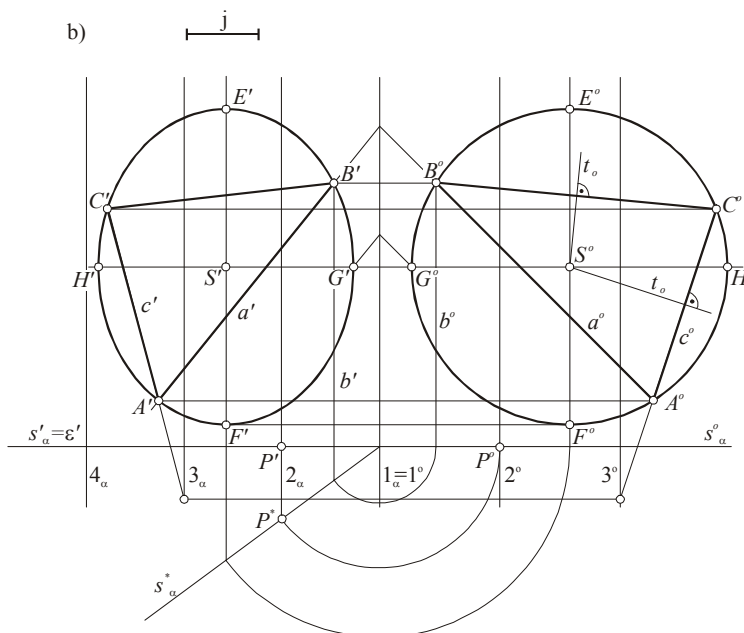
### Ćwiczenie 23

Dany jest odcinek przekątny  $\langle AD \rangle$  sześciokąta foremnego  $\langle ABCDEF \rangle$  zawartego w płaszczyźnie  $\alpha$  określonej planem warstwicowym (rys.3.47a). Wyznaczyć rzut tego sześciokąta.



*Rozwiązanie*

Obieramy warstwicę  $l$  płaszczyzny  $\alpha$  jako oś obrotu i obracamy punkt  $P_{(2)}$  do położenia na płaszczyźnie warstwowej  $l$ . Za pomocą prostych  $b$ ,  $a$  i  $c$  wyznaczonych w rzucie i kładzie znajdujemy punkty  $B$ ,  $A$  i  $C$  (rys.3.48b). Symetralne odcinków  $\langle A^\circ C^\circ \rangle$  i  $\langle B^\circ C^\circ \rangle$  wyznaczają środek okręgu opisanego na trójkącie  $\langle A^\circ B^\circ C^\circ \rangle$ . Wyznaczamy okrąg i przyjmujemy dwie średnice okręgu prostopadłe do siebie i ponadto jedną warstwową, a drugą równoległą do prostej spad. Wyznaczamy rzuty tych średnic i kreślimy elipsę. (Uwaga: konstrukcje elipsy lub owalu zastępującego elipsę są podane w rozdziale I p. 1.4).



Rys. 3.48

**Ćwiczenie 25**

Dany jest rzut płaszczyzny  $\alpha$  dwiema warstwicami:  $O_\alpha$  i  $l_\alpha$  oraz rzut wierzchołka ostrosłupa  $W'_{(2)}$ . Podstawą ostrosłupa jest kwadrat zawarty w płaszczyźnie  $\alpha$  (rys.3.49a). Wyznaczyć rzut ostrosłupa prawidłowego o wierzchołku  $W$  i podstawie będącej kwadratem  $\langle EFGH \rangle$ , zawartej w  $\alpha$ .

*Rozwiązanie*

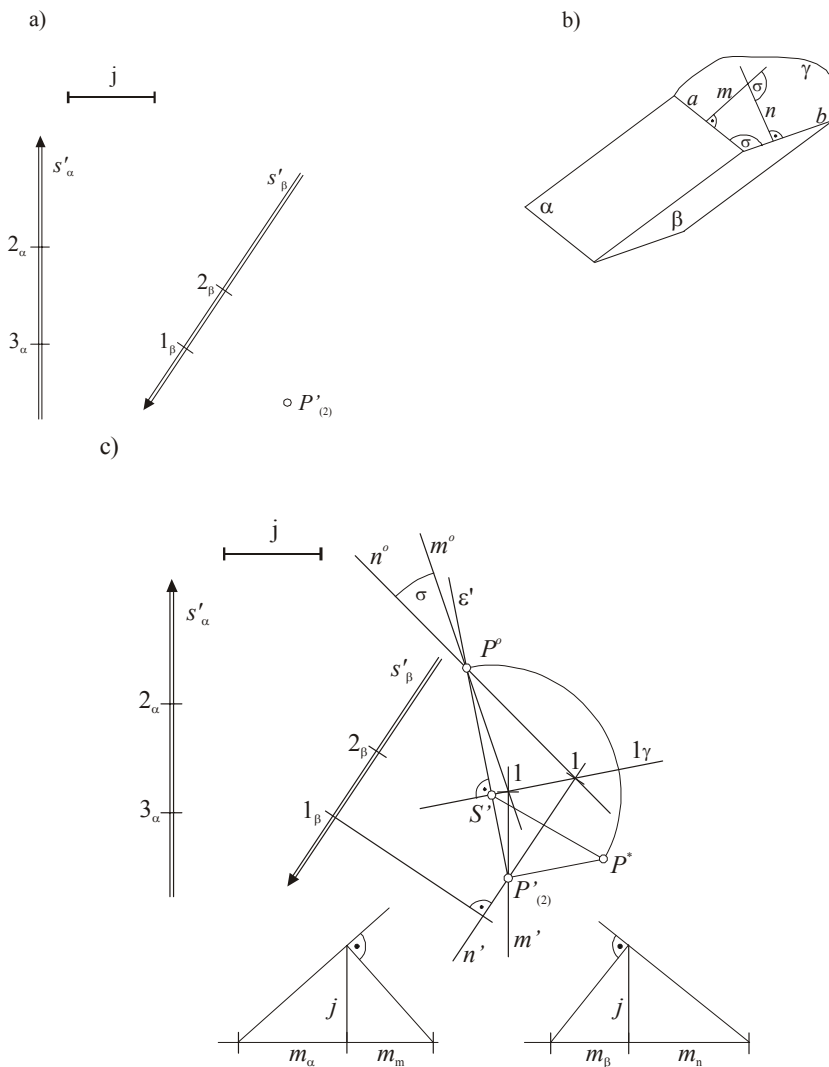
Środkiem kwadratu jest punkt  $D$  przebicia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $p$  poprowadzoną przez wierzchołek ostrosłupa prostopadle do płaszczyzny  $\alpha$ . Znajdujemy go jak w ćwic. 31 rys. 3.44. Po wyznaczeniu rzutu  $D'$  dokonujemy kładu płaszczyzny  $\alpha$ , promieniem obrotu będzie odcinek  $\langle K'D^* \rangle$  ( $d$  jest cechą punktu  $D$ ). W kładzie rysujemy kwadrat  $\langle E^\circ F^\circ G^\circ H^\circ \rangle$  o środku  $D^\circ$  i następnie rzut tego kwadratu. Cechy punktów  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  możemy wyznaczyć jak na rysunku 3.27. Rysujemy rzuty krawędzi bocznych i wyznaczamy widoczność.



*Rozwiązanie*

Miarę kąta między płaszczyznami można wyznaczyć następująco. Prowadzimy płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do obu płaszczyzn np. prostopadle do krawędzi tych płaszczyzn (rys. 3.50b). Wyznaczamy krawędzie  $a = \gamma \cap \beta$  i  $b = \gamma \cap \alpha$  oraz kład płaszczyzny  $\gamma$  wraz z prostymi  $a^\circ$  i  $b^\circ$ . Kąt mniejszy z dwu przyległych jest szukanym kątem między płaszczyznami. Powyższy sposób wyznaczania kąta został zastosowany w przypadku 1) (rys.3.50). Płaszczyzna  $\gamma$  jest rzutująca i prostopadła do warstwic. W kładzie prostokątnym płaszczyzny  $\gamma$  kąt  $\sigma$  pomiędzy  $a^*$  i  $b^*$  jest szukanym kątem (rys. 3.50c).

Zamiast kąta rzeczywistego można wyznaczyć kąt równy szukanemu (rys. 3.51b). Z dowolnego punktu przestrzeni w tym wypadku P prowadzimy proste  $m \perp \alpha$  i  $n \perp \beta$ . Proste  $m$   $n$  wyznaczają płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do  $\alpha$  i  $\beta$ . Wyznaczamy kład płaszczyzny  $\gamma = m n$ . Miara kąta  $\sigma$  między  $m^\circ$  i  $n^\circ$  mniejszego z dwu przyległych jest miarą szukanego kąta między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 3.51c).



Rys. 3.51



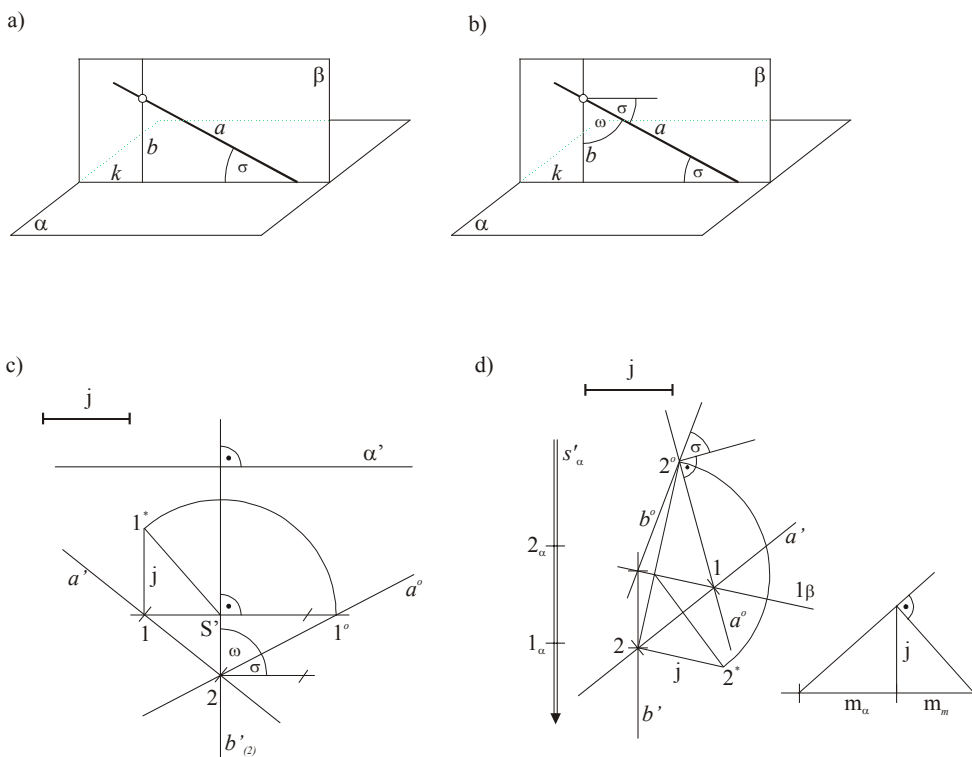
### Ćwiczenie 27

Wyznaczyć miarę kąta między prostą  $a$  i płaszczyzną  $\alpha$ :

- 1)  $\alpha$  rzutująca,  $a$  ogólna (rys. 3.52a)
- 2)  $\alpha$  ogólna,  $a$  ogólna (rys. 3.52b).

#### Rozwiązanie

Kąt między prostą  $a$  i płaszczyzną  $\alpha$  jest to kąt między prostą  $a$  i jej rzutem prostokątnym  $k$  na płaszczyznę  $\alpha$  (rys.3.52a). W tym celu z dowolnego punktu prostej  $a$  prowadzimy prostą  $b \perp \alpha$ . Wyznaczamy krawędź  $k$  płaszczyzny  $\beta = ab$  z płaszczyzną  $\alpha$ . W układzie płaszczyzny  $\beta$  wyznaczamy kąt  $\sigma$  między  $a^\circ$  i  $k^\circ$ . Miarę kąta między prostą i płaszczyzną można wyznaczyć innym sposobem. Z dowolnego punktu prostej  $a$  prowadzimy prostą  $b \perp \alpha$ . Wyznaczamy kład płaszczyzny  $\beta$  oraz kąt  $\omega$  między  $a^\circ$  i  $b^\circ$  i uzupełniamy go do  $90^\circ$  ( $\sigma = 90^\circ - \omega$ ). W obu przypadkach 1) i 2) została zastosowana metoda kąta uzupełniającego. Przedstawiają to: w przypadku 1) rys. 3.52c i w przypadku 2) rys. 3.52 d.

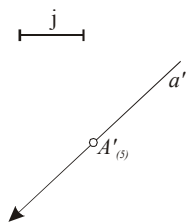


Rys. 3.52

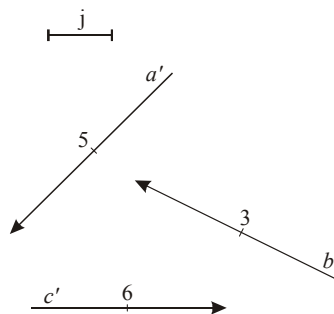
### ZADANIA

1. Dane są: rzut prostokątny prostej  $a$  z zaznaczonym na niej punktem  $A$  o cesze  $5$ , zwrot prostej i jednostka. Zestopniować prostą  $a$  tak, aby była nachylona do rzutni pod kątem  $30^\circ$  (rys.3.53).
2. a) Jaki jest moduł i nachylenie prostej prostopadłej do rzutni (rzutującej) a jaki równoległej do rzutni (warstwowej)?

b) Zestopniować rzuty prostych  $a$ ,  $b$  i  $c$  wiedząc, że prosta  $a$  jest nachylona do rzutni pod kątem  $45^\circ$ , prosta  $b$  pod kątem  $60^\circ$ , zaś nachylenie prostej  $c$  jest równe  $1/2$  (rys. 3.54).

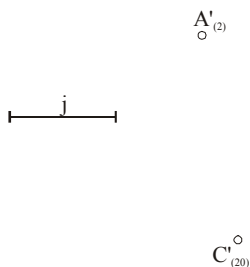


Rys. 3.53

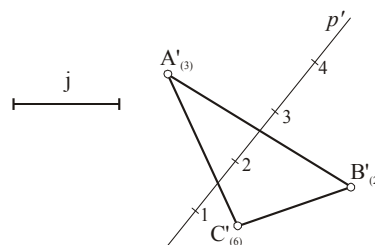


Rys. 3.54

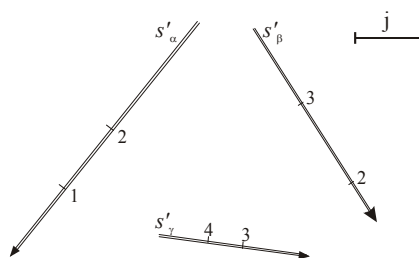
3. Dane są punkty  $A'_{(2)}$ ,  $B'_{(4)}$  i  $C'_{(20)}$ . Narysować rzuty prostej przechodzącej przez punkt  $C$  i równoległej do prostej  $AB$  oraz zestopniować ją (rys. 3.55).



Rys. 3.55

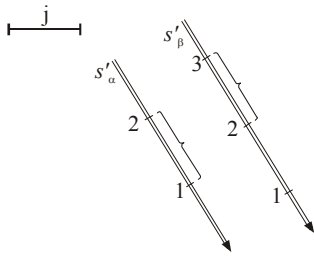


Rys. 3.56

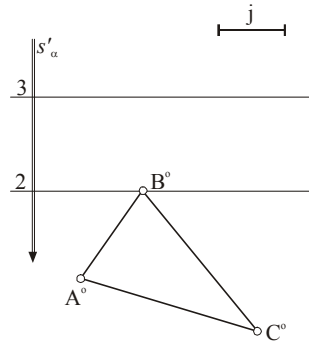


Rys. 3.57

4. Dany jest rzut trójkąta  $\langle ABC \rangle$  i prostej  $p$ . Znaleźć rzut punktu przebicia płaszczyzny trójkąta prostą (rys. 3.56) oraz ustalić widoczność prostej.
5. Wyznaczyć punkt wspólny dla trzech płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (rys. 3.57).
6. Wyznaczyć odległość dwóch płaszczyzn równoległych  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 3.58).
7. Dany jest rzut płaszczyzny  $\alpha$  oraz kład na płaszczyznę warstwową o cesze 2, trójkąta  $\langle ABC \rangle$  zawartego w  $\alpha$ . Wyznaczyć rzut trójkąta (rys. 3.59).

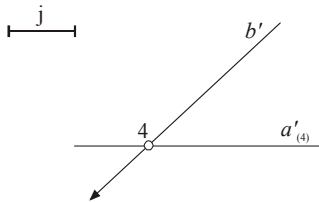


Rys. 3.58

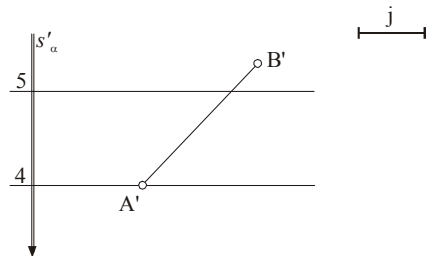


Rys. 3.59

8. Wyznaczyć miarę kąta między prostymi  $a$  i  $b$  zawartymi w płaszczyźnie  $\alpha$  o nachyleniu 3:2. Prosta  $a$  jest warstwowa (rys.3.60).
9. Dany jest rzut odcinka  $\langle AB \rangle \subset \alpha$ . Narysować rzut sześcianu  $\langle ABCDEFGH \rangle$  o podstawie  $\langle ABCD \rangle$  zawartej w  $\alpha$  (rys. 3.61) .

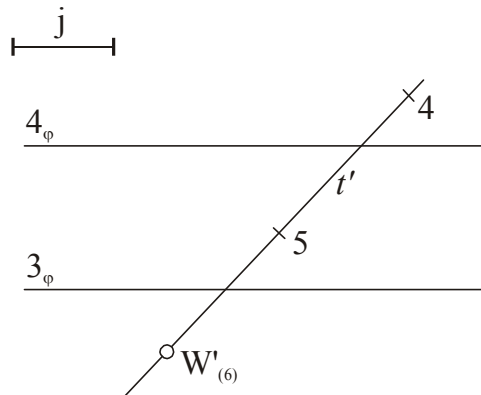


Rys. 3.60



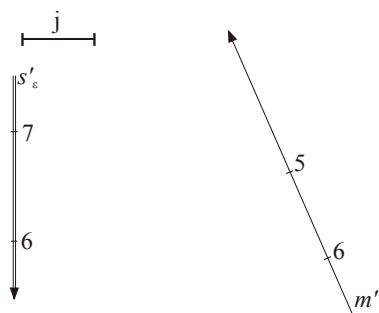
Rys. 3.61

10. Dany jest rzut płaszczyzny  $\varphi$  - planem warstwicowym oraz rzut prostej  $t$  wraz z rzutem punktu  $W \in t$  (rys.3.62). Wyznaczyć rzut ostrosłupa prawidłowego o wierzchołku  $W$  i podstawie  $\langle ABCD \rangle \subset \varphi$ . Punkt  $A \in t$ .



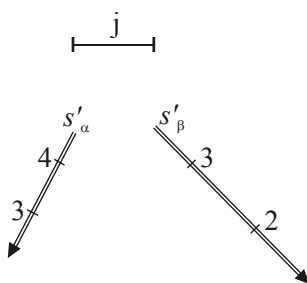
Rys.3.62

11. Dane są rzuty: prostej  $m$  i płaszczyzny  $\varepsilon$  (rys. 3.63). Wyznaczyć wielkość kąta zawartego między prostą  $m$  i płaszczyzną  $\varepsilon$ .



Rys. 3. 63

12. Dane są plany warstwiczne płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Wyznaczyć miarę kąta między tymi płaszczyznami (rys. 3.64).



Rys. 3. 64

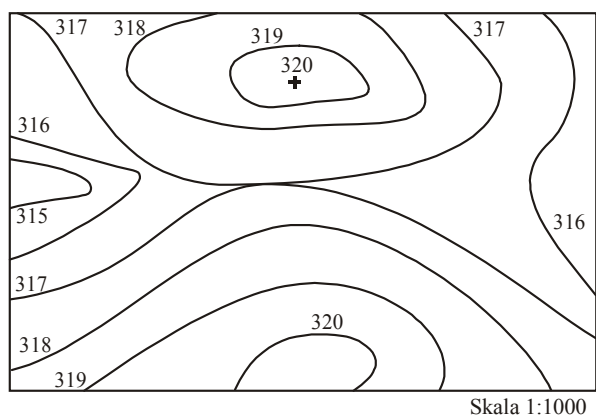
## Rozdział IV

### POWIERZCHNIE TOPOGRAFICZNE

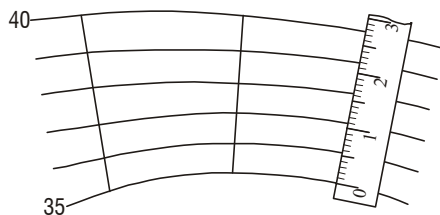
Metodę rzutu cechowanego stosuje się do przedstawiania ukształtowania terenu, czyli tzw. powierzchni topograficznej.

#### 1. Plan warstwiczny terenu

Ukształtowanie terenu określa się za pomocą pomiarów geodezyjnych. W oparciu o rzuty wyróżnionych punktów i ich cechy sporządza się rzuty warstwicy terenu. Plan warstwicy terenu jest przedstawiony na rysunku 4.1. Podaje on tylko rzuty niektórych warstwicy. Plan warstwicy rysuje się w skali. W celu zagęszczenia warstwicy kreśli się odcinki w przybliżeniu prostopadłe do danych warstwicy tak, aby ich końce leżały na danych warstwicy. Następnie przy pomocy linijki z podziałką lub poliniowanego skrawka kalki wyznacza się punkty dzielące poszczególne odcinki na wymaganą liczbę równych części; np. na rys. 4.2 na 5.



Rys. 4.1

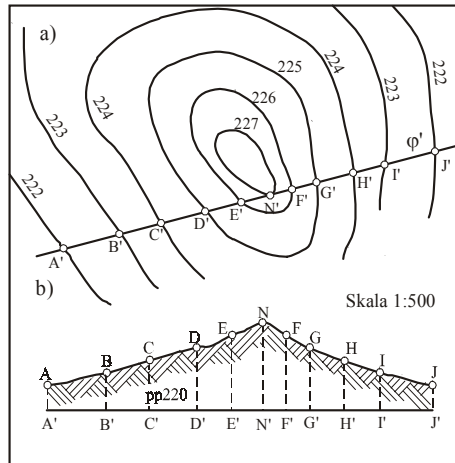


Rys. 4.2

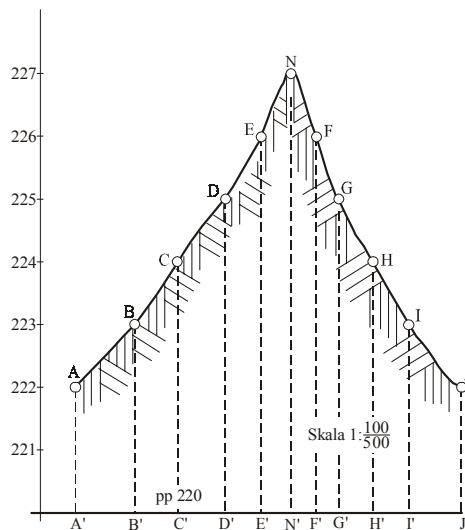
Przez otrzymane punkty podziału poprowadzono rzuty warstwicy pośrednich 36, 37, ... . Kształt warstwicy pośredniej winien być zbliżony do kształtu warstwicy ją otaczających. Czynność ta nazywa się interpolacją planu warstwicy.

## 2. Profil terenu

Płaszczyzna pionowa (rzutu) przecina powierzchnię terenu w krzywej zwanej profilem terenu.



Rys. 4.3



Rys. 4.4

### Ćwiczenie 28

Dany jest plan warstwiczny terenu oraz rzut  $\varphi'$  płaszczyzny  $\varphi \perp \pi$ . Wyznaczyć profil terenu.

#### Rozwiązanie

W celu odtworzenia linii przekroju obieramy poziomą płaszczyznę porównawczą i na nią kładziemy płaszczyznę  $\varphi$  (rys. 4.3). Kład przekroju możemy przenieść na dowolne miejsce, gdzie rysujemy linię poziomą porównawczą (na rys. 4.3: pp 220).  $\varphi'$  przecina warstw-

ce w punktach  $A', B', \dots, J'$ . Na prostą pp 220 przenosimy za pomocą cyrkla lub skrawka papieru zbiór punktów  $A', B', \dots, J'$  i na prostych prostopadłych przechodzących przez te punkty odmierzymy odcinki  $\langle A'A \rangle, \langle B'B \rangle \dots$  równe cechom punktów mierzonych od poziomu porównawczego rysowane w skali. Np. odległość A od poziomu porównawczego wynosi 2 m; cechę 2 w skali 1:500 obliczamy:  $\frac{2}{500} \text{ m} = 4 \text{ mm}$ . Najwyższy punkt N ma cechę 7, a więc  $\frac{7}{500} \text{ m} = 14 \text{ mm}$ . Punkty A, ...J łączymy linią ciągłą.

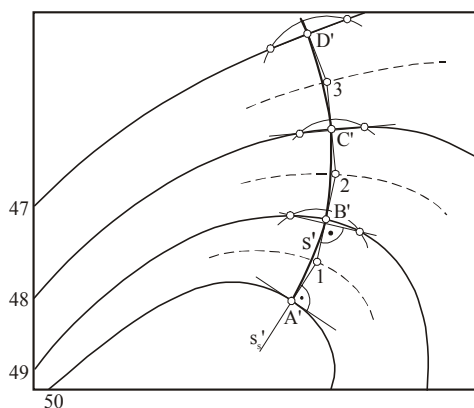
Zazwyczaj profil terenu przedstawia się w dwóch różnych skalach: długości - zgodnej ze skalą planu warstwicowego i wysokości - pięciokrotnie lub dziesięciokrotnie większej. Skalę podwójną pisze się obok profilu, np. skala 1 :  $\frac{100}{500}$  na rys. 4.4 oznacza w liczniku skalę wysokości a w mianowniku skalę długości. Dzięki takiej skali uzyskujemy lepszą wyrazistość spadków i wzniesień terenu.

### 3. Linia spadu powierzchni

Linie  $s$  zawartą w powierzchni, przecinającą kolejne warstwy pod kątem prostym nazywamy linią spadku powierzchni. Linia ta jest linią przestrzenną i w każdym punkcie powierzchni może mieć inne nachylenie. Nachylenie linii spadku w danym punkcie przyjmuje się za nachylenie powierzchni w tym punkcie.

#### Ćwiczenie 29

Wyznaczyć rzut linii spadku powierzchni topograficznej przechodzącej przez punkt A.



Rys. 4.5

#### Rozwiązanie

Wyznaczamy warstwy pośrednie (rys. 4.5) i w punkcie  $A'$  kreślimy styczną  $t$  do warstwy 50. Następnie z punktu  $A'$  kreślimy prostopadłą do  $t'$ , która przecina warstwę 49,5 w punkcie 1. Z punktu 1 kreślimy łuk okręgu takim promieniem, aby przeciął rzut warstwy 49 w punktach blisko siebie położonych. Sieczna warstwy 49 jest prostopadłą do odcinka  $\langle 1 2 \rangle$ , którego koniec 2 należy do warstwy 48,5. Odcinek  $\langle 1 2 \rangle$  przeciął warstwę 49 w punkcie  $B'$ . W ten sposób wyznaczamy linię łamaną 1,2,3... i punkty  $C'$  i  $D'$ . Następnie kreślimy rzut  $s'$  linii spadku  $s$  tak, aby punkty  $A', B' \dots$  były punktami styczności do odcinków  $\langle 1 2 \rangle, \langle 2 3 \rangle, \dots$

## 4. Linia stokowa

Linie o stałym nachyleniu zawartą w powierzchni topograficznej nazywamy linią stokową.

### Ćwiczenie 30

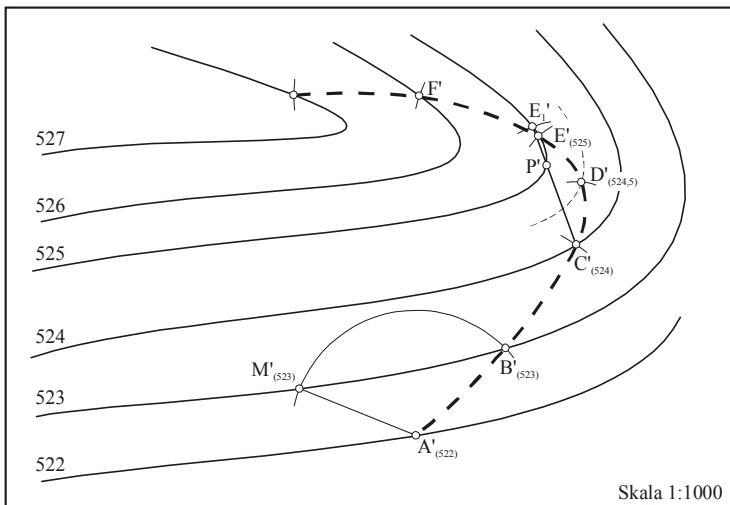
W terenie danym planem warstwicowym wyznaczyć z punktu A linię stokową o nachyleniu  $n_1 = 5\%$ ,  $j = 1$  m.

### Rozwiązanie

Odcinek linii stokowej o końcach mających cechy różniące się o  $1$  j, będzie miał nachylenie równe  $5\%$ . Rzut tego odcinka, a więc moduł:  $m_1 = \frac{j}{n_1} = \frac{1\text{m}}{0,05} = \frac{100\text{m}}{5} = 20\text{m}$ . Plan

warstwicowy przedstawiony jest w skali  $1:1000$ , a więc  $1\text{m} = 1000\text{mm}$ .  $\frac{1}{1000} = 1\text{mm}$ . Wobec tego moduł linii stokowej:  $m_l = 20 \cdot 1\text{mm} = 20\text{mm}$ .

Konstrukcja linii stokowej przedstawiona jest na rys.4.6. Z punktu A' kreślimy łuk okręgu promieniem  $20\text{mm}$ , przecina on warstwice 523 w punktach B' i M'. Wybieramy punkt B' i powtarzamy konstrukcję otrzymując punkt C'. Zbiór punktów ABC tworzy linię o stałym nachyleniu  $5\%$ , z tym że zamiast linii łamanej kreślimy przybliżając ją krzywą - na ogół styczną do niej. Jeżeli kolejny łuk o  $r = m_1$  przecina warstwice następną w takim punkcie jak punkt E<sub>1</sub> na warstwie 525, że odcinek <CE<sub>1</sub>> przecina warstwice 525 również w punkcie P, oznacza to, że punkty C, E<sub>1</sub> i P nie należą do linii stokowej. Nachylenie odcinka <CP> jest większe od  $5\%$ , zaś odcinek <PE<sub>1</sub>> jest poziomy. W takim przypadku drogą interpolacji wyznaczamy warstwice pośrednią i łuki kreślimy za pomocą promienia równego  $\frac{1}{2} m_1 = 10\text{mm}$ . Otrzymujemy punkty D i E. W dalszym ciągu, przy użyciu pełnego modułu skonstruowano punkty F.... Opisana konstrukcja nazywa się *t r a s o w a n i e m* linii stokowej i stosowana jest przy wyznaczaniu tras dróg i kolei.



Rys. 4.6



### Ćwiczenie 31

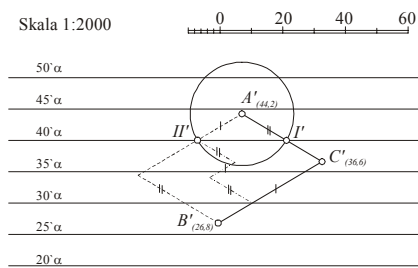
Na rysunku 4.7, w skali 1:2000 dany jest rzut planu warstwicyowego powierzchni  $\alpha$ , terenu płaskiego, oraz rzuty cechowane punktów  $A'$ (44,2) i  $B'$ (26,8) punktów A i B tego terenu. Punkty A i B należy połączyć drogą o nachyleniu 1:8. Wykreślić rzut osi drogi.

#### Rozwiązanie

Ponieważ przyjęto warstwice co 5 m jednostka równa się 5m.

5m w skali 1:2000 to  $\frac{5000(mm)}{2000} = 2,5 \text{ mm}$  (1m  $\Rightarrow$  0,5mm).

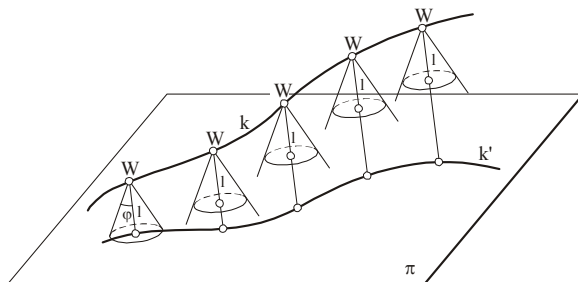
Obliczamy moduł powierzchni stokowej o nachyleniu 1:8 dla stożka stokowego o wierzchołku  $A'$  (44.2). Różnica cech między punktem A i warstwicą  $40_{\alpha}$  wynosi 4,2, więc  $m = 4,2 \cdot 8 = 33,6\text{m}$ . W skali 1:2000 jest to:  $33,6 \cdot 0,5\text{mm} = 16,5\text{mm}$ . Z punktu  $A'$  kreślimy okrąg o promieniu  $r = 16,5\text{mm}$ .; przecina on warstwicę 40 w punktach I i II. Z punktu  $A'$  rysujemy prostą  $A'I$ , a z punktu  $B'$  prostą równoległą do prostej  $A'II$ . Proste te przecinają się w punkcie  $C'$ . Łamana  $A'C'B'$  jest jedną z możliwości tras drogi. Inne możliwości pokazują linie: kreskowa i punktowa na rys. 4.7.



Rys. 4.7

## 5. Powierzchnia stokowa

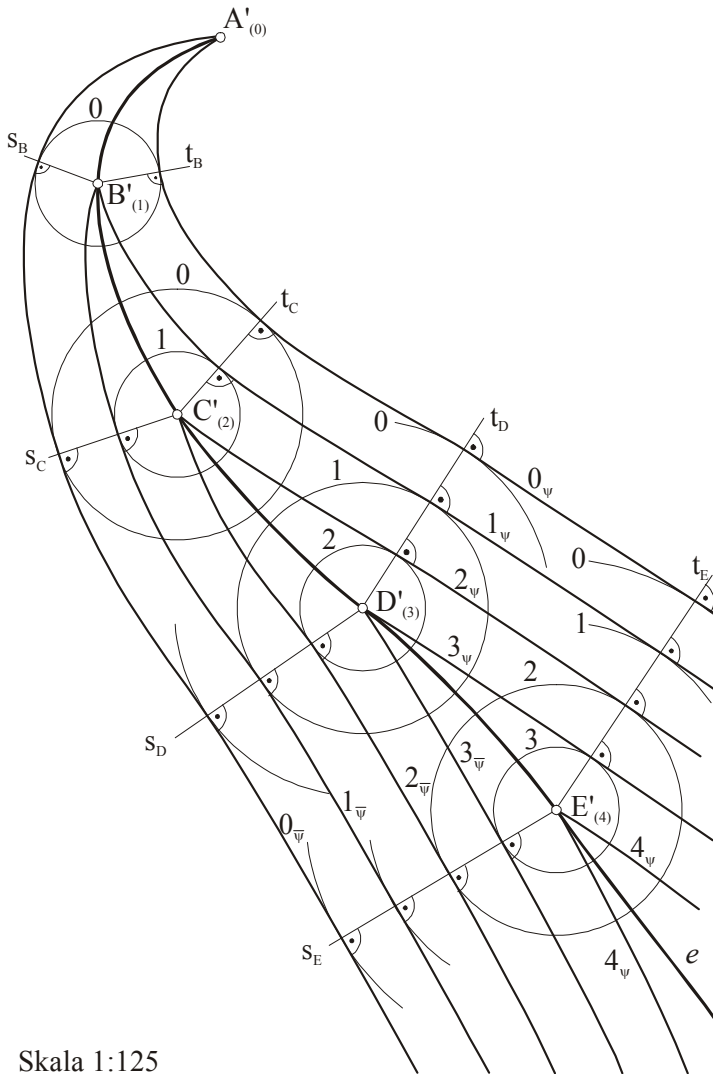
Powierzchnia stokowa jest powierzchnią o stałym nachyleniu. Rzuty warstwicy powierzchni stokowej są liniami równoległymi. Najprostszą powierzchnią stokową jest powierzchnia stożka obrotowego. Jeżeli przez krzywą (prostą) chcemy poprowadzić powierzchnię (płaszczyznę) o stałym nachyleniu, to ustawiamy stożek obrotowy o osi pionowej i wierzchołku W zawartym w krzywej. Stożek porusza się w sposób ciągły w przestrzeni tak, że punkt W porusza się po krzywej (prostej)  $k$ . Powierzchnia styczna do kolejnych położenia stożka jest powierzchnią stokową (rys. 4.8).



Rys. 4.8

**Ćwiczenie 32**

Dany jest zestopniowany rzut linii  $e$ . Wyznaczyć rzut planu warstwicowego powierzchni stokowej  $\psi$  o nachyleniu 4:5 przechodzącej przez tę linię. Jednostka = 1 m, skala 1 : 125.



Skala 1:125

Rys. 4.9

*Rozwiązanie*

Obliczamy moduł powierzchni stokowych. Jednostka równa 1m w skali 1:125 wyniesie 8 mm:  $j = \frac{1000\text{mm}}{125} = 8 \text{ mm}$ .

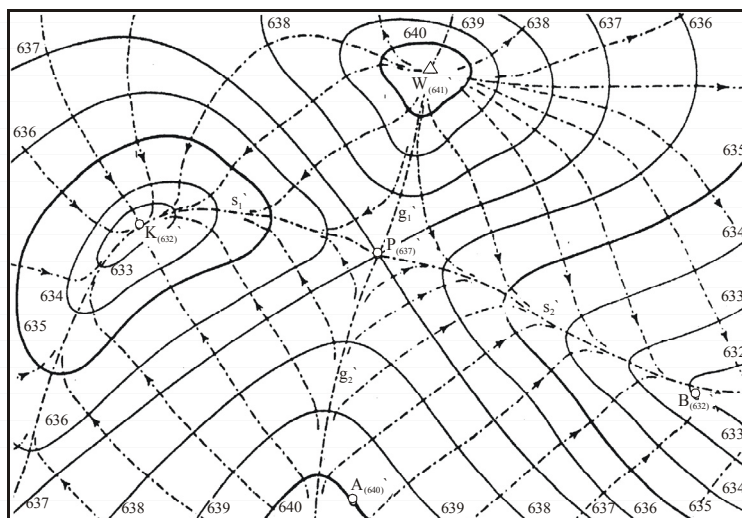
Obliczamy moduł powierzchni stokowej pamiętając, że moduł jest odwrotnością nachylenia (rozdział III p.2). Jeżeli  $n=4:5$  to moduł  $m = \frac{5}{4} \cdot j$ , a więc  $\frac{5}{4} \cdot 8\text{mm} = 10\text{mm}$ . Na rysunku 4.9 punkty główne krzywej  $e$ : B,C,D,E... przyjmujemy za wierzchołki stożków obrotowych

o nachyleniu równym 4 : 5. Kolejne warstwy tych stożków są okręgami o promieniach równych  $r_1 = m_{\bar{\psi}}$ ,  $r_2 = 2 \cdot m_{\bar{\psi}}$ . Z punktu A' o cesze 0 kreślimy linię  $0_{\psi}$  i  $0_{\bar{\psi}}$  styczne do okręgów o cesze 0. Z punktu B' linie  $1_{\psi}$ ,  $1_{\bar{\psi}}$ . Rzuty dalszych warstw kreślimy podobnie. Linie te tworzą rzut planu warstwicowego dwóch powierzchni stokowych  $\psi$  i  $\bar{\psi}$  o nachyleniu 4 : 5 zawierających linię  $e$ .

Powierzchnie stokowe stosuje się przy projektowaniu dróg, tras kolejowych, kanałów.

## 6. Charakterystyczne linie i punkty powierzchni topograficznej

Na planie warstwicowym terenu odwzorowano zbiór linii spadu tego terenu (rys.4.10). Linie  $s_1, s_2, \dots$ , ku którym zbiegają się linie spadu nazywamy liniami ściekowymi. Linie  $g_1, g_2, \dots$ , od których oddalają się linie spadu nazywamy liniami grzbietowymi. Najwyższy punkt terenu jak W, z którego we wszystkich kierunkach wychodzą linie spadu nazywamy punktem szczytowym; a teren otaczający szczytem. Punkt najniższy położony nazywamy punktem kotlinowym, a okoliczny teren kotliną, np. w punkcie kotlinowym schodzą się linie spadu terenu okolicznego. Zazwyczaj kotlina jest naturalnym zbiornikiem wody opadowej. Zaobserwujemy, że od punktu szczytowego W o cesze 641 teren wzdłuż linii  $g_1$  opada do punktu P, a następnie od punktu P wzdłuż linii  $g_2$  wznosi się. Z kolei począwszy od punktu kotlinowego K o cesze 632 wzdłuż linii  $s_1$  wznosi się do punktu P, a następnie wzdłuż linii  $s_2$  obniża się. Punkt P o cesze 637 nazywa się punktem siodłowym, a teren otaczający siodłem lub przełęczą.



Rys. 4.10

## 7. Zastosowania rzutów cechowanych w projektowaniu robót ziemnych

### 7.1. Plantowanie terenu.

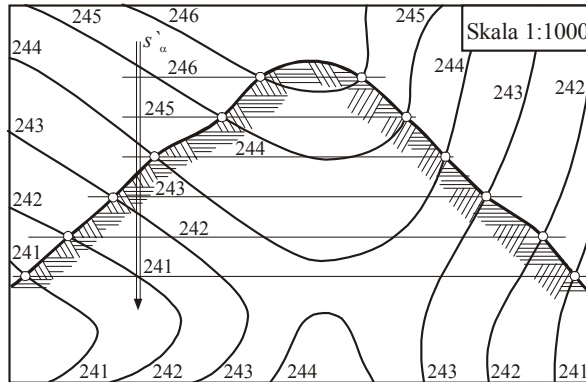
Plantowaniem terenu nazywa się przecięcie powierzchni topograficznej płaszczyzną nierzutującą i odrzucenie części terenu znajdującej się nad płaszczyzną.

### Ćwiczenie 33

Dany jest plan warstwiczny powierzchni terenu w skali 1:1000. Ściąć stok terenu płaszczyzną  $\alpha$  daną prostą spadu i planem warstwicowym.

#### Rozwiązanie

Wyznaczamy punkty przecięcia się warstwic płaszczyzny z warstwicami powierzchni posiadającymi te same cechy i wyznaczamy linię przekroju (operacja taka nazywa się plantowaniem terenu) (rys. 4.11).



Rys. 4.11

## 7.2. Geometryczne wyznaczanie zakresu robót ziemnych przy projektowaniu dróg, boisk itp.

### Ćwiczenie 34

Dany jest plan warstwiczny powierzchni topograficznej w skali 1:200 oraz rzuty punktów A i B ( $A'_{(292)}$  i  $B'_{(289,5)}$ ) w których wiercenie geologiczne natrafiło na strop i spąg złoży użytkowego występującego w postaci warstwy o rozciągłości E-W i upadzie w kierunku S, o kącie upadu  $30^\circ$  (rozciągłość - kierunek prostych warstwowych, upad - kierunek prostej spadu). Podać miąższość (grubość) złoży, oraz wyznaczyć wychodnię złoży (rys. 4.12a).

#### Rozwiązanie

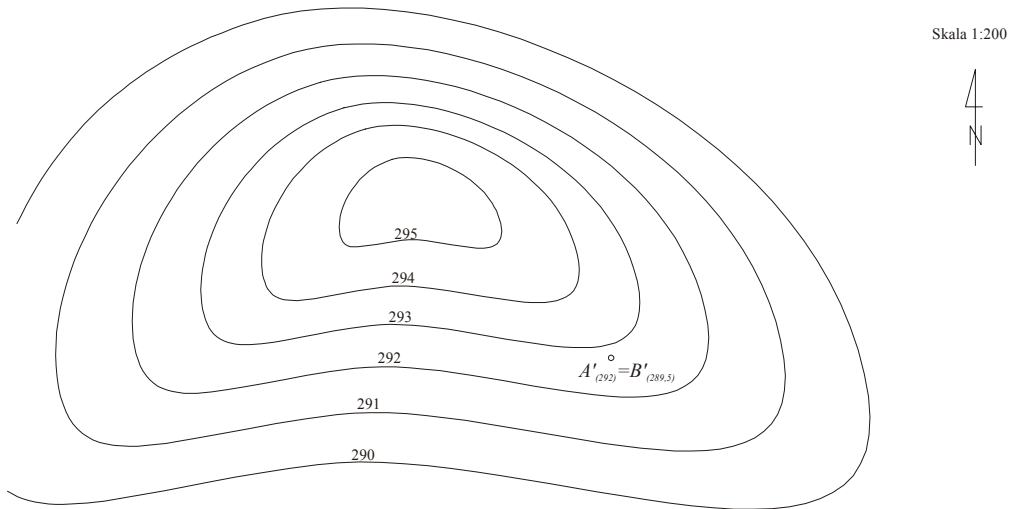
Przez punkty  $A'_{(292)}$  i  $B'_{(289,5)}$  prowadzimy warstwicę płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  o cechach  $292_\alpha$  i  $289,5_\beta$  i kierunku W-E oraz linie spadu  $s_\alpha$  i  $s_\beta$ . Płaszczyzna  $\alpha$  jest płaszczyzną stropu złoży,  $\beta$  - spągu złoży. Przecinamy obie płaszczyzny płaszczyzną  $\varepsilon$  rzutującą, prostopadłą do obu płaszczyzn (rys. 4.12b). Prosta  $a$  jest krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varepsilon$ ,  $b$  jest krawędzią płaszczyzn  $\beta$  i  $\varepsilon$ . Obracamy płaszczyznę  $\varepsilon$  wraz z prostymi  $a$  i  $b$  o  $90^\circ$  i otrzymujemy układ prostokątny prostych  $a$  i  $b$ :  $a^*$  i  $b^*$ . Na rysunku 4.12b kład został wykonany na płaszczyźnie warstwową o

cesze 286. W skali 1:200  $1\text{m}=1000\text{mm}$ . Obliczamy:  $1000 \cdot \frac{1}{200} = 5\text{mm}$ . Od prostej  $\varepsilon'$  odmierzymy dla przesuniętego punktu A  $6 \times 5\text{mm}$  i otrzymujemy  $A^*$  ponieważ  $292-286=6\text{j}$ . A dla przesuniętego punktu B  $3,5 \times 5\text{mm}$  ( $289,5-286=3,5\text{j}$ ) i otrzymujemy punkt  $B^*$ . Przez punkty  $A^*$  i  $B^*$  prowadzimy pod kątem  $30^\circ$  proste  $a^*$  i  $b^*$  przecinające  $\varepsilon'$  w warstwicach 286. Wyznaczamy moduł obu płaszczyzn, stopniujemy proste spadu i rysujemy warstwicę płaszczyzn. Płaszczyzna  $\alpha$  przecina powierzchnię terenu w linii  $k_1$  a płaszczyzna  $\beta$  w linii  $k_2$  (porównaj rysunek 4.11). Przestrzeń między liniami  $k_1$  i  $k_2$  jest wychodnią złoży. Miąższość złoży możemy zmierzyć na rys. 4.12b. Jest nią wielkość odcinka  $\langle B^*C \rangle$  podanego w skali 1:200, lub obliczyć z trójkąta prostokątnego  $\langle A^*B^*C \rangle$ .

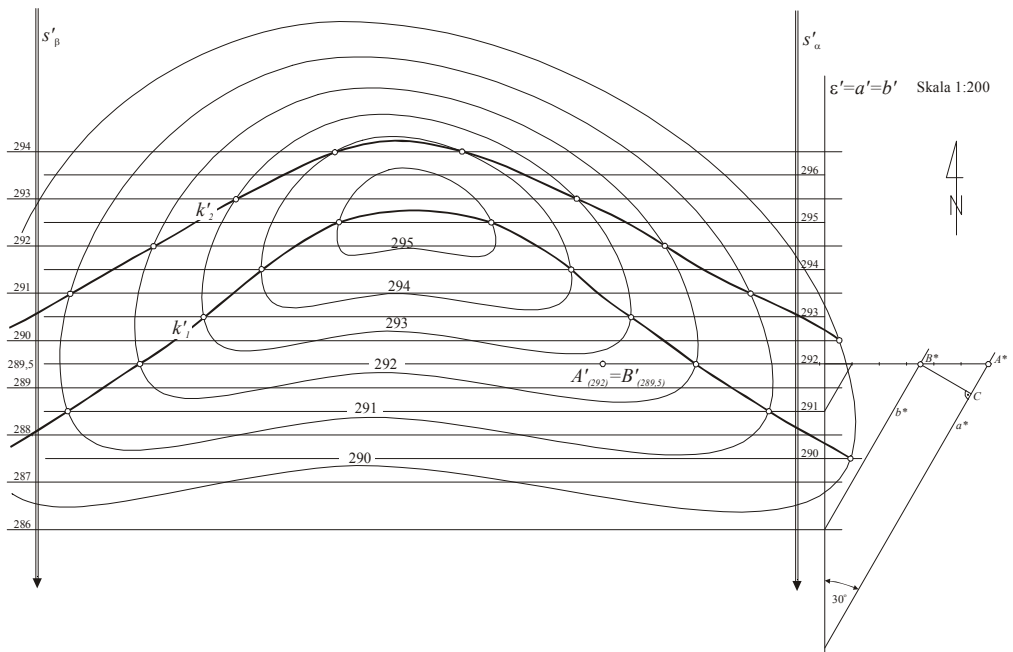
Jeżeli miąższość nazwiemy  $x = |BC|$ , a wielkość odcinka przeciwprostokątnej  $|B^*A^*|$  nazwiemy  $v$ , gdzie  $v = 292\text{m} - 289,5\text{m} = 2,5\text{m}$  i kąt przy wierzchołku B równa się  $30^\circ$  to  $x = v \cdot \cos 30^\circ$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2,5 \text{ m}$$

co w przybliżeniu wynosi 2,2m



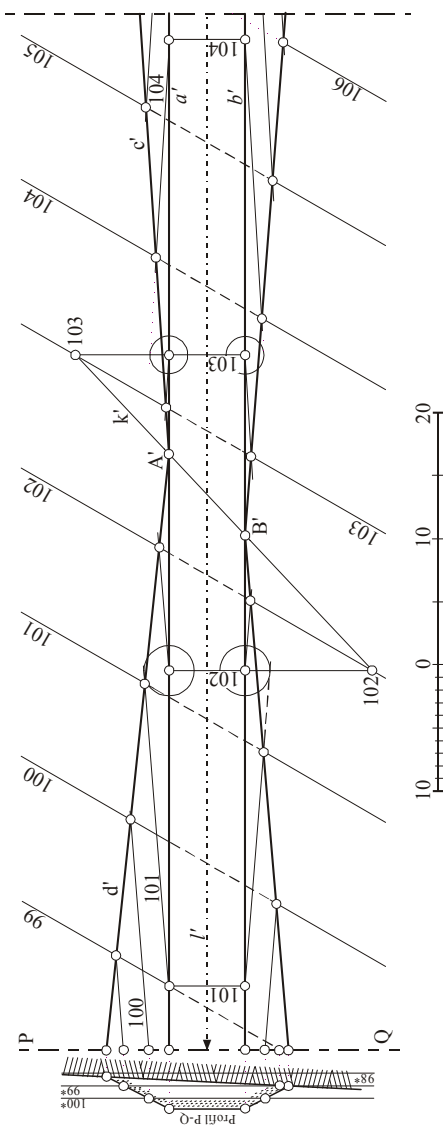
Rys. 4.12a



Rys. 4. 12b

### Ćwiczenie 35

Dana jest prosta spadu stoku terenu przebiegającego w formie płaszczyzny o spadku  $n_t=10\%$  i oś  $l$  drogi o szerokości 6m i nachyleniu  $n_d=4\%$ , przecinającą ten stok. Wyznaczyć granice robót ziemnych. Dla skarp nasypów przyjąć  $n_n=1:2$ , wykopów  $n_w = 1 : 1,5$ . Przyjąć skalę rysunku 1:500, jednostkę  $j = 1\text{ m}$  (rys. 4.13a).



Rys. 4.13

### Rozwiązanie

Obliczenia: 1m w skali 1:500 to jest  $1000 \cdot \frac{1}{500}$  (mm) = 2mm.

Nachylenie terenu = 10% to jest  $\frac{10}{100}$  j; moduł terenu =  $\frac{1}{n_t} = \frac{100}{10} \cdot 2\text{mm} = 20\text{mm}$ .

Nachylenie drogi 4% to jest  $\frac{4}{100}$  j; moduł drogi  $\frac{1}{n_d} = \frac{100}{4} \cdot 2\text{mm} = 50\text{mm}$ .

Szerokość drogi = 6m to jest  $6 \cdot 2\text{mm} = 12\text{mm}$ .

Nachylenie wykopu = 1:1,5; moduł wykopu  $\frac{1}{n_w} = \frac{1,5}{1} \cdot 2\text{mm} = 3\text{mm}$ .

Nachylenie nasypu = 1:2; moduł nasypu  $\frac{1}{n_n} = \frac{2}{1} \cdot 2\text{mm} = 4\text{mm}$ .

Kreślimy rzuty prostych  $a' b'$  ograniczających koronę drogi i odległych od rzutu jej osi  $l$  o 6 mm (rys. 4.13b) następnie kreślimy warstwicę drogi odległą od siebie o  $m_d = 50$  mm.

W praktycznych rozwiązaniach dobiera się tak wysokość drogi, aby ilość ziemi wykopanej równała się ilości ziemi nasypanej. Wyznaczamy linię  $k$  - rzut krawędzi terenu z koroną drogi, odcinek  $\langle A'B' \rangle$  jest linią zerową robót ziemnych. Po tej stronie od linii zerowej, po której warstwicę korony drogi mają wyższe cechy od warstw terenu musimy zaprojektować nasypy; po tej stronie, po której warstwicę terenu mają wyższe cechy od warstw korony drogi; musimy zaprojektować wykopy.

Dla wyznaczenia skarp stosujemy konstrukcję omówioną w tym rozdziale w punkcie 5, ćwic. 32, rys. 4.9. Warstwicę skarp wykopu wyznaczamy kreśląc w punktach głównych prostych  $a'$  i  $b'$  o cechach 103 okręgi o promieniach  $m_w = 3$  mm i z punktów 104 na prostych  $a'$  i  $b'$  kreślimy styczne do okręgów. Pozostałe warstwicę: 103, 105, 106 kreślimy równoległe do stycznych. Otrzymamy w ten sposób plan warstwicowy wykopu drogi. Warstwicę wykopu przecinają się z równoimiennymi warstwicami terenu w punktach wyznaczających rzut krawędzi  $c$  ( $c'$ ) - krawędzi wykopu z terenem. Podobnie wykreślamy warstwicę skarp nasypu. W punktach 102 prostych  $a'$  i  $b'$  wykreślamy okręgi o promieniach równych  $m_n = 4$  mm. Z punktów 101 prostych  $a' b'$  kreślimy styczne do okręgów, a następnie warstwicę równoległą: 102, 100, 99. Linia (prosta)  $d'$  jest rzutem krawędzi powierzchni terenu z powierzchnią nasypu. Linia  $d$  nazywa się stopą nasypu. W zadaniu został wykonany przekrój poprzeczny drogi i terenu wzdłuż linii P Q.

### Ćwiczenie 36

Dany jest plan warstwicowy terenu w skali 1:250 oraz rzut punktu P o cesze 108,5 m. Zaprojektować poziomy taras o wymiarach 16m x 6,4 m na wysokości 108,5 m, dla którego punkt P jest środkiem a w kierunku osi  $m$  znajduje się dłuższy wymiar tarasu. Od tarasu zaprojektować drogę o szerokości 3,2 m. Droga na długości 5m jest płaska, następnie opada. Przyjąć nachylenie drogi 22,7%. Nachylenie skarp nasypów 1:1,2, nachylenie skarp wykopów 4:3,2. Wyznaczyć zakres robót ziemnych oraz dwa przekroje wzdłuż linii A-B i C-D (rys. 4.14a).

### Rozwiązanie

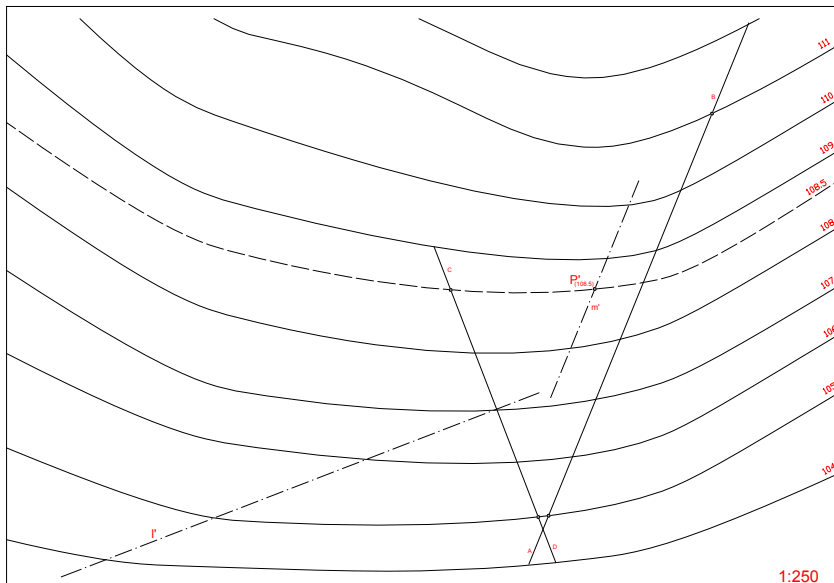
Obliczenia: 1m w skali 1:250 to  $\frac{1000}{250} = 4\text{mm}$ .

Nachylenie drogi wynosi 22,7% to moduł drogi równa się  $\frac{1}{n_d} = \frac{100}{22,7} \cdot 4 = 17,85 \approx 18$  mm.

Nachylenie nasypów równe 1:1,2, to moduł nasypów  $= \frac{1,2}{1} \cdot 4 = 4,8 \text{ mm} \approx 5 \text{ mm}$ .

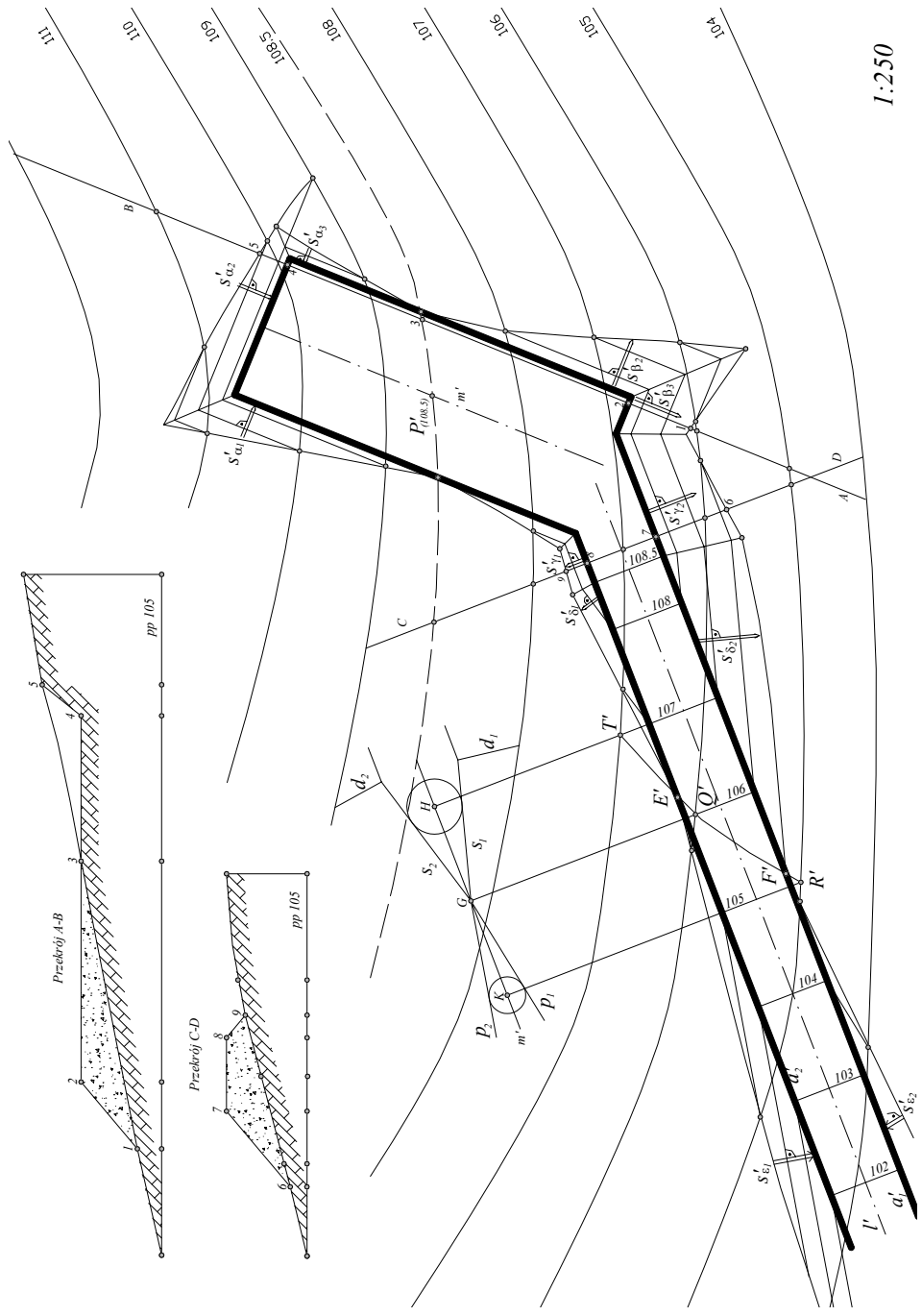
Nachylenie wykopów równe 4:3,2, to moduł wykopów równa się  $\frac{3,2}{4} \cdot 4 \text{ mm} = 3,2 \text{ mm} \approx 3 \text{ mm}$ .

Rysujemy prostokąt o środku P, o wymiarach 16m x 6,4m, co w skali 1:250 wynosi: 64 mm x 26,6 mm (rys. 4.14b). Prostokąt ten leży w płaszczyźnie poziomej o cese 108,5m. Warstwica terenu 108,5 jest granicą przejścia części tarasu leżącego na nasypie w część leżącą w wykopie. Granica ta nazywa się linią zerową robót ziemnych. Przez krawędzie tarasu prowadzimy skarpy wykopu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  o module 3,2mm i nasypu  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  o module 4,8 mm. Warstwice płaszczyzn tych skarp są równoległe do odpowiednich krawędzi tarasu. Wyznaczamy linię przenikania skarp z terenem, oraz wzajemne krawędzie sąsiednich skarp. Na długości 5m prowadzi od tarasu droga pozioma o szerokości 3,2 m (w skali 1:250 – 12,8 mm) biegnąca w nasypie. Warstwice skarp nasypu są równoległe do krawędzi drogi, a ich moduł wynosi 4,8 mm. Następnie droga obniża się, a jej moduł przy nachyleniu 22,7% wynosi około 18 mm. Wyznaczamy prostą  $k'$  będącą krawędzią powierzchni terenu z płaszczyzną drogi. Jest nią linia T-Q-R. Linia  $k$  rozdziela drogę na część leżącą na nasypie i część leżącą w wykopie. Przez krawędzie  $a_1$  i  $a_2$  prowadzimy skarpy nasypów, których warstwice wyznaczono jako proste równoległe do stycznych  $s_1$  i  $s_2$  okręgu, zakreślonego z punktu H promieniem równym  $m_n = 4,8 \text{ mm}$ . Warstwice skarp wykopu wyznaczamy równoległe do prostych  $p_1$  i  $p_2$  stycznych do okręgu o środku K i promieniu  $m_w = 3,2 \text{ mm}$ . Po wyznaczeniu skarp, wyznaczamy ich krawędzie z powierzchnią terenu. Krawędzie wzajemne skarp nasypów są dwusiecznymi kątów między warstwicami. Dla przejrzystości rysunku mogą być wyznaczane w innym miejscu np. krawędź płaszczyzn  $\delta_1$  i  $\gamma_1$  jest równoległa do prostej  $d_1$  a krawędź płaszczyzn  $\delta_2$  i  $\gamma_2$  do prostej  $d_2$ . Na oddzielnych rysunkach podano profile A-B i C-D wykonane w tej samej skali (rys. 4.14b).



Rys.4.14a





1:250

Rys. 4.14

### Ćwiczenie 37

Dany jest plan warstwicowy terenu oraz rzut  $l'$  osi drogi z jej punktem niwelacyjnym  $N'_{(81)}$ , oraz zwrotem osi  $l$ . Wyznaczyć fragment drogi o szerokości 8m, nachyleniu 12,6%. Nachylenie skarp wykopów wynosi 1/1, nasypów 4/5. Skala rysunku 1:250 (rys.4.15a).

#### Rozwiązanie

Obliczenia: 1m w skali 1:250 to  $1000 \cdot \frac{1}{250} = 4\text{mm}$ . Szerokość drogi:  $7 \cdot 4 = 28 \text{ mm}$ .

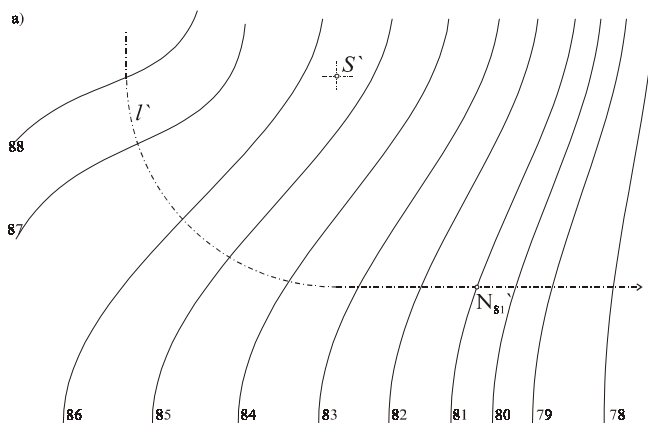
Moduł drogi przy nachyleniu 12,6% wynosi:  $\frac{1}{n_d} = \frac{100}{12,6} \cdot 4 \cong 32\text{mm}$ . Moduł nasypów wynosi

$\frac{1}{n_n} = \frac{5}{4} \cdot 4 = 5 \text{ mm}$ . Moduł wykopów wynosi 1:1= 4mm. Kreślimy krawędzie korony drogi

równoległe do osi  $l$  w odległości 4m równe w skali 1 :250 16mm (rys. 4.15b). Stopniujemy oś drogi  $l$  modułem drogi równym 32mm począwszy od punktu  $N'_{(81)}$  zgodnie ze zwrotem osi (strzałka oznacza obniżenie się osi). Warstvice drogi są prostopadłe do osi i stopniują jej krawędzie. Krawędź powierzchni drogi z powierzchnią terenu jest trudna do wyznaczenia ze względu na to, że warstvice obu powierzchni są do siebie prawie równoległe i nie przecinają się w obrębie rysunku. Punkty zerowe robót ziemnych I i II na krawędziach drogi gdzie nasyp przechodzi w wykop wyznaczamy innym sposobem niż na rys. 4.14 i 4.13 . Lewa część rysunku począwszy od warstwicy 81 przedstawia drogę położoną w wykopie. Kreślimy warstvice stożków o wierzchołkach w punktach krawędzi drogi o całkowitych cechach i promieniach: pierwszym równym modułowi wykopów = 4mm i dalszych rosnących kolejno o 4mm.

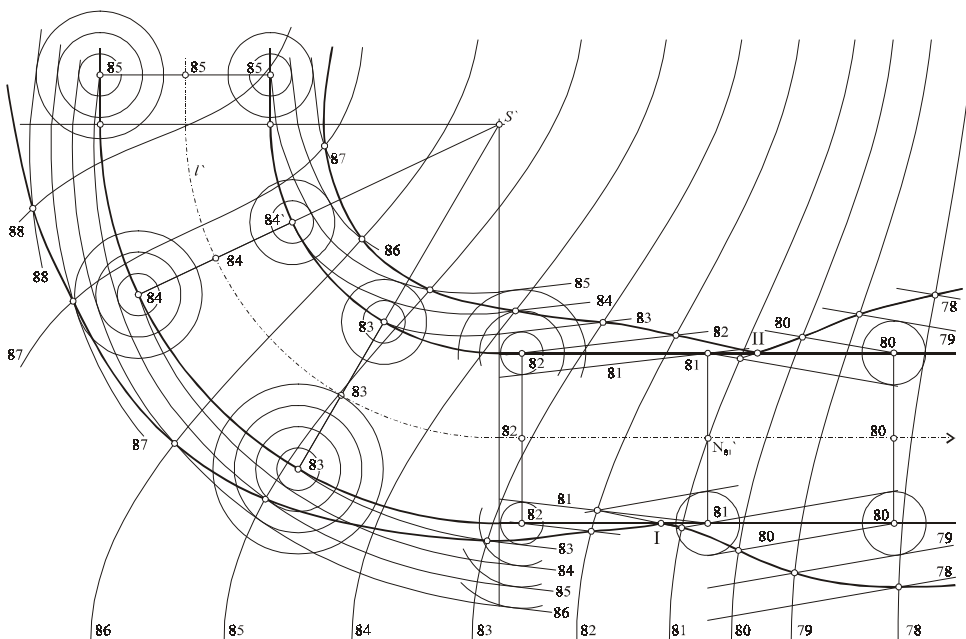
Warstvice skarp wykopów kreślimy z punktów krawędzi korony drogi o całkowitych cechach stycznie kolejno do pierwszego, drugiego i dalszych okręgów. Zwracamy przy tym uwagę, aby cechy tych warstwic wzrastały przy oddalaniu się od drogi.

Z prawej strony rysunku droga ma warstvice o cechach wyższych od warstwic terenu, a więc przebiega na nasypie. Dla wyznaczenia warstwic skarp nasypów zakreślamy okręgi w punktach krawędzi drogi o cechach 80 i promieniu równym modułowi tych skarp równym 5mm. Warstvice o cechach 81 kreślimy przez punkty krawędzi o cechach 81 stycznie do tych okręgów od strony osi drogi. Dalsze warstvice są do nich równoległe i odległe od siebie o  $m_n=5\text{mm}$ . Przy oddalaniu się od drogi cechy warstwic nasypu maleją. Na koniec wyznaczamy krawędzie nasypów i wykopów z powierzchnią terenu, wyznaczając punkty przecięcia warstwic o jednakowych cechach. Krawędzie te przecinają brzeg drogi w punktach I i II (punkty zerowe robót ziemnych).



Rys. 4.15a

b)



Rys. 4.15b

### Ćwiczenie 38

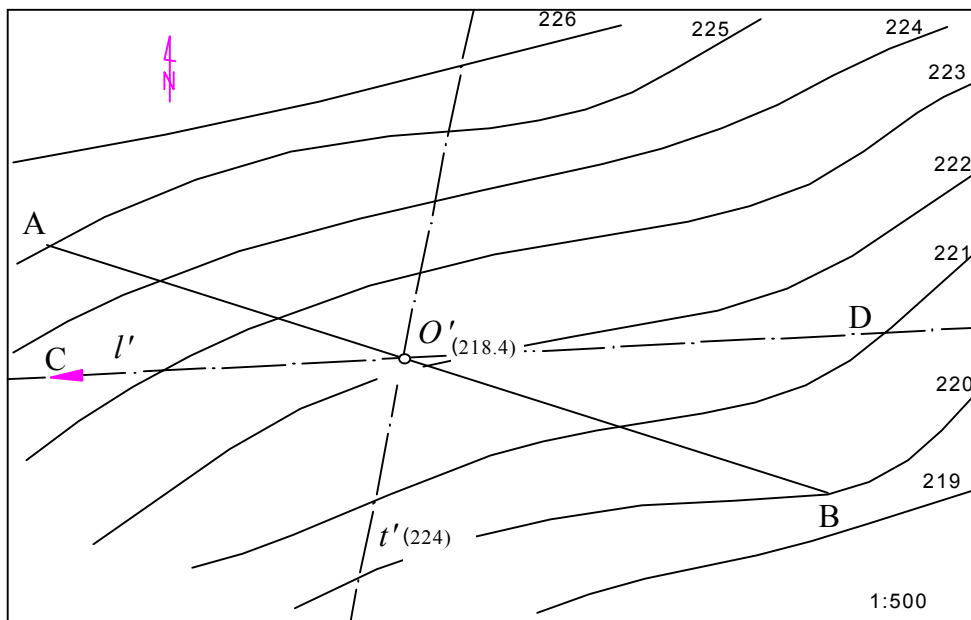
Dany jest plan warstwicy powierzchni terenu w skali 1:500 (rys. 4.16a). W terenie tym zaprojektować trasę linii kolejowej i krzyżującą się z nią drogę. Oś trasy kolejowej jest linia warstwowa  $t$  o cesze 224 m, szerokość trasy wynosi 5,2 m. Oś drogi  $l$  przechodzi przez punkt  $O$  o cesze 218,4 m i ma nachylenie 4%, szerokość drogi wynosi 6,7 m. Kąt między liniami  $t$  i  $l$  wynosi  $75^\circ$ . Wykreślić w skali 1:500 plan trasy kolejowej i drogi wraz ze skarpami nasypu i wykopu. Nachylenie skarp nasypu wynosi 1:4,5; wykopu - 1:2,5. Wykreślić ponadto dwa profile: - wzdłuż linii  $AB$  oraz wzdłuż linii  $CD$  należącej do osi  $l$  drogi na odcinku skrzyżowania. Profile wykreślić w skali 1:  $\frac{250}{500}$  (rys. 4.16c).

### Rozwiązanie

Obliczenia: 1m w skali 1:500 to  $\frac{1000}{500}=2\text{mm}$ . 1m w skali 1:250 to  $\frac{1000}{250}=4\text{mm}$ . Nachylenie osi drogi  $l = 4\%$ , to moduł drogi =  $\frac{100}{4} \cdot 2 = 50 \text{ mm}$ . Nachylenie skarp nasypów = 1:4,5, to moduł =  $\frac{4,5}{1} \cdot 2 = 9\text{mm}$ . Nachylenie skarp wykopów = 1:2,5, to moduł skarp wykopów =  $2,5 \cdot 2 = 5\text{mm}$ . Równoległe do rzutu osi  $t'$  w odległości  $\frac{1}{2}$  szerokości trasy = 5,2 mm kreślmy brzegi trasy kolei  $a$  i  $b$ . Są to linie warstwowe (poziome) o cechach 224.

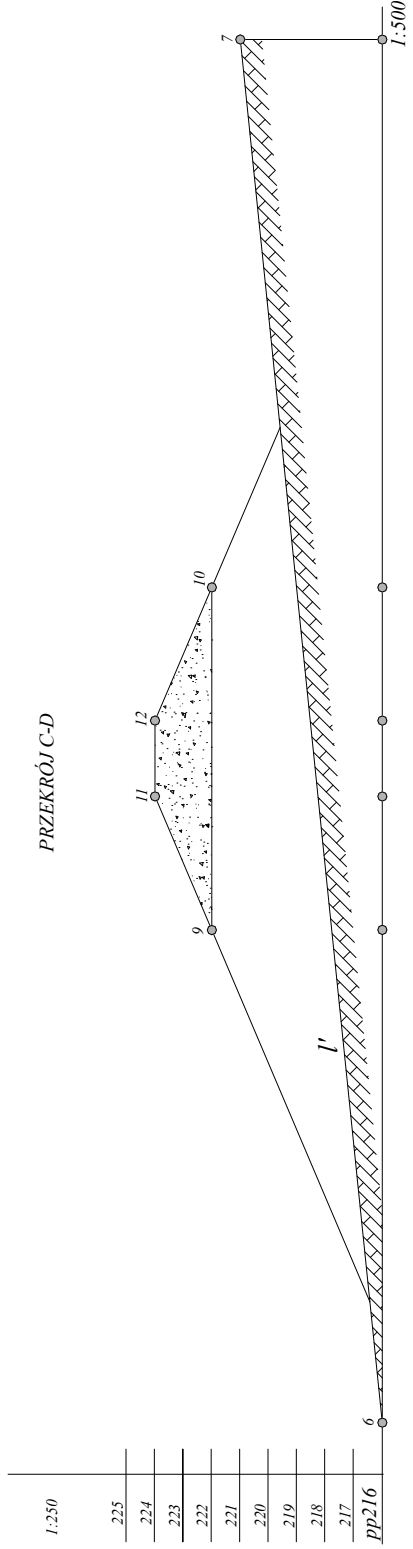
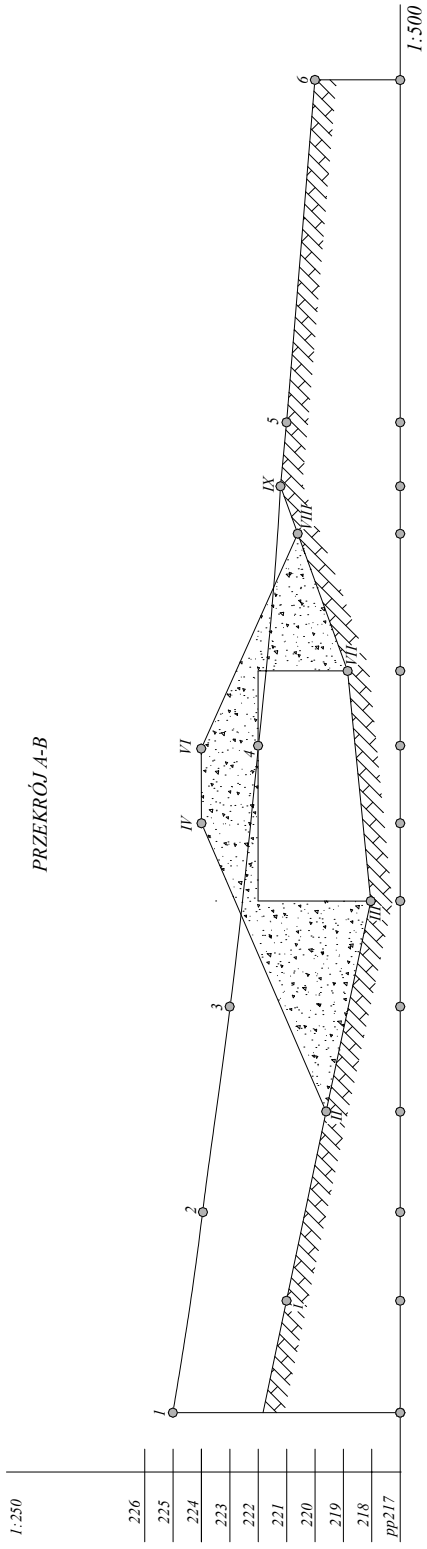
Równoległe do linii  $l'$  rzutu osi drogi w odległości  $\frac{1}{2}$  szerokości drogi = 6,7 mm kreślmy linie  $c$  i  $d$  - brzegi drogi. Stopniujemy drogę modułem drogi = 50mm w obie strony zaczynając od punktu  $O(218,4)$ . Zwrot osi  $l$  oznacza obniżanie się drogi. Przecięcie jednorodnych warstwic drogi z warstwicami terenu w punktach znajdujących się po obu stronach

drogi pozwala wyznaczyć krawędź (linią zerową robót ziemnych). Punkty E i F przecięcia  $k'$  z rzutami brzegu drogi - liniami  $c'$  i  $d'$  są punktami gdzie nasyp przechodzi w wykop. Łatwo zauważyć, że na wschód od linii  $k$  droga biegnie po nasypie, na zachód w wykopie. W celu wyznaczenia kierunku warstwic nasypu na linii  $m$  równoległej do  $l$ , w punkcie przecięcia się z warstwicą drogi 221 kreślimy okrąg o promieniu równym  $m_n=9\text{mm}$  i z punktu przecięcia  $m$  z warstwicą drogi 220 styczne do tego okręgu  $s_1$  i  $s_2$ . Warstwicę nasypu są równoległe do linii  $s_1$  i  $s_2$ . Powtarzamy tę konstrukcję dla skarp wykopu: na linii  $n||l$  w punkcie przecięcia się z warstwicą drogi 220 kreślimy okrąg o promieniu równym modułowi skarp wykopu = 4mm, oraz styczne do tego okręgu z punktu przecięcia  $n$  z warstwicą 221. Warstwicę wykopu są równoległe do linii  $s_3$  i  $s_4$ . Wyznaczamy krawędzie przecięcia się skarp nasypów z powierzchnią terenu za pomocą punktów przecięcia się jednoimiennych warstwic. Trasa kolei jest pozioma, wobec tego warstwicę skarp nasypów i wykopów są równoległe do brzegu trasy  $a$  i  $b$ . Odległości poszczególnych warstwic dla nasypów równają się 9mm, dla wykopów 5mm. Warstwicą terenu 224 jest linia zerowa robót ziemnych i przecina  $a'$  i  $b'$  w punktach G i H w których nasyp przechodzi w wykop. W kierunku północnym od tej linii trasa biegnie w wykopie, w kierunku południowym na nasypie. Wyznaczamy krawędzie nasypów i wykopów z terenem. Następnie wyznaczamy krawędzie  $k_1, k_2, k_3, k_4$  - wzajemne krawędzie skarp nasypu trasy kolejowej ze skarpami wykopu trasy drogi. Rysunek 4.16c przedstawia dwa profile, czyli przekroje płaszczyznami rzutującymi wzdłuż linii A-B i C-D. Wysokość wiaduktu kolejowego wynosi 3,5m.



Rys. 4.16a





Rys. 4.16c

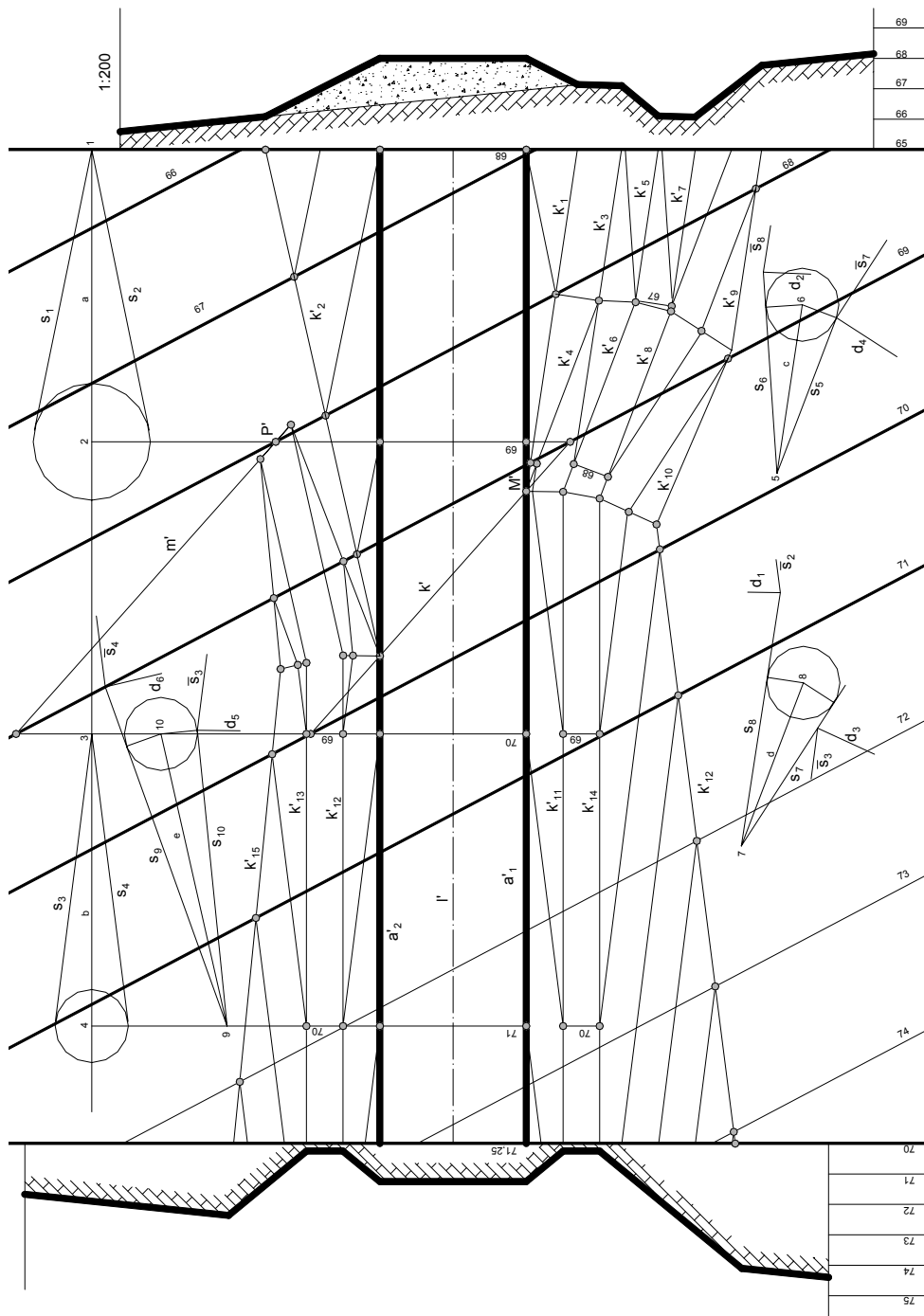
### Ćwiczenie 39

W terenie płaskim danym w skali 1:200 o nachyleniu ~22% zaprojektować drogę o osi  $l$  szerokości 4,8m i spadku 10,4%. Nasyp i wykop drogi zabezpieczyć rowami. Nachylenie skarp nasypu przyjąć 5:9,5, wykopu 5:6. Głębokość rowu 1m, szerokość dna rowu 1,2m. Wyznaczyć profile poprzeczne drogi biegnącej w nasypie i wykopie (rys. 4. 17a).

Obliczenia: 1m w skali 1:200 to  $\frac{1000}{200}=5\text{mm}$ . Przy nachyleniu 22% =  $\frac{22}{100}$  moduł terenu =  $\frac{100 \cdot 5}{22} = 22,7\text{mm}$ . Przy nachyleniu drogi 10,4% =  $\frac{10,4}{100}$  moduł drogi =  $\frac{1}{n_d} = \frac{100}{10,4} \cdot 5 = 48\text{mm}$ . Nachylenie wykopów 5:6, to moduł wykopów = 6mm. Nachylenie nasypów 5:9,5 to moduł nasypów = 9,5 mm.

W płaszczyźnie terenu o module 22,7mm projektowaną drogę wyznaczają proste równoległe  $a_1$  i  $a_2$  odległe od siebie o 4,8 m (24mm); moduł = 48 mm, zwrot zgodny ze zwrotem  $l'$  (rys. 4.17). Część drogi przebiega w nasypie, część w wykopie. Granicą przejścia nasypu w wykop jest linia  $k$  - krawędź przecięcia płaszczyzny drogi z powierzchnią terenu.

Przez proste  $a_1$  i  $a_2$  prowadzimy skarpy nasypu i wykopu, zabezpieczone przed działaniem wody za pomocą rowów od strony wznoszącego się nad drogą terenu. Szerokość rowów wynosi 1,2 m (6 mm w skali 1:200) a głębokość rowów = 1m (5 mm w skali 1:200). Nachylenie skarp rowu = 5:6. Aby woda nie podmywała nasypu, przejście skarpy nasypu w skarpe rowu dokonuje się za pomocą ławeczki szerokiej na 1,4m. Warstwie skarp nasypu  $\beta_1$  i  $\beta_2$  wyznaczamy jak w ćwiczeniach poprzednich na rys. 4.14, 4.15 i 4.16. Z punktu 2 na prostej  $a$  równoległej do  $a_{1,2}$  kreślimy okrąg o promieniu równym  $m_r = 9,5\text{mm}$ . Z punktu 1, odległego od punktu 2 o moduł drogi, kreślimy styczne  $s_1$  i  $s_2$  do tego okręgu. Warstwie płaszczyzny  $\beta_1$  są równoległe do  $s_1$  płaszczyzny  $\beta_2$  do  $s_2$ . Wyznaczamy krawędzie  $k_1$  i  $k_2$  skarpy nasypu  $\beta_1$  i  $\beta_2$  z terenem. Rysujemy linię  $k_3$  równoległą do  $k_1$  w odległości 7mm. Proste  $k_1$  i  $k_3$  są liniami spadu ławeczki biegnącej w terenie stałym. Zaczynając od punktu 68 krawędzi  $k_3$  zwięzamy ławeczkę do punktu M na krawędzi drogi. Przez proste  $k_3$  i  $k_4$  oraz  $a_1$  i  $a_2$  prowadzimy skarpy rowu o nachyleniu 5:6. Krawędzie skarp rowu, a także dna rowu są do siebie równoległe, a odległość ich rzutów:  $a'_1$  i  $k'_{11}$ ,  $a'_2$  i  $k'_{12}$ ,  $k'_{12}$  i  $k'_{13}$ ,  $k'_{11}$  i  $k'_{14}$  a także jednakowo odległe od siebie są krawędzie:  $k'_1$  i  $k'_3$ ,  $k'_3$  i  $k'_5$ ,  $k'_5$  i  $k'_7$ ,  $k'_4$  i  $k'_6$ ,  $k'_6$  i  $k'_8$ . Ich odległości wynoszą około 1,2m (6mm). Warstwie poszczególnych skarpy wyznaczamy następująco: na płaszczyźnie ławeczki przyjmujemy proste  $c \parallel k_3$  i  $d \parallel k_4$ , oraz na płaszczyźnie drogi prostą  $b \parallel a_1$ . Z punktów 4, 6, 8 tych prostych zakreślamy okręgi o promieniu 6mm, następnie z punktów 3, 5, 7 prowadzimy do nich styczne. Warstwie skarpy przechodzącej przez  $k_3$  są równoległe do  $s_6$ , skarpy przechodzącej przez  $k_4$  są równoległe do  $s_8$ , skarpy przechodzącej przez  $a_1$  są równoległe do  $s_4$ , a warstwie skarpy przechodzącej przez  $a_2$  są równoległe do  $s_3$ . Krawędzie między sąsiednimi skarpami są dwusiecznymi kątów utworzonych przez ich jednoimienne warstwie. I tak: krawędź skarpy przechodzących przez  $a_1$  i  $k_1$  jest równoległa do  $d_1$ ; krawędź skarpy przechodzących przez  $k_4$  i  $k_3$  jest równoległa do  $d_2$ . Powierzchnia dna rowu dla drogi biegnącej w wykopie jest równoległa do powierzchni drogi, natomiast powierzchnia dna rowu wzdłuż drogi biegnącej na nasypie i wzdłuż krawędzi  $k_3$  jest równoległa do powierzchni ławeczki, a na odcinku między krawędziami  $k_6$  i  $k_8$  jest powierzchnią prostoliniową (wierzchołki czworokąta ograniczającego tę część rowu nie leżą w jednej płaszczyźnie). Praktycznie nie ma to znaczenia ze względu na mały obszar tej powierzchni. Przez krawędzie rowu prowadzimy płaszczyzny skarpy  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ . Warstwie płaszczyzny  $\gamma_1$  są równoległe do  $s_3$ ,  $\gamma_2$  do  $s_4$ ,  $\gamma_3$  do  $s_5$ ,  $\gamma_4$  do  $s_6$ . Krawędzie sąsiednich skarpy są dwusiecznymi kątów jakie tworzą ich jednoimienne warstwie, są one równoległe do prostych  $d_3$  i  $d_4$ . W celu zabezpieczenia nasypu przed



Rys. 4.17



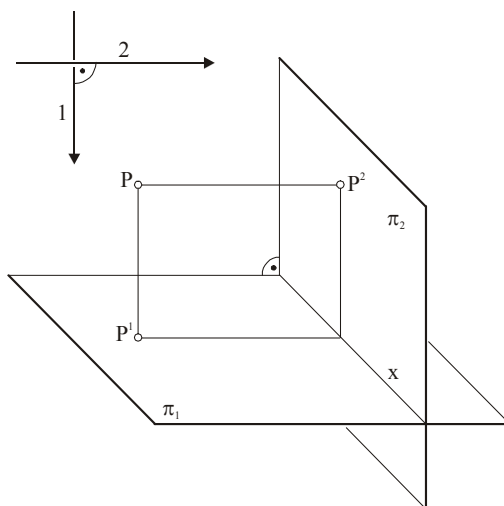
działaniem wody spływającej z rowu odchylamy krawędź  $k_{12}$  równoległe do  $k_2$ . Warstwice odchylonej części rowu znajdujemy za pomocą prostej  $e$  równoległej do płaszczyzny dna rowu ( $e' \parallel k'_2$ ). Styczne  $s_9$  i  $s_{10}$  wyznaczają kierunki tych warstwic, a dwusieczne  $d_5$  i  $d_6$  kierunki krawędzi między sąsiednimi skarpami. Wyznaczamy krawędź  $m$  dna rowu z płaszczyzną terenu, jest nią linia równoległa do  $k$  zawierająca punkt P przecięcia się warstwie terenu i dna rowu o cesze 69. Następnie wyznaczamy linię przenikania skarp z terenem ( $k_{15}$  i  $k_{16}$ ). Na koniec wyznaczamy dwa profile poprzeczne terenu wraz z projektowaną drogą, od strony wykopu i od strony nasypu. Wygodne jest równoczesne wyznaczanie przekrojów. Pozwala to na łatwiejsze ustalenie odległości linii  $k_{1,2}, \dots$  poszczególnych odcinków krawędzi skarp przy dokładniejszym zachowaniu głębokości rowów i szerokości ławeczki.

# Rozdział V

## RZUTY MONGE’A

### 1. Zasady odwzorowania

Rzuty Monge’a są to rzuty prostokątne na dwie lub więcej rzutni parami prostopadłych (rys.5.1). Weźmy pod uwagę dwie prostopadłe rzutnie  $\pi_1$  i  $\pi_2$  zwane przez różnych autorów odpowiednio pierwszą i drugą lub poziomą i pionową, przecinające się w krawędzi zwanej osią  $x$ , oraz dwie zorientowane proste kierunkowe  $1 \perp \pi_1$  i  $2 \perp \pi_2$ . Wyróżnioną parę prostych zorientowanych nazywamy układem wiążącym rzutów podstawowych i oznaczamy  $[1,2]$ . Aparaty rzutowania służące do przedstawienia obrazów podstawowych figury nazywamy układem odwzorowania:  $(\{\pi_1, 1\}, \{\pi_2, 2\})$ .

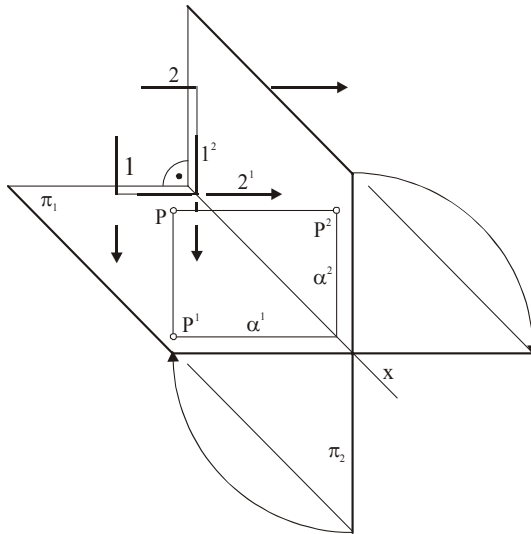


Rys. 5.1

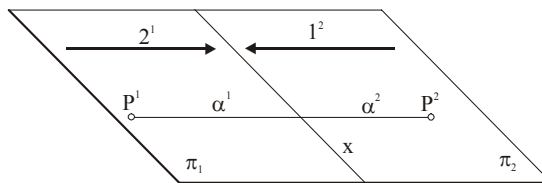
Każda figura zawarta w przestrzeni posiada swoje dwa podstawowe obrazy: jeden na rzutni pierwszej i drugi na rzutni drugiej. Tworzymy je w następujący sposób: przez dany punkt  $P$  figury prowadzimy proste równoległe do prostych kierunkowych  $1$  i  $2$ , a tym samym prostopadłe do rzutni  $\pi_1$  i  $\pi_2$ . Punkty wspólne tych prostych i rzutni są rzutami odpowiednio pierwszym  $P^1$  i drugim  $P^2$  punktu  $P$ . Na płaszczyźnie rysunku kreślimy oba rzuty zakładając, że rzutnia np.  $\pi_1$  jest z nią identyczna, a rzutnia  $\pi_2$  obraca się dookoła osi  $x$  o kąt  $90^\circ$ , tak aby rzuty  $l^2$  i  $l^1$  prostych kierunkowych były przeciwnie zorientowane (rys. 5.2).

Parę prostych  $\alpha^1 \parallel l^1$  i  $\alpha^2 \parallel l^2$  będących odpowiednio rzutem pierwszym i drugim płaszczyzny  $\alpha$  zawierającej punkt  $P$  i równoległej do obu kierunkowych  $1$  i  $2$  nazywamy o d n o s z ą c ą rzutów związanych. Prosta odnosząca jest prostopadła do osi  $x$  (rys.5.3).

Rzuty prostych zorientowanych  $l^1$  i  $l^2$  można sytuować na rysunku w dowolnym położeniu np. jak na rys. 5.11 lub 5.12.

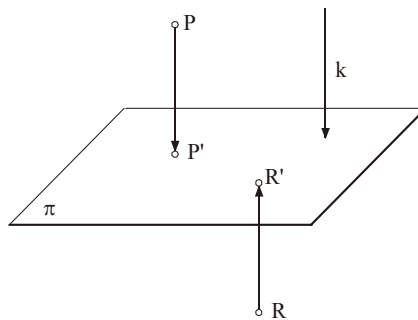


Rys. 5.2



Rys. 5.3

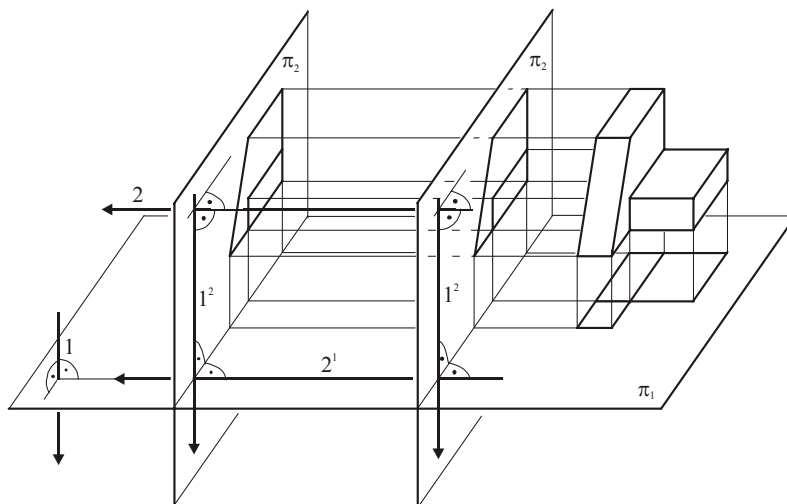
Miara wektora, którego początkiem jest punkt  $P$ , a końcem jego jest rzut prostokątny na rzutnię, nazywa się *cechą punktu*. Jeżeli wektor  $\langle PP^1 \rangle$  lub  $\langle PP^2 \rangle$  ma zwrot zgodny ze zwrotem prostej kierunkowej  $l$  lub  $2$  cechę uważamy za dodatnią i punkt znajduje się przed rzutnią; jeżeli wektor ma zwrot niezgodny, cecha jest ujemna i punkt znajduje się za rzutnią (rys. 5.4).



Rys. 5.4

Para  $(P^1$  i  $P^2)$  rzutów punktu  $P$  jednoznacznie określa położenie punktu  $P$  w przestrzeni. Oznacza to, że mając rzuty  $P^1$  i  $P^2$  możemy poprowadzić przez nie proste odpowiednio prostopadłe do rzutni i w punkcie przecięcia się ich otrzymamy punkt  $P$ .

Każdy układ odwzorowania dowolnie usytuowany względem figury  $\Gamma$  pozwala uzyskać rzuty Monge'a tej figury. W praktyce inżynierskiej staramy się tak dobrać układ odwzorowania, aby uzyskany obraz zachował jak najwięcej właściwości miarowych opisujących figurę  $\Gamma$ . Położenie figury względem aparatu rzutowania powinno być takie, aby jak najwięcej płaszczyzn zawierających ściany figury było równoległych do rzutni i jak najwięcej prostych zawierających krawędzie figury było prostopadłych do rzutni.



Rys. 5.5

Mając układ odwzorowania  $(\{\pi_1, 1\}, \{\pi_2, 2\})$  można otrzymać inny układ przez translację  $\{\pi_1, 1\}$  o dowolny wektor  $\vec{u}$  równoległy do 1 lub translację  $\{\pi_2, 2\}$  o dowolny wektor  $\vec{w}$  równoległy do 2. Nie powoduje to żadnych istotnych zmian w przebiegu restytucji figury  $\Gamma$ . W związku z powyższym na rysunkach w rzutach Monge'a można pomijać oś  $x$  (rys. 5.5).

## 2. Odwzorowanie prostych i płaszczyzn

W zależności od położenia w przestrzeni prostych i płaszczyzn względem aparatu rzutowania  $\{\pi_1, 1\}$  i  $\{\pi_2, 2\}$  możemy podzielić zbiór tych prostych i płaszczyzn na następujące podzbiory:

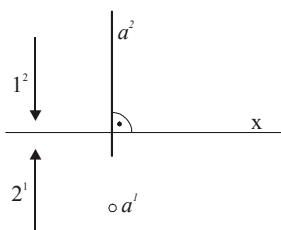
- zbiór prostych i płaszczyzn prostopadłych do rzutni (równoległych do kierunkowej 1 lub 2) zwanych *rzutu jącymi* oraz uzupełniający go zbiór prostych i płaszczyzn nie prostopadłych do rzutni (nie równoległych do 1 lub 2) zwanych *nierzutu jącymi*;
- zbiór prostych i płaszczyzn równoległych do rzutni (prostopadłych do 1 lub 2) zwanych *wars towymi* oraz uzupełniający go zbiór prostych i płaszczyzn nie równoległych do rzutni (nie prostopadłych do 1 lub 2) zwanych *niewars towymi*.

Ponadto w zbiorze prostych wyróżniamy jeszcze *proste profilowe*. Są to proste prostopadłe do osi  $x$  lecz nie prostopadłe do żadnej rzutni (nie równoległe do 1 lub 2).

### 2.1. Rzuty prostych.

Przykłady obrazów prostych przedstawia rysunek 5.6. (w nawiasach podane są nazwy prostych używane w literaturze).

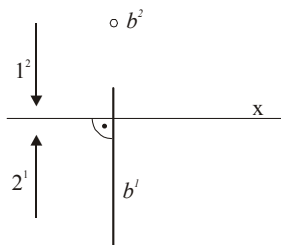
a)



Prosta pierwszorzędną (pionowa)

$$a \parallel 1; a \perp \pi_1$$

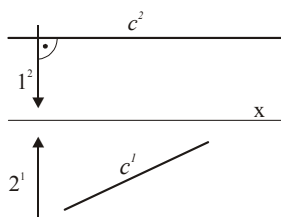
b)



Prosta drugorzędą (celowa)

$$b \parallel 2; b \perp \pi_2$$

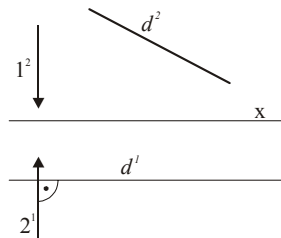
c)



Prosta pierwszorzędą (pozioma)

$$c \perp 1; c \parallel \pi_1$$

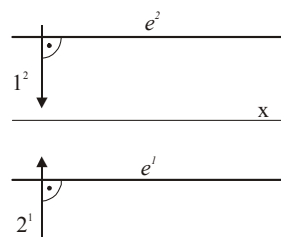
d)



Prosta drugorzędą (czołowa)

$$d \perp 2; d \parallel \pi_2$$

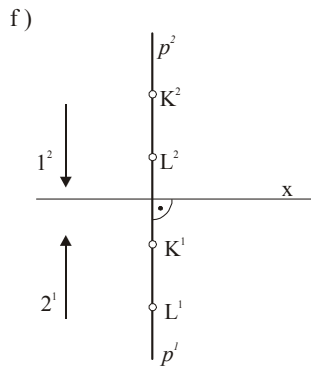
e)



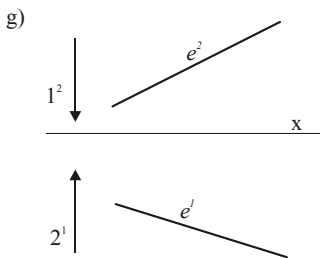
Prosta dwuwarstwowa, równoległa do osi x

$$e \perp 1 \wedge e \perp 2; e \parallel \pi_1 \wedge e \parallel \pi_2$$

Rys. 5.6a,b,c,d,e



Prosta profilowa prostopadła do osi  $x$ . Taka prosta jest jednoznacznie określona za pomocą rzutów dwóch punktów w niej zawartych.

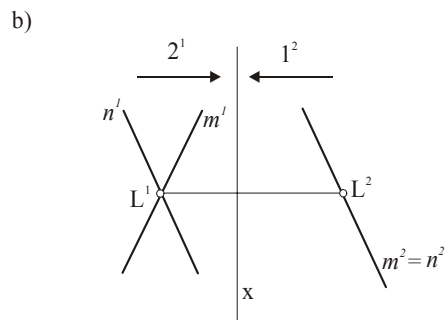
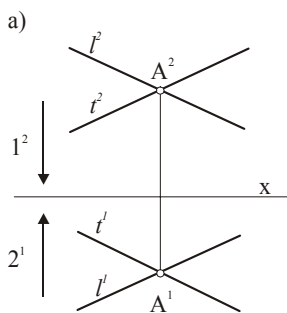


Prosta ogólna

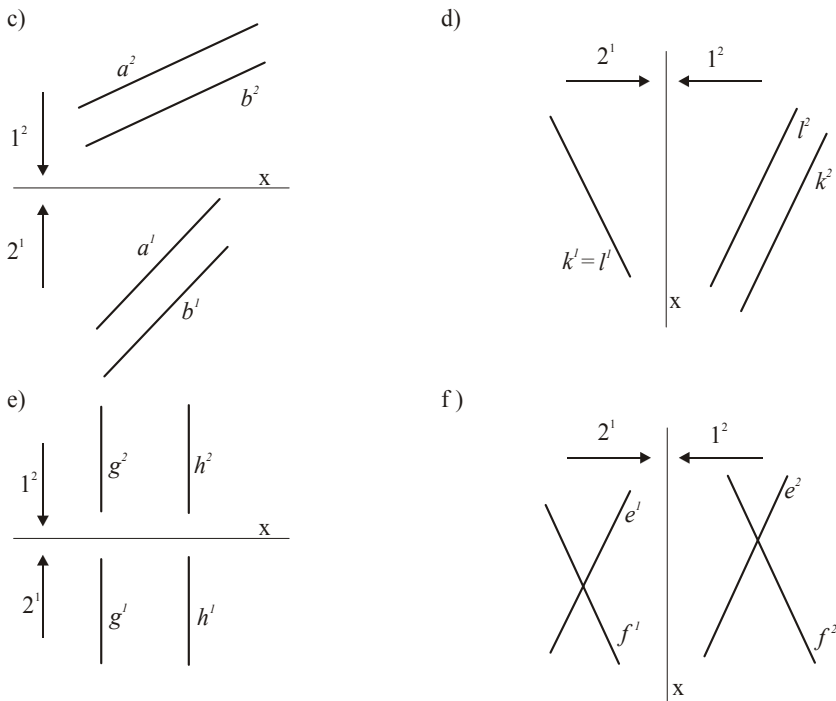
Rys. 5.6f,g

## 2.2. Wzajemne położenia prostych.

Proste przecinające się mają punkt właściwy wspólny. Rzuty tego punktu znajdują się na przecięciu odpowiednich rzutów prostych (rys. 5.7a,b). Odpowiednio rzuty prostych równoległych (mających wspólny punkt niewłaściwy) są do siebie równoległe (rys.5.7c,d).



Rys. 5.7a,b



Rys. 5.7c,d,e,f

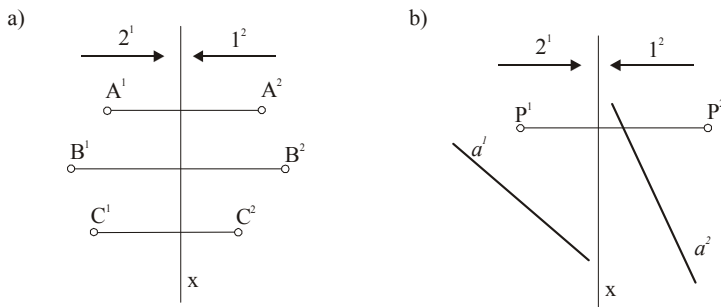
W przypadku prostych profilowych (rys. 5.7e) równoległość dwu rzutów nie stanowi dowodu na równoległość prostych. W tym przypadku potrzebne są dodatkowe informacje o prostych. Równoległość prostych profilowych omówiona została w podrozdziale „5. Równoległość podprzestrzeni” ćwiczenie 54 (rys. 5.49).

Proste nie posiadające punktu wspólnego właściwego czy niewłaściwego (nierównoległe) nazywają się skośne lub wichrowate (rys. 5.7f).

### 2.3. Rzuty płaszczyzny

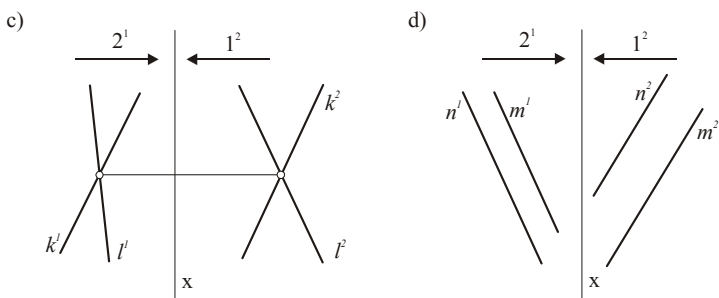
Rzuty płaszczyzny definiujemy jako rzuty elementów wyznaczających tę płaszczyznę. W przypadku płaszczyzn w położeniu ogólnym, a więc nierzutujących i niewarstwowych wyróżniamy cztery sposoby takiego określenia płaszczyzny, a mianowicie za pomocą rzutów:

- a) trzech niewspółliniowych punktów (rys. 5.8a),
- b) punktu i prostej nie należących do siebie (rys. 5.8b),



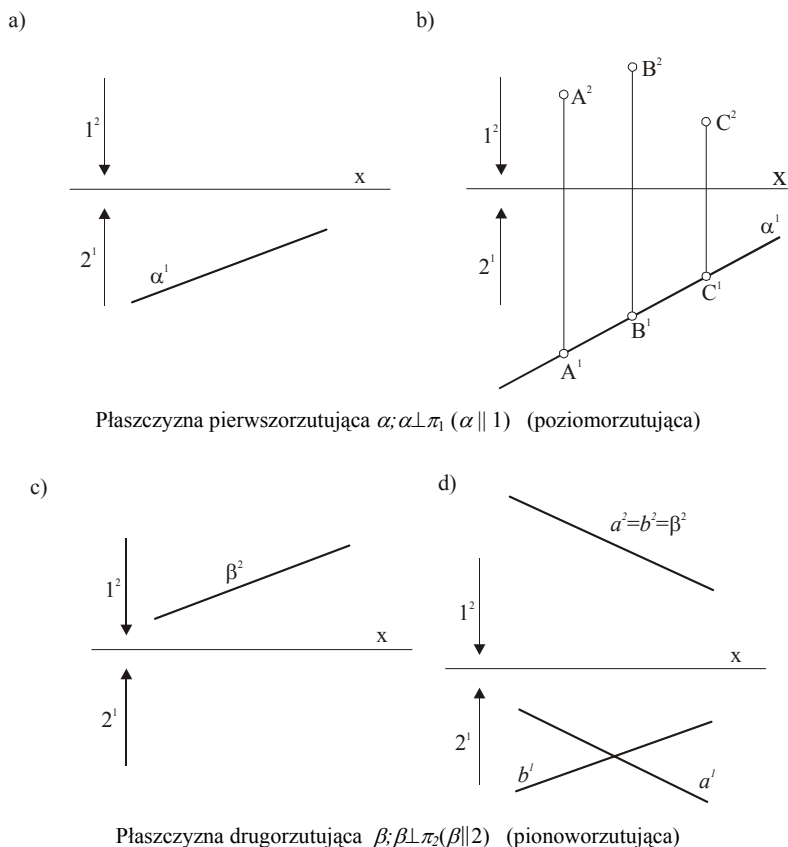
Rys. 5.8a,b

- c) dwóch przecinających się prostych (rys.5.8c),
- d) dwóch prostych równoległych (rys.5.8d).



Rys. 5.8c,d

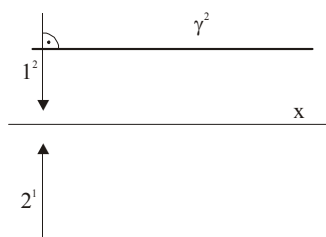
W przypadku płaszczyzn rzutujących, do których należą również płaszczyzny warstwowe, rzuty takich płaszczyzn możemy przedstawiać za pomocą elementów wyznaczających płaszczyznę (rys.5.9b,d,f,h,j) jak również bezpośrednio za pomocą rzutów tych płaszczyzn jak podano na rysunku 5.9a,c,e, g, i. (w nawiasie podane są nazwy stosowane u innych autorów).



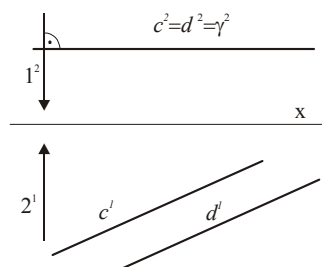
Rys. 5.9a,b,c,d



e)

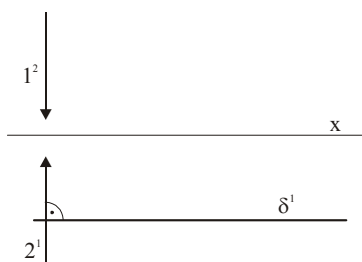


f)

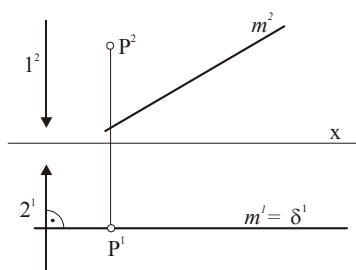


Płaszczyzna pierwszowarstwowa  $\gamma; \gamma \parallel \pi_1 (\gamma \perp 1)$ ; (pozioma)

g)

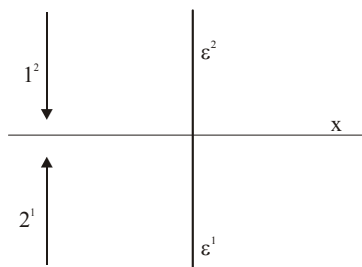


h)

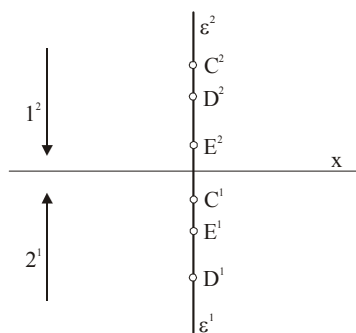


Płaszczyzna drugowarstwowa  $\delta; \delta \parallel \pi_2 (\delta \perp 2)$  (czołowa)

i)



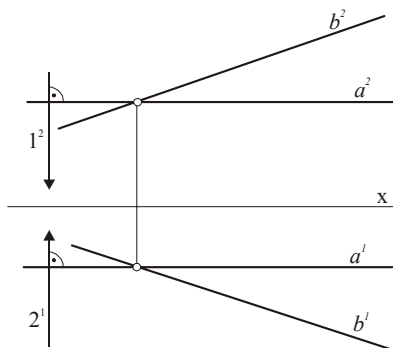
j)



Płaszczyzna dwurzutująca;  $\epsilon; \epsilon \perp \pi_1$  i  $\epsilon \perp \pi_2 (\epsilon \parallel 1$  i  $\epsilon \parallel 2)$  – prostopadła do osi x

Rys.5.9e,f,g,h,i,j

Na rys. 5.10 przedstawiony jest jeden ze sposobów określania płaszczyzny równoległej do osi  $x$  zwanej *profilową*. Płaszczyzna taka zawiera prostą dwuwarstwową  $a$  ( $a \parallel x$ ).



Rys. 5.10

### 3. Należenie i zawieranie się podprzestrzeni (elementów)

Elementy składowe przestrzeni noszą nazwę podprzestrzeni. Są to punkty, proste, płaszczyzny. Jeżeli jakaś podprzestrzeń należy do (lub zawiera się w) innej podprzestrzeni, to odpowiadające sobie rzuty takich podprzestrzeni należą do siebie (zawierają się w sobie). Jeżeli punkt należy do prostej, to odpowiednie rzuty punktu i prostej należą do siebie, np.:  $A \in a \Rightarrow A^1 \in a^1 \wedge A^2 \in a^2$ ;  $a \supset A \Rightarrow a^1 \supset A^1 \wedge a^2 \supset A^2$ . Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe gdy prosta jest prostopadła do osi  $x$  (profilowa). Sposób wyznaczenia punktu należącego do prostej profilowej podaje ćwiczenie 40 (rys. 5.11a,b,c).

#### Ćwiczenie 40

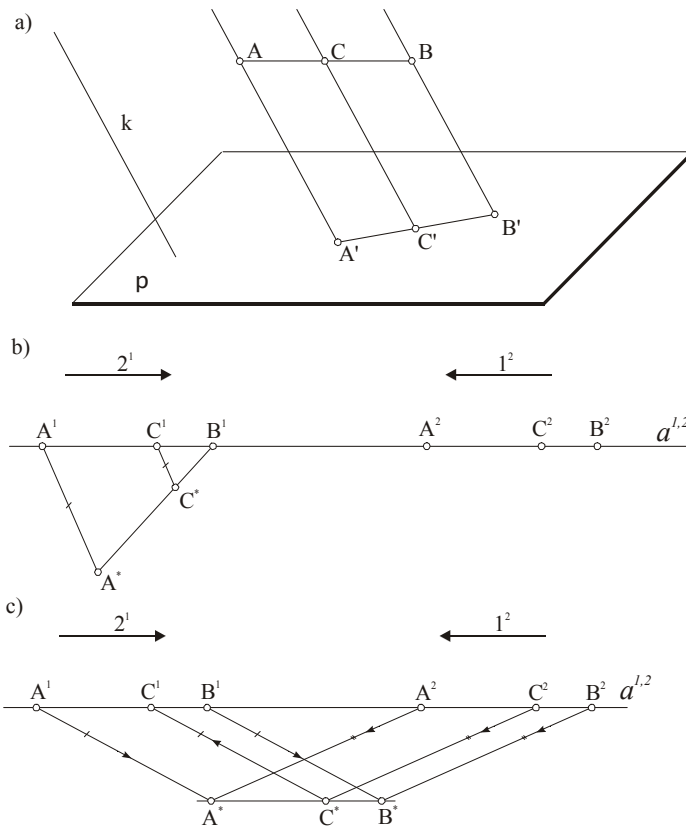
Dane są rzuty prostej profilowej  $a$  wyznaczonej za pomocą dwóch punktów  $A$  i  $B$ , oraz dany jest  $C^2$  - rzut drugi punktu  $C$  należącego do prostej  $a$ . Wyznaczyć rzut pierwszy punktu  $C$ .

#### Rozwiązanie

Przy rozwiązywaniu tego zadania musimy skorzystać z następującego twierdzenia: stosunek podziału odcinka  $\langle AB \rangle$ , nierównoległego do kierunku rzutowania, punktem  $C$  jest niezmiennikiem rzutowania równoległego (rys.5.11a), tzn.

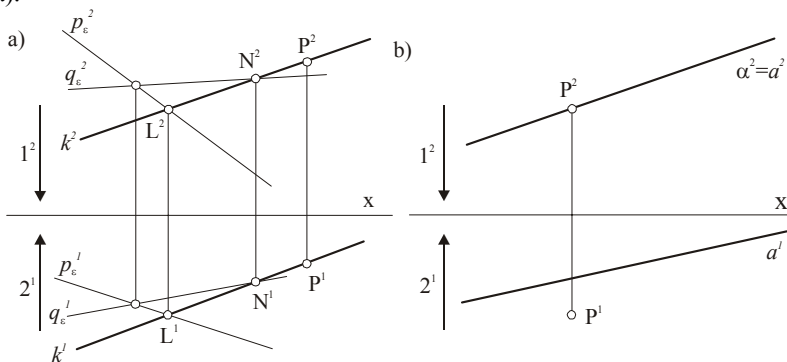
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A^1C^1|}{|B^1C^1|} \quad (\text{zastosowanie twierdzenia Talesa}).$$

W związku z powyższym pierwszy rzut punktu  $C$  wyznaczamy następująco: rysujemy prostą zawierającą punkt  $B^1$  (lub  $A^1$ ) pod dowolnym kątem do prostej  $a^{1,2}$  i odmierzamy na niej odcinki  $\langle B^1C^1 \rangle \equiv \langle B^2C^2 \rangle$  i  $\langle C^1A^1 \rangle \equiv \langle C^2A^2 \rangle$ , rysujemy prostą  $A^1A^1$  i równoległą do niej prostą zawierającą punkt  $C^1$ , która w punkcie przecięcia z prostą  $a^1$  wyznacza pierwszy rzut punktu  $C$  (rys.5.11b). Inny sposób wyznaczania punktu  $C^1$  podany jest na rys. 5.11c. Z punktów  $A^1$  i  $B^1$  rysujemy proste równoległe do przecięcia się z prostymi równoległymi narysowanymi z punktów  $A^2$  i  $B^2$ . Punkty  $A^1B^1$  wyznaczają prostą. Z punktu  $C^2$  rysujemy prostą równoległą do  $A^2A^2$ , która przecina prostą  $A^1B^1$  w punkcie  $C^1$ . Z punktu  $C^1$  kreślimy prostą równoległą do  $A^1A^1$ . Punkt przecięcia prostej  $C^1C^1$  z  $a^1$  wyznacza  $C^1$ .



Rys. 5.11

Prosta zawarta jest w płaszczyźnie jeśli dwa punkty prostej zawarte są w tej płaszczyźnie. Na rysunku 5.12a przedstawione są rzuty płaszczyzny  $\varepsilon = p_\varepsilon q_\varepsilon$  oraz rzuty prostej  $k$  zawartej w płaszczyźnie  $\varepsilon$ . Prosta  $k$  przecina proste  $p_\varepsilon$  i  $q_\varepsilon$  w punktach L i N. W przypadku zawierania się prostej w płaszczyźnie rzutującej, odpowiedni rzut prostej i płaszczyzny jednoczy się (rys.5.12b). Punkt należy do płaszczyzny, jeśli należy do prostej zawartej w tej płaszczyźnie (rys.5.12a).



Rys. 5.12

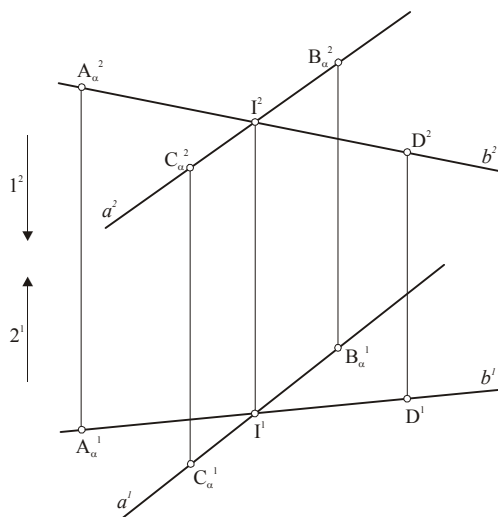
Jeżeli punkt należy do płaszczyzny rzutującej to wystarczy jeżeli odpowiedni rzut punktu należy do rzutu płaszczyzny (rys.5.12b).

### Ćwiczenie 41

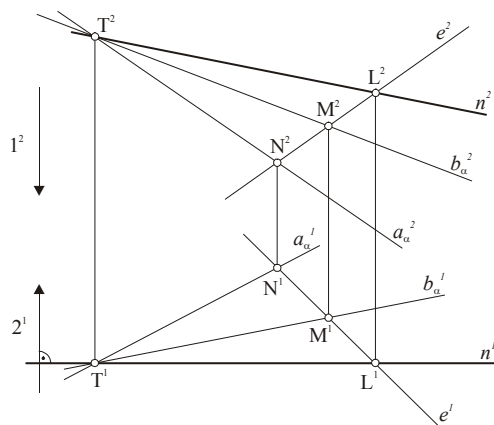
Dane są rzuty trzech punktów A, B, C oraz rzut drugi czwartego punktu D należącego do płaszczyzny  $\alpha = ABC$ ; wyznaczyć jego rzut pierwszy.

#### Rozwiązanie

Kreślmy oba rzuty prostej  $a = BC$  i rzut drugi prostej  $b = AD$ . Wyznaczamy rzut drugi punktu przecięcia się prostych  $a$  i  $b$ :  $a^2 \cap b^2 = I^2$ , a na odnoszącej i rzucie pierwszym prostej  $a$  jego rzut pierwszy  $I^1$ . Rzut pierwszy prostej  $b$  zawiera rzuty pierwsze punktów A i I. Rzut pierwszy punktu D, punkt  $D^1$  znajduje się na prostej  $b^1$  i na odnoszącej punktu D (rys.5.13).



Rys. 5.13



Rys. 5.14

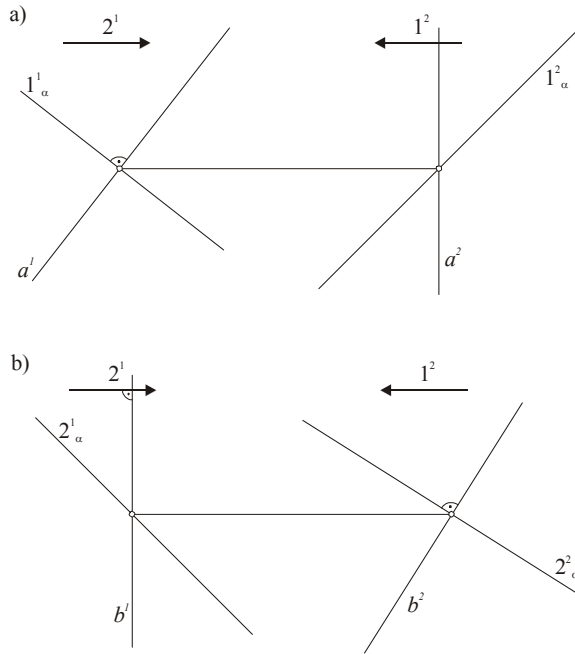
### Ćwiczenie 42

Dana jest płaszczyzna określona parą prostych  $a_\alpha b_\alpha$  przecinających się w punkcie T. Przez punkt T poprowadzić prostą drugorządową (czołową)  $n$  zawartą w płaszczyźnie  $ab$ .

*Rozwiązanie*

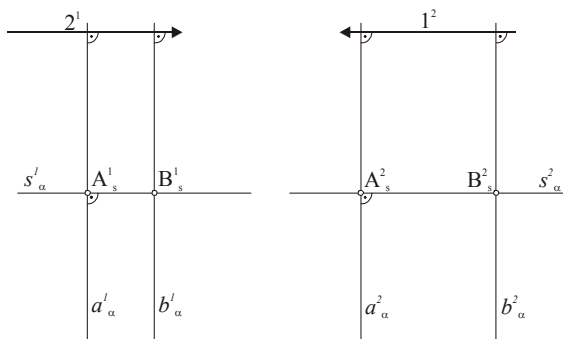
Przez rzut pierwszy punktu  $T$  kreślimy pierwszy rzut  $n^1$  prostej  $n$  prostopadłe do  $2^1$ . Dla wyznaczenia rzutu drugiego przyjmujemy pomocniczą prostą  $e$  przecinającą proste  $a$ ,  $b$ ,  $n$  kolejno w punktach  $N$ ,  $M$ ,  $L$ . Kreślimy i oznaczamy pierwsze rzuty  $e^1$ ,  $N^1$ ,  $M^1$ ,  $L^1$ . Na odnieszających i na rzutach  $a^2$  i  $b^2$  otrzymujemy drugie rzuty  $N^2$ ,  $M^2$ , a po ich połączeniu drugi rzut  $e^2$  pomocniczej prostej  $e$ . Na tym rzucie zaznaczamy drugi rzut punktu  $L^2$ . Drugi rzut prostej  $n$  wyznaczamy za pomocą  $L^2$  i  $T^2$ :  $T^2 L^2 = n^2$  (rys.5.14).

W płaszczyźnie ogólnej zawarte są proste ogólne, warstwowe i profilowe. Prosta zawarta w płaszczyźnie  $\alpha$  i prostopadła do prostej pierwszowarstwowej nazywa się pierwszą prostą spadu płaszczyzny:  $1_\alpha$ . Prosta zawarta w płaszczyźnie  $\alpha$  i prostopadła do drugowarstwowej prostej tej płaszczyzny nazywa się drugą prostą spadu płaszczyzny:  $2_\alpha$  (rys.5,15a,b).



Rys. 5.15

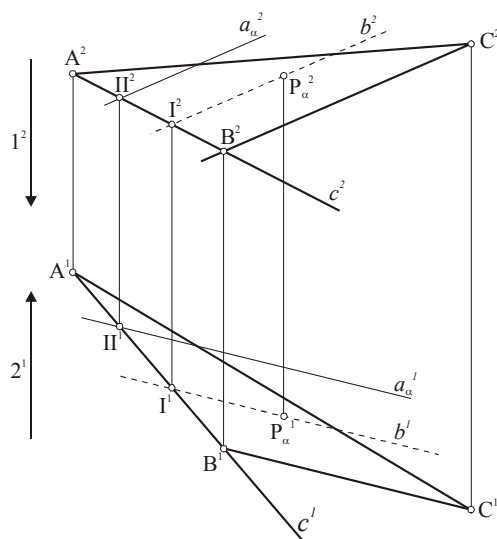
Płaszczyzna profilowa zawiera proste dwuwarstwowe, a więc posiada tylko jedną prostą spadu:  $s_\alpha$ . Jest nią prosta profilowa (rys.5.16).



Rys. 5.16

### Ćwiczenie 43

Dany jest rzut pierwszy trójkąta  $\langle ABC \rangle$  zawartego w płaszczyźnie wyznaczonej prostą  $a$  i punktem  $P$ . Wyznaczyć rzut drugi trójkąta.



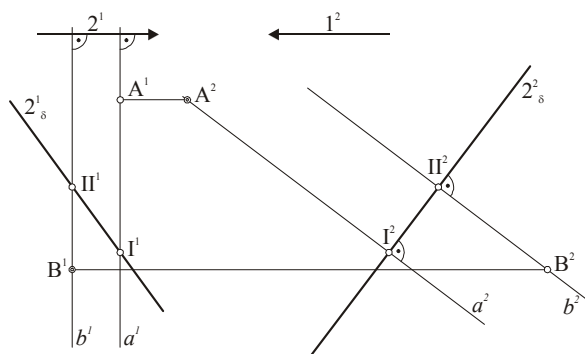
Rys. 5.17

### Rozwiązanie

Przez punkt  $P$  prowadzimy prostą  $b$  równoległą do  $a$ , zawartą w płaszczyźnie  $\alpha$  (rys. 5.17). Wyznamy rzuty pierwsze punktów  $I$  i  $II$  przecięcia prostej  $AB = c$  z prostymi  $a$  i  $b$ . Za pomocą drugich rzutów punktów  $I$  i  $II$  wyznaczamy drugi rzut prostej  $c$ , następnie drugie rzuty punktów  $A$  i  $B$ . Ponieważ w rzucie pierwszym przyjęto  $B^1C^1 \parallel a^1$  - drugi rzut boku  $BC$  jest równoległy do  $a^2$ .

### Ćwiczenie 44

Dana jest płaszczyzna  $\delta$  drugą prostą spadu  $2\delta$  oraz rzut pierwszy punktu  $A$  ( $A^1$ ) i rzut drugi punktu  $B$  ( $B^2$ ) zawartych w płaszczyźnie  $\delta$ . Wyznaczyć brakujące rzuty punktów (rys. 5.18).



Rys. 5.18

**Rozwiązanie**

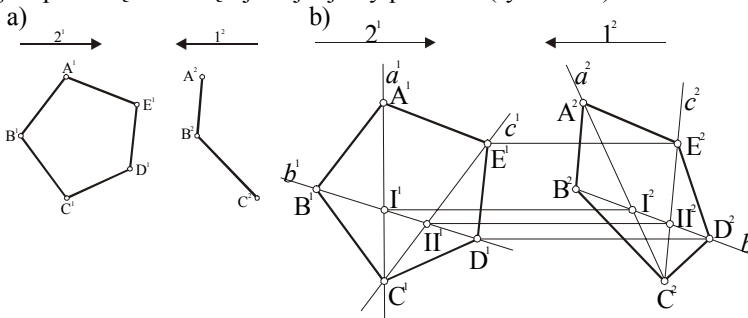
Obraz płaszczyzny danej drugą prostą spad u uzupełniamy wprowadzając proste drugorastwowe prostopadłe do prostej spad. Przez punkt  $A^1$  prowadzimy pierwszy rzut prostej  $a^1$  drugorastwowej przecinającej  $2\delta^1$  w punkcie  $I^1$ . Wyznaczamy drugi rzut punktu  $I^1$  i przez  $I^2$  prowadzimy  $a^2$  prostopadłe do  $2\delta^2$ . Punkt  $A^2$  należy do  $a^2$ . Przez drugi rzut punktu  $B$ :  $B^2$  prowadzimy drugi rzut prostej  $b^2$  prostopadłe do prostej  $2\delta^1$ . Wyznaczamy punkt  $II^2$  w przecięciu  $2\delta^2$  z  $b^2$  oraz punkt  $II^1$  na prostej  $2\delta^1$ . Ponieważ prosta  $b$  jest drugorastwową więc przez  $II^1$  kreślimy  $b^1$  prostopadłe do  $2^1$ .  $B^1 \in b^1$ .

**Ćwiczenie 45**

Dany jest pierwszy rzut pięciokąta płaskiego  $\langle ABCDE \rangle$  oraz rzuty drugie trzech jego wierzchołków:  $A, B, C$ . Wyznaczyć rzuty drugie brakujących wierzchołków pięciokąta (rys. 5.19a).

**Rozwiązanie**

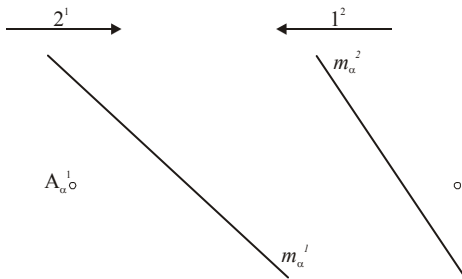
Punkty  $ABC$  wyznaczają płaszczyznę. Rysujemy przez punkty  $AC$  prostą  $a$  ( $a^1 a^2$ ), następnie rzut pierwszy prostej  $b$  ( $b^1$ ) zawierającej punkty  $B^1$  i  $D^1$ .  $b^1 \cap a = I^1$  i za pomocą odnoszącej wyznaczamy  $I^2$  na prostej  $a^2$ . Rzut drugi prostej  $b$  ( $b^2$ ) zawiera punkty  $B^2$  i  $I^2$ . Punkt  $D^2$  należy do  $b^2$ . W podobny sposób wyznaczamy punkt  $E^2$ . Prosta  $c^1$  zawierająca  $C^1 E^1$  przecina prostą  $b^1$  w punkcie  $II^1$ . Przez  $II^2$  należącym do  $b^2$  i przez  $C^2$  przechodzi  $c^2$  (rzut drugi prostej  $c$ ), na której za pomocą odnoszącej znajdujemy punkt  $E^2$  (rys. 5.19b).



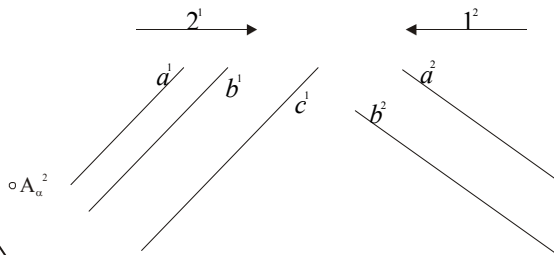
Rys. 5.19

**ZADANIA**

1. Na płaszczyźnie określonej prostą  $m$  i punktem  $A$  wyznaczyć proste warstwowe zawierające punkt  $A$  (rys. 5.20).

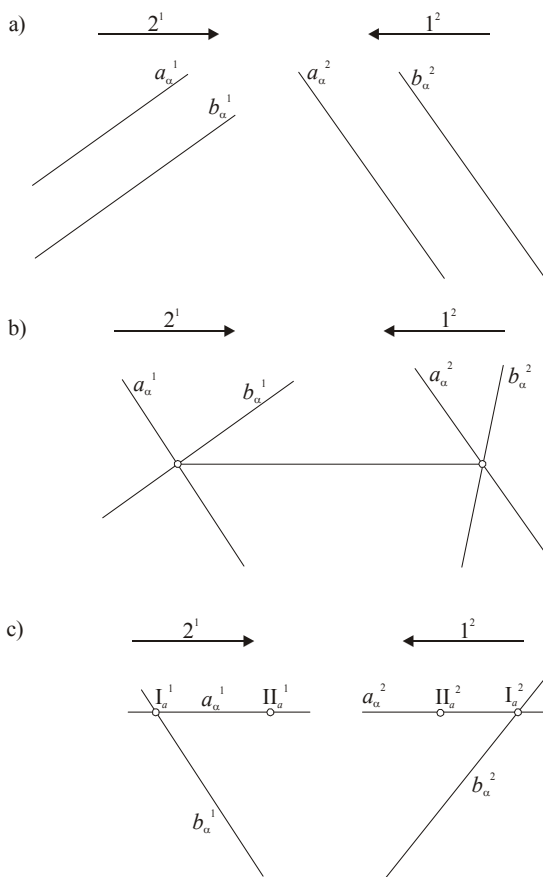


Rys. 5.20



Rys. 5.21

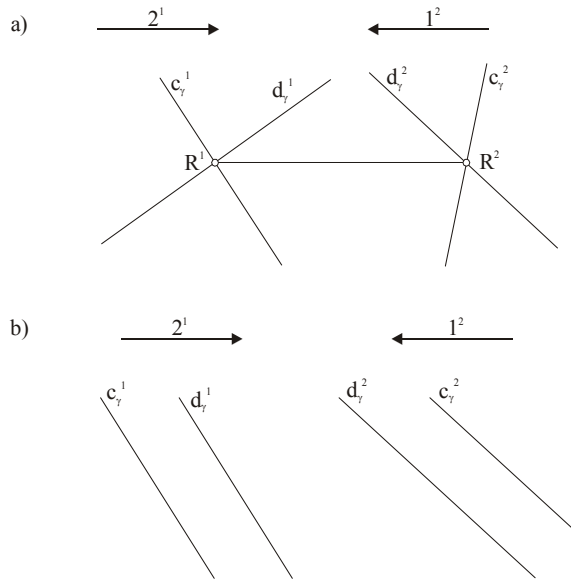
2. Dane są pierwsze rzuty  $a^1 \parallel b^1 \parallel c^1$  oraz drugie rzuty  $a^2 \parallel b^2$  prostych równoległych zawartych w jednej płaszczyźnie. Wyznaczyć drugi rzut prostej  $c$ . (rys. 5.21).
3. Dane są rzuty prostych  $a$  i  $b$  wyznaczających płaszczyznę  $\alpha$  ogólną (rys. 5.22a,b,c). Wyznaczyć rzuty prostych zawartych w płaszczyźnie  $\alpha$ :
  - a) pierwszorzędowej  $m$
  - b) drugorzędowej  $n$ .
  - c) profilowej  $e$



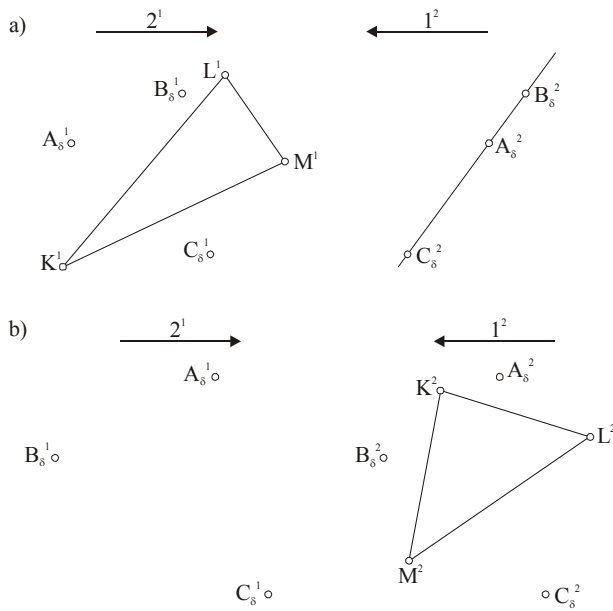
Rys. 5.22

4. Dane są rzuty prostych  $c$  i  $d$  wyznaczających płaszczyznę  $\gamma$  (rys.5.23a,b). Wyznacz rzuty:  $e$  - pierwszej prostej spadu,  $f$  - drugiej prostej spadu, zawartych w płaszczyźnie  $\gamma$ . W przypadku jak na rys. 5.23a przez punkt  $R$ , a w przypadku jak na rys. 5. 23b dowolnie.
5. Dane są rzuty punktów  $A_\delta B_\delta C_\delta$  wyznaczających płaszczyznę  $\delta$  oraz pierwszy (drugi) rzut trójkąta  $\langle KLM \rangle$  zawierającego się w tej płaszczyźnie. Wyznaczyć drugi (pierwszy) rzut trójkąta (rys. 5.24a,b).
6. Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  prostą  $a$  i punktem  $A$  oraz rzut drugi czworokąta  $\langle KLMN \rangle$  zawartego w tej płaszczyźnie. Wyznaczyć rzut pierwszy czworokąta (rys. 5. 25).
7. Dane są rzuty prostych równoległych  $e \parallel f \parallel \varphi$  wyznaczających płaszczyznę  $\varphi$ , oraz rzut pierwszy trójkąta  $\langle ABC \rangle$  zawartego w płaszczyźnie  $\varphi$ . Wyznaczyć rzut drugi trójkąta (rys.5.26 a,b).



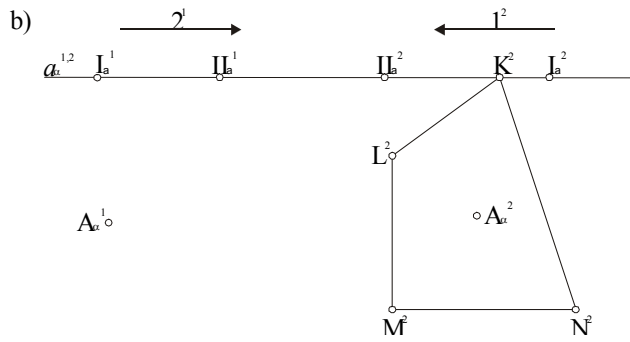
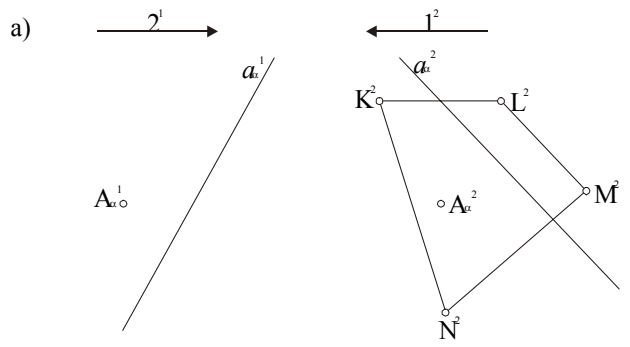


Rys. 5.23

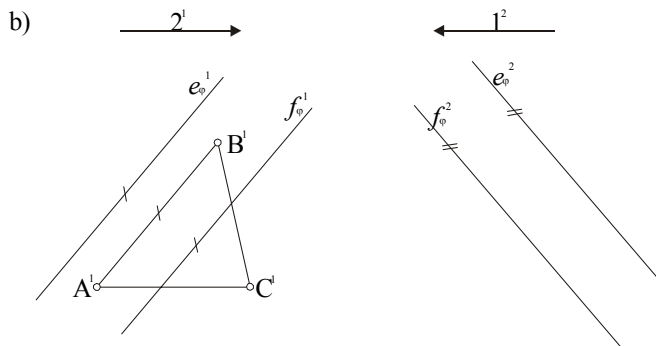
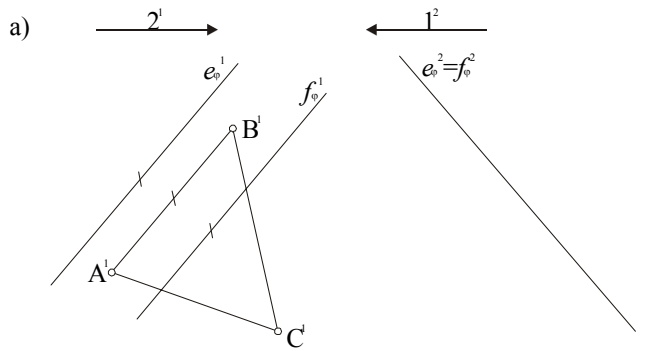


Rys. 5.24

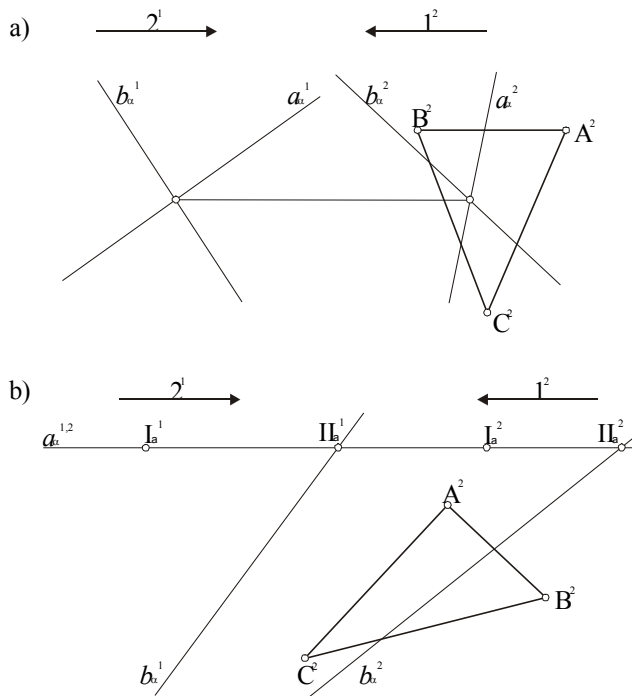
8. Dany jest obraz płaszczyzny  $\alpha$  dwiema prostymi przecinającymi się  $a$  i  $b$  oraz drugi rzut trójkąta  $\langle ABC \rangle$  zawartego w płaszczyźnie  $\alpha$ . Wyznaczyć pierwszy rzut trójkąta (rys. 5.27a,b).
9. Dane są: rzut pierwszy pięciokąta płaskiego  $\langle ABCDE \rangle$  oraz rzuty drugie trzech jego punktów. Wykreślić drugi rzut pięciokąta (rys. 5.28).
10. Wyznacz rzuty pięciokąta płaskiego  $\langle ABCDE \rangle$  mając dane oba rzuty trzech punktów pięciokąta  $A, B, C$ , oraz rzut pierwszy punktu  $D$  i rzut drugi punktu  $E$  (rys. 5.29).



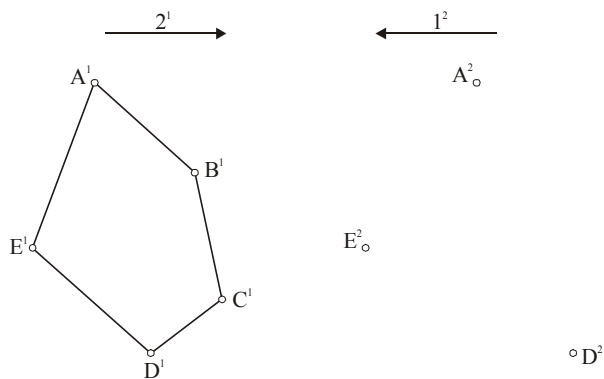
Rys. 5.25



Rys. 5.26

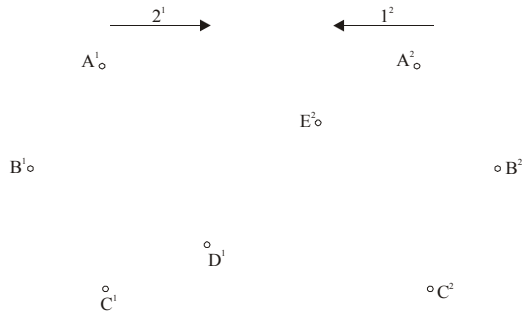


Rys. 5.27

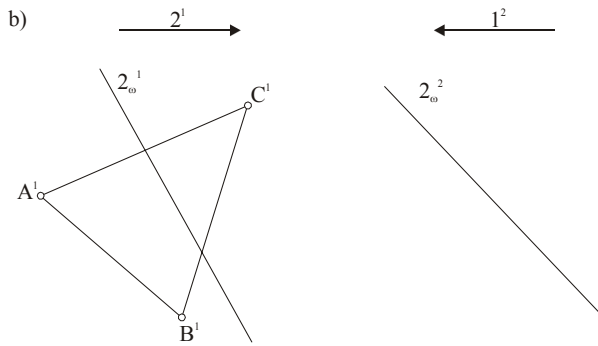
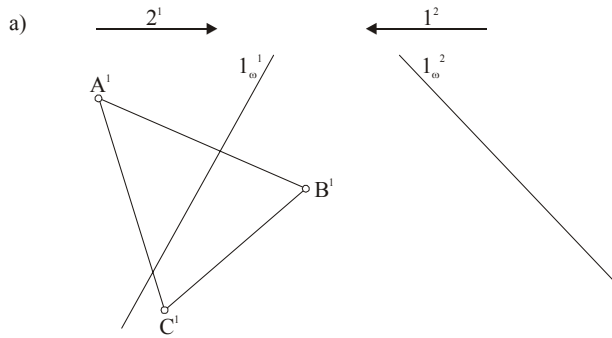


Rys. 5.28

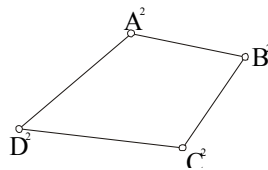
11. Dane są rzuty prostej spad: a) pierwszej, b) drugiej, płaszczyzny  $\omega$  oraz rzut pierwszy trójkąta  $\langle ABC \rangle$  zawartego w płaszczyźnie  $\omega$ . Wyznaczyć rzut drugi trójkąta (rys. 5.30a,b).
12. Dane są rzuty prostej profilowej  $s$ , która jest prostą spad płaszczyzny  $\gamma$ , oraz dany jest drugi rzut czworokąta  $\langle ABCD \rangle$  zawartego w tej płaszczyźnie. Wyznaczyć pierwszy rzut czworokąta (rys. 5.31).



Rys. 5.29



Rys. 5.30



Rys. 5.31

#### 4. Część wspólna podprzestrzeni (elementy wspólne)

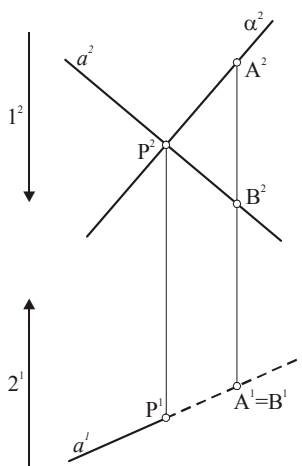
W tej części skryptu ograniczymy się do omówienia elementów właściwych. Wyróżniamy:

- punkt wspólny pary prostych przecinających się (punkt przecięcia) - omówiony wcześniej,
- punkt wspólny prostej i płaszczyzny (punkt przebicia lub punkt przecięcia prostej daną płaszczyzną),
- prosta wspólna pary płaszczyzn (krawędź płaszczyzn).

Przy wyznaczaniu punktu przebicia korzystamy z krawędzi i wzajemnie przy wyznaczaniu krawędzi korzystamy z punktów przebicia. Oba te zagadnienia zostaną omówione łącznie.

##### Ćwiczenie 46

Wyznaczyć punkt przecięcia prostej  $a$  płaszczyzną drugorzutującą  $\alpha$  (rys. 5.32).



Rys. 5.32

##### Rozwiązanie

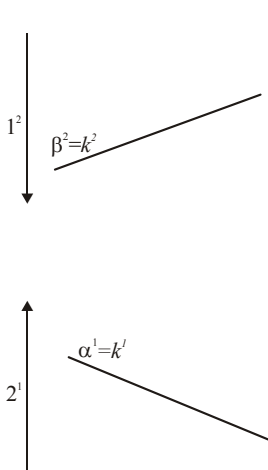
Drugi rzut  $P^2$  leży zarówno na drugim rzucie prostej  $a$ , jak i na drugim rzucie płaszczyzny  $\alpha$ , a więc na przecięciu się obu rzutów. Rzut pierwszy  $P^1$  znajdujemy za pomocą odnoszącej na  $a^1$ . Ustalamy widoczność prostej  $a$  względem płaszczyzny  $\alpha$ . W tym celu obieramy punkty:  $A \in \alpha$  i  $B \in a$  tak, aby rzuty pierwsze tych punktów  $A^1 = B^1$  zawarte były w  $a^1$ . Ze względu na zwrot prostej kierunkowej 1 punkt  $A$  należący do płaszczyzny  $\alpha$  jest punktem pierwszym, a więc jest punktem widocznym (rozd. I, p. 2, rys. 2.5). Wobec tego w rzucie pierwszym półprosta  $a$  zawierająca punkt  $B$  jest niewidoczna od punktu  $P$ .

##### Ćwiczenie 47

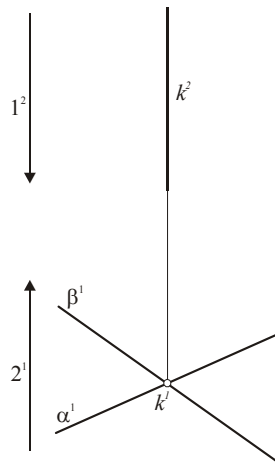
Wyznaczyć krawędź dwu płaszczyzn:  $\alpha$  pierwszorzutującej i  $\beta$  drugorzutującej (rys. 5.33).

##### Rozwiązanie

Ponieważ płaszczyzny są rzutujące  $\alpha^1 = k^1$ ,  $\beta^2 = k^2$ .



Rys. 5.33



Rys. 5.34

**Ćwiczenie 48**

Wyznaczyć krawędź dwu płaszczyzn pierwszorztujących (rys. 5.34).

*Rozwiązanie*

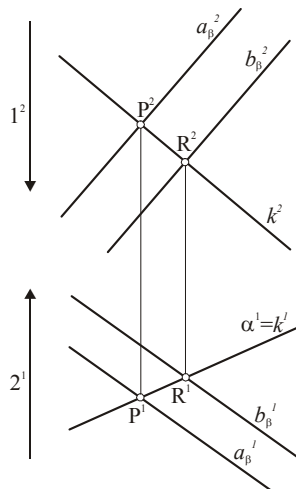
Rzut pierwszy krawędzi znajduje się na przecięciu  $\alpha^1$  i  $\beta^1$  rzutów pierwszych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , a więc jest punktem. Prosta  $k$  jest pierwszorztująca, jej drugi rzut jest równoległy do prostej  $l^2$ .

**Ćwiczenie 49**

Wyznaczyć krawędź dwóch płaszczyzn: pierwszorztującej  $\alpha$  i płaszczyzny określonej parą prostych równoległych  $a$  i  $b$  (rys.5.35).

*Rozwiązanie*

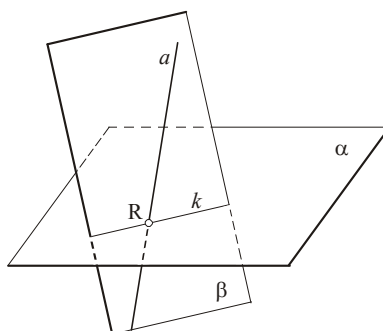
Powtarzamy dwukrotnie konstrukcję opisaną w ćwiczeniu 46 i w obu rzutach łączymy dwa punkty przebiecia P i R. Oczywiście pierwszy rzut krawędzi  $k^1$  jednoczy się z  $\alpha^1$ .



Rys. 5.35

Wyznaczając punkt przecięcia prostej z płaszczyzną ogólną postępujemy następująco:  
 1° - przez prostą prowadzimy pomocniczą płaszczyznę (najwygodniej rzutującą), 2° - wyznaczamy krawędź przecięcia się płaszczyzny danej z płaszczyzną wprowadzoną, 3° - punkt przecięcia się prostej z krawędzią jest punktem przecięcia (rys. 5.36).

*Algorytm:*  
 $R = a \cap \alpha$   
 1°  $a \subset \beta$   
 2°  $k = \alpha \cap \beta$   
 3°  $R = a \cap k$

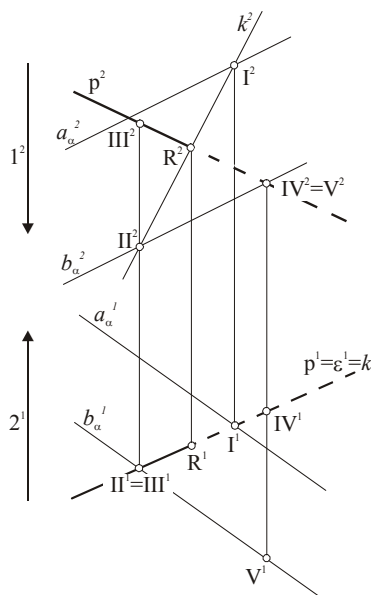


Rys. 5.36

### Ćwiczenie 50

Dane są rzuty płaszczyzny  $\alpha$  dwiema prostymi równoległymi  $a$  i  $b$  oraz rzuty prostej  $p$ . Wyznaczyć punkt wspólny prostej  $p$  i płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 5.37).

*Algorytm:*  
 $R = p \cap \alpha$   
 $p \subset \varepsilon$   
 $k = \varepsilon \cap \alpha$   
 $R = p \cap k$



Rys. 5.37

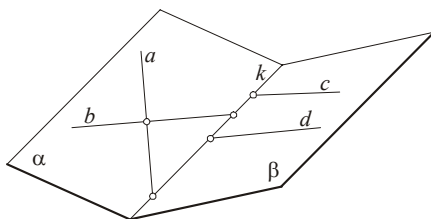
### Rozwiązanie

W danym przykładzie została wprowadzona płaszczyzna pierwszorzutująca  $\varepsilon$  zawierająca prostą  $p$ , następnie wyznaczona została krawędź płaszczyzny  $\alpha$  z płaszczyzną  $\varepsilon$  za pomocą punktów I i II jako punktów przecięcia płaszczyzny  $\varepsilon$  prostymi  $a$  i  $b$ . Najpierw znajdujemy punkty  $I^1 = a^1 \cap \varepsilon^1$  i  $II^1 = b^1 \cap \varepsilon^1$ , następnie za pomocą odnoszących znajdujemy rzuty drugie punktów  $I^2$  na  $a^2$  i  $II^2$  na  $b^2$ . Punkty  $I^2$  i  $II^2$  wyznaczają drugi rzut krawędzi:  $k^2$ , a ponieważ

$k \cap p = R$ , to  $k^2 \cap p^2 = R^2$ . Rzut pierwszy  $R^1$  szukanego punktu przebiecia otrzymujemy za pomocą odnoszącej.

W tym przykładzie ustalimy widoczność prostej  $p$  względem płaszczyzny  $\alpha$ . Punkt przebiecia  $R$  dzieli prostą  $p$  na dwie półproste. Aby ustalić widoczność w rzucie pierwszym obierzmy rzuty dwóch punktów, np: II i III, jeden na prostej  $p$  - punkt III, drugi na płaszczyźnie  $\alpha$  - punkt II, których rzuty pierwsze jednoczą się. Ze względu na zwrot prostej 1 (pierwszego kierunku rzutowania) punkt III jest punktem pierwszym, a więc jest widocznym na  $\pi_1$ . Ponieważ punkt III należy do półprostej  $p$ , więc jest ona widoczna aż do punktu przebiecia  $R$ , gdzie zmienia się widoczność prostej względem płaszczyzny. W celu ustalenia widoczności w rzucie drugim obieramy dwa punkty jednoczące się w rzucie drugim: jeden na prostej  $p$  - punkt IV, drugi na płaszczyźnie  $\alpha$  - punkt V ( $V \in b$ ). Z położenia rzutów pierwszych punktów IV i V wynika, że punkt V należący do płaszczyzny  $\alpha$  poprzedza punkt IV, a więc płaszczyzna  $\alpha$  zasłania tę półprostą  $p$ , do której należy punkt IV.

Przy wyznaczaniu krawędzi dwóch płaszczyzn w ogólnym przypadku posługujemy się dwoma punktami przebiecia płaszczyzn  $\alpha$  lub  $\beta$  (rys. 5.38) dowolnymi prostymi zawartymi w płaszczyźnie  $\alpha$  lub  $\beta$  z pozostałą płaszczyzną.



Rys. 5.38

### Ćwiczenie 51

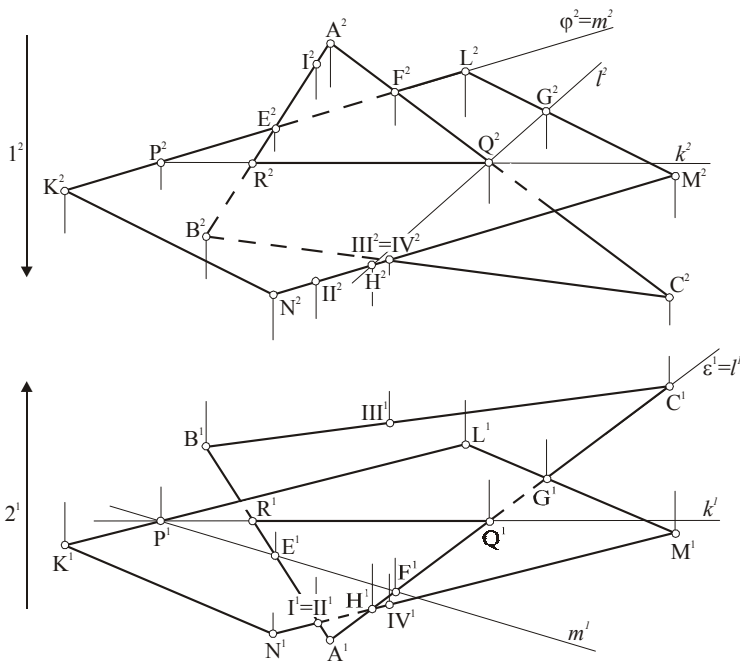
Wyznaczyć krawędź płaszczyzny trójkąta  $\langle ABC \rangle$  z płaszczyzną równoległoboku  $\langle KLMN \rangle$ ; wyznaczyć odcinek przenikania się obu figur oraz ustalić widoczność figur (rys. 5.39).

#### Rozwiązanie

Przez prostą  $KL$  prowadzimy pomocniczą płaszczyznę drugorzutującą  $\varphi$ , która z płaszczyzną  $\alpha$  trójkąta tworzy krawędź  $m = EF$ . Jej rzut  $E^1F^1$  przecina rzut prostej  $K^1L^1$  w punkcie  $P^1$ , a na odnoszącej i na prostej  $K^2L^2$  otrzymujemy drugi rzut  $P^2$  punktu  $P$ , który jest punktem przebiecia płaszczyzny  $\alpha$  trójkąta  $\langle ABC \rangle$  prostą  $KL$ . Z kolei za pośrednictwem płaszczyzny pierwszorzutującej  $\varepsilon$  i jej krawędzi  $l = HG$  z płaszczyzną  $\beta$  czworokąta, uzyskamy rzuty punktu  $Q$  będącego punktem przebiecia płaszczyzny czworokąta prostą  $AC$ . Prosta  $PQ = k$  jest krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Odcinek  $\langle QR \rangle$  krawędzi  $k$  jest odcinkiem przenikania obu figur płaskich.

W celu oceny widoczności w pierwszym rzucie obieramy punkty I na boku  $AB$  i II na boku  $MN$ , których rzuty pierwsze jednoczą się. Ze względu na zwrot prostej kierunkowej 1 punkt I jest punktem pierwszym, a więc odcinek  $\langle AR \rangle$  boku  $AB$  jest widoczny w rzucie pierwszym, a bok  $\langle MN \rangle$  jest częściowo przez trójkąt zasłonięty. Bok  $\langle AC \rangle$  widoczny jest na odcinku  $\langle AQ \rangle$ , w punkcie  $Q$  zmienia swoje położenie względem czworokąta. Widoczność w rzucie drugim określamy za pomocą punktów III  $\in BC$  i IV  $\in MN$  jednoczących się w rzucie. Ze względu na zwrot prostej 2 punkt IV należący do boku  $\langle MN \rangle$  jest punktem widocznym co pociąga za sobą widoczność krawędzi  $\langle MN \rangle$ .

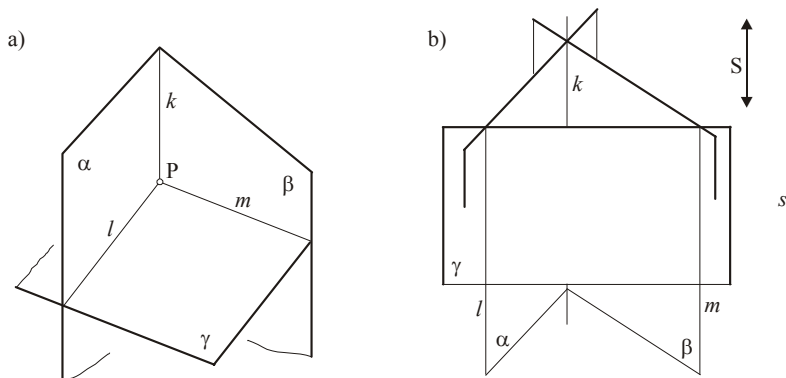




Algorytm:  $\alpha = \langle ABC \rangle$ ,  $\beta = \langle KLMN \rangle$ ,  $KL \subset \varphi$ ,  $m = \varphi \cap \alpha$ ,  $P = m \cap KL$ ,  $AC \subset \varepsilon$ ,  $l = \varepsilon \cap \beta$ ,  $Q = l \cap AC$ ,  $QP = k$ ,  $R = k \cap AB$ .

Rys. 5.39

Krawędź dwóch płaszczyzn można również wyznaczyć korzystając z twierdzenia o trzech płaszczyznach: trzy płaszczyzny  $\alpha, \beta, \gamma$  mają punkt wspólny, w którym przecinają się trzy krawędzie tych płaszczyzn (rys.5.40a). Jeżeli płaszczyzny  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  są równoległe do wspólnej prostej, punkt wspólny jest punktem niewłaściwym, a więc krawędzie są do siebie równoległe (rys.5.40b).



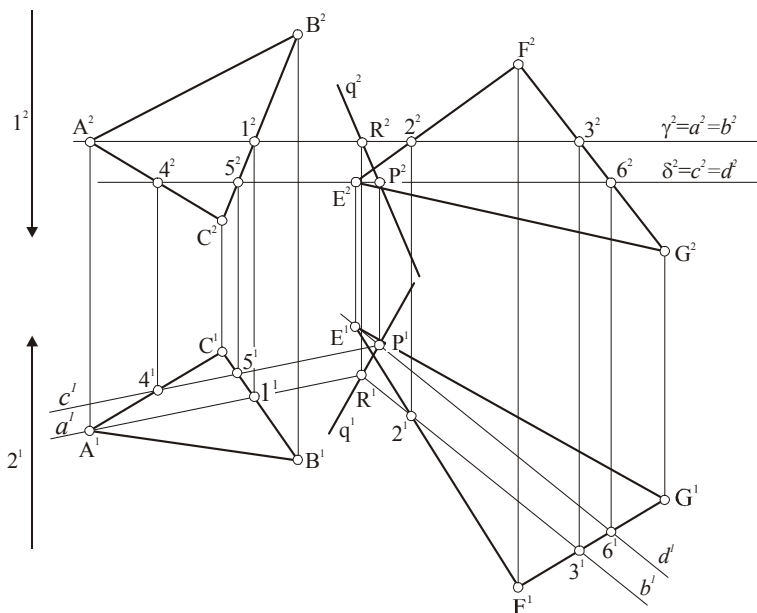
Rys. 5.40

### Ćwiczenie 52

Dane są rzuty dwóch trójkątów  $\langle ABC \rangle$  i  $\langle EFG \rangle$ . Wyznaczyć krawędź  $k = \alpha \cap \beta$  jeżeli  $\alpha = ABC$  i  $\beta = EFG$ .

### Rozwiązanie

Obie płaszczyzny przecinamy dwiema pomocniczymi płaszczyznami rzutującymi  $\gamma$  i  $\delta$ , wyznaczamy cztery krawędzie  $a = \alpha \cap \gamma$ ,  $b = \beta \cap \gamma$ ,  $c = \alpha \cap \delta$ ,  $d = \beta \cap \delta$ . Punkt  $P = a \cap b$  jest punktem wspólnym dla płaszczyzn  $\alpha, \beta, \gamma$ ; punkt  $R = c \cap d$  jest punktem wspólnym  $\alpha, \beta, \delta$ . Punkty P i R wyznaczają prostą  $q = \alpha \cap \beta$  (rys. 5.41).



Algorytm:  $\alpha = ABC$ ,  $\beta = EFG$ ,  $\gamma \perp \pi_2$ ,  $a = \alpha \cap \gamma$ ,  $b = \beta \cap \gamma$ ,  $R = a \cap b$ ,  $\delta \perp \pi_2$ ,  $c = \alpha \cap \delta$ ,  $d = \beta \cap \delta$ ,  $P = c \cap d$ ,  $q = PR = \alpha \cap \beta$ .

Rys. 5.41

### Ćwiczenie 53

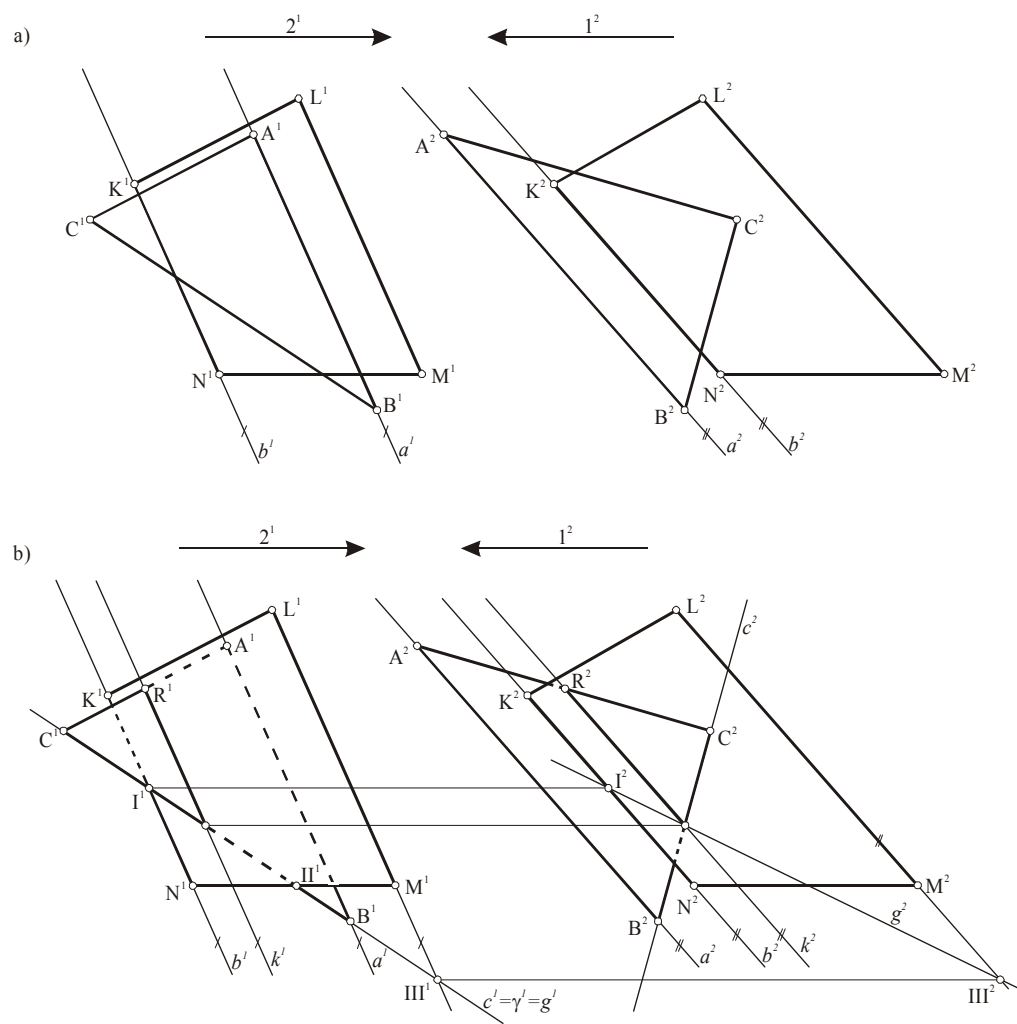
Dane są rzuty figur płaskich  $\langle ABC \rangle$  i  $\langle KLMN \rangle$  posiadających równoległe proste  $a = AB$  i  $b = LM$ . Wyznaczyć przenikanie tych figur, oraz ustalić widoczność (rys. 5.42a).

### Rozwiązanie

Obie płaszczyzny  $\alpha = ABC$  i  $\beta = KLMN$  zawierają proste  $a$  i  $b$  równoległe do siebie, więc krawędź tych płaszczyzn będzie równoległa do nich (rys. 5.40), wobec czego wystarczy wyznaczyć jeden punkt wspólny tych płaszczyzn. Wyznaczamy punkt przebiecia prostej  $c = CB$  zawartej w płaszczyźnie  $\alpha$  z płaszczyzną  $\beta$  (rys. 5.42b). Przez prostą  $c$  prowadzimy płaszczyznę pierwszorzutującą  $\gamma$ , wyznaczamy krawędź  $q$  płaszczyzn  $\gamma$  i  $\beta$  za pomocą punktów I i III (można wykorzystać zamiast punktu III punkt II, ale jego drugi rzut trzeba wyznaczyć za pomocą twierdzenia Talesa jak na rys. 5,11). Punkt P przecięcia się prostych  $c$  i  $q$  jest punktem przebiecia prostej  $c$  należącej do płaszczyzny  $\alpha$  z płaszczyzną  $\beta$ . Krawędź  $k$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  jest równoległa do prostych  $a$  i  $b$ . Część krawędzi należąca do obu figur: odcinek  $\langle PR \rangle$  jest linią przenikania tych figur. Ustalamy widoczność rzutu pierwszego: prosta kierunkowa  $l$  ustala widoczność w rzucie pierwszym. Jeżeli patrzymy na figury zgodnie ze zwrotem prostej  $l$  (poprzez rzut drugi), to widzimy, że pierwszym punktem z figury  $\langle ABC \rangle$  jest punkt C, a z figury  $\langle KLM \rangle$  odcinek  $\langle LM \rangle$ , ponadto jeżeli obie te podprzestrzenie (punkt i odcinek) w rzucie pierwszym znajdują się po obu stronach krawędzi  $k$  możemy twierdzić, że obie podprzestrze-

nie są widoczne w rzucie pierwszym (C i odcinek  $\langle LM \rangle$ ). Ustalamy widoczność w rzucie drugim: zgodnie ze zwrotem prostej 2 pierwsze są podprzestrzenie: C z figury  $\langle ABC \rangle$  i  $\langle KN \rangle$  z figury  $\langle KLMN \rangle$ , obie w rzucie drugim znajdują się po obu stronach krawędzi, a więc są widoczne.

W przypadku gdy podprzestrzenie o większych cechach znajdują się po jednej stronie krawędzi - należy ustalić widoczność obierając na obu figurach jednoczące się punkty jak w ćwiczeniu 51, rys. 5.39.

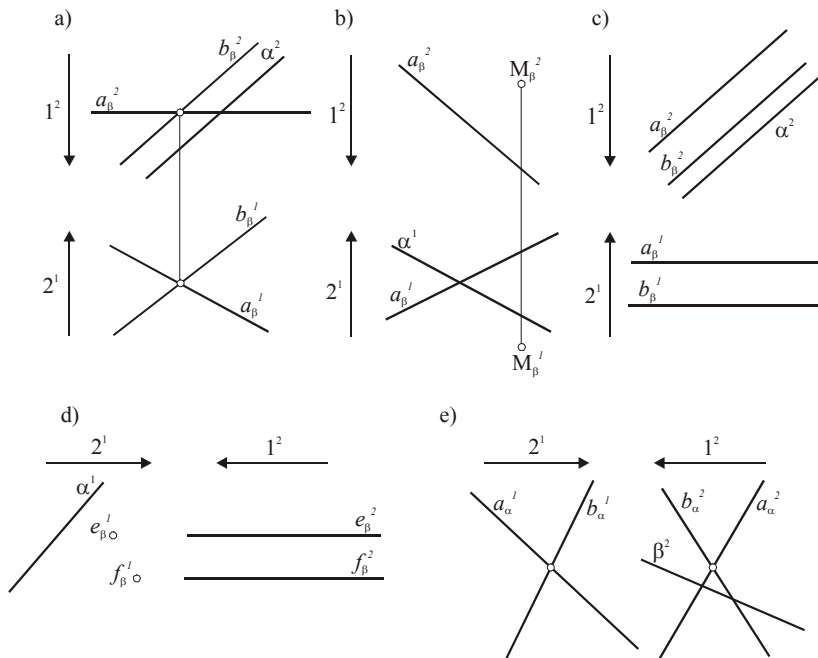


Algorytm:  $\alpha = ABC$ ,  $\beta = KLMN$ .  $a = AB$ ,  $b = KN$ ,  $a \parallel b$ .  $CB = c$ ,  $c \subset \gamma$ ,  $q = \beta \cap \gamma$ ,  $P = c \cap q$ ,  $P \in k$ ,  $k \parallel a \parallel b$ .

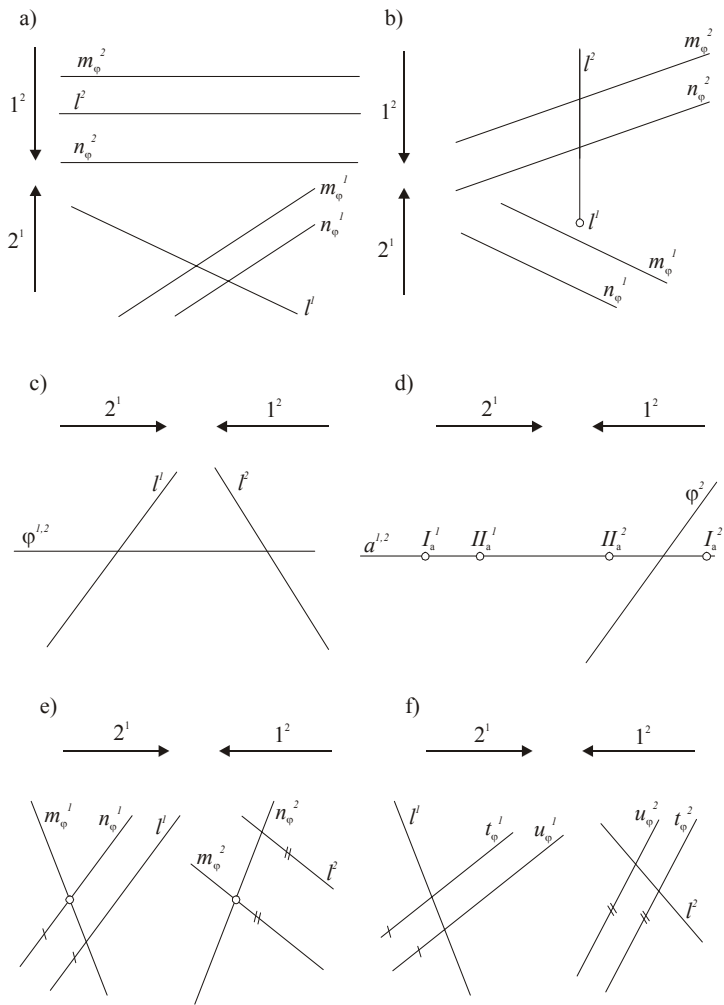
Rys. 5.42

## ZADANIA

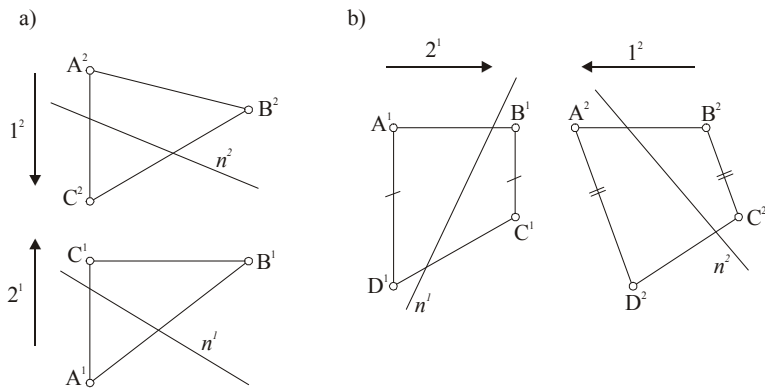
1. Wyznaczyć rzuty krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 5.43).
2. Wyznaczyć rzuty punktu przecięcia prostej  $l$  z płaszczyzną  $\varphi$  (rys.5.44) oraz ustalić widoczność prostej  $l$  względem płaszczyzny  $\varphi$ .
3. Wyznaczyć punkt przebiecia prostej  $n$  z płaszczyzną: a) trójkąta  $\langle ABC \rangle$ , b) czworokąta płaskiego  $\langle EFGH \rangle$ , oraz ustalić widoczność prostej na tle figury (rys. 5.45).
4. Wyznaczyć rzuty krawędzi płaszczyzn  $\alpha = ab, \beta = cd$  (rys. 5.46).
5. Wyznaczyć linie przenikania figur płaskich oraz wyznaczyć widoczność figur (rys. 5.47).
6. Dane są rzuty prostych skośnych  $a$  i  $b$  oraz punktu R. Wyznaczyć rzuty prostej  $d$  zawierającej punkt R oraz przecinającej proste  $a$  i  $b$  (rys. 5.48). (Rozwiązanie zadania jest podane w ćwiczeniu 12, rysunek 3.30 w rozdziale III "Rzut cechowany".
7. Dane są trzy nierównoległe płaszczyzny  $\alpha, \beta, \gamma$ . Podaj w jakim przypadku płaszczyzny posiadają nieskończenie wiele punktów wspólnych, nie posiadają właściwego punktu wspólnego, posiadają jeden punkt wspólny.



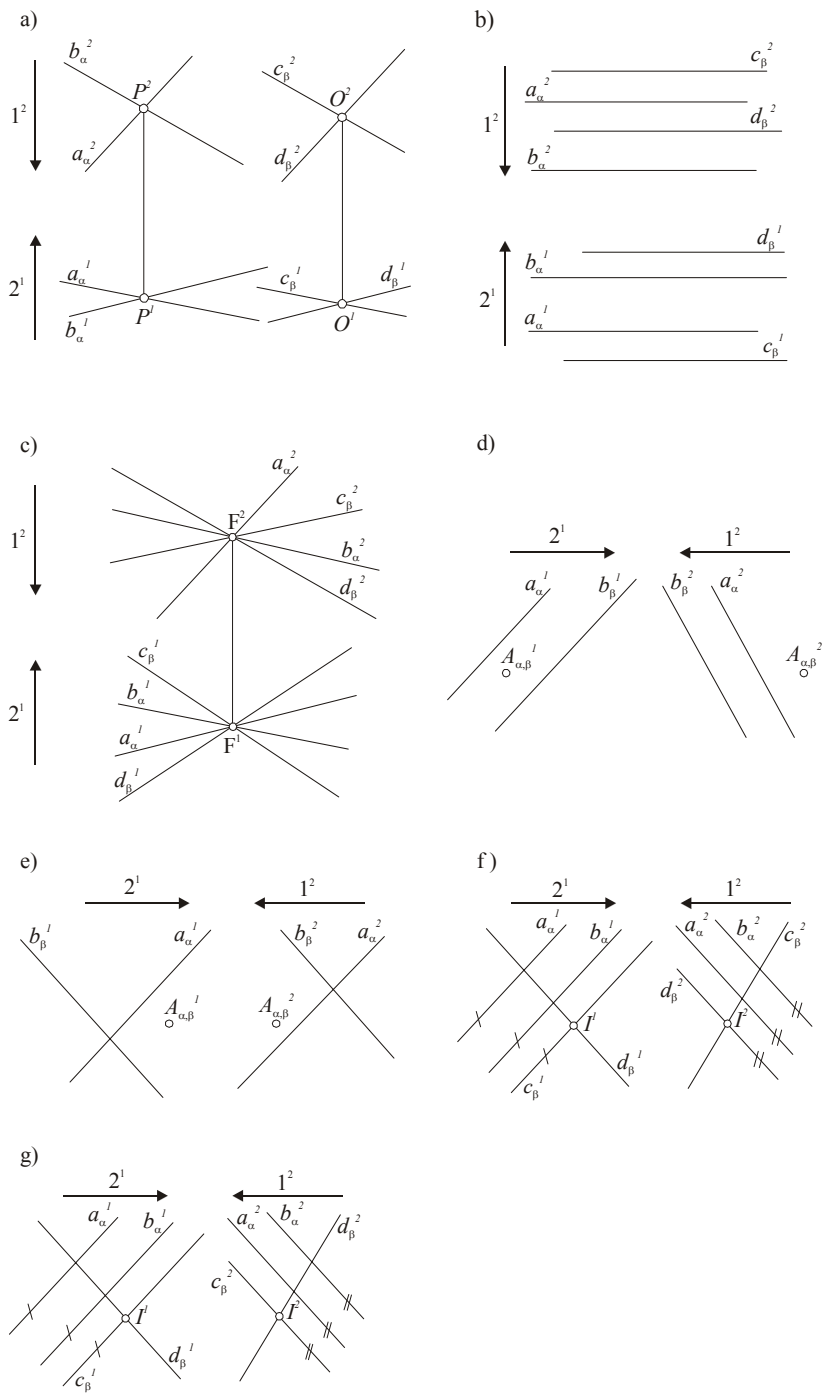
Rys. 5.43



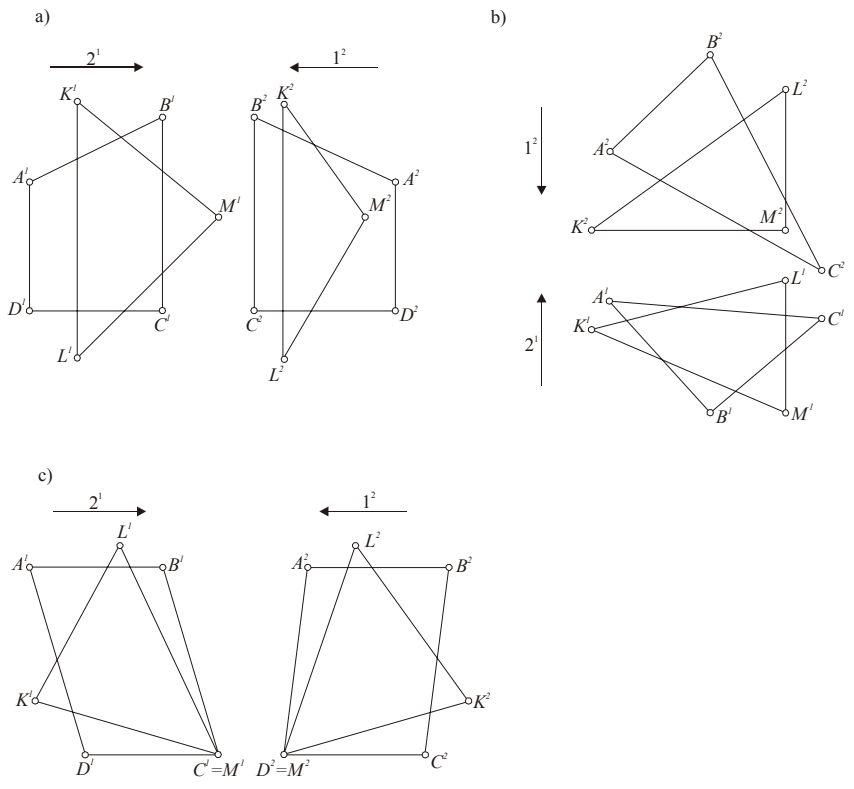
Rys. 5.44



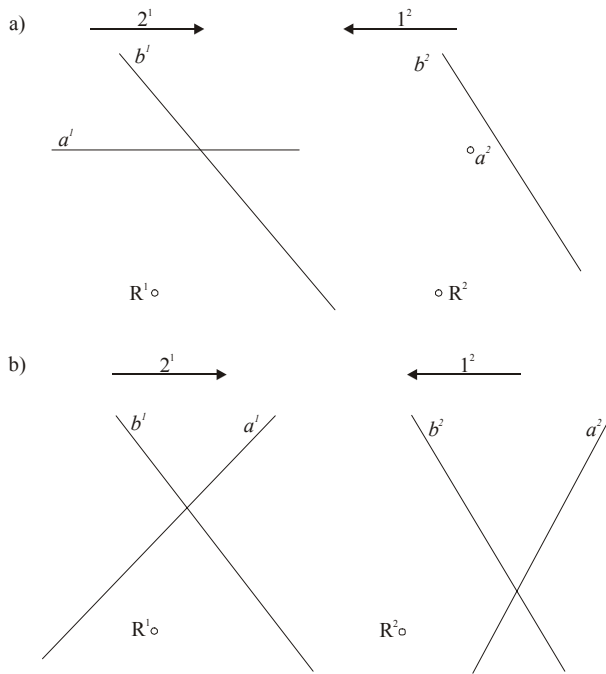
Rys. 5.45



Rys. 5.46



Rys. 5.47



Rys. 5.48

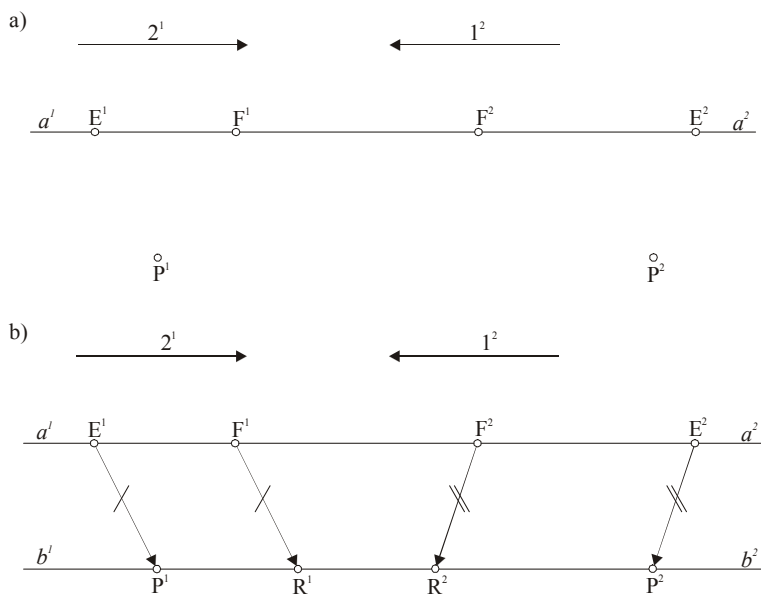
## 5. Równoległość podprzestrzeni

### 5.1. Dwie proste równoległe.

Równoległość prostych ogólnych została omówiona wcześniej (rys. 5.7c i d). Jeden ze sposobów wyznaczania prostych równoległych profilowych podaje poniższe ćwiczenie.

#### Ćwiczenie 54

Dana prosta profilowa  $a$ , wyznaczona punktami E i F oraz dany jest punkt P. Przez punkt P poprowadzić prostą  $b$  równoległą do prostej  $a$  (rys. 5.49a).



Rys. 5.49

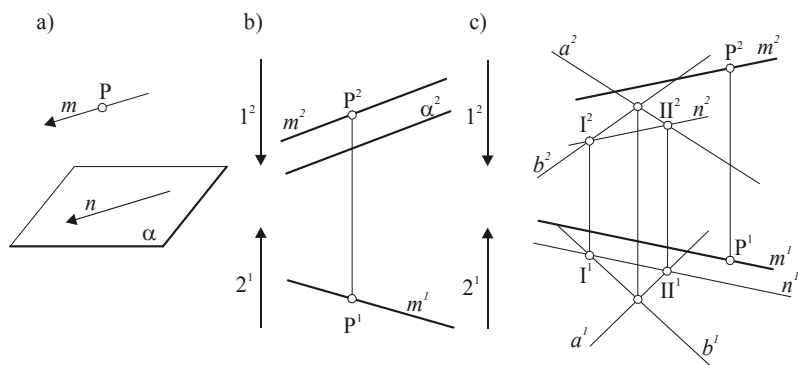
#### Rozwiązanie

Rzuty  $b^1$  i  $b^2$  prostej  $b$  jednoczą się i są równoległe do  $a^1$  i  $a^2$ . Na prostej  $b$  należy wyznaczyć parę punktów tak, aby nachylenia prostych  $a$  i  $b$  względem rzutni były równe. W tym celu wyznaczamy wektor, np.  $\langle EP \rangle$  ( $\langle E^1P^1 \rangle$  i  $\langle E^2P^2 \rangle$ ) oraz równoległy do niego wektor  $\langle FR \rangle$  ( $\langle F^1R^1 \rangle$  i  $\langle F^2R^2 \rangle$ ). Punkty P i R należą do prostej  $b \parallel a$  i jednoznacznie wyznaczają prostą  $b$  (rys. 5.49b).



### 5.2. Prosta równoległa do płaszczyzny.

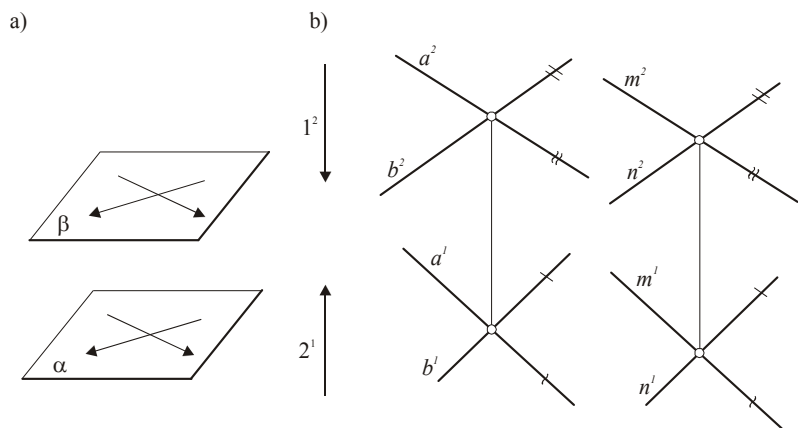
Prosta jest równoległa do płaszczyzny jeżeli jest równoległa do prostej zawartej w płaszczyźnie (rys. 5.50 a, b, c). Z tego wynika, że prosta równoległa do płaszczyzny posiada z nią wspólny punkt niewłaściwy.



Rys. 5.50

### 5.3. Dwie płaszczyzny równoległe.

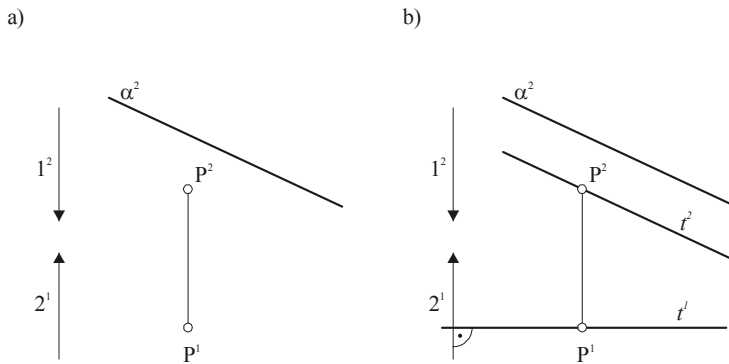
Dwie płaszczyzny są równoległe tylko wtedy gdy zawierają pary prostych przecinających się równoległych do siebie (rys. 5.51a,b). Prosta wspólna tych płaszczyzn (krawędź) jest prostą niewłaściwą.



Rys. 5.51

#### Ćwiczenie 55

Wykreślić rzuty prostej  $t$  drugorazstwowowej zawierającej punkt  $P$  i równoległej do płaszczyzny drugorzutu  $\alpha$  (rys. 5.52).



Rys. 5.52

**Rozwiązanie**

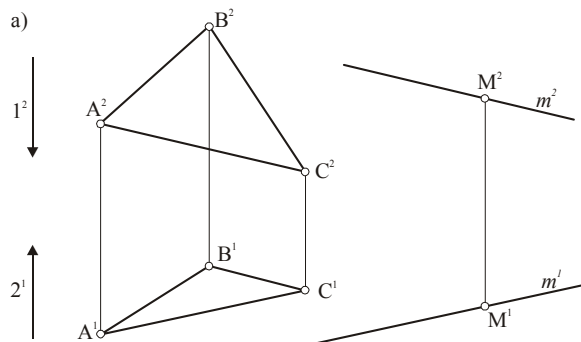
Kreślmy drugi rzut prostej  $t$  równoległe do drugiego rzutu danej płaszczyzny  $\alpha$ . Rzut pierwszy jest prostopadły do prostej  $2^1$ . (W płaszczyźnie  $\alpha$  istnieje prosta, do której prosta  $t$  jest równoległa).

**Ćwiczenie 56**

Wykreślić rzuty dowolnej prostej  $m$  zawierającej punkt  $M$  i równoległej do płaszczyzny trójkąta  $\langle ABC \rangle$  (rys. 5.53).

**Rozwiązanie**

Rzuty prostej  $m$  kreślimy przez odpowiednie rzuty punktu  $M$  równoległe do rzutów jakiejkolwiek prostej zawartej w płaszczyźnie, np. do boku trójkąta.



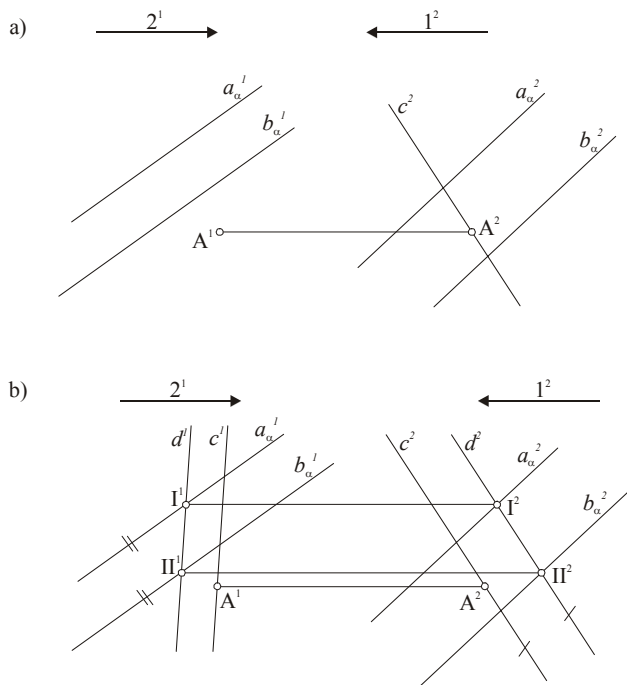
Rys. 5.53

**Ćwiczenie 57**

Dane są rzuty prostych  $a, b$  wyznaczających płaszczyznę  $\alpha$ , punktu  $A$  nie należącego do  $\alpha$  oraz rzut drugi prostej  $c$  taki, że  $A^2 \in c^2$  (rys. 5.54a). Wyznaczyć rzut pierwszy prostej  $c$  tak, aby  $A \in c$  i  $c \parallel a$ .

**Rozwiązanie**

Prowadzimy rzut drugi prostej  $d$  zawartej w płaszczyźnie  $\alpha$  tak, aby  $c^2 \parallel d^2$  (lub  $c^2 = d^2$ ). Wyznaczamy rzut pierwszy prostej  $d$  za pomocą punktów I i II przecięcia się prostej  $d$  z prostymi  $a$  i  $b$ . Rzut pierwszy prostej  $c$ :  $c^1$  jest równoległy do  $d^1$ . Prosta  $c$  jest równoległa do płaszczyzny  $\alpha$ , bo jest równoległa do prostej  $d$  zawartej w  $\alpha$  (rys. 5.54b).



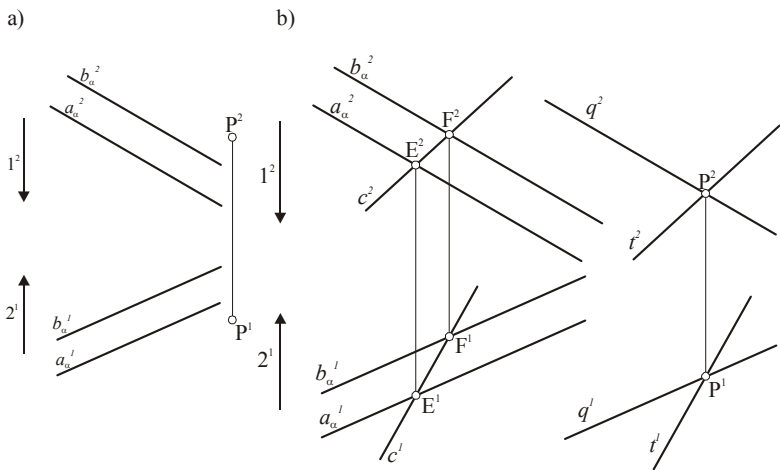
Rys. 5.54

**Ćwiczenie 58**

Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  i dwiema prostymi równoległymi  $ab$  oraz dany jest punkt  $P$  nie należący do  $\alpha$ . Przez punkt  $P$  poprowadzić płaszczyznę  $\beta \parallel \alpha$  (rys.5.55a).

*Rozwiązanie*

Obieramy dowolną prostą  $c \subset \alpha$  i przez punkt  $P$  prowadzimy dwie proste  $t$  i  $q$  odpowiednio równoległe do prostych płaszczyzny  $\alpha$  ( $t \parallel c \wedge q \parallel a \parallel b$ ). Proste  $t$  i  $q$  wyznaczają płaszczyznę  $\beta \parallel \alpha$  (rys.5.55b).



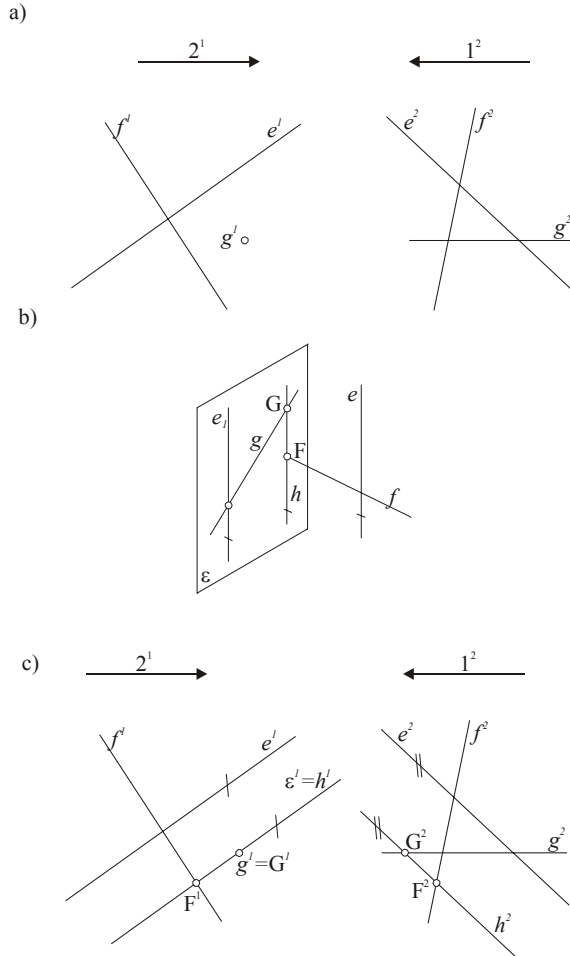
Rys. 5.55

**Ćwiczenie 59**

Dane są rzuty trzech prostych skośnych  $e, f, g$ . Wyznaczyć rzuty prostej  $h$  przecinającej proste  $f$  i  $g$  i równoległej do prostej  $e$  (rys. 5.56a).

**Rozwiązanie**

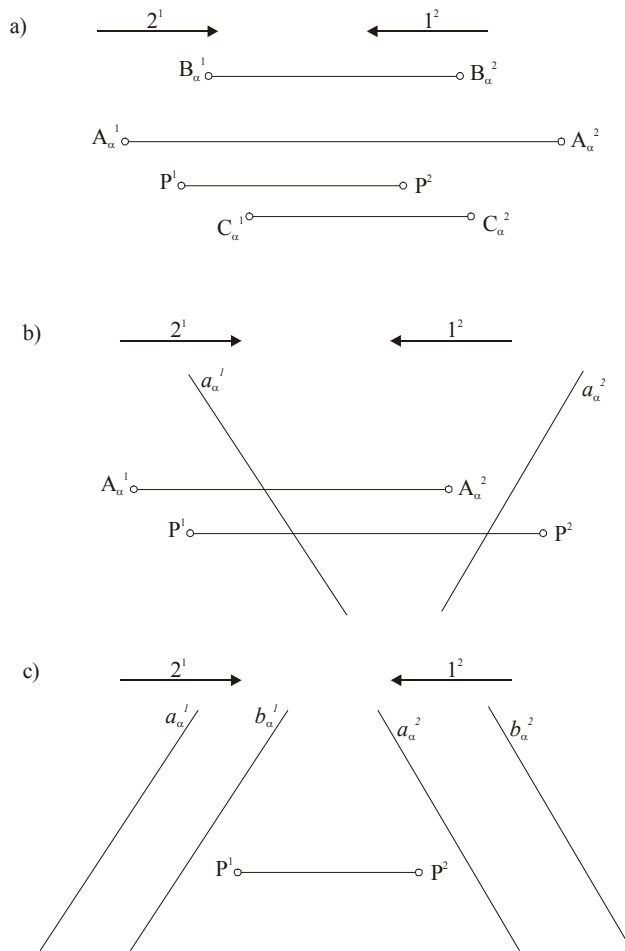
Rysunek 5.56b przedstawia rozwiązanie poglądowe. Przez jedną z prostych  $f$  lub  $g$  (w tym przypadku przez  $g$ ) prowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon \parallel e$ . Wyznaczamy punkt przebiecia prostej  $f$  z płaszczyzną  $\varepsilon$  ( $f \cap \varepsilon = F$ ). Przez punkt  $F$  prowadzimy prostą  $h \parallel e$ . Prosta  $h$  jest zawarta w płaszczyźnie  $\varepsilon$  i przecina prostą  $g$  w punkcie  $G$ . Rysunek 5.56c przedstawia rozwiązanie w rzutach Monge'a.



Rys. 5.56

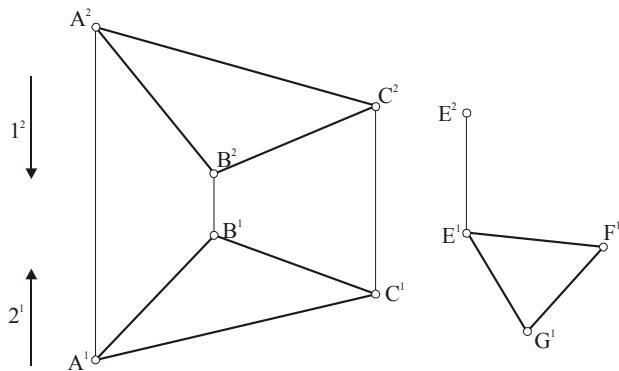
**ZADANIA**

1. Dane są rzuty płaszczyzny: a)  $\alpha = ABC$ , b)  $\alpha = aA$ , c)  $\alpha = ab$ , oraz punktu  $P$ . Wykreślić rzuty prostych  $m, n, t$  równoległych do płaszczyzny  $\alpha$  i zawierających punkt  $P$ : a)  $m$  - drugowarstwowa, b)  $n$  - profilowa, c)  $t$  - pierwszowarstwowa (rys. 5.57a,b,c).



Rys. 5.57

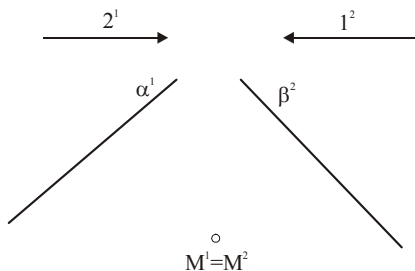
2. Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$ , pierwszy rzut trójkąta  $\langle EFG \rangle$  oraz drugi rzut punktu E. Wyznaczyć drugi rzut trójkąta  $\langle EFG \rangle$  przy założeniu, że płaszczyzny obu trójkątów są równoległe (rys. 5.58).



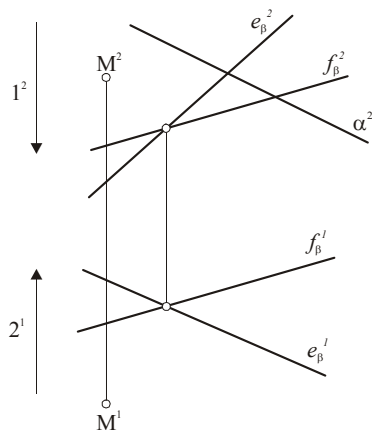
Rys. 5.58

3. Dane są płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  oraz punkt M. Przez punkt M poprowadzić prostą  $t$  równoległą do obu płaszczyzn (rys. 5.59a,b,c,d).

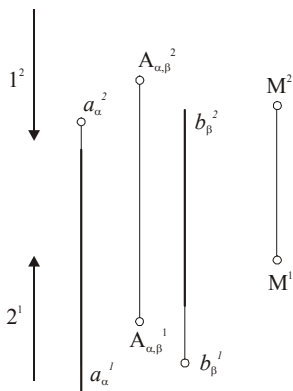
a)



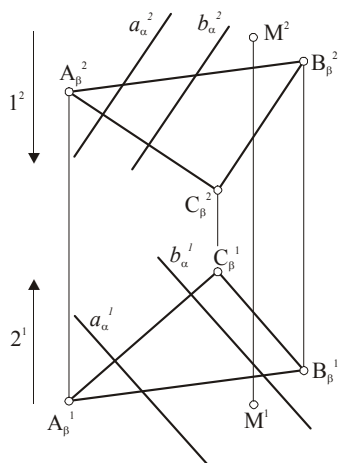
b)



c)

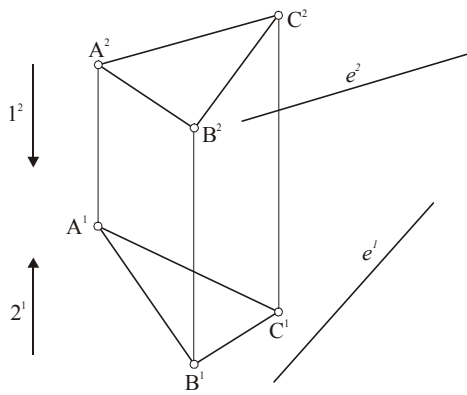


d)

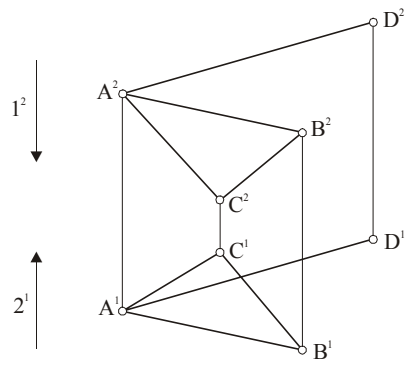


Rys. 5.59

4. Dany jest trójkąt  $\langle ABC \rangle$  oraz prosta  $e$ . Czy prosta  $e$  jest równoległa do płaszczyzny trójkąta (rys. 5.60)?
5. Dane są dwie proste skośne  $e$  i  $f$  oraz punkt  $Q$ . Przez punkt  $Q$  poprowadzić płaszczyznę  $\varepsilon$  równoległą do obu skośnych (rys. 5.61a,b).
6. Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$  oraz odcinka  $\langle AD \rangle$ . Wyznaczyć rzuty graniastosłupa  $\langle ABCDEF \rangle$  o przystających podstawach  $\langle ABC \rangle = \langle DEF \rangle$ . Ustalić widoczność krawędzi graniastosłupa (rys. 5.62).

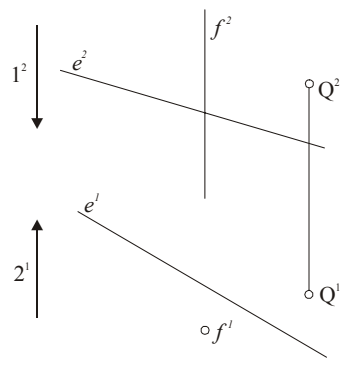


Rys. 5.60

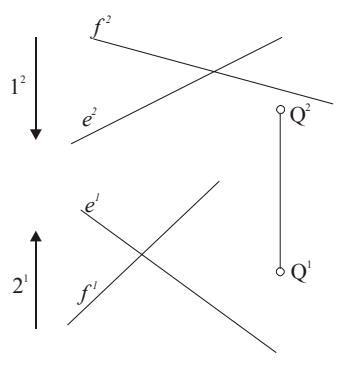


Rys. 5.62

a)



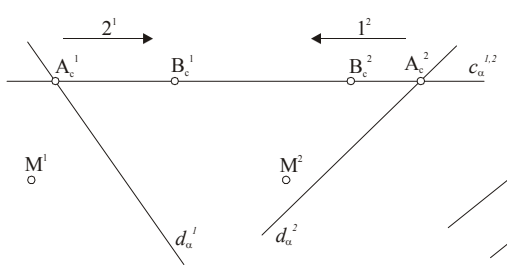
b)



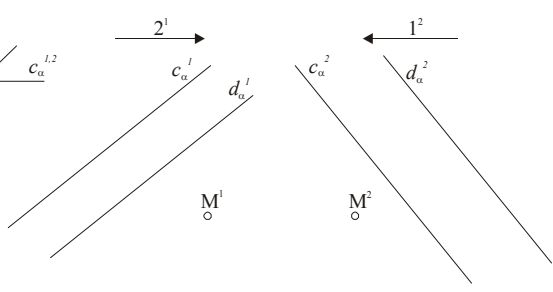
Rys. 5.61

7. Dane są rzuty płaszczyzny  $\alpha$  oraz punktu M. Wyznaczyć płaszczyznę  $\gamma$  zawierającą punkt M, równoległą do płaszczyzny  $\alpha$ . Płaszczyznę  $\gamma$  wyznaczyć za pomocą: a) prostej drugowarstwowej  $e$  i ogólnej  $f$ , b) prostej profilowej  $t$  i pierwszowarstwowej  $p$  (rys. 5.63a,b).

a)

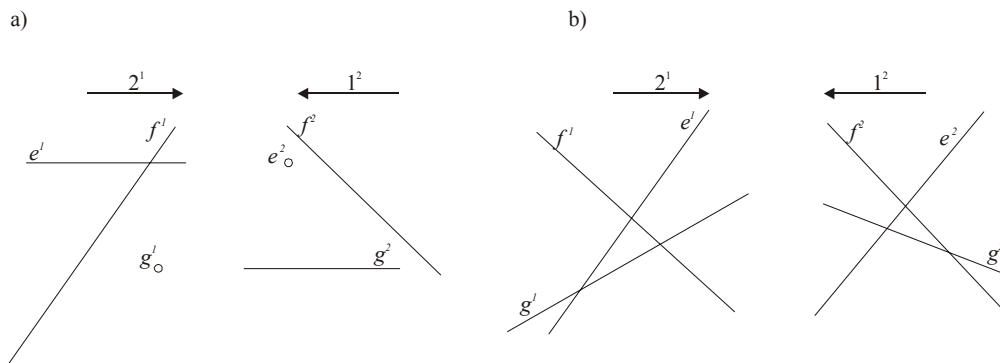


b)



Rys.5.63

8. Dane są rzuty trzech prostych skośnych  $e, f, g$ . Wyznaczyć rzuty prostej  $h$  przecinającej proste  $f$  i  $g$  i równoległej do prostej  $e$  (rys. 5.64a,b). Rozwiązanie zadania jest omówione w ćwiczeniu 59 (rys. 5.56).
9. Dane są rzuty trzech punktów  $A, B, C$ , nie należących do jednej prostej. Przez punkt  $A$  poprowadzić płaszczyznę równoległą od punktów  $B$  i  $C$ . Ile jest rozwiązań? Podać jakie?
10. Dane są proste skośne  $a$  i  $b$ . Wyznaczyć płaszczyznę  $\alpha$  równoległą do prostych  $a$  i  $b$  i równoległą od nich.

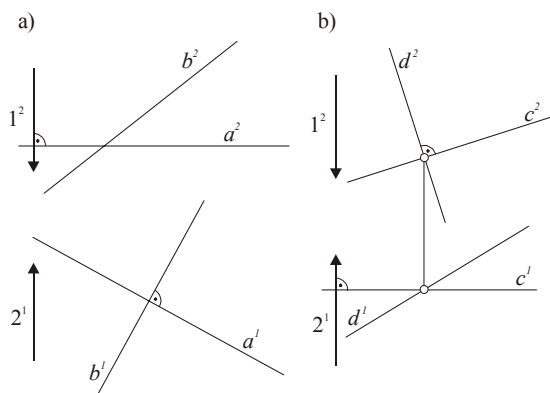


Rys. 5.64

## 6. Prostopadłość podprzestrzeni

### 6.1. Dwie proste prostopadłe (przypadki szczególne).

Rzut prostokątny kąta prostego zawartego między danymi prostymi  $a$  i  $b$  (przecinającymi się bądź skośnymi) może przybierać wartości od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ . Jeżeli jedna z prostych prostopadłych do siebie jest równoległa do rzutni (prostopadła do kierunku rzutowania), a druga nie jest do rzutni prostopadła, to rzut kąta prostego jest kątem prostym (dowód F. i E. Otto § 11). Z powyższego wynika, że jeżeli dana jest prosta w położeniu ogólnym, to bezpośrednio można poprowadzić jedynie prostą pierwszorzadową i prostą drugorzadową prostopadłą do niej (rys. 5.65a,b).

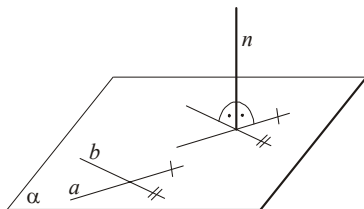


Rys. 5.65



## 6.2. Prosta i płaszczyzna wzajemnie prostopadłe.

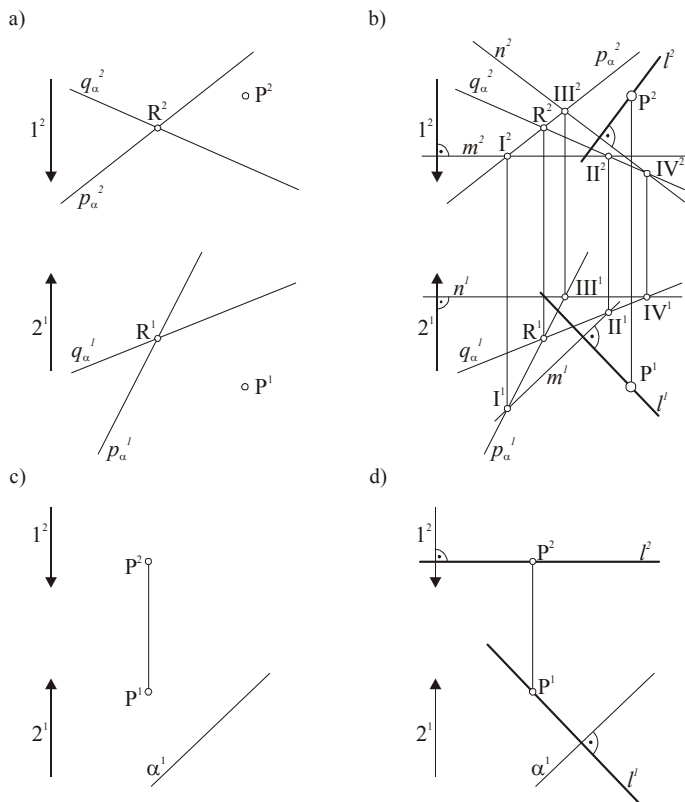
Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby prosta była prostopadła do płaszczyzny jest to, aby była prostopadła do dwóch przecinających się prostych tej płaszczyzny (rys. 5.66). W przypadku płaszczyzny ogólnej są to proste: pierwszorzutowa i drugorzutowa. W przypadku płaszczyzny profilowej jest to prosta warstwowa i prosta spadu. Przykład prostej prostopadłej do płaszczyzny profilowej podany jest w rozdziale 8., ćw.73 (rys. 108).



Rys. 5.66

### Ćwiczenie 60

Dana jest płaszczyzna  $\alpha$ :  $1^\circ$  - prostymi przecinającymi się  $p$  i  $q$  (rys. 5.67a),  $2^\circ$  - pierwszorzutująca (rys. 5.67c), oraz punkt  $P$ . Przez punkt  $P$  nie należący do płaszczyzny  $\alpha$  poprowadzić prostą  $l$  prostopadłą do  $\alpha$  (rys. 5.67).



Rys. 5.67

### Rozwiązanie

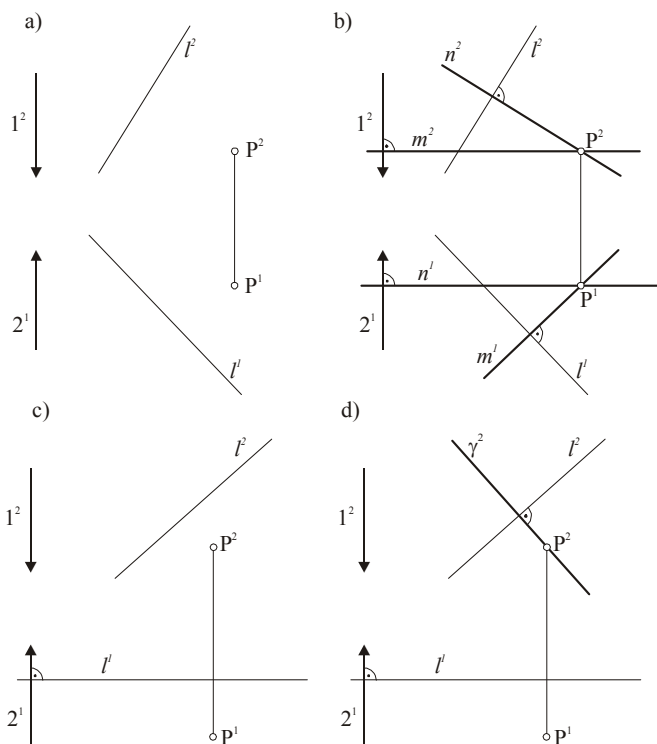
W płaszczyźnie  $\alpha$  prowadzimy prostą pierwszorzutową  $m$  i drugorzutową  $n$ . Prosta  $l$  zawierająca punkt  $P$  jest prostopadła do prostych  $m$  i  $n$  ( $l^1 \perp m^1 \wedge l^2 \perp n^2$ ) (rys. 5.67b). W przypadku płaszczyzny pierwszorzutującej  $\alpha$  przez punkt  $P$  prowadzimy prostą  $l$  pierwszorzutową prostopadłą do  $\alpha$  (rys. 5.67d)

### Ćwiczenie 61

Dana jest prosta  $l$  i punkt  $P$ . Przez punkt  $P$  poprowadzić płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do  $l$  (rys. 5.68a,c).

### Rozwiązanie

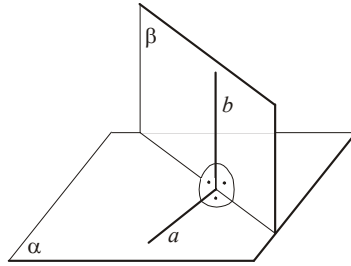
Przez punkt  $P$  prowadzimy dwie proste:  $m$  pierwszorzutową i  $n$  drugorzutową prostopadłe do  $l$  ( $m^1 \perp l^1 \wedge n^2 \perp l^2$ )  $mn = \gamma$  (rys. 5.68b). W przypadku gdy prosta  $l$  jest warstwowa (rys. 5.68d) przez  $P^2$  prowadzimy drugi rzut płaszczyzny:  $\gamma^2$  prostopadłe do  $l^2$ .



Rys. 5.68

### 6.3. Dwie płaszczyzny prostopadłe.

Dwie płaszczyzny są prostopadłe jeżeli w jednej z nich zawarta jest prosta prostopadła do drugiej płaszczyzny (rys. 5.69). W związku z tym mając daną jedną płaszczyznę, np.  $\alpha$  możemy poprowadzić płaszczyznę  $\beta$  na dwa sposoby: I - na płaszczyźnie  $\alpha$  obrać dowolną prostą  $a$  i do niej poprowadzić płaszczyznę  $\beta \perp a$ , II - poprowadzić dowolną prostą  $b$  prostopadłą do  $\alpha$  i przez nią poprowadzić płaszczyznę  $\beta$ .



Rys. 5.69

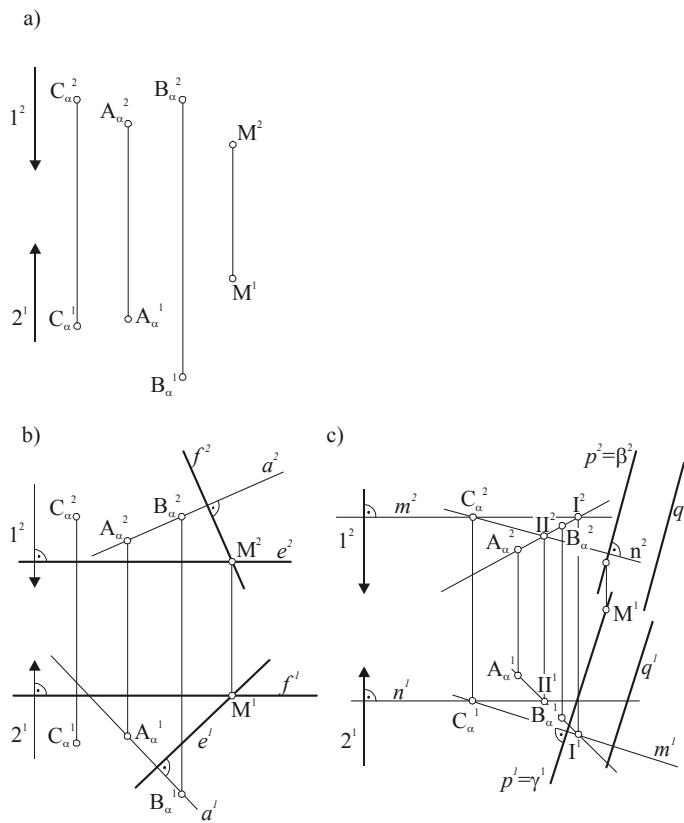
**Ćwiczenie 62**

Dana jest płaszczyzna  $\alpha = ABC$  oraz punkt M. Przez punkt M poprowadzić płaszczyznę  $\beta \perp \alpha$  (rys.5.70a).

*Rozwiązanie*

*Sposób I:* w płaszczyźnie  $\alpha$  wybieramy dowolną prostą  $a$ , np.  $a=AB$  i za pomocą prostych  $e \parallel \pi_1, f \parallel \pi_2 \wedge e \perp a, f \perp a$  (jak na rys. 5.68b) wyznaczamy płaszczyznę  $\beta=ef$  (rys. 5.70b).

*Sposób II:* w płaszczyźnie  $\alpha$  wybieramy dwie proste  $m \perp \pi_1$ , i  $n \parallel \pi_2$  i przez punkt M prowadzimy prostą  $p \perp \alpha (p \perp m \wedge p \perp n)$  jak na rysunku 5.67b. Każda płaszczyzna zawierająca prostą  $p$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$ . Może nią być np.  $\beta \perp \pi_2, \gamma \perp \pi_1, \delta = pq - \text{ogólna}$  (rys. 5.70).



Rys. 5.70

#### 6.4. Dwie proste prostopadłe (ogólne).

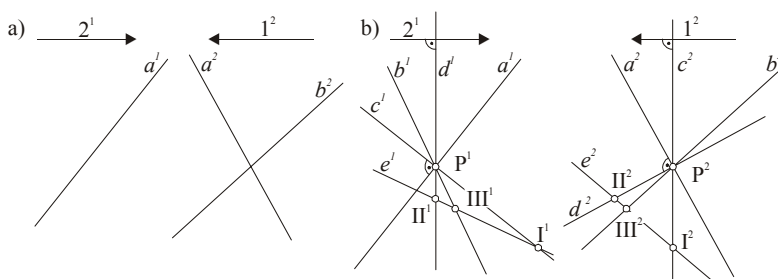
W przypadku ogólnym: dwie proste są prostopadłe do siebie, jeżeli jedna z nich jest zawarta w płaszczyźnie prostopadłej do drugiej prostej.

##### Ćwiczenie 63

Dana jest prosta  $a$  ( $a^1, a^2$ ) oraz rzut drugi prostej  $b:b^2$ . Wyznaczyć rzut pierwszy prostej  $b: b^1$  tak, aby proste  $a$  i  $b$  przecinały się i były do siebie prostopadłe (rys. 5.71 a).

##### Rozwiązanie

Przez punkt P przecięcia się prostych  $a$  i  $b$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  prostopadłą do prostej  $a$ . Płaszczyznę  $\alpha$  wyznaczają proste  $c$  - pierwszowarstwowa i  $d$  - drugowarstwowa, prostopadłe do prostej  $a$ . Prosta  $b$  zawarta jest w tej płaszczyźnie a więc ma z nią dwa punkty wspólne. Jednym jest punkt P. Drugi punkt III wyznaczamy dzięki wprowadzonej prostej  $e$  zawartej w płaszczyźnie  $\alpha$  i przecinającej proste  $c$  i  $d$  w punktach I i II. Wyznaczamy punkt  $III^2 = b^2 \cap e^2$  oraz  $III^1 \in e^1$ . Prosta  $b^1$  jest wyznaczona punktem  $P^1$  i  $III^1$  (rys. 5.71b). Prosta  $b^1$  można też wyznaczyć wprowadzając prostą równoległą do  $b$  zawartą w  $\alpha$ .



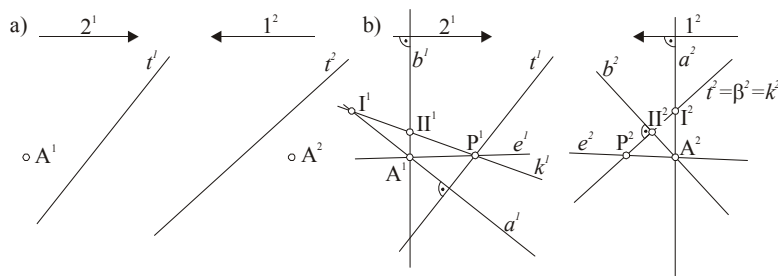
Rys. 5.71

##### Ćwiczenie 64

Dana jest prosta  $t$  i punkt A (rys. 5.72a). Wyznaczyć prostą  $e$ , zawierającą punkt A, prostopadłą do  $t$  i przecinającą ją.

##### Rozwiązanie

Przez punkt A kreślimy prostą  $a \perp l \wedge b \perp l \wedge ab \perp t$ . Proste warstwowe  $a$  i  $b$  prostopadłe do  $t$  wyznaczają płaszczyznę  $\alpha \perp t$ . Wyznaczamy punkt P przebiecia prostej  $t$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Prosta  $e = AP$  jest prostopadła do  $t$  bo należy do płaszczyzny  $\alpha \perp t$  (rys. 5.72b).



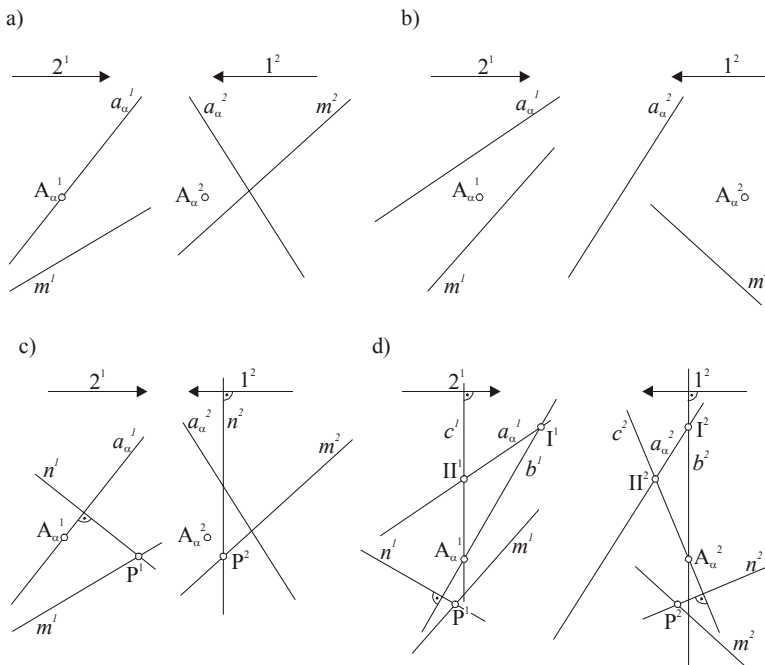
Rys. 5.72

### Ćwiczenie 65

Dane są rzuty płaszczyzny  $\alpha=Aa$  oraz rzuty prostej  $m$ . Wyznaczyć płaszczyznę  $\beta$  zawierającą prostą  $m$  i prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 5.73a,b).

#### Rozwiązanie

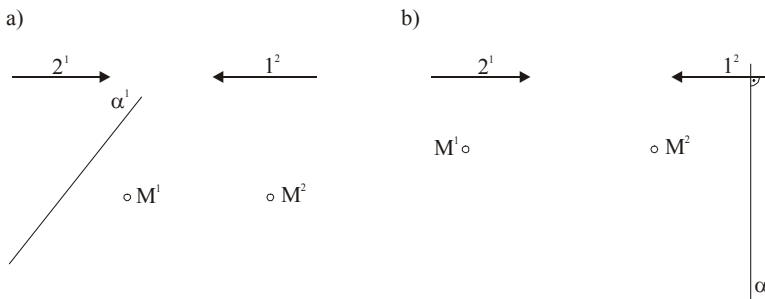
Płaszczyzna  $\beta \perp \alpha$  musi zawierać prostą  $n \perp \alpha$ . W przypadku gdy  $\alpha$  jest płaszczyzną pierwszorztującą prosta  $n$  przecinająca prostą  $m$  i prostopadła do  $\alpha$  jest prostą pierwszorzutową (rys. 5.73.c). Proste  $mn$  wyznaczają płaszczyznę  $\beta$ . W przypadku gdy płaszczyzna  $\alpha$  jest płaszczyzną ogólną, prosta  $n$  przecinająca  $m$  w punkcie P jest prostopadła do prostych: pierwszorzutowej  $b$  i drugorzutowej  $c$  zawartych w  $\alpha$ .  $\beta = mn$  (rys. 5.73d).



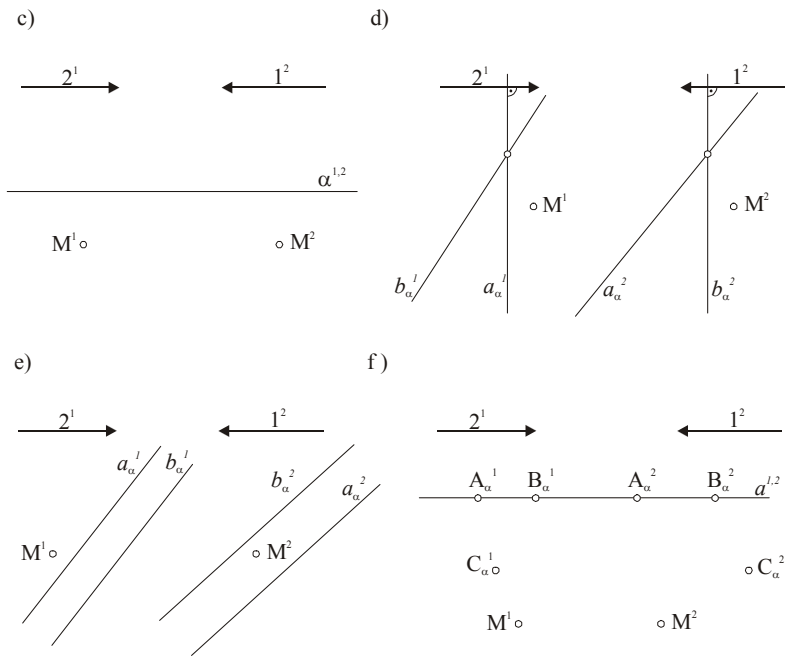
Rys. 5.73

### ZADANIA

1. Dany jest obraz płaszczyzny: 1) rzutującej, 2) ogólnej, oraz punktu M. Wyznaczyć rzuty prostej  $n$  zawierającej punkt M, prostopadłej do płaszczyzny (rys. 5.74a,b,c,d,e,f).

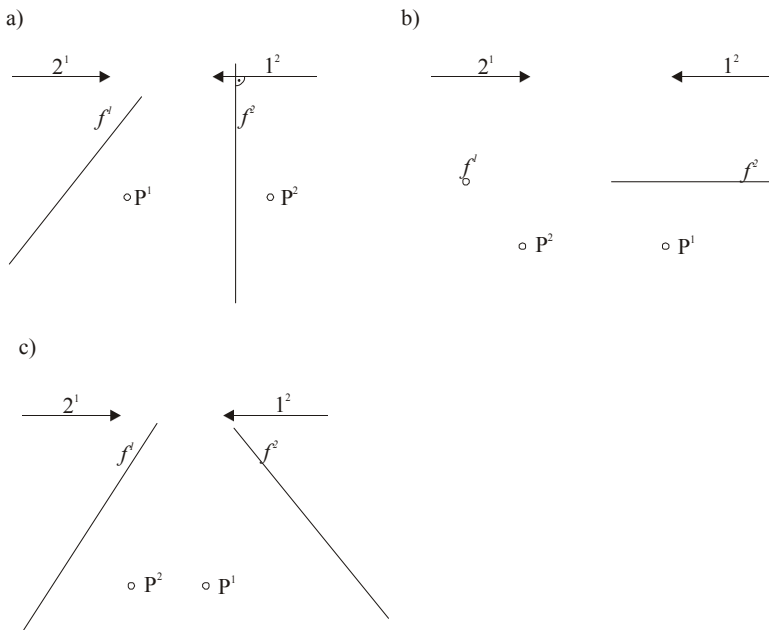


Rys. 5.74a,b



Rys. 5.74c,d,e,f

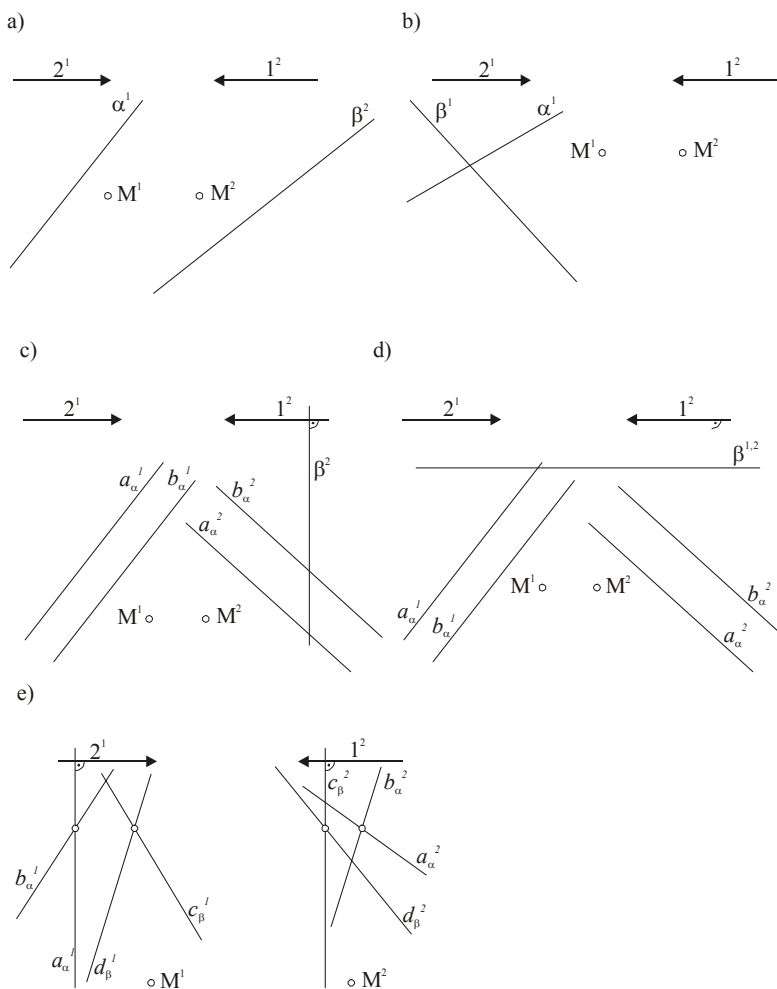
2. Dane są rzuty prostej  $f$  oraz punktu  $P$ . Wyznaczyć płaszczyznę zawierającą punkt  $P$  i prostopadłą do prostej  $f$  (rys. 5.75a,b,c).



Rys. 5.75

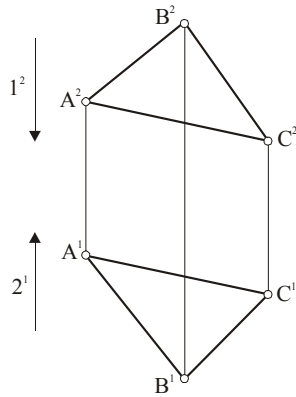
3. Dane są obrazy płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  oraz punktu M. Wyznaczyć obraz płaszczyzny  $\gamma$  zawierającej punkt M i prostopadłej do obu płaszczyzn (rys. 5.76a,b,c,d,e).

Uwaga: istnieją dwa sposoby rozwiązania zadania. 1) wyznaczamy krawędź obu płaszczyzn i przez punkt M prowadzimy płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do krawędzi, 2) przez punkt M prowadzimy dwie proste przecinające się: jedną prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ , drugą prostopadłą do płaszczyzny  $\beta$ . Proste te wyznaczają płaszczyznę  $\gamma$ .



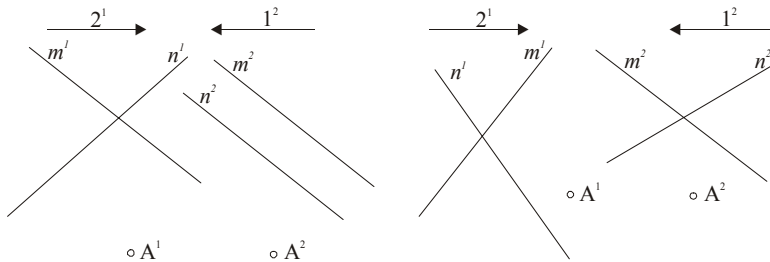
Rys. 5.76

4. Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$ . Wyznaczyć rzuty czworokąta  $\langle BCDE \rangle$  tak, aby jego płaszczyzna była prostopadła do płaszczyzny trójkąta (rys. 5.77).



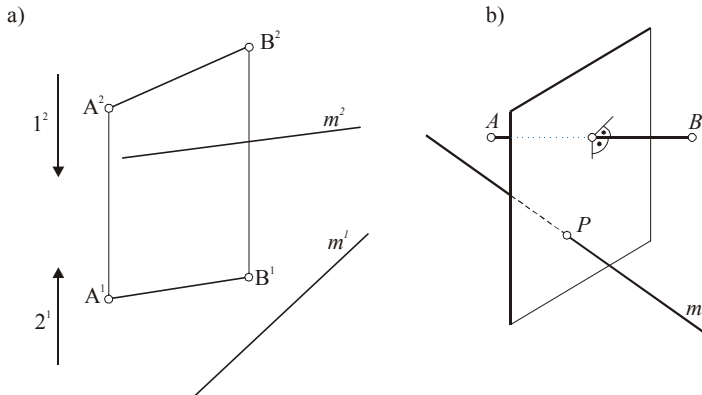
Rys. 5.77

5. Dane są rzuty dwóch prostych skośnych  $m$  i  $n$  oraz punktu  $A$ . Wyznaczyć rzuty prostej  $t$  zawierającej punkt  $A$  i prostopadłej do obu prostych skośnych (rys. 5.78 a, b).  
 Uwaga: istnieją dwa sposoby rozwiązania zadania.
- Przez jedną z prostych prowadzimy płaszczyznę równoległą do drugiej prostej, następnie przez punkt  $A$  prowadzimy prostą  $t$  prostopadłą do tej płaszczyzny.
  - Przez punkt  $A$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha \perp n$  i płaszczyznę  $\beta \perp m$ . Krawędź  $t$  tych płaszczyzn jest prostopadła do obu płaszczyzn.



Rys. 5.78

6. Dany jest odcinek  $\langle AB \rangle$  i prosta  $m$ . Na prostej  $m$  wyznaczyć punkt równoodległy od punktów  $A$  i  $B$  (rys. 5.79a).  
 Uwaga: rozwiązaniem jest punkt przecięcia prostej  $m$  z płaszczyzną symetrylną odcinka (rys. 5.79b)

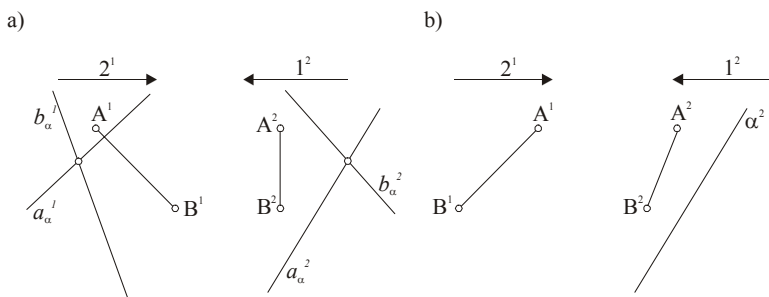


Rys. 5.79



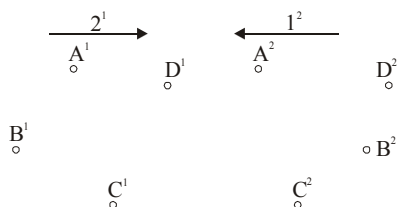
7. Dane są rzuty odcinka  $\langle AB \rangle$  oraz rzuty płaszczyzny  $\alpha$ . Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów zawartych w płaszczyźnie  $\alpha$  oraz równoodległych od punktów A i B (rys. 5.80a,b).

Uwaga: rozwiązaniem jest prosta będąca krawędzią płaszczyzny  $\alpha$  z płaszczyzną symetralną odcinka.



Rys. 5.80

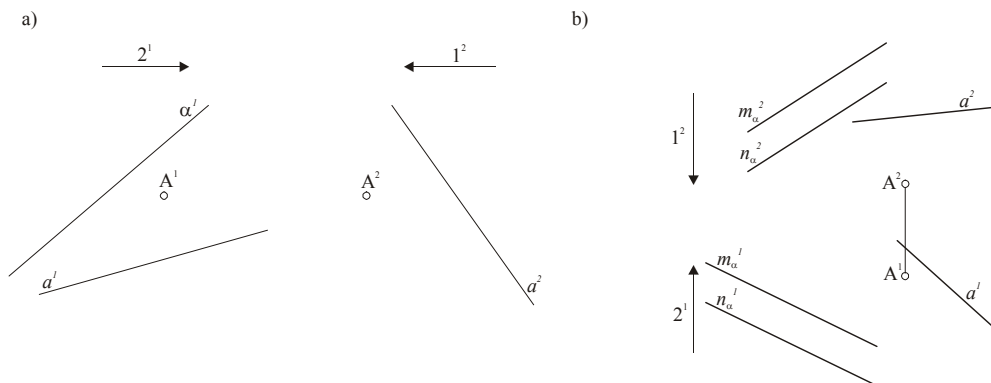
8. Dane są cztery punkty A, B, C, D nie należące do jednej płaszczyzny. Wyznaczyć rzut prostokątny odcinka  $\langle AD \rangle$  na płaszczyznę ABC (rys. 5.81).



Rys. 5.81

9. Dane są obrazy prostej  $a$  płaszczyzny  $\alpha$  oraz punktu A. Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę  $\beta$  równoległą do prostej  $a$  i prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  ( $A \in \beta$ ,  $\beta \parallel a$ ,  $\beta \perp \alpha$ ) (rys. 5.82a,b).

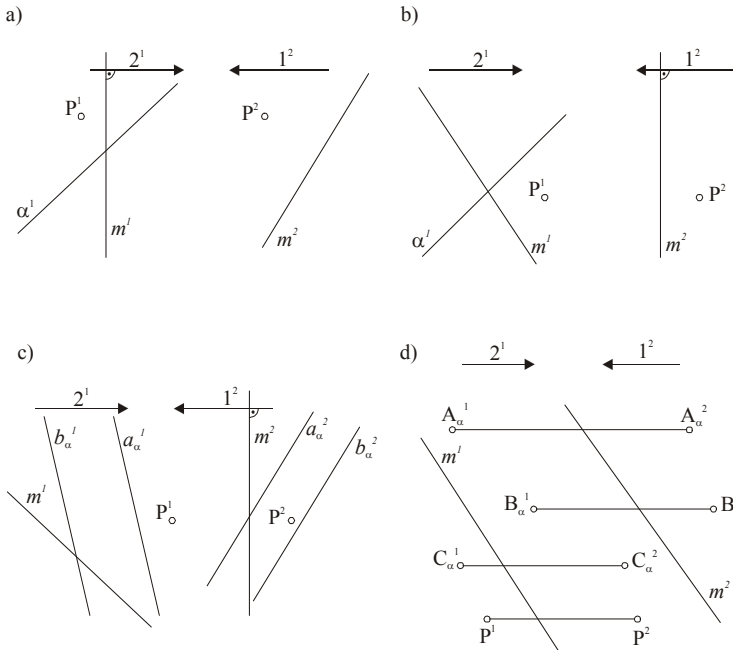
Uwaga: płaszczyznę  $\beta$  wyznaczają dwie proste zawierające punkt A: jedna równoległa do prostej  $a$ , druga prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$ .



Rys.5.82

10. Dane są obrazy punktu  $P$ , prostej  $m$  i płaszczyzny  $\alpha$ . Przez punkt  $P$  poprowadzić prostą  $n$  prostopadłą do prostej  $m$  i równoległą do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 5.83 a,b,c,d). ( $P \in n$ ,  $n \perp m$ ,  $n \parallel \alpha$ ).

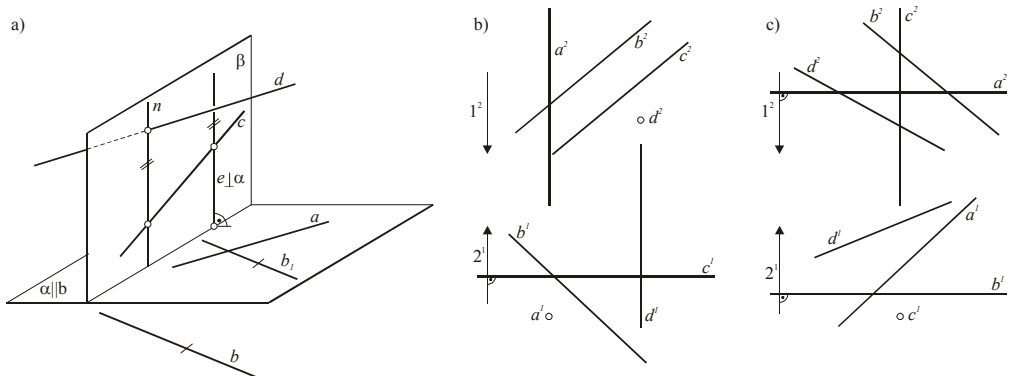
Uwaga: Przez punkt  $P$  prowadzimy płaszczyznę  $\beta$  prostopadłą do prostej  $m$  ponieważ wszystkie proste tej płaszczyzny są prostopadłe do prostej  $m$ . Wyznaczamy krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Przez punkt  $P$  kreślimy prostą  $n$  równoległą do krawędzi.



Rys. 5.83

11. Dane są rzuty czterech prostych skośnych  $a, b, c, d$ . Wyznaczyć rzuty prostej  $n$  prostopadłej do prostych  $a$  i  $b$  i przecinającej proste  $c$  i  $d$  (rys. 5.84b,c).

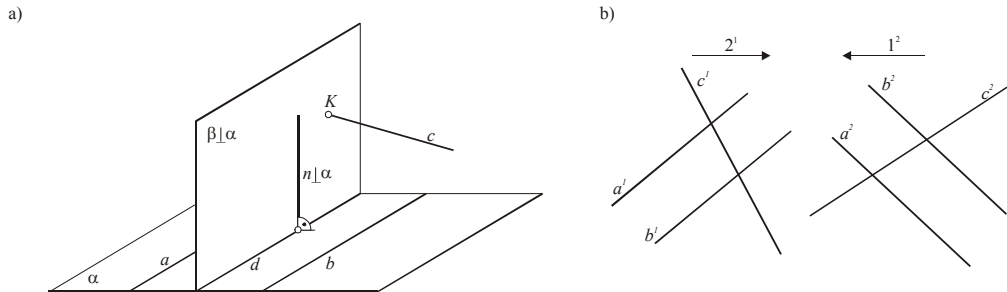
Uwaga: Przez prostą  $a$  (lub  $b$ ) wyznaczamy płaszczyznę  $\alpha \parallel b$  (lub  $a$ ). Na prostej  $c$  (lub  $d$ ) obieramy punkt i kreślimy przez niego prostą  $e \perp \alpha$ , powstaje w ten sposób płaszczyzna  $\beta \perp \alpha$ . Prosta  $d$  (lub  $c$ ) przebija płaszczyznę  $\beta$  i przez punkt przebiecia prowadzimy prostą  $n \perp \alpha$  ( $n \parallel e$ ). Przecina ona również prostą  $c$  (lub  $d$ ) ponieważ znajduje się w płaszczyźnie  $\beta$  (rys. 5.84a).



Rys. 5.84

12. Dane są rzuty prostych równoległych  $a$  i  $b$  oraz prostej skośnej  $c$ . Wyznaczyć rzuty punktu  $K$  należącego do prostej  $c$  i równoodległego od prostych  $a$  i  $b$  (rys. 5.85b).

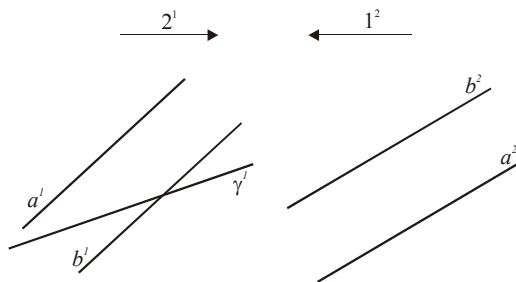
Uwaga: Wprowadzamy prostą  $d$  równoległą do  $a$  i  $b$  zawartą w płaszczyźnie  $\alpha=ab$  i jednakowo odległą od tych prostych. Z dowolnego punktu prostej  $d$  rysujemy prostą  $n \perp \alpha$ . Proste  $d$  i  $n$  wyznaczają płaszczyznę  $\beta \perp \alpha$  i jednakowo odległą od prostych  $a$  i  $b$ . Punkt przecięcia prostej  $c$  z płaszczyzną  $\beta$  jest szukanym punktem  $K$  (rys. 5.85a).



Rys.5.85

13. Dane są rzuty prostych równoległych  $a$  i  $b$  oraz płaszczyzny  $\gamma$ . Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów zawartych w płaszczyźnie  $\gamma$  i równoodległych od prostych  $a$  i  $b$  (rys. 5.86).

Uwaga: Zadanie rozwiązuje się jak zadanie 12 do momentu wyznaczenia płaszczyzny  $\beta$  prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha=ab$  i będącej w połowie odległości tych prostych. Krawędź  $k$  płaszczyzn  $\beta$  i  $\gamma$  jest rozwiązaniem.



Rys. 5.86

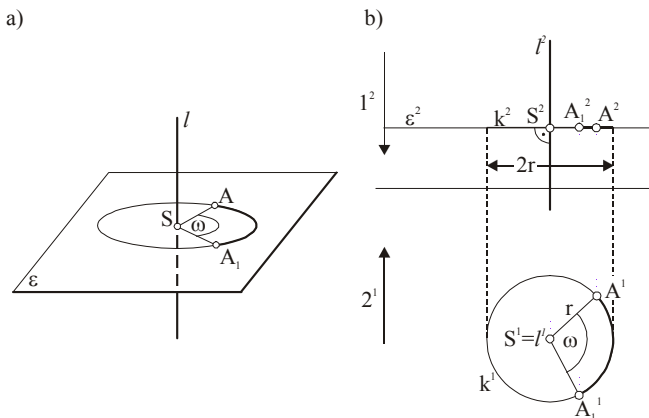
## 7. Obrotory i kłady

Niektóre zagadnienia geometrii wykreślnej można rozwiązywać przez zastosowanie obrotów i kładów.

**Kładem** nazywamy każdą izometrię przypisującą figurze  $\Gamma$  zawartej w płaszczyźnie  $\varepsilon$  figurę  $\Gamma^\circ$  (lub  $\Gamma^*$ ) zawartą w płaszczyźnie warstwowej. Wtedy kład figury  $\Gamma: \Gamma^\circ(\Gamma^*)$  jest figurą przystającą do  $\Gamma$ . Przekształcenie to może być obrotem.

Aby dokonać obrotu płaszczyzny musimy zająć się obrotem punktu dookoła prostej. Niech będzie dana prosta  $l$  i punkt  $A$  (rys. 5. 87a,b). Jeżeli punkt  $A$  obraca się dookoła prostej  $l$ , zwanej osią obrotu, o kąt skierowany  $\omega$  prowadzimy przez punkt  $A$  płaszczyznę  $\varepsilon$  prostopadłą do osi obrotu, zwaną płaszczyzną obrotu, wyznaczamy środek obrotu  $S$  będący punktem wspólnym osi obrotu i płaszczyzny obrotu, następnie zakreślamy okrąg obrotu promieniem

obrotu  $\langle AS \rangle$  i znajdujemy nowe położenie punktu. Kątem obrotu nazywamy kąt  $ASA_1$ . Kierunek obrotu może być zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara lub przeciwny. W mechanice za kierunek dodatni uważa się kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 5.87

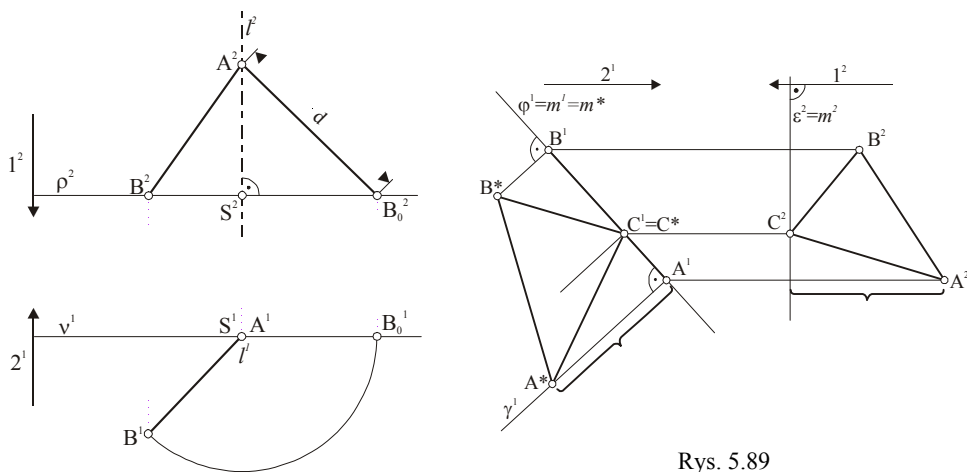
### Ćwiczenie 66

Obrócić odcinek  $\langle AB \rangle$  dookoła prostej  $l$  pierwszorzutuującej aby zajął położenie drugorastwowe (rys. 5.88).

#### Rozwiązanie

Punkt  $A$  należy do prostej  $l$ , a więc nie obraca się. Punkt  $B$  obraca się w swojej płaszczyźnie obrotu  $\rho \perp l$ . Okrąg obrotu jest przystający do swego rzutu pierwszego. Gdy obracający się odcinek zajmie położenie na płaszczyźnie drugorastwowej  $\nu$ ,  $\langle AB \rangle \equiv \langle A^2B^2_0 \rangle$ .

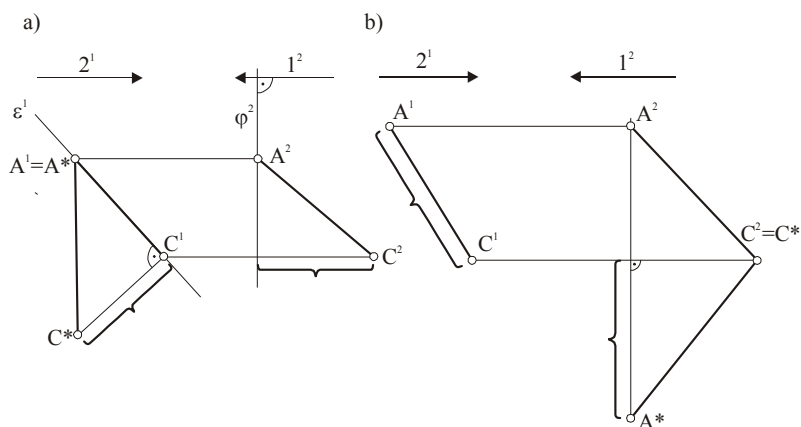
Weźmy pod uwagę płaszczyznę rzutującą  $\varphi$ , np.  $\varphi \perp \pi_1$  i zawarty w niej trójkąt  $\langle ABC \rangle$  (rys. 5.89). Aby wyznaczyć wielkość trójkąta  $\langle ABC \rangle$  wyznaczamy kład płaszczyzny  $\varphi$  na płaszczyznę  $\varepsilon \parallel \pi_1$  ( $\varepsilon \perp l$ ) zwaną płaszczyzną p o r ó w n a w c z ą. Osią obrotu jest prosta  $m = \varphi \cap \varepsilon$ .  $\gamma$  jest płaszczyzną obrotu dla punktu  $A$ . Płaszczyzna  $\varphi$  obraca się o kąt  $90^\circ$ ; taki kład nazywa się kładem prostokątnym. Prosta  $\gamma'$ , do której należy rzut i kład tego samego punktu nazywa się prostą wiążącą i jest prostopadła do osi obrotu.



Rys. 5.88

Rys. 5.89

Na rysunku 5.90a przedstawiono wyznaczanie długości odcinka  $\langle AB \rangle$  przy zastosowaniu układu prostokątnego, a na rysunku 5.90b inny sposób wyznaczania długości odcinka.

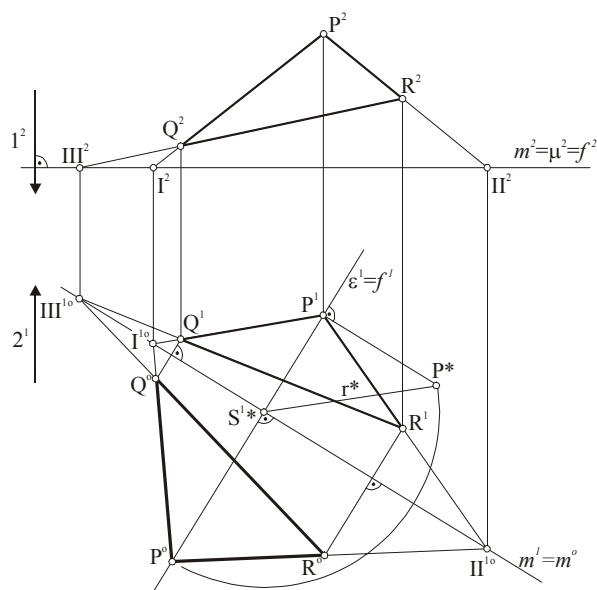


Rys. 5.90

Kład płaszczyzny nierzutującej uzyskujemy przez obrót dowolnego punktu zawartego w płaszczyźnie dookoła prostej warstwowej tej płaszczyzny, tak aby płaszczyzna stała się warstwową.

### Ćwiczenie 67

Dany jest trójkąt (PQR). Wyznaczyć kład tego trójkąta (rys. 5.91).



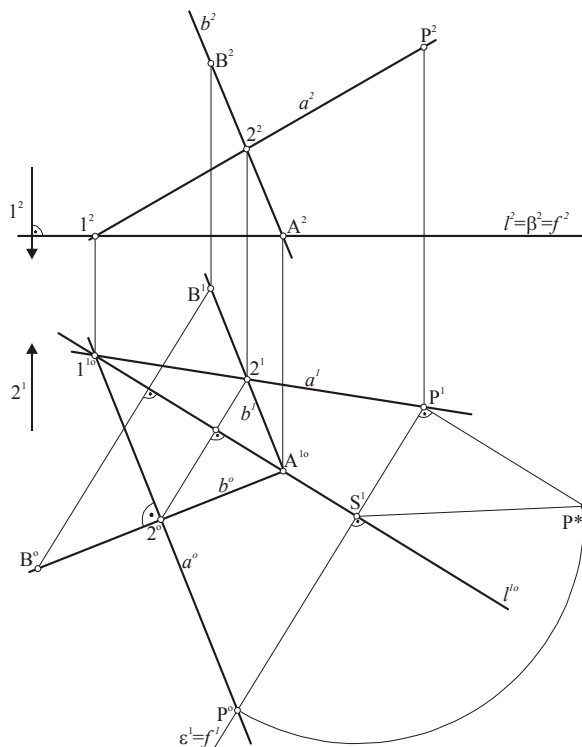
Rys. 5.91

*Rozwiązanie*

Punkty P, Q, R wyznaczają płaszczyznę  $\alpha$ . W płaszczyźnie  $\alpha$  obieramy prostą warstwową  $m$  (w tym przypadku pierwszorzutową) i obracamy dowolny punkt zawarty w płaszczyźnie  $\alpha$  i nie należący do prostej  $m$  (osi obrotu) tak, aby znalazł się w płaszczyźnie pierwszorzutowej  $\mu$  zawierającej prostą  $m$ . W tym przypadku obracamy punkt P. Przez punkt P prowadzimy płaszczyznę obrotu prostopadłą do prostej  $m$ . Jest nią płaszczyzna pierwszorzutowa  $\varepsilon$ . Wyznaczamy środek obrotu S jako punkt wspólny osi obrotu  $m$  i płaszczyzny obrotu  $\varepsilon$ . W celu wyznaczenia promienia obrotu  $r = \langle SP \rangle$  i okręgu obrotu wykonujemy kład prostokątny płaszczyzny  $\varepsilon$ . Otrzymujemy  $r^* = \langle P^*S^* \rangle$ . Okrąg obrotu przecina krawędź  $f = \varepsilon \cap \mu$  w punkcie  $P^\circ$ . Prosta  $m$  i punkty I, II, III w trakcie obrotu nie zmieniają położenia, dzięki czemu wyznaczamy kłady prostych, w których zawarte są boki trójkąta i za pomocą prostych wiążących prostopadłych do osi obrotu  $m$  otrzymujemy kłady wierzchołków trójkąta:  $P^\circ, Q^\circ, R^\circ$ .

**Ćwiczenie 68**

Dana jest płaszczyzna  $\alpha = Aa$ . Wykonać kład płaszczyzny oraz wyznaczyć punkt B, który wraz z punktem A jest symetrycznie położony względem prostej  $a$  w symetrii prostokątnej.



Rys. 5.92

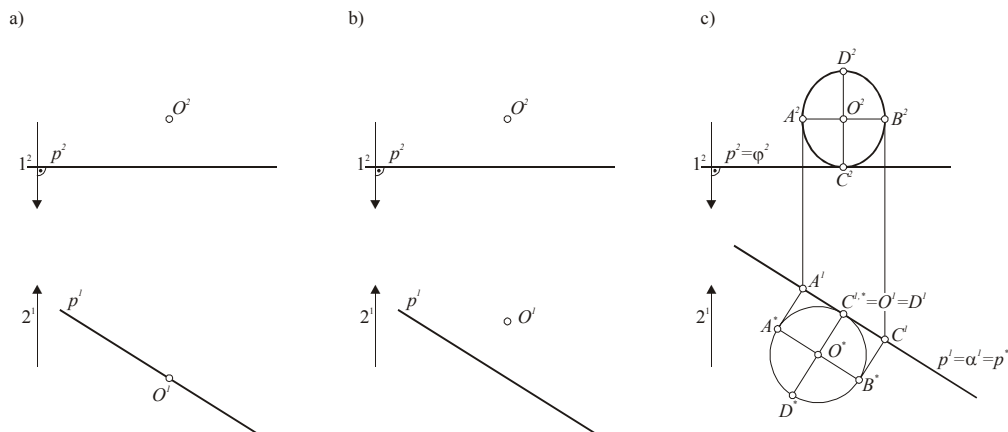
*Rozwiązanie*

W płaszczyźnie  $\alpha$  wyznaczamy prostą warstwową  $l$ . Prosta  $l$  jest osią obrotu (rys. 5.92). Obieramy na prostej  $a$  dowolny punkt P i obracamy go dookoła prostej  $l$  tak, aby znalazł się na płaszczyźnie pierwszorzutowej  $\beta$  zawierającej prostą  $l$ . W tym celu przez punkt P prowadzimy płaszczyznę obrotu  $\varepsilon \perp l$ . Wyznaczamy środek obrotu  $S = l \cap \varepsilon$ , promień obrotu

$r=\langle SP \rangle$  i okrąg obrotu, który znajdujemy za pomocą układu prostokątnego płaszczyzny  $\varepsilon$ .  $P^\circ$  - kład punktu P znajduje się na krawędzi  $f$  płaszczyzny  $\varepsilon$  z płaszczyzną  $\beta$ . Oś obrotu  $l$  jest identyczna z  $l^\circ$ . Kład płaszczyzny  $\alpha$  jest wyznaczony punktem  $P^\circ$  i prostą  $l^\circ$ . Kład  $a^\circ$  prostej  $a$  wyznaczają punkty  $P^\circ$  i  $1^\circ = 1^1$ . Punkt  $A=A^\circ$ . W kładzie płaszczyzny  $\alpha$  znajdujemy punkt  $B^\circ \in b^\circ$ . Prosta  $b^1$  wyznaczona jest przez punkty  $A^1$  i  $2^1$ . Punkt  $B^1$  otrzymujemy za pomocą prostej wiążącej na  $b^1$ . Następnie wyznaczamy drugi rzut prostej  $b$  i punktu B.

### Ćwiczenie 69

Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  punktem O i pierwszorzutową prostą p. Wyznaczyć rzuty okręgu o środku O i promieniu równym r, zawartego w płaszczyźnie  $\alpha$ . (rys. 5.93a,b). Rzutem prostokątnym okręgu zawartego w płaszczyźnie rzutującej jest odcinek, w płaszczyźnie ogólnej - elipsa. W celu jej wykreślenia możemy wyznaczyć odcinki osiowe lub średnicowe sprzężone elipsy, zawarte w osiach lub średnicach sprzężonych. Średnice sprzężone elipsy są to proste zawierające środek elipsy, z których jedna jest osią symetrii równoległej, a druga kierunkiem tej symetrii i na odwrót. Prostopadłe średnice sprzężone elipsy (w przypadku, gdy symetria jest prostokątna) nazywają się osiami elipsy, oś główna zawierająca ogniska i oś poboczna. W okręgu ze względu na to, że symetrie są prostokątne, średnice sprzężone są prostopadłe.



Rys. 5.93a,b,c

### Rozwiązanie

W przypadku jak na rysunku 5.93a płaszczyzna okręgu  $\alpha = Op$  jest pierwszorzutową. Kład płaszczyzny jest kładem prostokątnym. Obracamy punkt O o  $90^\circ$  dookoła prostej  $p$  będącej tu osią obrotu na płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp l$  zawierającą prostą  $p$ . Z punktu  $O^*$  wykreślamy okrąg  $k^*$  styczny do  $p^*$ . Przyjmujemy dwa odcinki średnicowe sprzężone okręgu:  $\langle AB \rangle \parallel p^*$  i  $\langle CD \rangle \perp \langle AB \rangle$ . Rzut pierwszy okręgu jest odcinkiem  $\langle A^1B^1 \rangle$  o długości równej  $2r$  (rys. 5.93c). Wyznaczamy rzuty drugie odcinków średnicowych. Tak przyjęte odcinki średnicowe dały nam w rzucie drugim odcinki osiowe elipsy  $\langle A^2B^2 \rangle \perp \langle C^2D^2 \rangle$  za pomocą których kreślimy elipsę zgodnie z konstrukcjami: X (rys. 1.15) i XI (rys. 1.19) lub owal - konstrukcja XIV (rys. 1.22). W przypadku jak na rysunku 5.93b płaszczyzna okręgu  $\alpha = Op$  jest płaszczyzną ogólną.

Wyznaczamy kład płaszczyzny  $\alpha$  obracając punkt O dookoła osi obrotu (w tym przypadku osią obrotu jest prosta  $p$ ) tak, aby znalazł się w płaszczyźnie warstwowej zawierającej prostą  $p$  (rys. 5.93d). Przez punkt O prowadzimy płaszczyznę obrotu  $\varepsilon$ . Wyznaczamy S - śro-

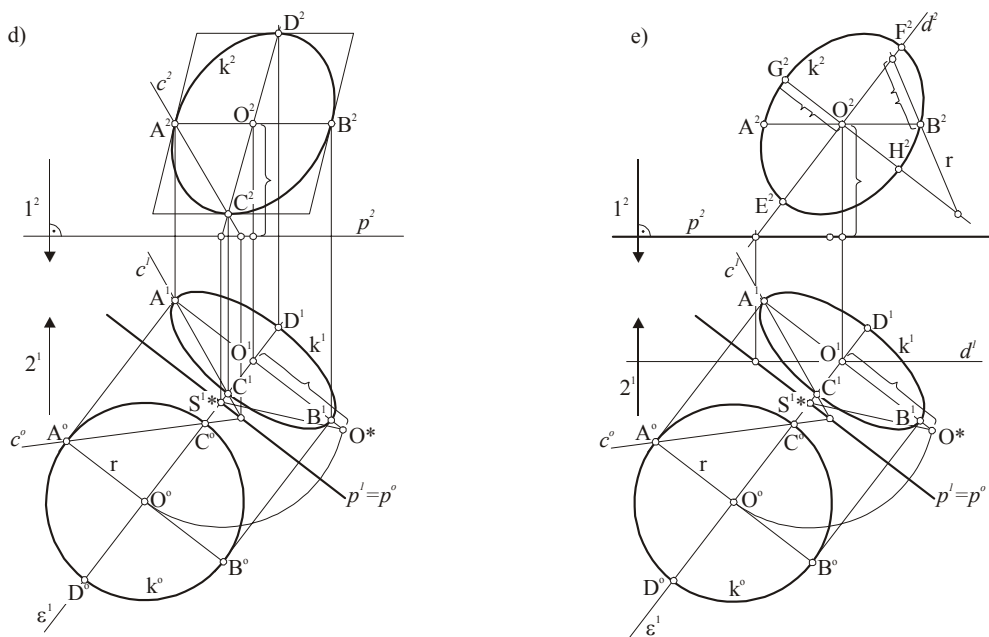
dek obrotu:  $S = p \cap e$ . Wyznaczamy kład prostokątny promienia obrotu  $\langle O^*S^* \rangle$  i zakreślamy nim okrąg obrotu. Punkt  $O^\circ$  znajduje się w płaszczyźnie  $\varepsilon$  na mocy zasady obrotu. W kładzie rysujemy okrąg o promieniu równym  $r$  i środku w punkcie  $O^\circ$ . Dwa odcinki średnicowe okręgu prostopadłe do siebie przyjęte w kładzie:  $\langle A^\circ B^\circ \rangle$  i  $\langle C^\circ D^\circ \rangle$  przekształcają się w rzucie związanym z kładem w dwa odcinki średnicowe elipsy. Ponadto gdy jeden z odcinków średnicowych okręgu będzie równoległy do prostej warstwowej ( $\langle A^\circ B^\circ \rangle \parallel p^\circ$ ) będącej osią obrotu, a drugi do niej prostopadły, to przekształcą się one w rzucie związanym z kładem w dwa odcinki osiowe elipsy:  $\langle A^1 B^1 \rangle$  - odcinek osiowy główny  $\langle A^1 B^1 \rangle \parallel p$ ,  $\langle C^1 D^1 \rangle$  - odcinek osiowy poboczny. Punkt  $C^1$  znajdujemy następująco: wprowadzamy prostą  $c^\circ = A^\circ C^\circ$  przecinającą prostą  $p^\circ = p^1$  w punkcie  $1^\circ = 1^1$ , wyznaczamy jej rzut pierwszy  $c^1 = 1^1 A^1$ , prostą wiążącą punktu C jest  $\varepsilon^1$ .  $|O^1 D^1| = |C^1 O^1|$ . Mając dane odcinki osiowe elipsy możemy wykreślić ją stosując jeden ze sposobów podanych na rysunkach: 1.15, 1.19, 1.22.

Drugi rzut okręgu możemy otrzymać na dwa sposoby.

*Sposób I:* znajdujemy drugie rzuty punktów A i B na prostej równoległej do  $p$ , punkt  $C^2$  na prostej  $c^2 = 1^2 A^2$  i na odnoszącej  $C^1 C^2$ . Punkt  $D^2$  otrzymujemy przez symetrię środkową o środku w punkcie O:  $|D^2 O^2| = |O^2 C^2|$ . Odcinki  $\langle A^2 B^2 \rangle$  i  $\langle C^2 D^2 \rangle$  są odcinkami sprzężonymi elipsy, którą możemy wykreślić za pomocą konstrukcji XIII podanej na rysunku 1.21.

*Sposób II* - pokazany jest na rysunku 5.93e.

Wykreślamy drugi rzut punktu B (lub A)  $B^2$ . Przez punkt O kreślimy prostą  $d$  drugorównoległą zawartą w płaszczyźnie  $\alpha$ . Na rzucie drugim prostej  $d$  odmierzymy odcinek  $\langle E^2 F^2 \rangle = 2r$  o środku  $O^2$ . Jest to odcinek osiowy główny elipsy będącej rzutem drugim okręgu. Odcinek osiowy poboczny  $\langle G^2 H^2 \rangle$  prostopadły do  $\langle E^2 F^2 \rangle$  kreślimy za pomocą konstrukcji podanej na rysunku 1.21.



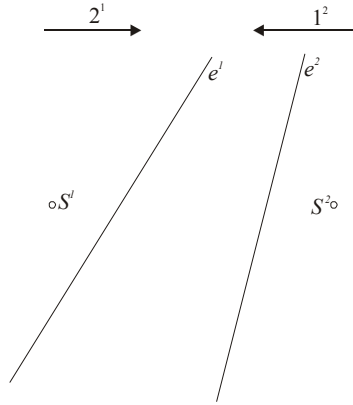
Rys.5.93d,e



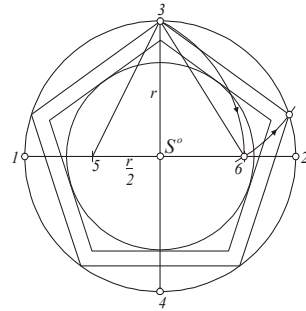
### Ćwiczenie 70

Dane są rzuty prostej  $e$  i punktu  $S$  (rys. 5.94a). Wyznaczyć rzuty pięciokąta foremego  $\langle ABCDE \rangle$  o środku  $S$  i punktach  $A$  i  $B$  zawartych w prostej  $e$ .

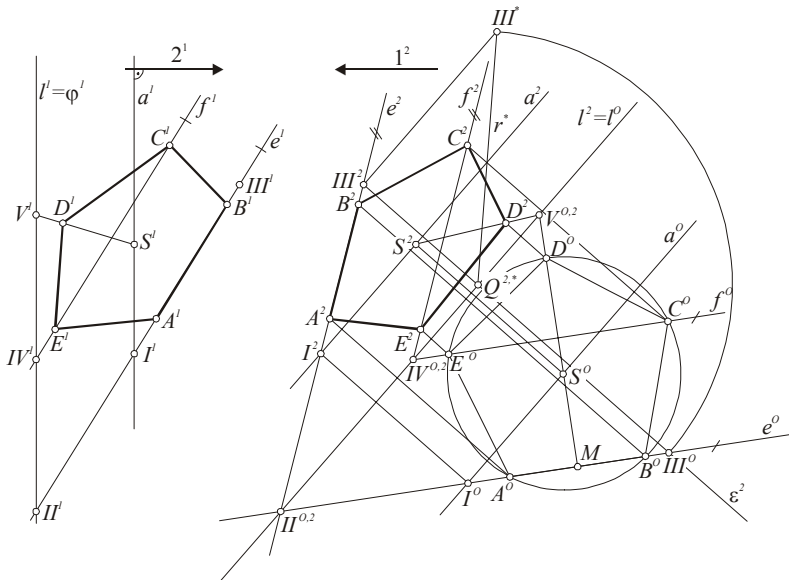
a)



c)



b)



Rys. 5.94

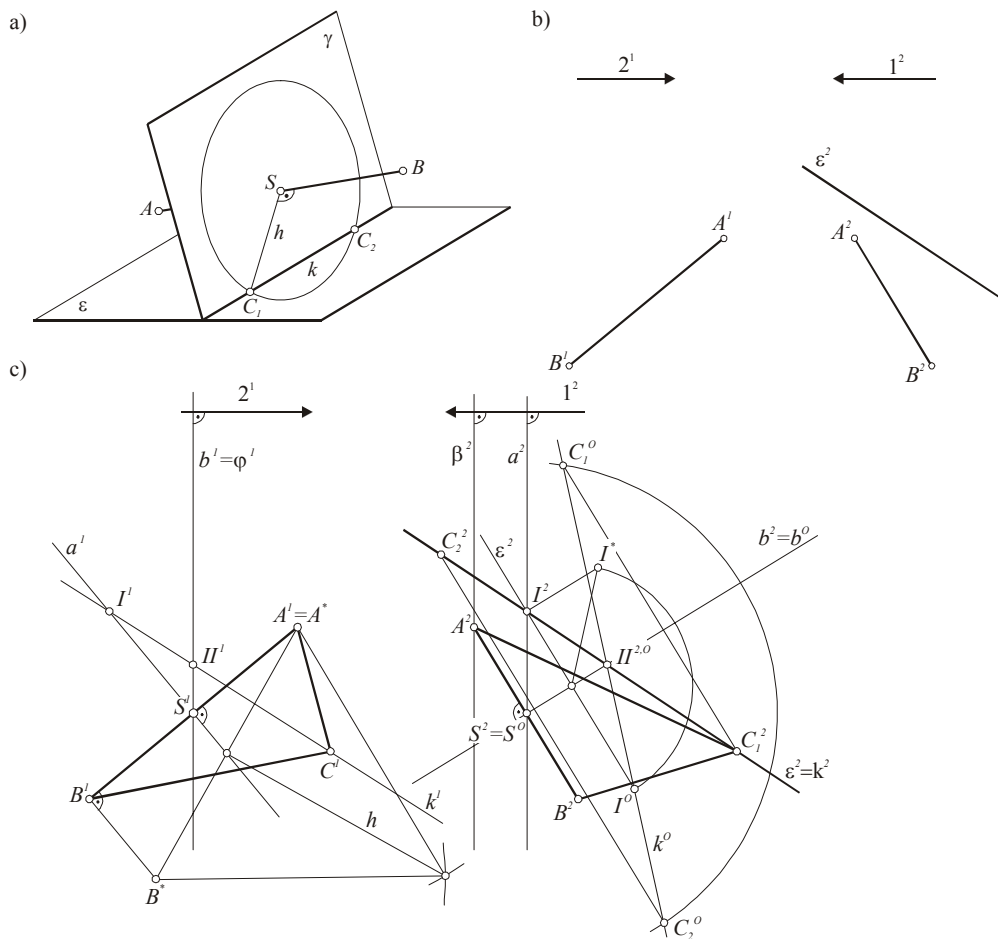
### Rozwiązanie

W płaszczyźnie  $\alpha = Se$  kreślimy przez punkt  $S$  prostą drugowarstwową  $a$  i równoległą do niej prostą  $l$  (w celu zwiększenia przejrzystości rysunku). Prosta  $l$  jest osią obrotu dla punktu  $III$  który obracamy dookoła prostej  $l$  na płaszczyznę  $\varphi$  zawierającą prostą  $l$ . Przez punkt  $III$  prowadzimy płaszczyznę obrotu  $\varepsilon \perp l$ . Punkt  $Q = l \cap \varepsilon$  jest środkiem obrotu, w układzie prostokątnym płaszczyzny  $\varepsilon$  otrzymujemy promień obrotu  $(O^*III^*) = r$ . Narysowany w układzie prostokątnym okrąg obrotu przecina  $\varepsilon^2$  w punkcie  $III^0$ .  $e^0 = III^0 II^0$ . Prosta  $a$  przecina prostą  $e$

w punkcie I, wyznaczamy  $I^{\circ}$ ,  $a^{\circ}$  i za pomocą prostej wiążącej punkt  $S^{\circ}$ . Wyznaczamy odległość punktu S od prostej  $e$ : odcinek  $\langle S M \rangle$ . Pięciokąt foremny wykreśliśmy za pomocą podobieństwa. Konstrukcja pięciokąta (opatrzona niewielkim błędem) jest podana na rys. 1.1 i 5.94. Kreślimy okrąg o dowolnym promieniu i dwie jego prostopadłe średnice (1 2) i (3 4). Z punktu 5 środka odcinka (S 1): kreślimy łuk o promieniu (5 3) do przecięcia z S 2. Otrzymujemy punkt 6. Odcinek (3 6) jest bokiem pięciokąta foremnego. W dalszej kolejności na prostej S 4 (rys. 5.94c) odmierzymy wielkość odległości  $(S^{\circ}e^{\circ}) = \langle S^{\circ}M \rangle$  i z podobieństwa trójkątów wyznaczamy bok naszego pięciokąta i promień okręgu opisanego na nim. Okrąg i cały pięciokąt kreślimy w kładzie na rysunku 5.94b. Kreślimy rzuty pięciokąta: punkty w kładzie i rzucie drugim znajdują się na prostych wiążących prostopadłych do  $l$ , oraz na odpowiednich prostych: wierzchołki A i B znajdują się na prostej  $e$ , E i C na prostej  $f$  równoległej do  $e$  przecinającej prostą  $l$  w punkcie IV, wierzchołek D na prostej S V. Rzuty pierwsze wierzchołków pięciokąta wyznaczamy za pomocą tych samych prostych  $e$ ,  $f$  i S V po uprzednim wyznaczeniu punktów  $IV^1$  i  $V^1$  na prostej  $l^1$ .  $A^1B^1 \in e^1$ ,  $IV^1 \in f \parallel e^1$ ,  $D^1 \in V^1S^1$ .

### Ćwiczenie 71

Dane są rzuty odcinka  $\langle AB \rangle$  oraz płaszczyzny  $\varepsilon$ . Wyznaczyć rzuty trójkąta równobocznego, którego wierzchołek C należy do  $\varepsilon$  (Rys. 5.95a).



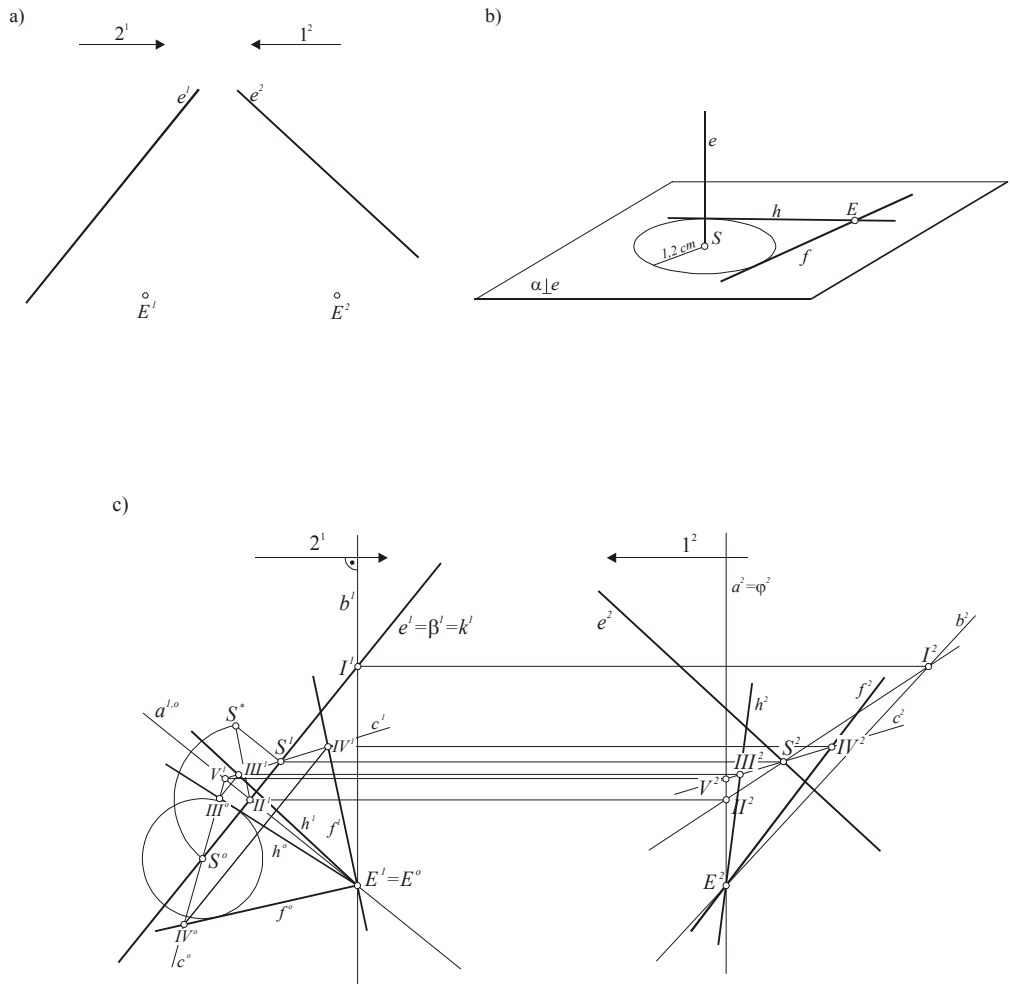
Rys. 5.95

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy wielkość odcinka  $\langle AB \rangle$  za pomocą układu prostokątnego i kreślimy trójkąt równoboczny  $\langle ABC \rangle$  o długości boku  $\langle A^*B^* \rangle$ , po czym znajdujemy wysokość trójkąta  $h$  (rys. 5.95a i c). Przez środek odcinka  $S$  prowadzimy płaszczyznę symetralną odcinka (prostopadłą do odcinka)  $\gamma = ab$ . Wyznaczamy krawędź  $k$  płaszczyzn  $\gamma$  i  $\varepsilon$ . Następnie wyznaczamy kład płaszczyzny  $\gamma$  obracając punkt  $I$  prostej  $k$  dookoła prostej  $b$  do położenia na płaszczyźnie  $\varphi$  zawierającej prostą  $b$ . W kładzie płaszczyzny  $\gamma$  wyznaczamy punkt  $S^\circ = S^2$  i prostą  $k^\circ$  zawierającą punkty  $I^\circ$  i  $II^\circ = II^2$ . Z punktu  $S^\circ$  kreślimy okrąg o promieniu  $h$  znalezionym z trójkąta  $\langle ABC \rangle$ . Okrąg może przecinać prostą  $k^\circ$  w dwóch punktach i wtedy są dwa rozwiązania jak na rysunku 5.95a i c; może być styczny do  $k^\circ$  - wtedy jest jedno rozwiązanie, i może nie mieć punktu wspólnego z  $k^\circ$  - nie ma rozwiązania.

**Ćwiczenie 72**

Dane są rzuty punktu  $E$  i prostej  $e$ . Wyznaczyć rzuty prostych  $f$  i  $h$  zawierających punkt  $E$ , prostopadłych do prostej  $e$  i odległych od niej o 1.2 cm (rys. 5.96a).



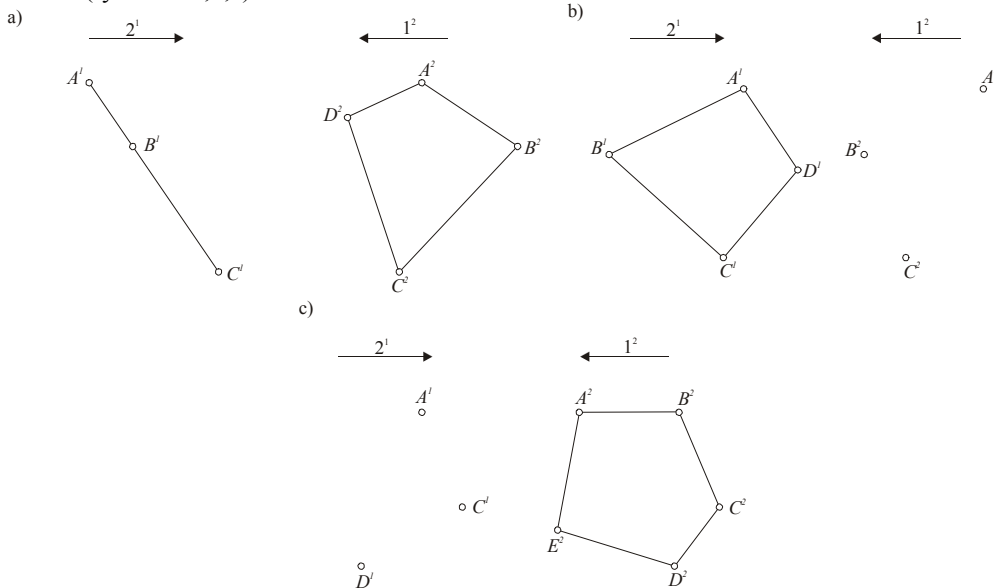
Rys. 5.96

*Rozwiązanie*

Przez punkt E prowadzimy płaszczyznę  $\alpha \perp l_e$ . Wyznaczamy punkt S przebiecia prostej  $e$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Proste styczne do okręgu o środku S i promieniu  $r=1,2$  cm, zawartego w  $\alpha$ , wykreślone z punktu E są rozwiązaniem zadania (rys. 5.96b). Wykonujemy kład płaszczyzny  $\alpha$  na płaszczyznę pierwszorzadową  $\varphi$  (oś obrotu - prosta  $a$ ) za pomocą obrotu punktu S. Z punktu S kreślimy okrąg o promieniu  $r=1,2$ cm, oraz styczne  $f^\circ$  i  $h^\circ$  z punktu  $E^\circ$  do tego okręgu. Rzuty pierwsze prostych:  $f^1$  i  $h^1$  wyznaczamy za pomocą prostej  $c = SV$  i przecinającej proste  $f$  i  $h$  w punktach III i IV (rys. 5.96c).

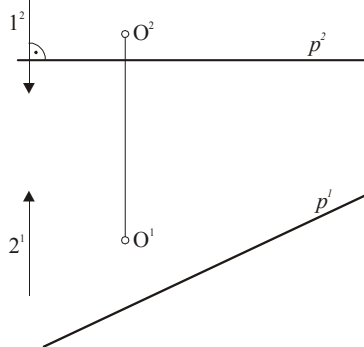
ZADANIA

1. Uzupełnić rzuty: a), b) czworokąta płaskiego, c) pięciokąta płaskiego i wyznaczyć jego kład (rys. 5.97 a,b,c).



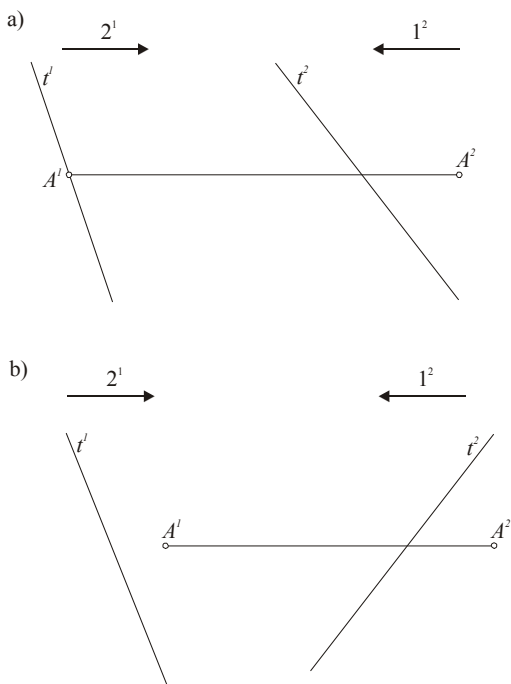
Rys. 5.97 a,b,c.

2. Dany jest punkt O i prosta pierwszorzadowa  $p$ . Wykreślić rzuty pięciokąta foremnego o środku O i o boku zawartym w prostej  $p$ . Przy kreśleniu kładu pięciokąta foremnego wykorzystać podobieństwo figur (rys. 5.98).

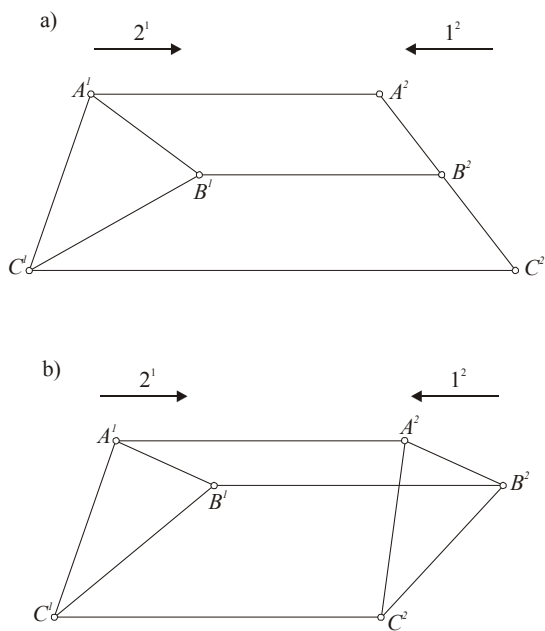


Rys. 5.98

3. Dane są: punkt  $A$  i prosta  $t$ . Wyznaczyć rzuty kwadratu, dla którego jednym wierzchołkiem jest punkt  $A$ , a przekątną odcinek zawarty w prostej  $t$  (rys. 5.99a,b).

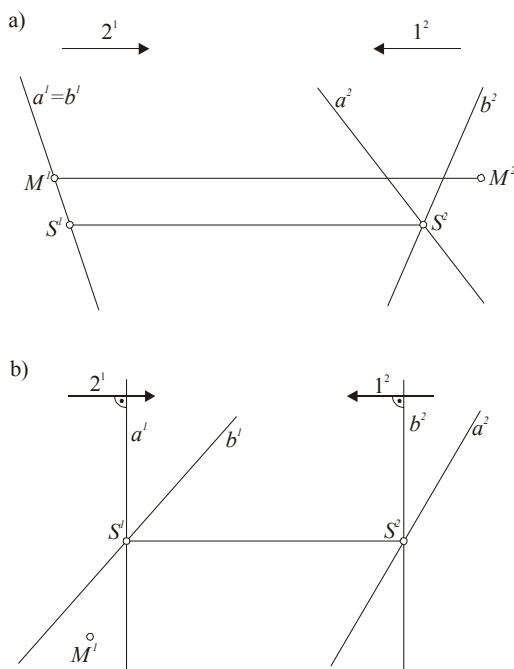


Rys. 5.99

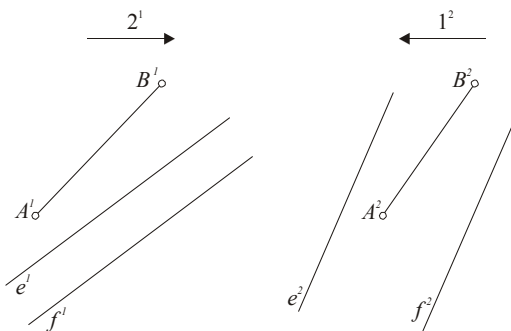


Rys. 5.100

4. Dane są dwie proste równoległe  $m$  i  $n$ , na jednej z nich leży środek  $S$ , a na drugiej bok sześciokąta foremnego. Wyznaczyć rzuty sześciokąta.
5. Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$ . Wyznaczyć rzuty okręgu opisanego na tym trójkącie (rys. 5.100a,b)
6. Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$  Wyznaczyć rzuty okręgu wpisanego w trójkąt (rys. 5.100a,b).
7. Dane są rzuty prostych przecinających się  $ab$  oraz punktu  $M \in \alpha = ab$ . Wyznaczyć rzuty okręgu stycznego do prostych  $ab$  i zawierającego  $M$  (rys. 5.101a,b).  
Uwaga: przy wyznaczaniu okręgu stycznego do prostych i zawierającego punkt  $M$  należy skorzystać z jednokładności o środku  $S$ .
8. Dane są rzuty odcinka  $\langle AB \rangle$  oraz płaszczyzny  $\varepsilon$  wyznaczonej prostymi równoległymi  $e f$  (rys. 5.102). Wyznaczyć rzuty trójkąta równoramiennego  $\langle ABC \rangle$  którego wierzchołek  $C$  należy do płaszczyzny  $\varepsilon$ , a odległość wierzchołka  $C$  od boku  $\langle AB \rangle$  wynosi  $h$  cm.  
Uwaga: Rozwiązanie zadania podobne jest do rozwiązania w ćwiczeniu 71.

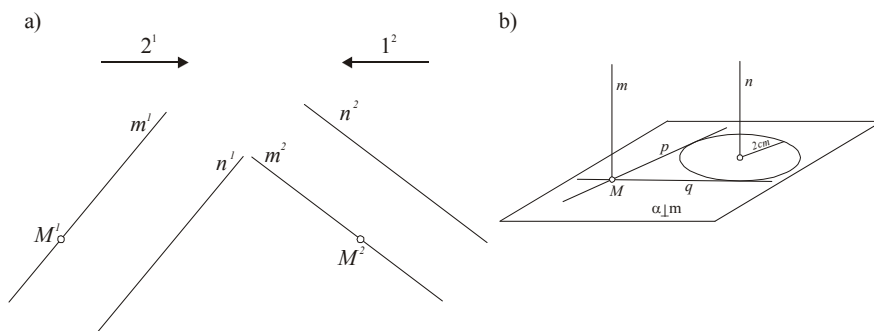


Rys. 5.101



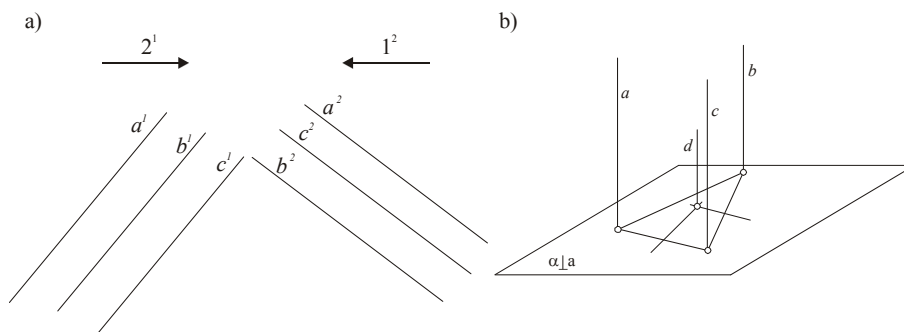
Rys.5.102

9. Dane są rzuty prostych równoległych  $m$  i  $n$  oraz punktu  $M \in m$  (rys. 5.103a). Wyznaczyć rzuty prostych  $p$  i  $q$  przecinających prostą  $m$  w punkcie  $M$ , prostopadłych do niej i odległych od prostej  $n$  o 20 mm (rys. 5.103b). Kiedy zadanie posiada rozwiązanie? Kiedy  $p = q$ , kiedy nie ma rozwiązania?



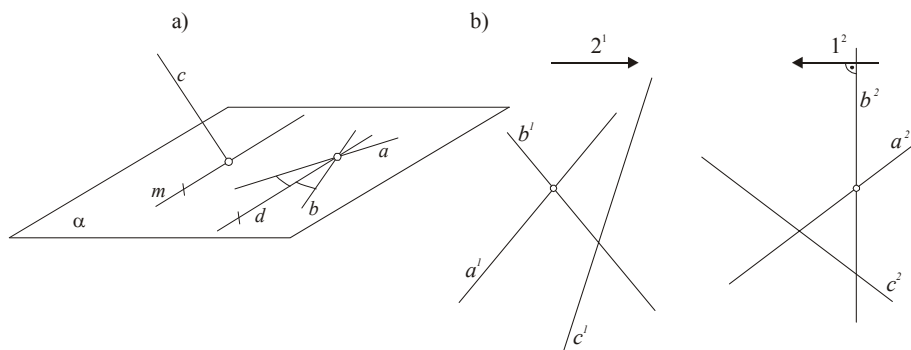
Rys. 5.103

10. Dane są rzuty trzech prostych równoległych  $a, b, c$ . Wyznaczyć rzuty prostej  $d$  równoległej do  $a, b$  i  $c$  oraz równoodległej od nich (rys. 5.104a,b).



Rys. 5.104

11. Dane są proste przecinające się  $a, b$ , oraz prosta skośna  $c$ . Wyznaczyć prostą  $m$  przecinającą proste  $a, b, c$  i jednakowo nachyloną do prostych  $a$  i  $b$  (rys. 5.105ab).



Rys. 5.105

Uwaga: Prosta  $m$  zawiera punkt przecięcia prostej  $c$  z płaszczyzną  $\alpha = ab$  i jest równoległa do dwusiecznej  $d$  kąta między prostymi  $a$  i  $b$ .

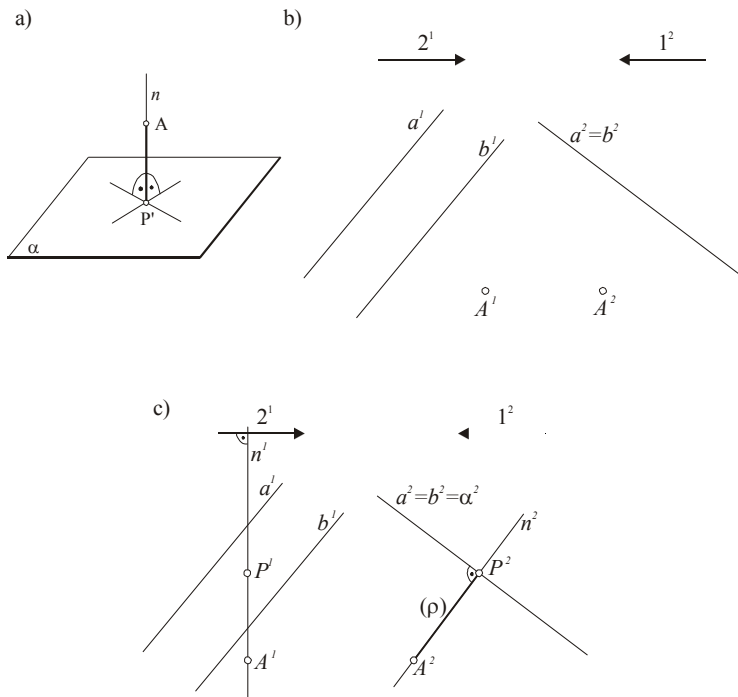
## 8. Zagadnienia miarowe

### 8.1. Odległość dwóch punktów

Przez odległość punktów A i B,  $\rho(A, B)$ , rozumiemy długość odcinka  $\langle AB \rangle$ . Sposoby wyznaczania podane są na rysunkach 5.88, 5.90a,b.

### 8.2. Odległość punktu od płaszczyzny

Długość odcinka zawartego między punktem A i jego rzutem prostokątnym P na płaszczyznę  $\alpha$  jest odległością punktu A od płaszczyzny  $\alpha$ ,  $\rho(A, \alpha)$  (rys.5.106a).



Rys. 5.106

### Ćwiczenie 73

Dana jest płaszczyzna  $\alpha = ab \wedge a || b$  oraz punkt A. Wyznaczyć odległość punktu A od płaszczyzny  $\alpha$  w przypadku, gdy płaszczyzna jest:

- rzutująca (rys. 5.106b)
- ogólna (rys. 5.107a)
- profilowa (rys. 5.108)

### Rozwiązanie

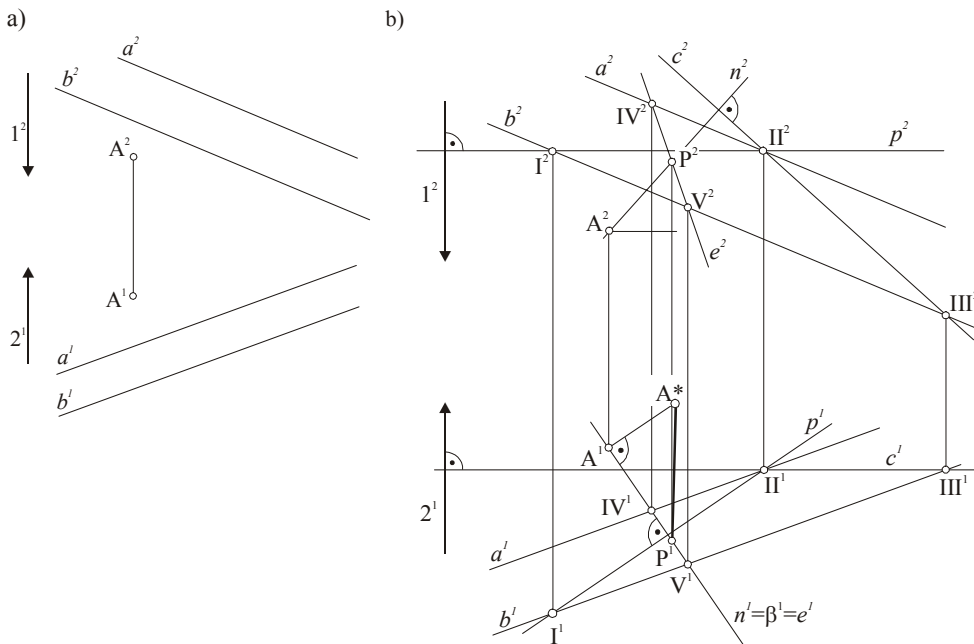
a) W przypadku jak na rysunku 5.106b płaszczyzna  $\alpha$  jest drugorzutująca. Prosta  $n \perp \alpha$  zawierająca punkt A przebiega płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie P. Ponieważ  $\langle AP \rangle$  jest odcinkiem drugorzutowym  $\langle AP \rangle \equiv \langle A^2 P^2 \rangle$  (rys. 5.106c).

b) Wprowadzamy w płaszczyźnie  $\alpha$  proste: pierwszorzutową  $p$  i drugorzutową  $c$  (rys. 5.107b). Przez punkt A prowadzimy prostą  $n$  prostą do  $\alpha$  ( $n \perp p \wedge n \perp c$ ). Wyzna-

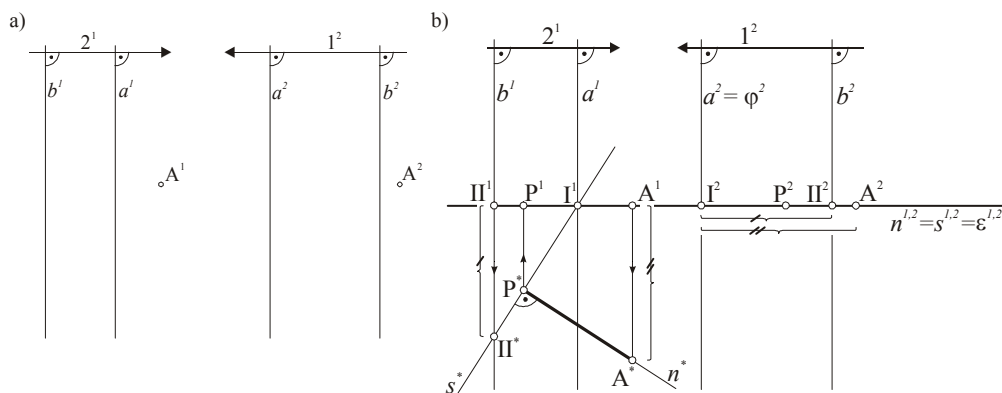


czamy punkt przebiecia  $P$  prostej  $n$  z płaszczyzną  $\alpha$ , a następnie kład prostokątny odcinka  $\langle AP \rangle$ . Długość  $\langle A^*P^* \rangle$  jest szukaną odległością.

c) Proste  $a$  i  $b$  na rys.5.108 wyznaczają płaszczyznę profilową. Prosta  $n$  prostopadła do płaszczyzny profilowej jest prostą profilową prostopadłą do  $a$  i do prostej  $s$  spadku płaszczyzny  $\alpha$ . Rzuty prostych  $s$  i  $n$  jednoczą się (rys.5.108b). Prosta spadku przecina proste  $a$  i  $b$  w punktach I i II. Proste  $n$  i  $s$  wyznaczają dwurzutującą płaszczyznę  $\varepsilon$ . Wykonujemy obrót płaszczyzny  $\varepsilon$  o kąt  $90^\circ$  na płaszczyznę pierwszorzutową  $\varphi$  i otrzymujemy  $s^*$  i  $A^*$ . Przez  $A^*$  prowadzimy  $n^*$  prostopadle do  $s^*$ . Punkt przecięcia  $P^*$  prostych  $s^*$  i  $n^*$  jest kładem prostokątnym punktu przebiecia  $n \cap \alpha$ . Wielkość odcinka  $\langle A^*P^* \rangle$  jest odległością punktu  $A$  od płaszczyzny  $\alpha$ . Wyznaczamy rzuty punktu  $P$ .



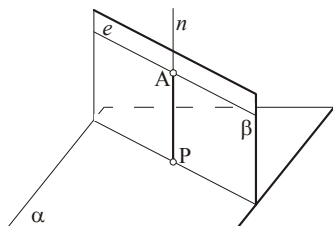
Rys. 5.107



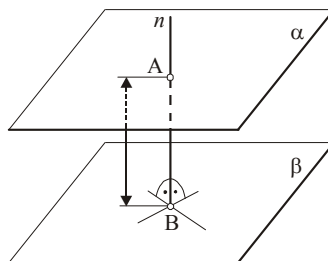
Rys. 5.108

### 8.3. Odległość prostej równoległej do płaszczyzny od tej płaszczyzny

Jeżeli prosta  $e$  jest równoległa do płaszczyzny  $\alpha$ , to odległość dowolnego punktu  $A$  prostej  $e$  od płaszczyzny  $\alpha$  jest odległością prostej  $e$  od tej płaszczyzny (rys. 5.109).



Rys. 5.109



Rys. 5.110

### 8.4. Odległość płaszczyzn równoległych.

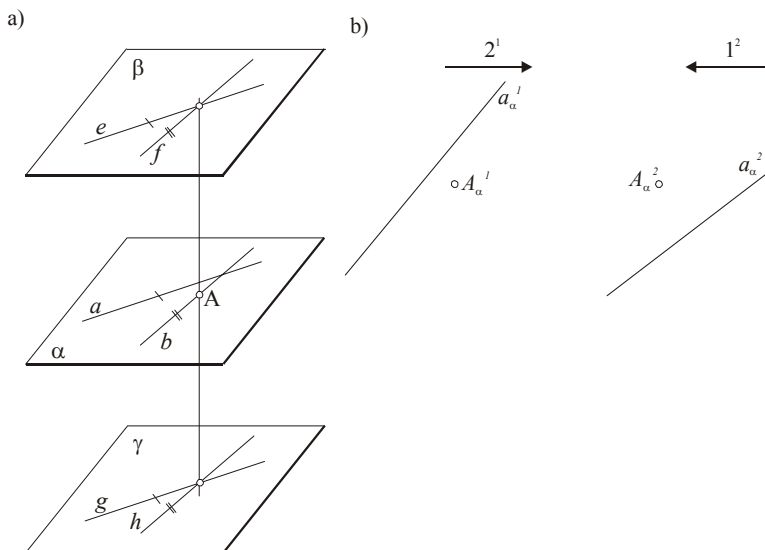
Jest to odległość dowolnego punktu należącego do jednej płaszczyzny od drugiej płaszczyzny, np.:  $A \in \alpha$  i  $\rho(A, \beta) = \rho(A, B) = \rho(\alpha, \beta)$  (rys. 5.110).

#### Ćwiczenie 74

Dana jest płaszczyzna  $\alpha = aA$ . Wyznaczyć płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  równoległe do  $\alpha$  i odległe od niej o 30mm (rys. 5.111 a,b).

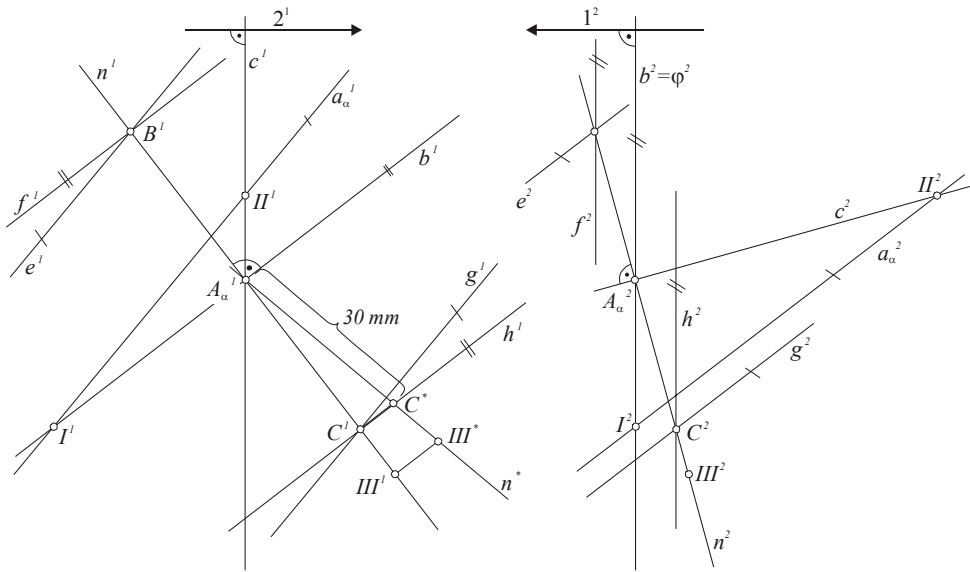
#### Rozwiązanie

W płaszczyźnie  $\alpha$  wyznaczamy dwie proste warstwowe  $b$  i  $c$  i z punktu należącego do płaszczyzny np.  $A$  kreślimy prostą  $n \perp \alpha$  ( $n \perp b$  i  $n \perp c$ ). Za pomocą dowolnie obranego na prostej  $n$  punktu III wykonujemy kład prostokątny – prostej  $n:n^*$  i na niej od punktu  $A(A^1=A^*)$  odmierzamy 30 mm i otrzymujemy punkt  $B^*$ . Wyznaczamy rzuty punktu  $B$  i symetrycznego punktu  $C$ . Przez punkty  $B$  i  $C$  prowadzimy po dwie proste przecinające się, równoległe do prostych np.  $a$  i  $c$  zawartych w płaszczyźnie  $\alpha$ . I tak  $B \in \beta (ef)$ ,  $C \in \gamma (gh)$  (rys. 5.111 c).



Rys. 5.111a,b

c)



Rys. 5.111c

### 8.5. Odległość punktu od prostej

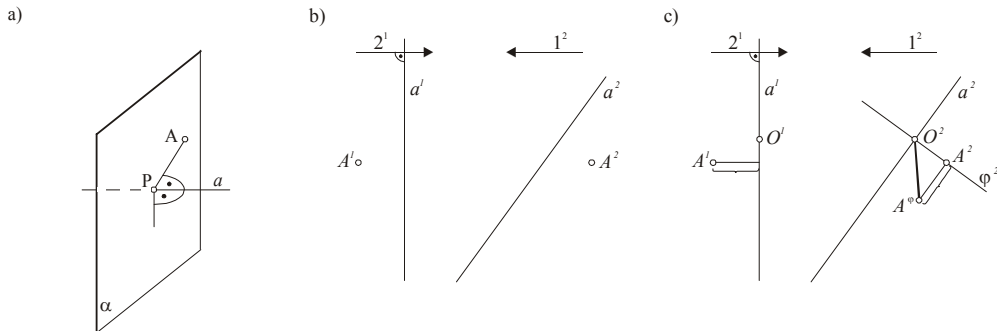
Odległością punktu A od prostej  $a$  jest miara odcinka  $\langle AP \rangle$ , którego końcami są: punkt A i jego rzut prostokątny P na prostą  $a$  (rys. 5.112a).

#### Ćwiczenie 75

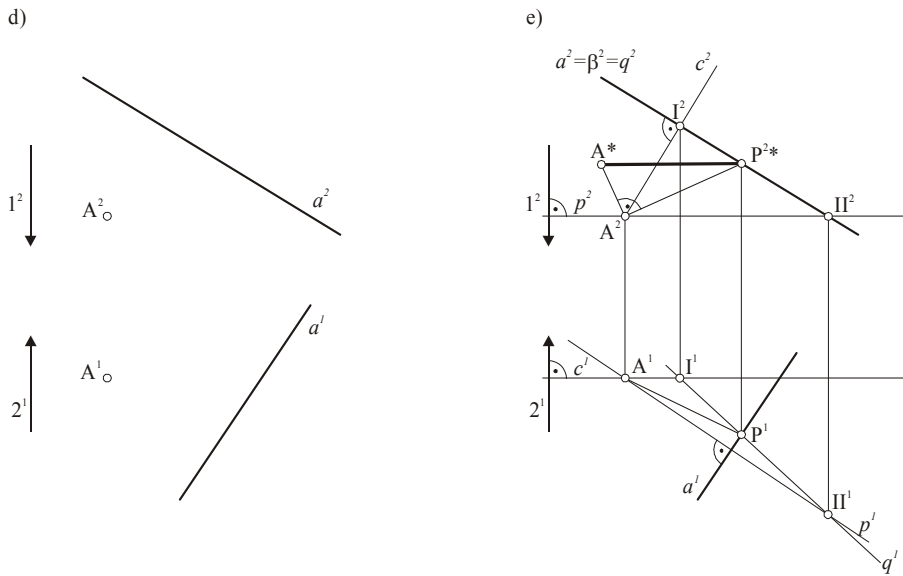
Wyznaczyć odległość punktu A od prostej  $a$ .

#### Rozwiązanie I

Przez punkt A prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do prostej  $a$ , wyznaczamy punkt P przebiecia prostej  $a$  z płaszczyzną  $\alpha$  i wielkość odcinka  $\langle AP \rangle$ . Na rysunku 5.112c jest to płaszczyzna drugorzutująca i punkt P znajdujemy od razu. Na rysunku 5.112e  $\alpha = pc$  ( $p \perp a \wedge c \perp a$ ). Wyznaczamy punkt przebiecia P. W obu przypadkach wyznaczamy kład odcinka  $\langle AP \rangle$ . Długość odcinka  $\langle A^*P^* \rangle$  jest szukaną odległością (rys. 5.112c i e).



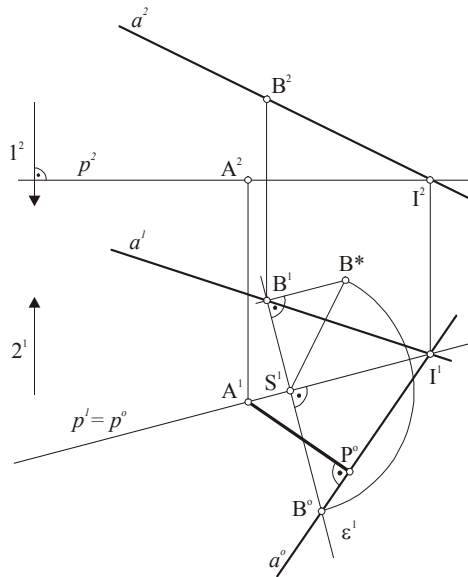
Rys. 5.112a,b,c



Rys. 5.112d,e

*Rozwiązanie II*

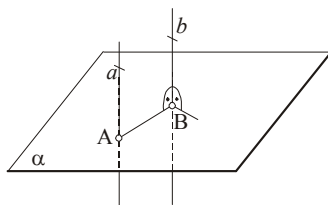
Punkt A i prosta  $a$  wyznaczają płaszczyznę  $\alpha$  (rys. 5.113). Wykonujemy kład płaszczyzny  $\alpha$  obracając punkt  $B \in a$  dookoła prostej  $p$  pierwszorzędowej zawierającej punkt A, tak aby płaszczyzna zajęła położenie warstwowe. Długość odcinka  $\langle A^{\circ}P^{\circ} \rangle$  jest odległością punktu A od prostej  $a$ .



Rys. 5.113

### 8.6. Odległość prostych równoległych.

Odległość dowolnego punktu jednej prostej od drugiej prostej jest odległością dwóch prostych równoległych (rys. 5.114).



Rys. 5.114

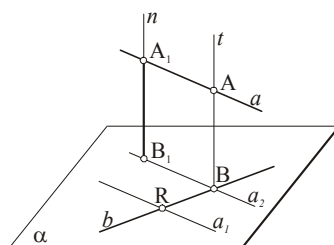
### 8.7. Odległość prostych skośnych.

Długość odcinka  $\langle AB \rangle$  prostopadłego do obu prostych, którego końce należą do tych prostych, nazywamy odległością prostych skośnych (rys. 5.115a)

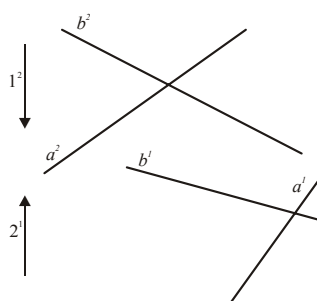
#### Ćwiczenie 76

Wyznaczyć odległość prostych skośnych  $a$  i  $b$  oraz wyznaczyć prostą  $t$  przecinającą proste  $a$  i  $b$  i prostopadłą do nich (rys. 5.115b).

a)



b)



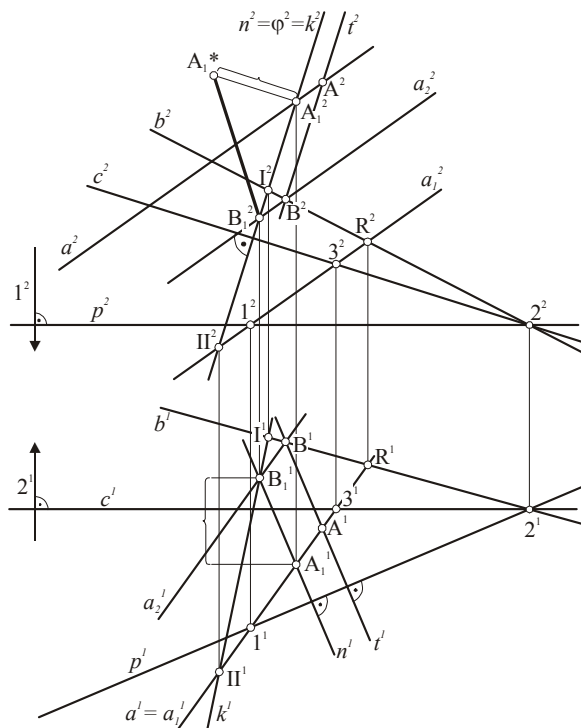
Rys. 5.115a,b

#### Rozwiązanie I

Prowadzimy płaszczyznę  $\alpha \parallel a$  i zawierającą  $b$  za pomocą prostej  $a_1 \parallel a$  i przecinającej  $b$ . Obieramy na prostej  $a$  dowolny punkt  $A_1$  i wyznaczamy odległość tego punktu od płaszczyzny  $\alpha$  (rys.5.115c). Przez  $A_1$  prowadzimy prostą  $n \perp \alpha$  i wyznaczamy  $B_1 = n \cap \alpha$ . Wykonujemy kład prostokątny odcinka  $\langle A_1B_1 \rangle$ . Aby otrzymać rozwiązanie drugiej części zadania,

przez punkt  $B_1$  prowadzimy prostą  $a_2 \parallel a$ . Przecina ona prostą  $b$  w punkcie B, przez który prowadzimy prostą  $t \parallel n$  ( $t \perp \alpha$ ). Iloczyn  $t \cap a = A$ . Odcinek  $\langle AB \rangle \equiv \langle A_1 B_1 \rangle$ . Prosta  $t$  jest prostopadła do prostych  $a, b$  i przecina je.

c)

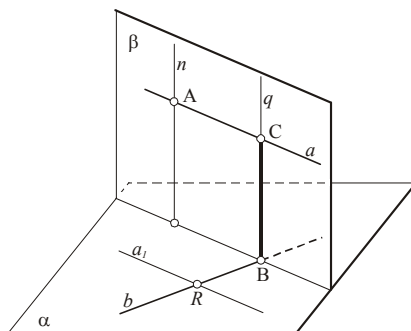


Rys. 5.115c

*Rozwiązanie II*

Tak, jak w rozwiązaniu I przez prostą  $b$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha \parallel a$  oraz z dowolnego punktu  $A_1 \in a$  prowadzimy prostą  $n \perp \alpha$ . Proste  $a$  i  $n$  wyznaczają płaszczyznę  $\beta \perp \alpha$  (rys. 5.116a,b). Wyznaczamy punkt przecięcia B prostej  $b$  i płaszczyzny  $\beta$ , następnie prowadzimy przez punkt B prostą  $q \perp \alpha$  (prosta  $q$  jest zawarta w płaszczyźnie  $\beta$ ).  $q \cap a = C$ . Szukaną odległością jest długość odcinka  $\langle BC \rangle$ .

a)



Rys. 5.116a



### Ćwiczenie 77

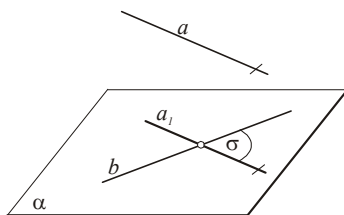
Wyznaczyć miarę kąta zawartego między prostymi przecinającymi się  $a$  i  $b$ :  $\varphi(ab)$ .

#### Rozwiązanie

Proste  $a$  i  $b$  wyznaczają płaszczyznę  $\alpha$  (rys. 5.117). Wyznaczamy prostą warstwową  $p \subset \alpha$  i obracamy punkt przecięcia się prostych  $a$  i  $b$  tak, aby znalazł się w płaszczyźnie warstwowej  $\beta$ . Kąt  $\varphi^\circ$  mniejszy z dwóch przyległych między  $a^\circ$  i  $b^\circ$  jest szukanym kątem.

### 8.9. Kąt prostych skośnych.

Za kąt między prostymi skośnymi uważamy kąt między prostymi przecinającymi się równoległymi do skośnych (rys. 5.118).



Rys. 5.118

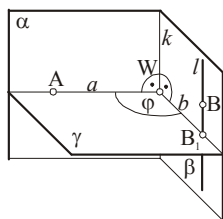
### 8.10. Kąt między dwiema płaszczyznami.

Kątem dwuściennym między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$  nazywamy część przestrzeni ograniczoną przez dwie półpłaszczyzny płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  o wspólnej krawędzi  $k$ . Z rozważań wynika, że za miarę kąta dwuściennego można przyjąć miarę kąta liniowego  $\varphi$  pomiędzy prostymi  $a \subset \alpha$  i  $b \subset \beta$  i  $ab = \gamma$ ,  $\gamma \perp k$  (rys. 5.119a).

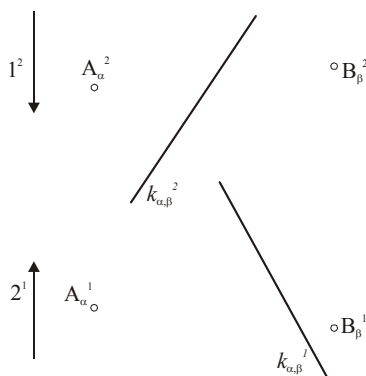
### Ćwiczenie 78

Wyznaczyć wielkość kąta dwuściennego płaszczyzn  $\alpha = Ak$  i  $\beta = Bk$ .

a)



b)



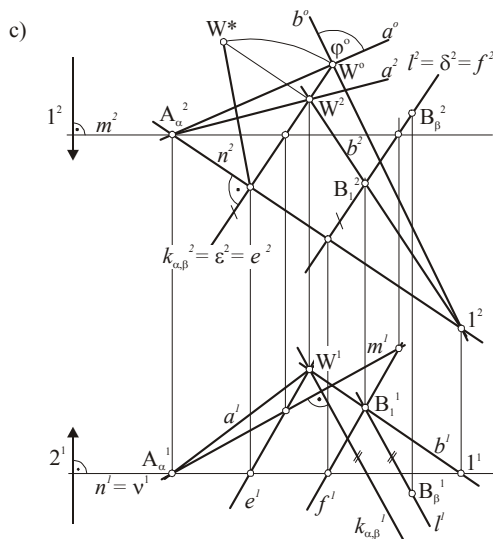
Rys. 5.119a,b

#### Rozwiązanie I

Przez punkt A prowadzimy płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do krawędzi  $k$  (rys. 5.119c). Płaszczyznę  $\gamma$  wyznaczają proste: pierwszowarstwowa  $m$  i drugowarstwowa  $n$  prostopadłe do



$k$ . Wyznaczamy punkt  $W$  przebiecia płaszczyzny  $\gamma$  prostą  $k$ . Punkty  $W$  i  $A$  wyznaczają prostą  $a$  wspólną dla płaszczyzn  $\alpha$  i  $\gamma$ . W celu wyznaczenia krawędzi  $b$  płaszczyzn  $\beta$  i  $\gamma$  prowadzimy przez punkt  $B$  prostą  $l \parallel k$  i wyznaczamy jej punkt przebiecia  $B_1$  z płaszczyzną  $\gamma$ ,  $b = WB_1$ . Wielkość kąta została wyznaczona w kładzie, który został dokonany przez obrót płaszczyzny  $\gamma$  dookoła jej prostej drugowarstwowej  $n$  do zjednoczenia się jej z płaszczyzną drugowarstwową  $v \supset n$ .

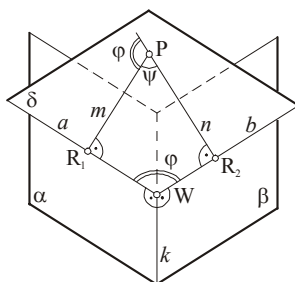


Rys. 5.119c

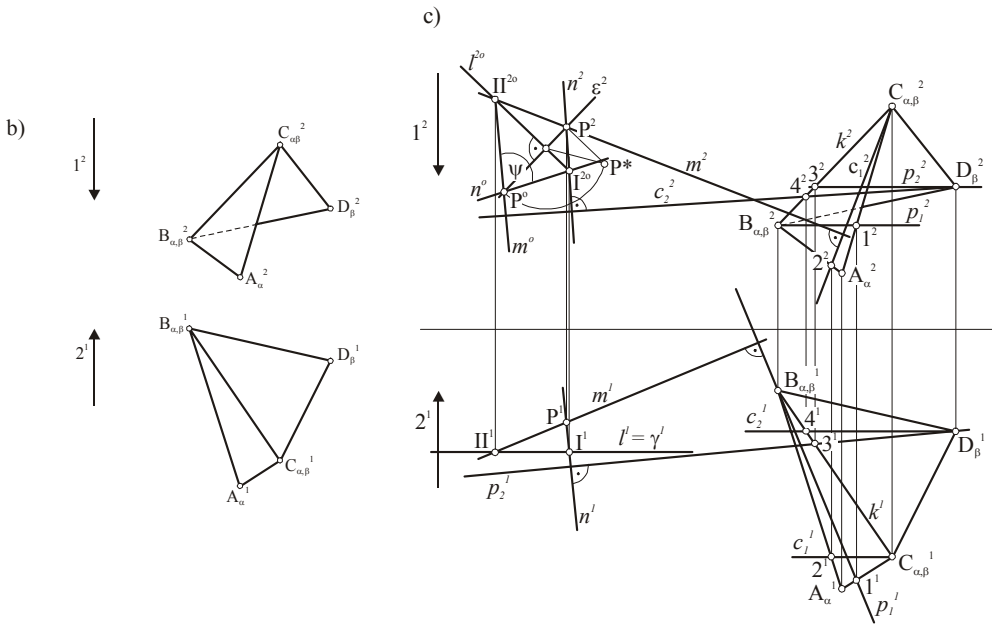
### Rozwiązanie II

Kąt równy kątowi liniowemu płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  ( $\alpha = ABC$ ,  $\beta = BCD$ ) można znaleźć łatwiej. Z dowolnego punktu  $P$  prowadzimy dwie proste  $m \perp \alpha \wedge n \perp \beta$ . Kąt między prostymi  $m$  i  $n$  jest równy kątowi liniowemu płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Proste  $m$   $n$  wyznaczają płaszczyznę  $\delta \perp \alpha$  i  $\delta \perp \beta$ , a więc prostopadłą do krawędzi  $k$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 5.120a,c). W czworokącie  $\langle PR_1WR_2 \rangle$  są dwa kąty proste (przy  $R_1$  i przy  $R_2$ ) stąd wynika, że  $\angle R_1WR_2 + \angle R_1PR_2 = 180^\circ$ . W rzutach Monge'a przyjmujemy w płaszczyźnie  $\alpha = ABC$  proste: pierwszowarstwową  $p_1$  i drugowarstwową  $c_1$  a w płaszczyźnie  $\beta = BCD$  proste warstwowe  $p_2$  i  $c_2$ . Z dowolnego punktu  $P$  prowadzimy prostą  $m \perp \alpha$  ( $m^1 \perp p^1 \wedge m^2 \perp c^1$ ) i prostą  $n \perp \beta$  ( $n^1 \perp p_2^1 \wedge n^2 \perp c_2^2$ ). Proste  $m$   $n$  wyznaczają płaszczyznę  $\delta$ , której kład otrzymujemy za pomocą obrotu punktu  $P$  dookoła prostej drugowarstwowej  $l \subset \gamma$  do położenia na drugowarstwową płaszczyznę  $\gamma$ . Kąt wierzchołkowy  $\leq 90^\circ$  między prostymi  $m$   $n$  jest równy kątowi między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$ .

a)



Rys. 5.120a

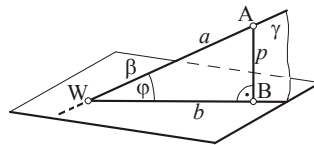


Rys. 5.120b,c

### 8.11. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.

Kąt nachylenia  $\varphi$  prostej  $a$  do płaszczyzny  $\beta$  ( $\varphi(a\beta)$ ) jest to kąt między prostą  $a$  i jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę  $\beta$  (rys. 5.121a).

a)



Rys. 5.121a

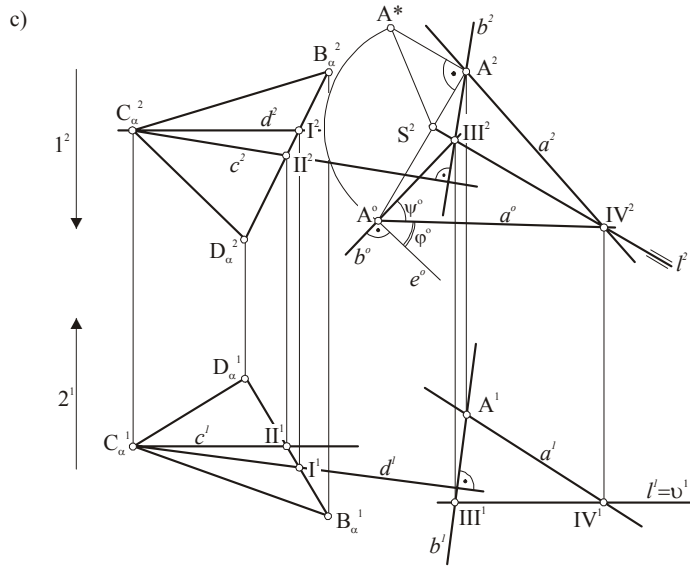
#### Ćwiczenie 79

Wyznaczyć wielkość kąta nachylenia prostej  $a$  do płaszczyzny  $\beta$  danej: a) parą pierwszorzędowych prostych równoległych  $m, n$  (rozwiązanie I), b) daną trójkątem  $\langle BCD \rangle$  (rozwiązanie II), (rys. 5.121b i 5.122b).

#### Rozwiązanie I

Obieramy dowolny punkt  $A$  należący do prostej  $a$  i prowadzimy przez niego prostą  $p$  prostopadłą do płaszczyzny  $\beta$  (rys.5.121c). Jej rzut pierwszy  $p^1$  kreślimy prostopadłe do rzutów pierwszych prostych  $m$  i  $n$ , a rzut drugi  $p^2$  prostopadłe do rzutu drugiego  $c^2$  prostej drugorzędowej  $c$  przyjętej w płaszczyźnie  $\beta$ . Proste  $a$  i  $p$  przebijają płaszczyznę odpowiednio w punktach  $W$  i  $B$ , a te z kolei wyznaczają prostą  $b$ , która jest rzutem prostokątnym prostej  $a$  na płaszczyznę  $\beta$ . Proste  $a$  i  $b$  wyznaczają płaszczyznę  $\gamma$ . Kład płaszczyzny  $\gamma$  wykonujemy obracając punkt  $W$  dookoła prostej pierwszorzędowej  $l=B5$  do położenia warstwowego.

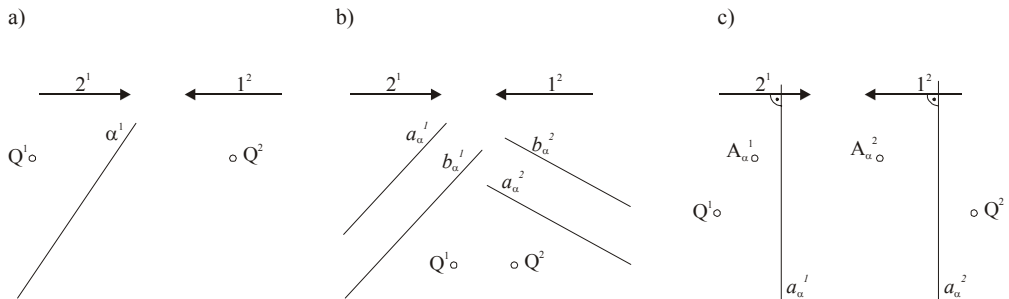




Rys. 5.122c

### ZADANIA

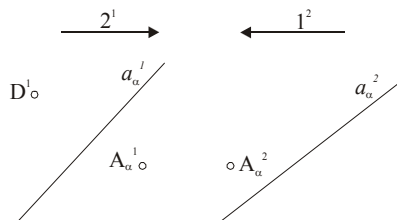
1. Dane są rzuty płaszczyzny  $\alpha$  oraz punktu Q. Wyznaczyć punkt R, który wraz z punktem Q jest symetrycznie położony względem płaszczyzny  $\alpha$  w symetrii prostokątnej. Wyznaczyć wielkość odcinka  $\langle QR \rangle$  (rys. 5.123a,b,c).



Rys. 5.123

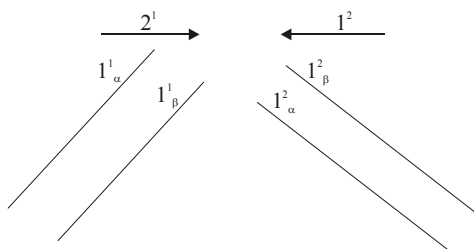
2. Dane są rzuty płaszczyzny  $\alpha=Aa$ , oraz rzut pierwszy punktu D odległego od  $\alpha$  o 40 mm. Wyznaczyć rzut drugi punktu D (rys. 5.124).

Uwaga: Jednym ze sposobów rozwiązania jest umieszczenie punktu D w płaszczyźnie  $\beta$  odległej od płaszczyzny  $\alpha$  o 40 mm (ćwicz. 73, rys. 5.111).

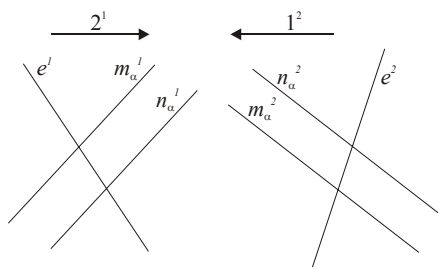


Rys. 5.124

3. Wyznaczyć odległość płaszczyzn równoległych (rys. 5.125).



Rys. 5.125

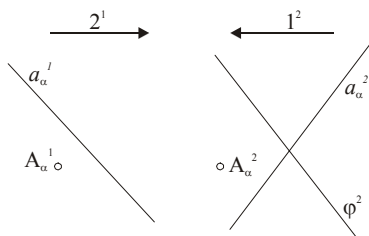


Rys. 5.126

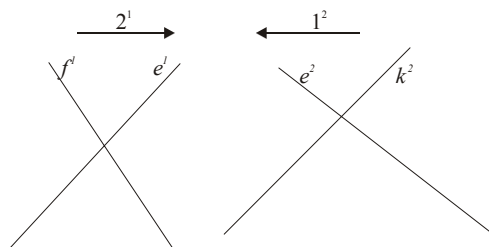
4. Dana jest płaszczyzna  $\alpha = m n$  oraz prosta  $e$ . Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów zawartych w prostej  $e$  i odległych od płaszczyzny  $\alpha$  o 30 mm (rys. 5. 126).

Uwaga: Są to punkty przebiecia prostej  $e$  z płaszczyznami równoległymi do  $\alpha$  i odległymi od  $\alpha$  o 30 mm (ćwicz. 73, rys. 5.111).

5. Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  prostą  $a$  i punktem  $A$  oraz płaszczyzna  $\varphi$ . Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów zawartych w płaszczyźnie  $\varphi$  i odległych od  $\alpha$  o 40 mm (rys. 5.127). Uwaga: Są to proste wspólne płaszczyzny  $\varphi$  i płaszczyzn równoległych do  $\alpha$  i odległych od niej o 40 mm.



Rys. 5.127



Rys. 5.128

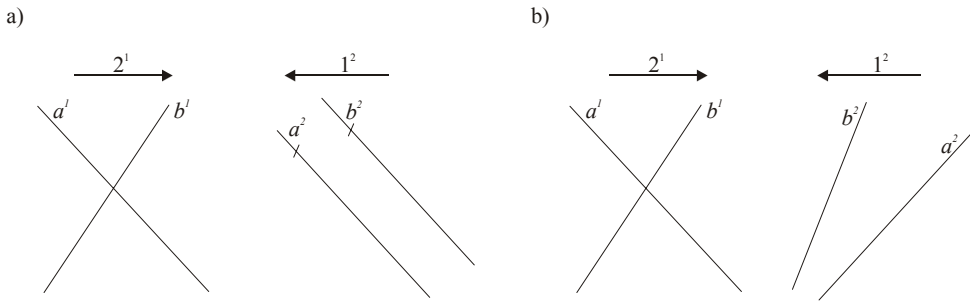
6. Dane są rzuty prostej  $e$ , rzut pierwszy prostej  $f$  oraz rzut drugi prostej  $k$  równoległej do prostej  $f$ . Wyznaczyć rzut drugi prostej  $e$ , wiedząc, że proste  $e$  i  $f$  są odległe od siebie o 30 mm (rys. 5.128).

Uwaga: Wyznaczamy płaszczyznę  $\alpha$  zawierającą prostą  $e$  i równoległą do prostej  $f$  oraz płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma \parallel \alpha$  odległe od  $\alpha$  o 30 mm jak w ćwicz. 73. Prosta  $f$  należy do płaszczyzny  $\beta$  lub  $\gamma$  (2 rozwiązania).

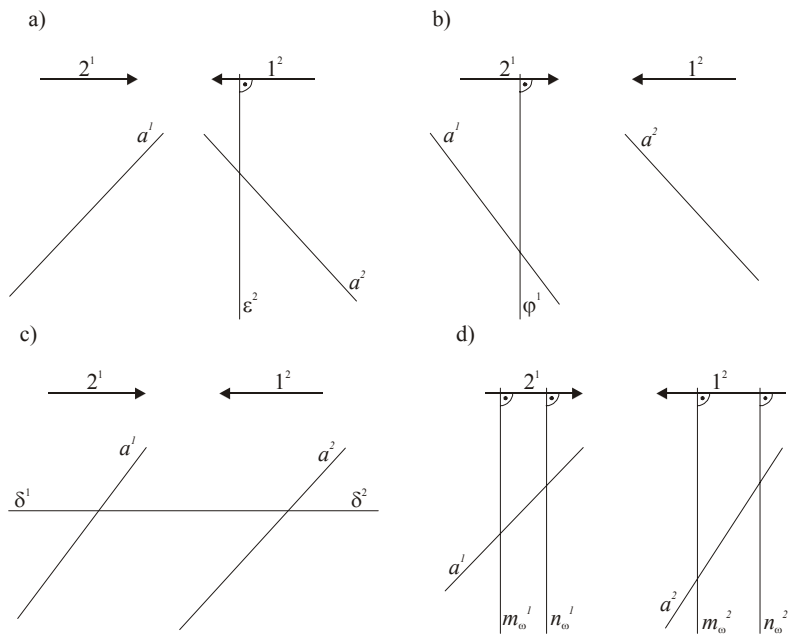
7. Dane są rzuty dwóch prostych skośnych  $a$  i  $b$ . Wyznaczyć rzuty najmniejszego trójkąta równobocznego, którego jeden wierzchołek należy do prostej  $a$ , a dwa pozostałe do prostej  $b$  (rys. 5.129).

Uwaga: Odcinek będący odległością prostych skośnych jest wysokością trójkąta równobocznego.

8. Dane są rzuty prostej  $a$ . Wyznaczyć miarę kąta jaki prosta  $a$  tworzy a) z płaszczyzną pierwszorzutową  $\varepsilon$  (rzutnią  $\pi_1$ ), b) z płaszczyzną drugorzutową  $\varphi$  (rzutnią  $\pi_2$ ), c) z płaszczyzną dwurzutową  $\delta$ , d) z płaszczyzną profilową  $\omega$  (rys. 5.130a,b,c,d).

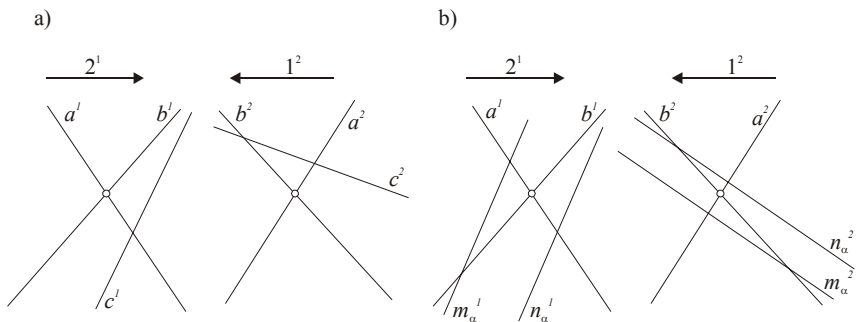


Rys. 5.129



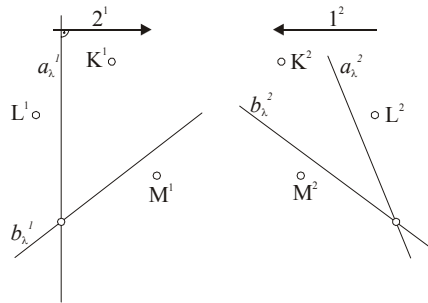
Rys. 5.130

9. Dane są dwie proste przecinające się  $a$  i  $b$  oraz : a) prosta  $c$  skośna względem  $a$  i  $b$ , b) płaszczyzna  $\alpha$  (rys. 5.131a,b). Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów równoodległych od prostych  $a$  i  $b$ : a) na prostej  $c$ , b) na płaszczyźnie  $\alpha$ .



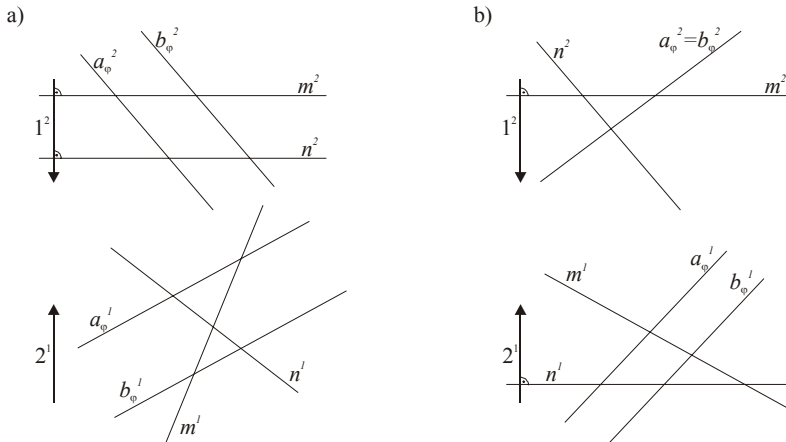
Rys. 5.131

10. Dane są rzuty trzech punktów  $K, L, M$ , oraz płaszczyzna  $\lambda = ab$ . Na płaszczyźnie  $\lambda$  wyznaczyć punkt  $R$  równoodległy od punktów  $K, L, M$  (rys. 5.132).



Rys. 5.132

11. Dane są rzuty prostych skośnych  $m$  i  $n$ , oraz płaszczyzna  $\varphi = ab$ . Wyznaczyć prostą  $p$ , zawartą w płaszczyźnie  $\varphi$  i jednakowo nachyloną do  $m$  i  $n$ . Ile jest rozwiązań (rys. 5.133a,b)?



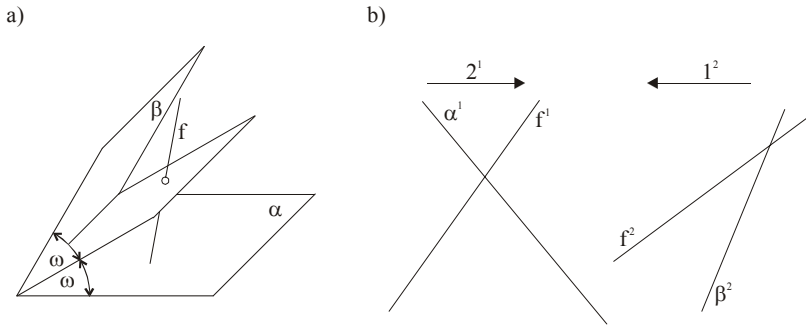
Rys. 5.133

12. Dane są płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  rzutujące oraz prosta  $f$ . Na prostej  $f$  wyznaczyć punkt równoodległy od płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 5.134a,b).

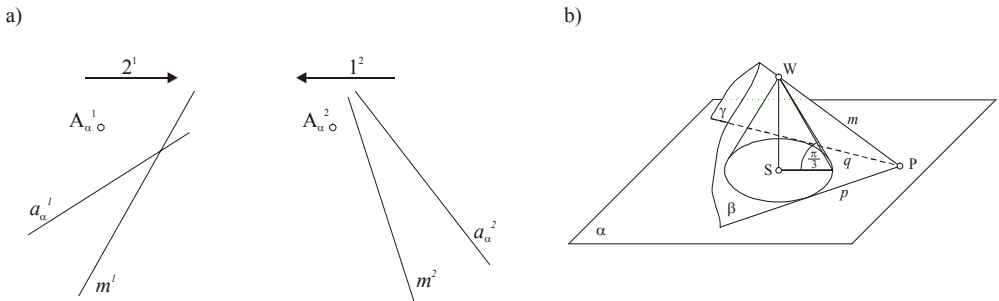
Uwaga: Istnieją na prostej  $f$  dwa punkty równoodległe od płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Są to punkty przecięcia prostej  $f$  z płaszczyznami dwusiecznymi kątów przyległych, zawartych między tymi płaszczyznami. Płaszczyzny dwusieczne są wyznaczone prostymi dwusiecznymi kątów i krawędzią płaszczyzn.

13. Dane są rzuty prostej  $a$  i punktu  $A$  wyznaczających płaszczyznę  $\alpha$ , oraz rzuty prostej  $m$ . Wyznaczyć płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  zawierające prostą  $m$  i nachyloną do płaszczyzny  $\alpha$  pod kątem  $\pi/3$  (rys. 5.135a,b). Kiedy zadanie nie posiada rozwiązania? Kiedy istnieje jedno rozwiązanie?

Uwaga: Rozwiązanie przedstawione jest na rysunku poglądowym 5.135b. Płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  są styczne do stożka obrotowego o wierzchołku  $W \in m$  i nachyleniu pobocznicy stożka do podstawy równej  $\pi/3$ . Płaszczyzny są wyznaczone prostą  $m$  i prostymi  $p$  i  $q$ , stycznymi do okręgu podstawy stożka i zawierającymi punkt  $P$  przecięcia prostej  $m$  z płaszczyzną  $\alpha$ .



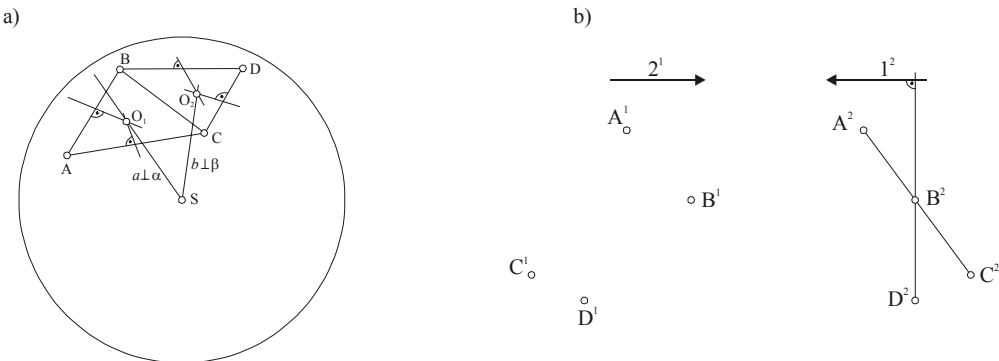
Rys. 5.134



Rys. 5.135

14. Dane są rzuty czterech punktów ABCD. Wyznaczyć rzuty sfery opisanej na tych punktach (rys. 5.136a,b).

Uwaga:  $ABC = \alpha$ ; w płaszczyźnie  $\alpha$  wyznaczamy punkt  $O_1$  środek koła opisanego na trójkącie  $\langle ABC \rangle$ . Prosta  $a \perp O_1$  i  $a \perp \alpha$  jest miejscem geometrycznym punktów równoodległych od punktów A,B,C.  $CBD = \beta$  (lub  $ABD$ ). Wyznaczamy kład trójkąta  $\langle ABD \rangle$  (lub  $\langle CBD \rangle$ ) i przez  $O_2$  środek koła opisanego na tym trójkącie prowadzimy prostą  $b \perp \beta$  będącą zbiorem punktów równoodległych od A,B,D (lub C,B,D). Punkt S przecięcia się prostych  $a$  i  $b$  jest równoodległy od czterech punktów A,B,C,D, jest więc środkiem sfery opisanej na tych punktach. Wyznaczamy wielkość promienia np.:  $\langle S^*A^* \rangle$  i kreślimy okręgi będące rzutami sfery.



Rys. 5.136



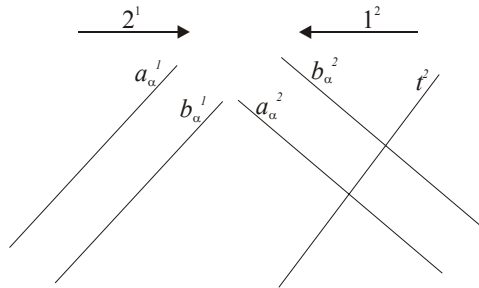
15. Dany jest obraz płaszczyzny  $\alpha$  za pomocą rzutów prostych równoległych  $a$  i  $b$ , oraz prosta  $t$  zawarta w płaszczyźnie  $\alpha$ . Wyznaczyć płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  zawierające prostą  $t$  i nachyloną do płaszczyzny  $\alpha$  pod kątem  $60^\circ$  (rys. 5,137a,b,c).

Uwaga: Rysunki 5.137b i c pokazują dwa sposoby rozwiązania tego zadania.

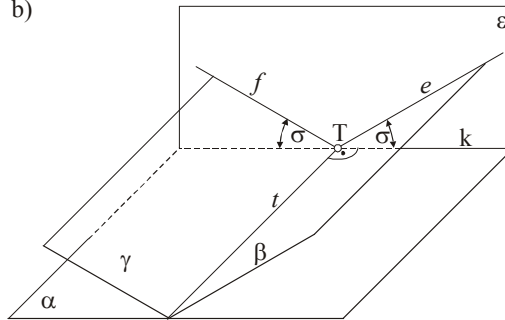
*Sposób I:* Wprowadzamy płaszczyznę  $\varepsilon \perp t$  i wyznaczamy  $k = \alpha \cap \varepsilon$ . W kładzie płaszczyzny  $\varepsilon$  rysujemy z punktu  $T = k \cap t$  proste  $e$  i  $f$  takie, że  $\sigma(k^0 e^0) = \sigma(k^0 f^0) = 60^\circ$ . Wyznaczamy rzuty prostych  $e$  i  $f$ .  $\beta = t e$ ,  $\gamma = t f$  (rys. 5.137b).

*Sposób II:* Płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  są styczne do stożków obrotowych o okręgach podstaw zawartych w  $\alpha$ , tworzących stycznych do  $t$  i kącie nachylenia tworzących do podstawy równych  $G=60^\circ$ . W kładzie płaszczyzny  $\alpha$  rysujemy punkty  $S^0_1$  i  $S^0_2$  w odległości  $r_1=r_2$ . Z punktów  $S_1$  i  $S_2$  znalezionych w rzutach wyznaczamy proste prostopadłe do  $\alpha$ :  $n_1$  i  $n_2$ . W kładzie prostokątnym jednej z prostych  $n$  odmierzymy taką wartość  $h$  wysokości stożka, aby  $\sigma=60$ . Trójkąt prostokątny o przyprostokątnej równej  $r$  i kącie  $\sigma=60$  rysujemy na boku rysunku. Otrzymujemy punkt  $W$ .  $|S_1 W_1| = |S_2 W_2|$ . Płaszczyznę  $\beta$  wyznacza prosta  $t$  i punkt  $W_1$ ; płaszczyznę  $\gamma$  - prosta  $t$  i  $W_2$  (rys. 5.137c).

a)

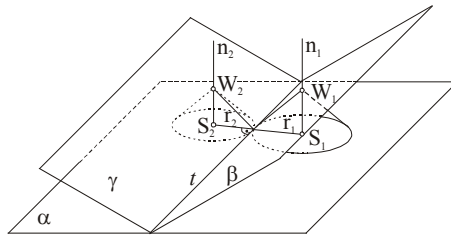


b)



Rys. 5.137a,b

c)

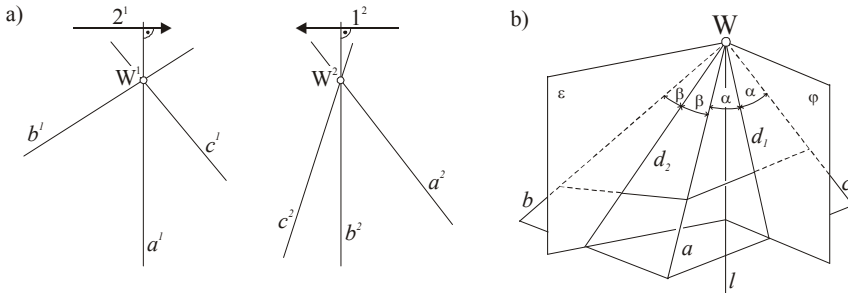


Rys. 5.137c

16. Dane są rzuty trzech prostych  $a, b, c$  przecinających się w punkcie  $W$ . Wyznaczyć prostą  $l$  zawierającą punkt  $W$  i jednakowo nachyloną do prostych  $a, b, c$  (rys. 5.138).

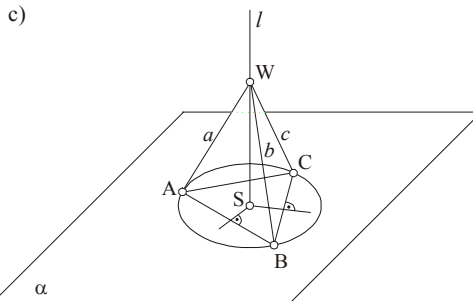
Uwaga: Są dwa sposoby rozwiązania.

*Sposób I:* Wszystkie proste zawarte w płaszczyznach dwusiecznych kąta między dwiema prostymi są jednakowo nachylone do tych prostych. Wyznaczamy więc dwie płaszczyzny  $\varepsilon$  i  $\varphi$  dwusieczne kątów między dwiema parami prostych np.  $a, b$  i  $a, c$  ( $b, c$ ). (Płaszczyzna dwusieczna jest wyznaczona prostą dwusieczną kąta oraz przecinającą ją prostą prostopadłą do płaszczyzny kąta). Krawędź przecięcia się dwóch płaszczyzn dwusiecznych jest szukaną prostą  $l$  (rys. 5.138b).



Rys. 5.138a,b

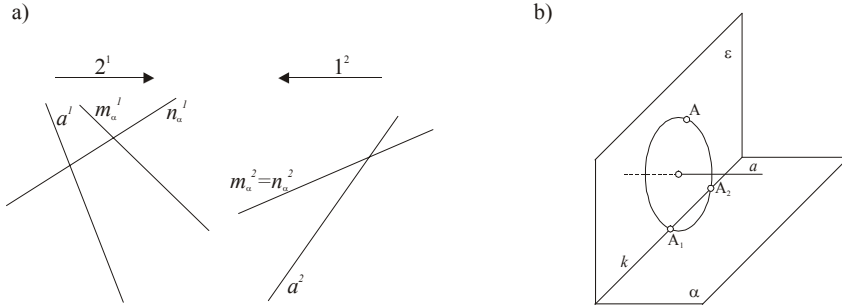
*Sposób II:* Wykorzystujemy własności ostrosłupa prostego. Na prostych  $a, b, c$  odmieramy odcinki jednakowej długości za pomocą np. kłód prostokątnych.  $AW=BW=CW$ . W kładzie płaszczyzny wyznaczamy środek  $S$  koła opisanego na trójkącie  $(ABC)$ . Prosta  $l=WS$  jest wysokością ostrosłupa prostego, spełnia więc żądany warunek (rys. 5.138c).



Rys. 5.138c

17. Dane są rzuty płaszczyzny  $\alpha$ , prostej  $a$  i punktu  $A$ . Obrócić punkt  $A$  dookoła prostej  $a$  tak, aby się znalazł na płaszczyźnie  $\alpha=mn$  (rys. 5.139a,b).

Uwaga: Punkt  $A$  obraca się w płaszczyźnie obrotu  $\varepsilon \perp a$ . Jeżeli okrąg obrotu przecina krawędź  $k$  ( $k = \varepsilon \cap \alpha$ ) w dwóch punktach są dwa rozwiązania; jeżeli jest styczny do  $k$  – jedno rozwiązanie, jeżeli nie ma punktu wspólnego – nie ma rozwiązania (patrz ćwic. 71)



Rys. 5.139

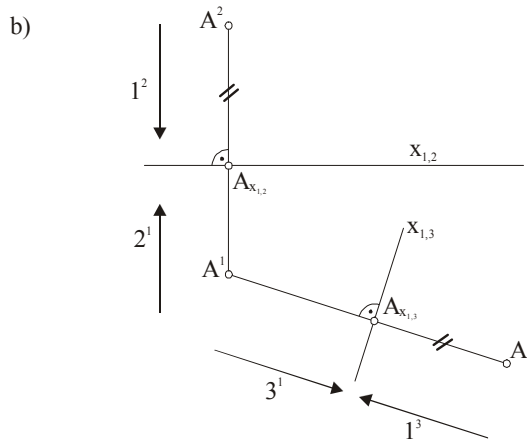
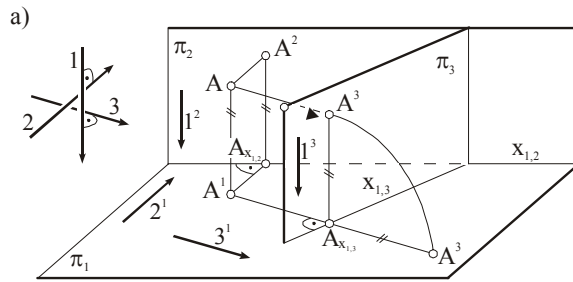
## 9. Transformacje

Dwa rzuty związane modelu geometrycznego nie zawsze w pełni pozwalają na odczytanie cech tego modelu. Pociąga to za sobą konieczność tworzenia rzutów dodatkowych. Tego rodzaju transformacja nazywa się transformacją układu odniesienia. Nie będzie tu omawiana transformacja położenia i transformacja kierunku rzutowania.

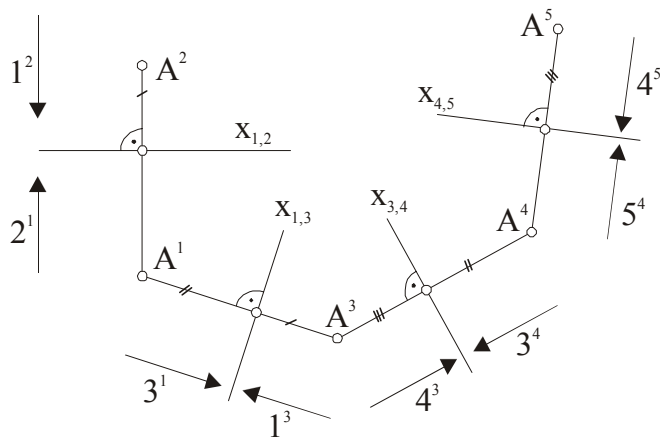
Weźmy pod uwagę układ odwzorowania ( $\{\pi_1, 1\}, \{\pi_2, 2\}$ ) czyli dwie prostopadłe rzutnie  $\pi_1$  i  $\pi_2$  przecinające się w osi  $x_{1,2}$  oraz dwie prostopadłe i zorientowane proste kierunkowe 1, 2 odpowiednio prostopadłe do rzutni - układ wiążący: [1,2]. Wprowadźmy rzutnię trzecią  $\pi_3$  prostopadłą do rzutni  $\pi_1$  (lub  $\pi_2$ ) oraz zorientowaną prostą kierunkową  $3 \perp \pi_3$ . Prosta 3 jest prostopadła do 1 (lub 2). Krawędź przecięcia się rzutni  $\pi_1$  i  $\pi_2$  ( $\pi_2$  i  $\pi_3$ ) nazywana jest osią  $x_{1,3}$  ( $x_{2,3}$ ). Powstał w ten sposób nowy układ wiążący [1, 3] lub [2,3] oraz układ odwzorowania: ( $\{\pi_1, 1\}, \{\pi_2, 2\}, \{\pi_3, 3\}$ ).

Reasumując: tworząc kolejne rzuty figury  $\Gamma$  odwzorowanej w rzutach podstawowych za pomocą aparatu odwzorowania ( $\{\pi_1, 1\}, \{\pi_2, 2\}$ ) wzbogacamy aparat odwzorowania figury o nowy aparat ( $\pi_3, 3$ ) rzutowania prostokątnego w ten sposób, że  $\pi_3 \perp \pi_1$ , lub  $\pi_3 \perp \pi_2$ , tym samym  $3 \perp 1$  lub  $3 \perp 2$ . Rzuty: pierwszy i drugi związane układem wiążącym [1,2] nazywamy parą rzutów związanych. Tak samo rzuty pierwszy i trzeci związane układem [1,3] lub drugi i trzeci związane układem [2, 3].

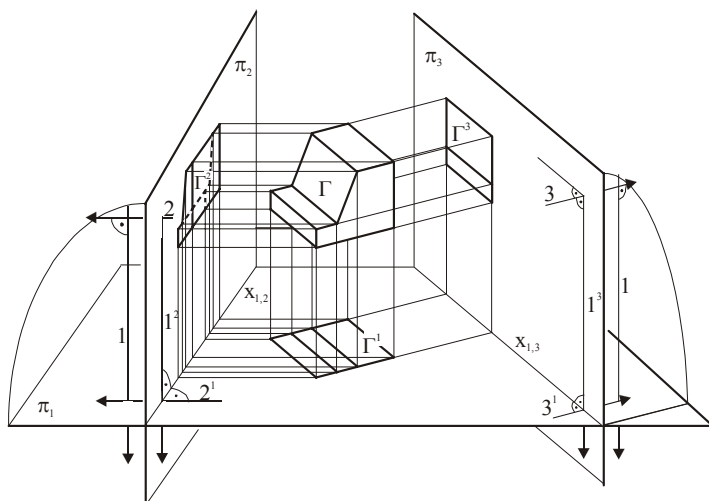
Trzy rzuty punktu  $A$  związane parami [1,2] i [1,3] przedstawione są na rysunku 5.140a,b. Cecha punktu  $A$  mierzona dla rzutni  $\pi_1$  jest miarą wektora  $\langle AA^1 \rangle$ . Tworząc trzeci rzut punktu  $A$  prowadzimy odnoszącą  $A^1 A^3 \perp x_{1,3}$  i odmierzymy na niej od osi  $x_{1,3}$   $\langle A^3 A_{x_{1,3}} \rangle = \langle A^2 A_{x_{1,2}} \rangle$  tak, aby wektor  $\langle A^2 A_{x_{1,2}} \rangle$  miał zwrot zgodny ze zwrotem prostej  $1^2$  i wektor  $\langle A^3 A_{x_{1,3}} \rangle$  miał zwrot zgodny ze zwrotem prostej  $1^3$  (rys. 5.140). Dalsze rzuty tworzymy podobnie. Rysunek 5.141 przedstawia pięć rzutów punktu  $A$ , natomiast rysunek 5.142 przedstawia w sposób poglądowy tworzenie trzech rzutów figury  $\Gamma$ .



Rys. 5.140

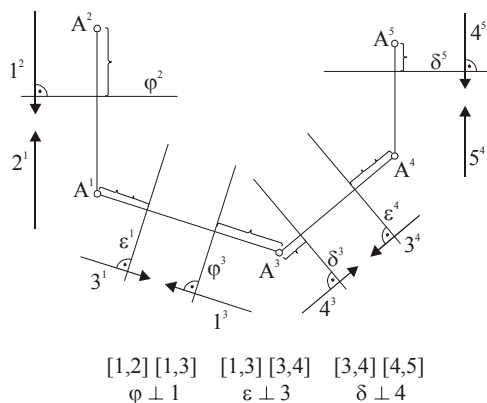


Rys. 5.141



Rys.5.142

Jeżeli przyjmujemy rzutnie  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$  i mamy stałe osie  $x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{1,n}$  powierzchnia jaką zajmuje rysunek zwiększa się. Dla „ścieśnienia” rysunku przyjmujemy zamiast rzutni warstwowe płaszczyzny tzw. porównawcze. Rysunek 5.143 przedstawia transformację punktu przy zastosowaniu płaszczyzn porównawczych. Mając początkowy układ wiązający [1 2] wprowadzamy nowy układ [1 3] oraz płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp 1$  (zamiast  $\pi_1$ ). Cechę punktu A odmierzamy względem płaszczyzny  $\varphi$ . Po wprowadzeniu układu [3, 4] musimy wprowadzić płaszczyznę porównawczą trzeciorastwową  $\varepsilon \perp 3$  i cechy odmierzamy od tej płaszczyzny. W następnym układzie [4, 5] płaszczyznę porównawczą jest  $\delta \perp 4$ . Odległość ( $A^3 \delta^3$ ) równa odległości  $A^5 \delta^5$ . Łatwo zauważyć, że gdyby  $\varepsilon^1 = \varphi^3$  i  $\delta^3 = \varepsilon^4$  można by było uważać, że jest to  $x_{1,3}$  i  $x_{3,4}$ . W dalszej części będziemy posługiwać się zarówno płaszczyznami porównawczymi jak i osiami x.



Rys. 5.143

Szczególnie ważne znaczenie mają transformacje sprowadzające prostą do położenia równoległego do rzutni i prostopadłego do rzutni, a płaszczyznę do położenia prostopadłego do rzutni i równoległego do rzutni.

### 9.1. Transformacja prostej.

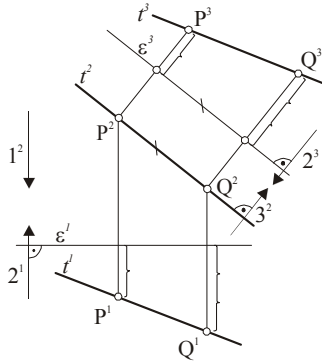
Transformację prostej otrzymujemy transformując jej dwa punkty.

#### Ćwiczenie 80

Dane są rzuty odcinka  $\langle PQ \rangle$  zawartego w prostej ogólnej. Wyznaczyć długość tego odcinka.

#### Rozwiązanie

Rozwiązanie uzyskujemy wprowadzając nowy kierunek rzutowania  $3 \perp t$ . Układem odwzorowania w tym przypadku jest  $\{[1, 2], [2, 3]\}$  i płaszczyzną porównawczą  $\varepsilon \perp 2$ . Prosta  $t$  jest prostą trzeciowarstwową a więc:  $\langle PQ \rangle \equiv \langle P^3 Q^3 \rangle$  (rys. 5.144).



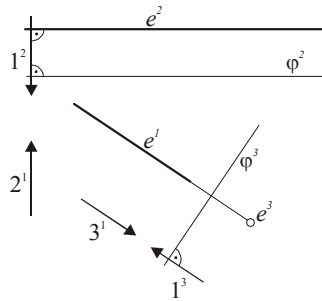
Rys.5.144

#### Ćwiczenie 81

Dane są rzuty prostej pierwszowarstwowej  $e$ . Wprowadzić taki rzut dodatkowy aby prosta była rzutująca.

#### Rozwiązanie

Kierunek 3 jest równoległy do prostej. Jest:  $[1, 2], 3 \parallel t, [1, 3], \varphi \perp 1$  (rys. 5.145).



Rys. 5.145

#### Ćwiczenie 81

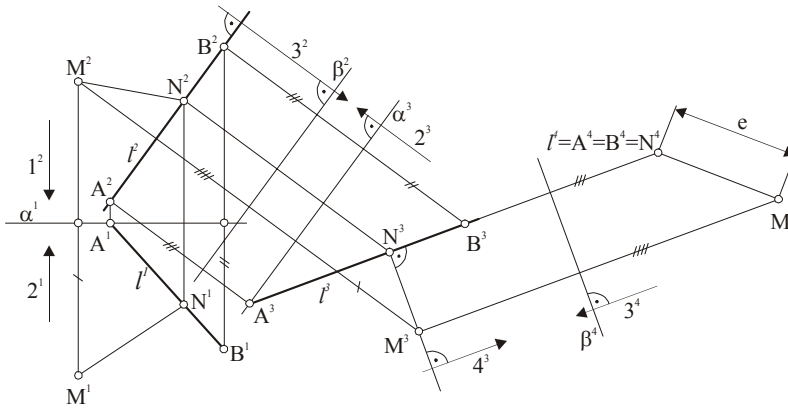
Ćwiczenie to przedstawia całą stosowaną transformację prostej. Skrócony zapis wygląda następująco: prosta ogólna  $a \frac{3 \perp a}{\pi \parallel a}$  prosta warstwowa  $\frac{4 \parallel a}{\pi \perp a}$  prosta rzutująca.

### Ćwiczenie 82

Dana jest prosta  $l$  ogólna i punkt  $M$ . Wyznaczyć odległość punktu od prostej oraz wyznaczyć rzuty podstawowe odcinka, którego długość jest odległością (rys. 5.146).

#### Rozwiązanie

W danym układzie [1,2] wprowadzamy prostą kierunkową 3 prostopadłą do 2 (może być do 1) i otrzymujemy układ [2, 3]. Płaszczyzna porównawcza  $\alpha \perp 2$  zastępuje tę rzutnię którą jest w środku ( $\alpha^1 \perp 2^1 \wedge \alpha^3 \perp 1^3$ ) (rys. 5.146). Aby otrzymać trzeci rzut odmierzymy cechy punktów od płaszczyzny porównawczej  $\alpha$  (np.  $\rho(M^1 \alpha^1) = \rho(M^3 \alpha^3)$ ). Następnie wprowadzamy kierunek 4  $\parallel l$  ( $4^3 \parallel l^3$ ) i  $4 \perp 3$ , mamy więc układy [2, 3] i [3, 4]. Wprowadzamy płaszczyznę porównawczą  $\beta \perp 3$  ( $\beta^2 \perp 3^2$  i  $\beta^4 \perp 3^4$ ) i odmierzymy od niej cechy. Otrzymujemy prostą w położeniu czwartorzutowującym  $l^4$ , oraz  $M^4$  (rys. 5.146). Długość odcinka  $\langle M^4 l^4 \rangle$  jest szukaną odległością punktu  $M$  od prostej  $l$ . Drugi koniec odcinka odległości: punkt  $N$  należy do prostej  $l$ . Ponieważ odcinek  $\langle MN \rangle$  jest w czwartym położeniu warstwowym, to trzeci rzut odcinka  $\langle M^3 N^3 \rangle$  jest prostopadły do prostej  $4^3$ . Pozostałe rzuty punktu  $N$  otrzymujemy za pomocą odnoszących i odpowiednich cech.



Rys. 5.146

## 9.2. Transformacja płaszczyzny.

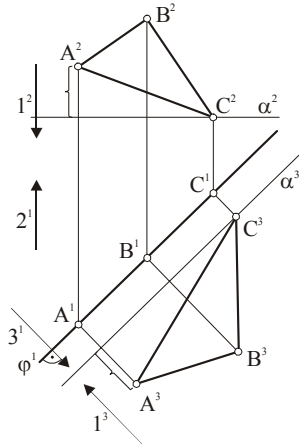
Transformację płaszczyzny otrzymujemy transformując elementy wyznaczające tę płaszczyznę

### Ćwiczenie 83

Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$  zawartego w płaszczyźnie  $\varphi \perp \pi_1 (\varphi \parallel 1)$ . Wyznaczyć charakterystykę miarową tego trójkąta.

#### Rozwiązanie

Wprowadzamy kierunek  $3 \perp \varphi$  i  $3 \perp 1$ . Jest więc [1, 2], [1, 3]. Płaszczyzna porównawcza  $\alpha \perp 1$ . Trzeci rzut trójkąta  $\langle A^3 B^3 C^3 \rangle$  jest przystający do trójkąta  $\langle ABC \rangle$  (rys. 5.147).



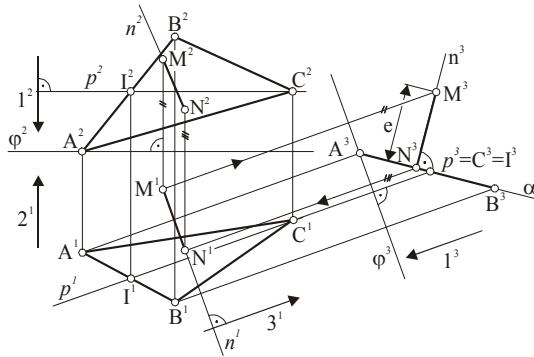
Rys. 5.147

**Ćwiczenie 84**

Dany jest trójkąt  $\langle ABC \rangle$  zawarty w płaszczyźnie  $\alpha$  ogólnej oraz dany jest punkt  $M \notin \alpha$ . Wyznaczyć odległość punktu M od płaszczyzny  $\alpha$ .

*Rozwiązanie*

W płaszczyźnie  $\alpha$  wprowadzamy prostą warstwową  $p$  (na rys.5.148 pierwszorzutową) oraz kierunek  $3 \parallel p$ . Mamy więc układ  $[1, 2]$ ,  $[1, 3]$  i płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp 1$  (pierwszorzutową). Trzeci rzut prostej  $p$  jest punktem, trójkąta - odcinkiem. Płaszczyzna  $\alpha$  jest trzeciorzutową. Przez punkt M prowadzimy prostą  $n \perp \alpha$  ( $M^3 \in n^3 \perp \alpha^3$ ). Wyznaczamy punkt N przebiecia  $n$  z  $\alpha$ ;  $N = n \cap \alpha$ . Prosta  $n$  jest trzeciorzutowa, więc:  $\langle MN \rangle = \langle M^3 N^3 \rangle$ .



Rys. 5.148

Transformację płaszczyzny od położenia ogólnego poprzez położenie rzutujące do położenia warstwowego przedstawia ćwiczenie 85, rysunek 5.149. Skrócony zapis wygląda następująco:

$$\alpha \text{ ogólna } \frac{p \perp 1(\sqrt{2}) \wedge p \subset \alpha}{3 \parallel p} \quad \alpha \text{ rzutująca}; \quad 4 \perp \alpha : \alpha \text{ warstwowa}$$

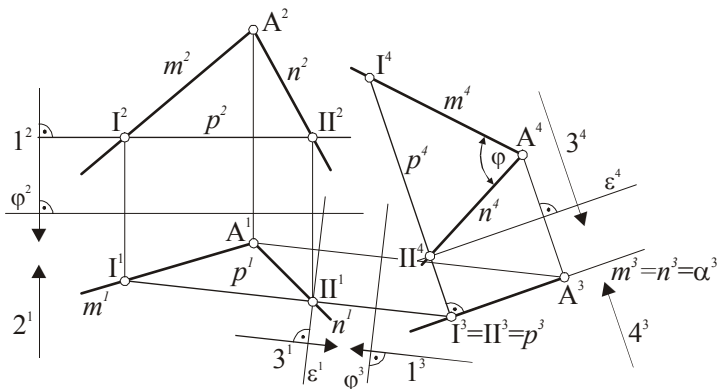
**Ćwiczenie 85**

Dane są dwie proste przecinające się  $m$   $n$  zawarte w ogólnej płaszczyźnie  $\alpha$ . Wyznaczyć miarę kąta między tymi prostymi.



**Rozwiązanie**

Wprowadzamy prostą warstwową:  $p$  oraz prostą kierunkową  $3 \parallel p$  tak, aby prosta  $p$  była trzeciorzutową, co powoduje, że płaszczyzna  $\alpha$  jest również trzeciorzutową (rys. 5.149). Ponieważ mamy układ wiążący  $\{[1, 2] [1, 3]\}$ , płaszczyzna porównawcza  $\varphi \perp 1$  jest pierwszowarstwowa. Prosta 4 jest prostopadła do  $\alpha$  i powstaje układ  $[3, 4]$ . Płaszczyzna porównawcza  $\varepsilon$  jest prostopadła do 3. Ze względu na to, że płaszczyzna  $\alpha$  jest czwartowarstwowa, kąt między prostymi  $m$  i  $n$  jest przystający do kąta między prostymi  $m^4$  i  $n^4$ :  $\varphi(m, n) \equiv \varphi(m^4, n^4)$ .



Rys.5.149

W zadaniach rozwiązywanych metodą transformacji posługujemy się albo transformacją prostą, albo transformacją płaszczyzny, lub stosujemy obie te transformacje.

**Ćwiczenie 86**

Wyznaczyć odległość prostych skośnych  $a$  i  $b$ .

**Rozwiązanie**

Aby wyznaczyć odległość prostych skośnych (rys. 5.115 i 5.116 musimy zastosować dwukrotną transformację, tak aby jedna z prostych, np.  $a$  była prostopadła do rzutni (rys. 5.150). Wybieramy na prostych pomocnicze punkty I, II, III, IV i wprowadzamy prostą  $3 \perp 1 \wedge 3$  prostopadłą do jednej z prostych (tu  $3 \perp a$ ). Mamy więc układ  $[1, 2], [1, 3]$  i płaszczyznę porównawczą  $\varepsilon \perp 1$ . W rzucie trzecim prosta  $a$  jest warstwowa. Wprowadzamy  $4 \parallel a$  ( $4^3 \parallel a^3$ ), układ  $[3, 4]$  i płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp 3$ .

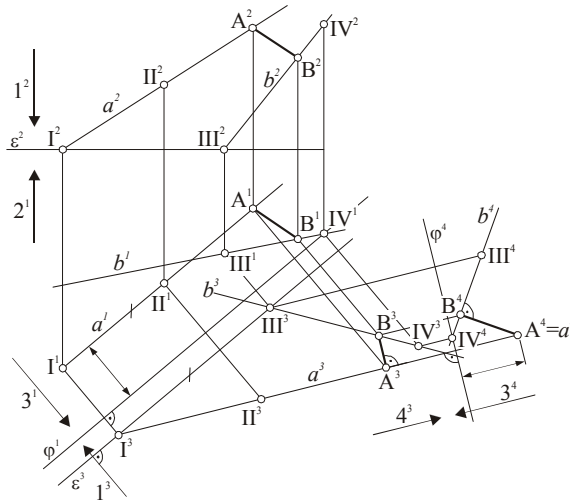
Rzut  $a^4$  jest punktem, a więc odcinek  $\langle A^4 B^4 \rangle \perp b^4$  jest rozwiązaniem (odcinek  $\langle AB \rangle$  prostopadły do prostej rzutującej jest warstwowy i jako taki zachowuje kąt prosty z prostą  $b$  ogólną). Dodatkowo zostały wykreślone za pomocą odnoszących trzeci, pierwszy i drugi rzut odcinka  $\langle AB \rangle$ , z tym, że rzut  $A^3$  został z uwagi na  $\langle AB \rangle \parallel \pi_4$  wyznaczony z warunku  $\langle A^3 B^3 \rangle \perp 4^3$ .

**Ćwiczenie 87**

Wyznaczyć wielkość kąta między płaszczyznami dwóch trójkątów o wspólnym boku  $\langle AB \rangle$ .

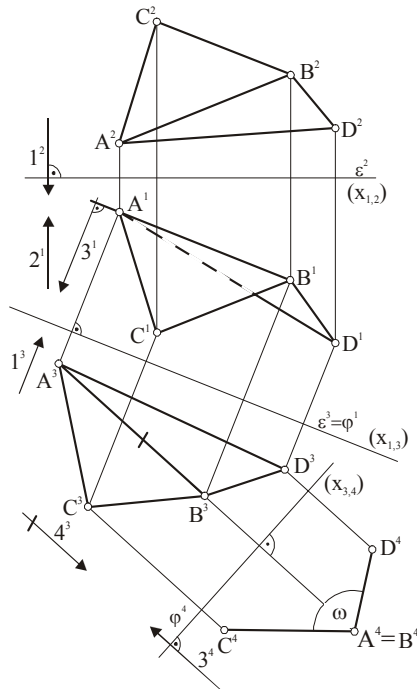
**Rozwiązanie**

Transformujemy wspólną krawędź  $AB$  do położenia rzutującego:  $[1, 2], 3 \perp AB, [1, 3] \varepsilon \perp 1$ , następnie  $4 \parallel AB, [3, 4], \varphi \perp 3$  (rys. 5.151). Ponieważ kąt dwuścienny mierzymy w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi  $AB$ , wobec tego  $\omega, (ABC, ABD) = \omega (A^4 B^4 C^4, A^4 B^4 D^4)$ .



Rys. 5.150

W tym przykładzie: wprowadzono  $\omega^2 = \varepsilon^3$ . W nawiasach podane są oznaczenia osi  $x$  bez wprowadzania płaszczyzn porównawczych.



Rys. 5.151

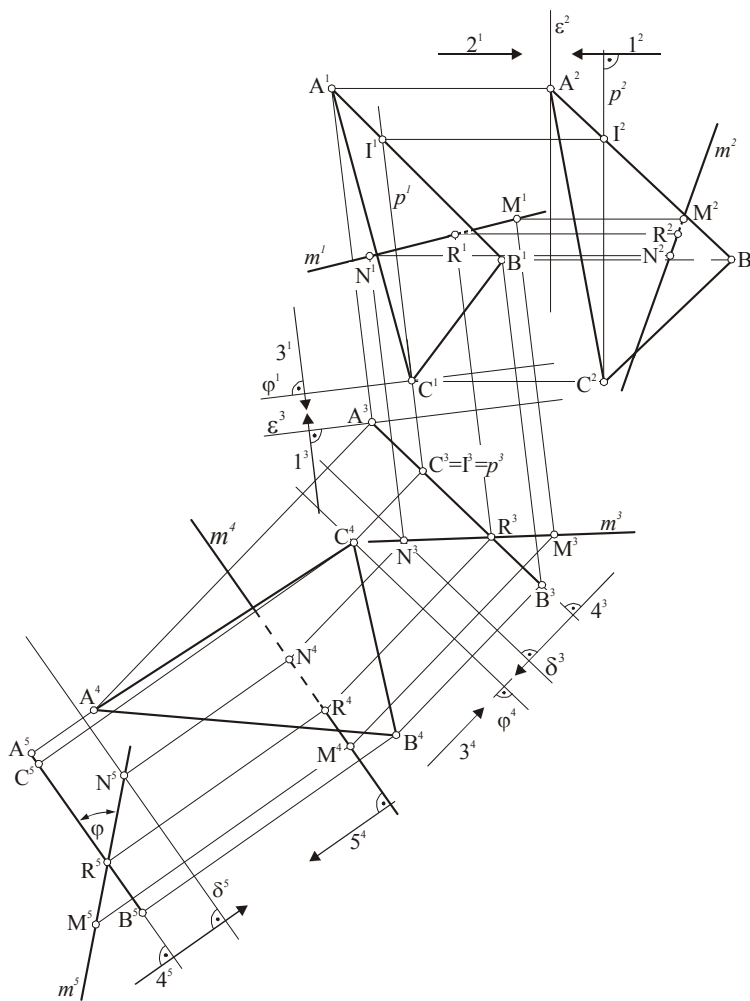
### Ćwiczenie 88

Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$  i prostej  $m$  w położeniu ogólnym. Wyznaczyć kąt nachylenia prostej  $m$  do płaszczyzny  $\alpha = ABC$ .

Kąt między prostą i płaszczyzną otrzymamy wtedy, gdy płaszczyzna będzie rzutująca, a prosta warstwowa.

*Rozwiązanie*

Istnieją dwa sposoby transformacji, aby bezpośrednio wyznaczyć kąt między prostą  $a$  i płaszczyzną  $\alpha$ . Skrócony zapis obu sposobów przedstawia się następująco.



Rys.5.152

*Sposób I* (rys. 5.152)

Dane: [1,2]:  $\alpha$ -ogólna,  $m$ -ogólna

$p \subset \alpha, p \perp 1 (\vee p \perp 2) \parallel p$

[1,3]  $\vee$  [2,3],  $\varepsilon \perp 1 (\vee \varepsilon \perp 2)$

otrzymujemy:

$\alpha$  - rzutująca,  $m$  - ogólna

$4 \perp \alpha$ , [3, 4],  $\varphi \perp 3$

otrzymujemy:

*Sposób II* (rys. 5.153)

Dane: [1, 2]:  $\alpha$ -ogólna,  $m$ -ogólna

$3 \perp m$  [1, 3] ( $\vee$  [2, 3]),  $\varepsilon \perp 1 (\vee \varepsilon \perp 2)$

otrzymujemy:

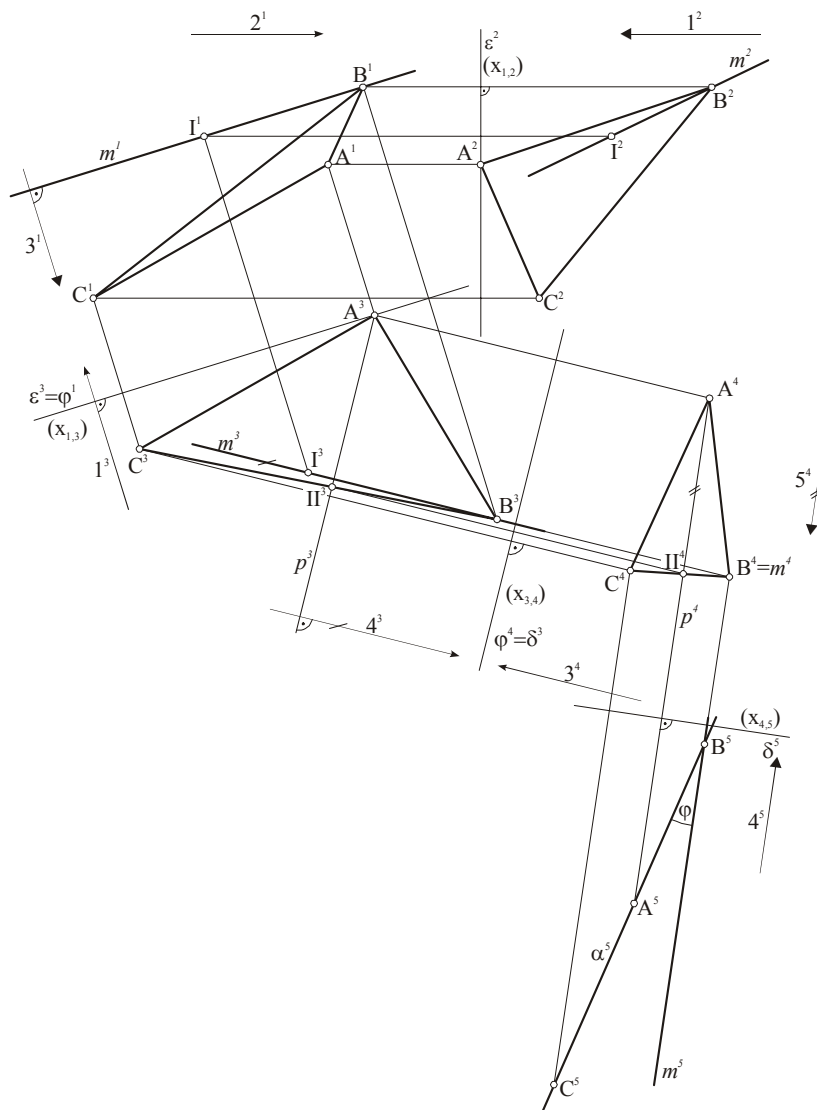
$\alpha$  - ogólna,  $m$  - warstwowa,

$4 \parallel m$  [3, 4],  $\varphi \perp 3$

otrzymujemy:

$\alpha$  - warstwowa,  $m$  - ogólna  
 $5 \perp m$ ,  $[4, 5]$ ,  $\delta \perp 4$   
 otrzymujemy:  
 $\alpha$  - rzutująca,  $m$  - warstwowa  
 $\varphi(\alpha, m) = \varphi(\alpha^5, m^5)$

$\alpha$  - ogólna,  $m$  - rzutująca  
 $p \subset \alpha \wedge p \perp 4$ ,  $5 \parallel p$ ,  $[4, 5]$ ,  $\delta \perp 4$   
 otrzymujemy:  
 $\alpha$  - rzutująca,  $m$  - warstwowa  
 $\varphi(\alpha, m) = \varphi(\alpha^5, m^5)$



Rys. 5.153

Jeżeli płaszczyzna jest dana w sposób szczególny np. jest rzutująca, lub warstwowa, a prosta jest ogólna wygodny jest sposób I i wymaga dwóch lub jednej transformacji.

Jeżeli płaszczyzna  $\alpha$  jest w położeniu ogólnym, zaś prosta  $a$  jest warstwowa lub rzutująca wygodny jest sposób II i wymaga również dwóch lub jednej transformacji.

*Sposób III.*

Miarę kąta między prostą  $m$  i płaszczyzną można otrzymać w czwartym rzucie wprowadzając prostą  $n$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  i przecinającą prostą  $m$  (jak na rys.5.122c - prosta  $b \perp \alpha$ ). Proste  $m$   $n$  wyznaczają płaszczyznę  $\gamma$ . Wyznaczamy kąt  $\sigma$  między prostymi  $m$  i  $n$  (ćwicz. 3 4, rys. 5.149) i uzupełniamy go do  $90^\circ$ .  $\varphi = 90^\circ - \sigma$ .

Zapis uproszczony:

[1, 2],  $c \perp 1 \wedge d \perp 2$ ,  $cd \subset \alpha$ ,  $M \in m$ ,

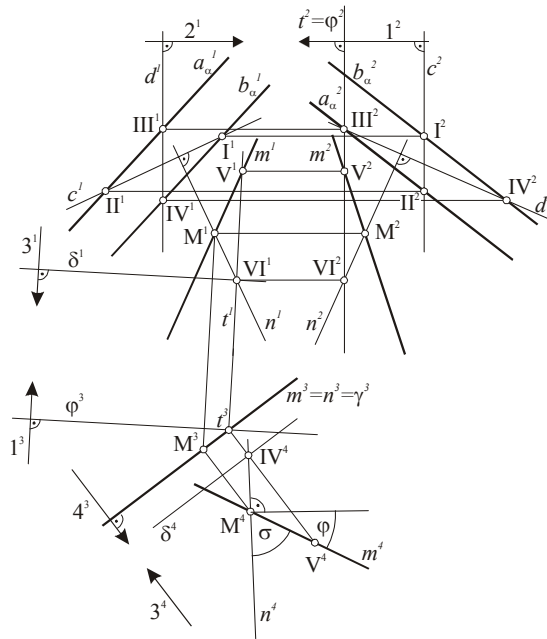
$M \in n \perp \alpha$  ( $n \perp c$ ,  $n \perp d$ ),  $mn = \gamma$ ,

$t \perp 1$ ,  $t \subset \gamma$ ,  $3 \parallel t$ , [1, 3]  $\varphi \perp 1$ ,

$4 \perp \gamma$ , [3,4],  $\delta \perp 3$ ,

$\sigma(m^4 n^4) \equiv \sigma(mn)$

$\varphi(m, \alpha) = 90^\circ - \sigma$ .



Rys.5.154

**Ćwiczenie 89**

Wyznaczyć wielkość kąta zawartego między prostymi skośnymi  $a$  i  $b$ .

*Rozwiązanie I*

Sposób rozwiązania podany jest w punkcie 8.9, rys. 5.118 . W układzie [1 2] wprowadzamy prostą  $c$  równoległą do  $b$  i przecinającą prostą  $a$  w punkcie I (rys. 5.155). W płaszczyźnie  $\alpha = ac$  wyznaczamy prostą drugowarstwową  $p$ . Kierunek  $3 \parallel p$  ( $\pi_3 \perp p$ ) powoduje, że płaszczyzna  $\alpha$  jest trzeciorzutująca. Prosta  $b$  jest równoległa do płaszczyzny  $\alpha$  wobec tego  $a^3 \parallel b^3$ . Płaszczyzną porównawczą jest  $\varepsilon \perp 2$  (drugowarstwową). Kierunek 4 jest prostopadły do obu prostych (układ [3, 4] płaszczyzna porównawcza  $\varphi \perp 3$ ;  $\sigma(a^4 b^4) \equiv \sigma(a, b)$ ).

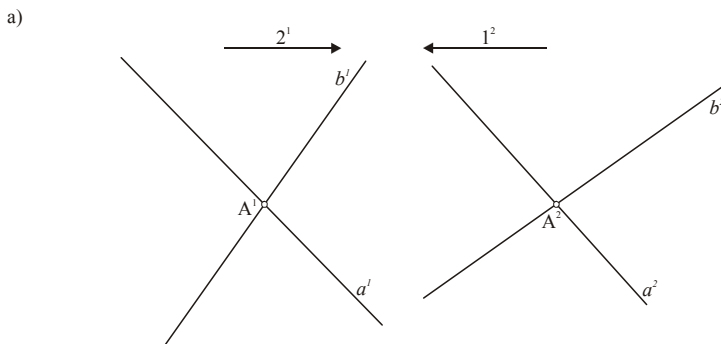


### 9.3. Rzut pośrednio związany.

W przypadku, gdy rozwiązywane zadanie metodą transformacji zajmuje za dużo miejsca na arkuszu rysunkowym można przenieść kierunek rzutowania i płaszczyznę porównawczą w inne miejsce (rys. 5.157).

#### Ćwiczenie 90

Dane są proste przecinające się  $a$  i  $b$ . Wyznaczyć rzuty okręgu o promieniu  $r$  stycznego do prostych  $a$  i  $b$  (rys. 5.157a).

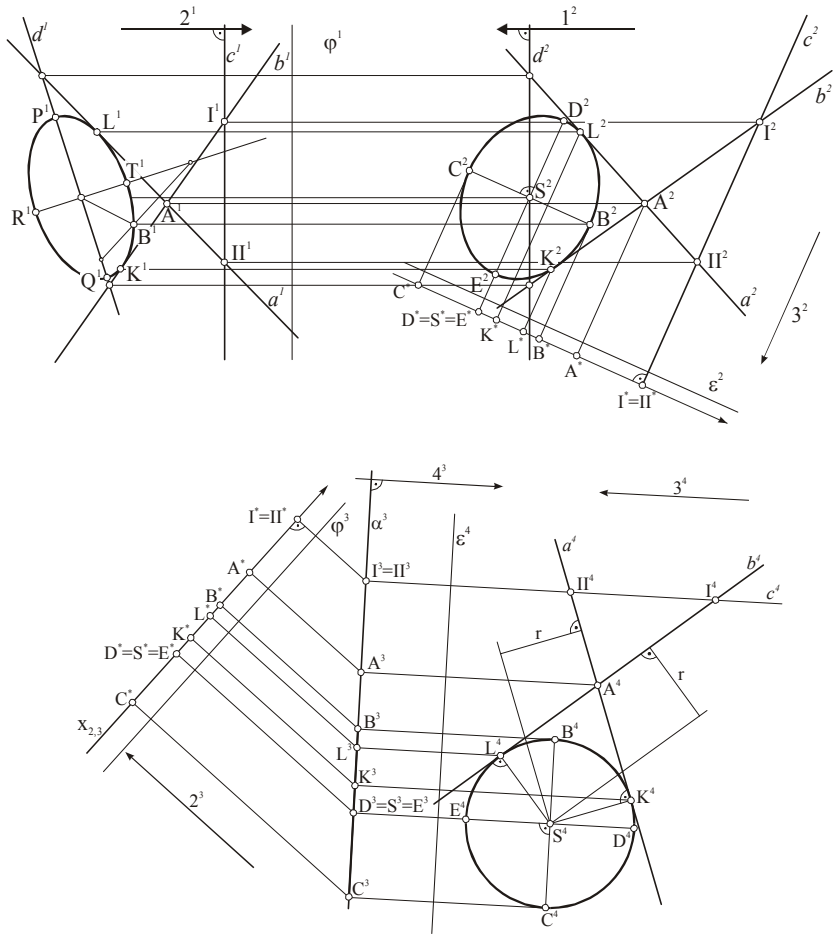


Rys. 5.157a

#### Rozwiązanie

W układzie [1, 2] (rys. 5.157b) wprowadzamy prostą  $c$  drugowarstwową zawartą w płaszczyźnie  $\alpha=ab$  i kierunek  $3 \parallel c$ . W rzucie drugim rysujemy prostą zorientowaną  $3$ . Rysujemy prostą  $n$  prostopadłą do odnoszących ( $n$  - normalna odnoszących) i orientujemy ją dowolnie. Odnoszące z punktów  $I^2II^2$  i  $A^2$  przecinają  $n$  w punktach  $I^1II^1A^1$ . Trzeci rzut prostej  $2:2^3$  i zorientowaną prostą  $n$  przestawiamy w dowolne miejsce na arkuszu rysunkowym lub na inny arkusz rysunkowy pamiętając, aby po obrocie, zwroty prostej  $n$  w pierwotnym i następnym położeniu były zgodne, a zwroty prostych kierunkowych były przeciwne. W nowym położeniu prostej  $x_{1,3}$  przyjmujemy dowolnie jeden punkt, np.  $A^1$  i odmierzamy punkt  $I^1=II^1$  tak, aby punkty te poprzedzały punkt  $A^1$  (kolejność punktów i ich odległości w obu położeniach osi muszą być jednakowe). Mając układy [1, 2] i [2, 3] wprowadzamy płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp 2$  i odmierzamy od niej cechy punktów, np.:  $\rho(A^1 \varphi) = \rho(A^3 \varphi^3)$ . Trzeci rzut płaszczyzny  $\alpha$  jest prostą, a więc płaszczyzna  $\alpha$  jest rzutująca. Prosta kierunkowa 4 jest prostopadła do  $\alpha$ , dzięki czemu w rzucie czwartym uzyskujemy warstwowe położenie płaszczyzny. Dla układów [2.,3] i [3, 4] wprowadzamy płaszczyznę porównawczą  $\varepsilon \perp 3$ . W czwartym rzucie wyznaczamy jedno z czterech możliwych położen okręgu i przyjmujemy dwa prostopadłe odcinki średnic okręgu  $\langle BC \rangle \parallel x_{3,4}$  i  $\langle DE \rangle \perp \langle BC \rangle$ . Tak przyjęte średnice w rzucie drugim są odcinkami osiowymi elipsy będącej rzutem okręgu. Punkty  $K$  i  $L$  są punktami styczności okręgu z prostymi  $a$  i  $b$ . Trzeci rzut okręgu jest odcinkiem  $\langle C^3A^3 \rangle \subset \alpha^3$ . Odcinki osiowe  $\langle BC \rangle$  i  $\langle DE \rangle$  wygodne w rzucie drugim staną się w rzucie pierwszym odcinkami sprzężonymi. Chcąc umknąć niewygodnej metody kreślenia elipsy wyznaczamy takie odcinki średnicowe sprzężone elipsy, które w rzucie pierwszym będą odcinkami osiowymi. W tym celu przez punkt  $S$  prowadzimy prostą pierwszowarstwową  $d$ , na której od punktu  $S$  odmierzamy promień. Otrzymujemy odcinek osiowy główny  $\langle P^1Q^1 \rangle$ . Odcinek osiowy poboczny  $\langle R^1T^1 \rangle$  prostopadły do  $\langle P^1Q^1 \rangle$  otrzymujemy następująco. Wyznaczamy dowolny punkt elipsy np.  $B$  i rysujemy oś poboczną prostopadłą do  $\langle PQ \rangle$ . Stosując konstrukcję XIII, rys. 1.21 wyznaczamy odcinek osiowy poboczny. W rzutach 1 i 2 wykreślamy elipsę dowolną metodą. Elipsę można zastąpić owalem.

b)

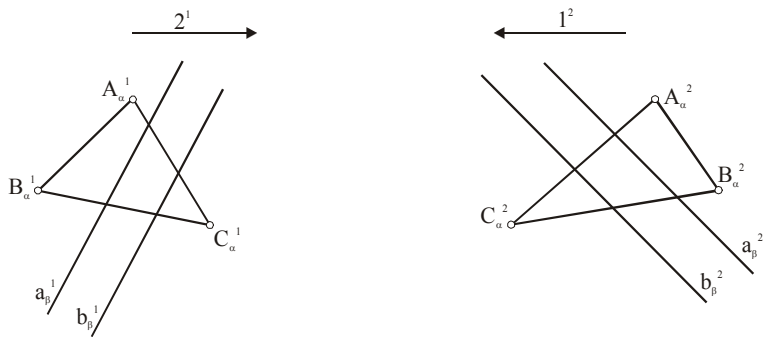


Rys. 5.157b

**Ćwiczenie 91**

Dane są rzuty dwóch płaszczyzn  $\alpha=ABC$ ,  $\beta=ab$ . Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów równoodległych od płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 5.158a).

a)



Rys. 5.158a



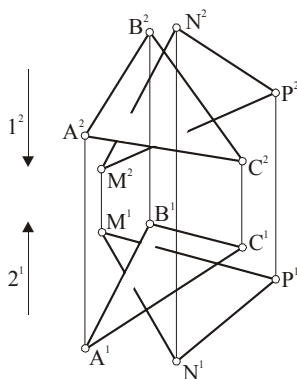


*Rozwiązanie*

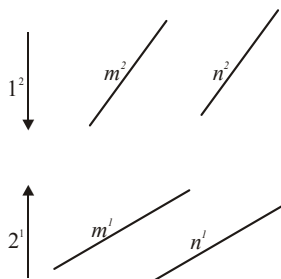
Miejszem geometrycznym punktów równoodległych od płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  są dwie płaszczyzny dwusieczne kątów między  $\alpha$  i  $\beta$ . Szukamy więc kąta między płaszczyznami wyznaczając najpierw krawędź obu płaszczyzn i transformując płaszczyznę tak, aby krawędź była rzutująca (ćwicz. 83, rys. 5.151). To samo otrzymamy jeżeli w jednej z płaszczyzn (tu w płaszczyźnie  $\alpha=ABC$ ) wprowadzimy w układzie [1, 2] prostą warstwową  $p \perp l$  (lub  $p \perp 2$ ) i  $3 \parallel p$  oraz  $\varphi \perp 2$ . Powstanie nowy układ wiążący [2, 3]. W trzecim rzucie płaszczyzna  $\alpha$  jest rzutująca (rys. 5.158b),  $\beta$  - ogólna. Wprowadzamy kierunek  $4 \perp \alpha$ , układ [3, 4] i płaszczyznę porównawczą  $\varepsilon \perp 3$ . Zastosujemy tu rzut pośrednio związany: rysujemy rzut trzeci prostej  $4 : 4^3 \perp \alpha^3$  i prostą  $n$  zorientowaną dowolnie (normalną odnoszącą),  $n \perp 4^3$ . Następnie rysujemy w innym miejscu proste  $3^4$  i prostopadłą do niej prostą  $n$ , tak aby po złożeniu prostych  $4^3$  i  $3^4$  o zwrotach przeciwnych, zwrot prostej  $n$  w obu położeniach był taki sam.  $\varepsilon^2 \perp 3^2$ ,  $\varepsilon^4 \perp 3^4$ . W rzucie czwartym płaszczyzna  $\alpha$  jest warstwowa,  $\beta$  ogólna. Każda następna transformacja przekształci płaszczyznę  $\alpha$  w rzutującą. Kierunek 5 musi być taki, aby również  $\beta$  była rzutująca. W tym celu wybieramy w płaszczyźnie  $\beta$  prostą  $p$  czwartowarstwową ( $p^3 \perp 4^3$ ). Kierunek  $5 \parallel p$  ( $5^4 \parallel p^4$ ). Nowym układem wiążącym jest [4, 5], płaszczyznę porównawczą może być płaszczyzna  $\alpha \perp 4$ . W piątym rzucie obie płaszczyzny są rzutujące, a kąty między nimi równe  $\sigma$  i  $\omega$  (rys. 5.158b). Wyznaczamy płaszczyzny dwusieczne kątów:  $\delta$  i  $\lambda$ , wybieramy w nich punkty:  $D \in \delta$  i  $L \in \lambda$  ( $D^4$  i  $L^4$  - dowolnie,  $D^5 \in \delta^5$ ,  $L^5 \in \lambda^5$ ) oraz wyznaczamy krawędź  $k$  ( $k^5 = \alpha^5 \cap \beta^5$ ). Wyznaczamy kolejno rzuty: czwarty, trzeci, drugi i pierwszy punktów D, L i prostej  $k$ . Aby wyznaczyć kolejne rzuty prostej  $k$  wybieramy na niej punkty P i Q począwszy od rzutu czwartego. Płaszczyzny dwusieczne są wyznaczone  $\delta = Dk$ ,  $\lambda = Lk$  (rys. 5.158b).

ZADANIA

1. Metodą transformacji wyznaczyć przenikanie figur płaskich (rys. 5.159)
2. Wyznaczyć odległość prostych równoległych (rys. 5.160).

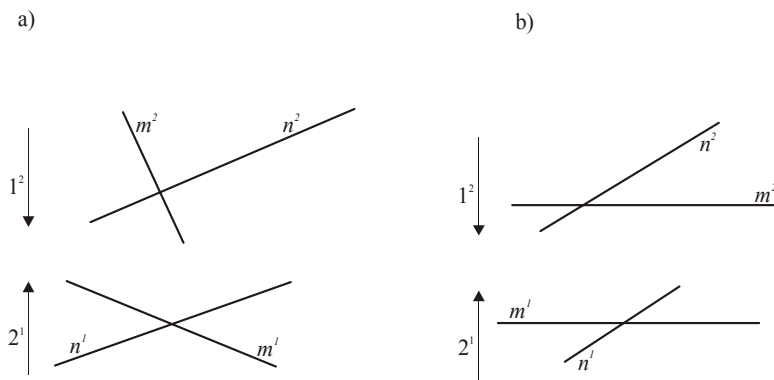


Rys. 5.159



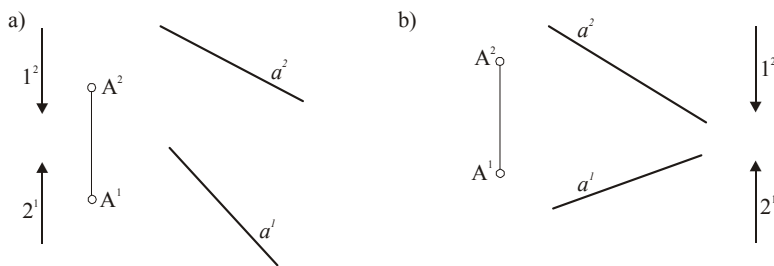
Rys. 5.160

3. Wyznaczyć odległość prostych skośnych (rys. 5.161) oraz prostą prostopadłą do obu skośnych i przecinającą je.
4. Dany jest punkt  $A$  i prosta  $a$ . Wyznaczyć rzuty trójkąta równobocznego  $\langle ABC \rangle$  przy założeniu, że  $B$  i  $C$  należą do prostej  $a$  (rys. 5.162ab).
5. Wyznaczyć rzuty okręgu opisanego na trójkącie  $\langle ABC \rangle$  (rys. 5.163).

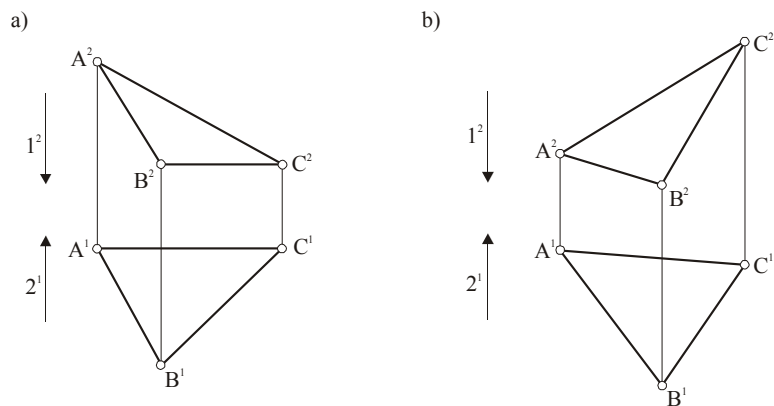


Rys. 5.161

6. Wyznaczyć rzuty okręgu wpisanego w trójkąt  $\langle ABC \rangle$  (rys. 5.163).

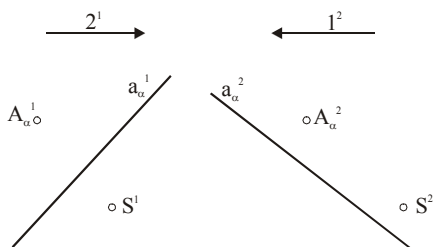


Rys. 5.162

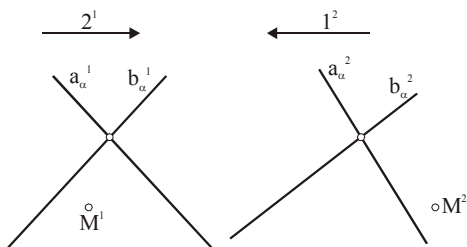


Rys. 5.163

7. Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  oraz rzuty punktu S. Wyznaczyć rzuty sfery o środku S stycznej do  $\alpha$  (rys.5.164).

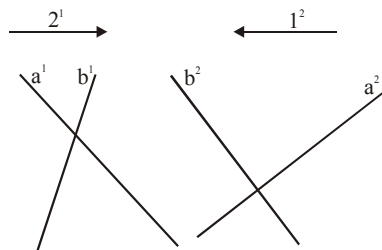


Rys. 5.164

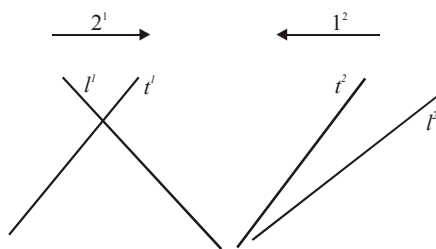


Rys. 5.165

8. Dana jest płaszczyzna  $\alpha=ab$  i punkt M. Wyznaczyć odległość punktu M od płaszczyzny  $\alpha$ , oraz przez punkt N symetryczny wraz z M względem  $\alpha$  poprowadzić płaszczyznę  $\beta \parallel \alpha$ . Wykreślić rzuty podstawowe elementów wyznaczających płaszczyznę  $\beta$  (rys. 5.165).
9. Dane są proste skośne  $a$  i  $b$ . Wyznaczyć prostą  $c \parallel a$  taką, że  $\rho(ab) = \rho(bc)$  (rys. 5.166).
10. Dane są proste skośne  $l$  i  $t$  w położeniach ogólnych. Obrócić prostą  $t$  dookoła prostej  $l$  o kąt  $120^\circ$  (rys. 5.167).
- Uwaga: Po przetransformowaniu prostej  $l$ , która jest osią obrotu do położenia rzutującego, obracamy dwa punkty prostej  $t$  o  $120^\circ$  i otrzymujemy  $t_1$  - nowe położenie prostej.



Rys. 5.166

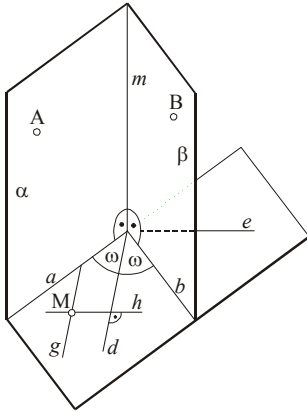


Rys. 5.167

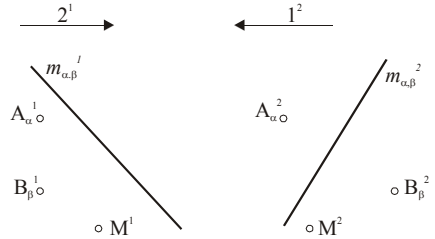
11. Dane są dwie płaszczyzny  $\alpha = Am$ ,  $\beta = Bm$  oraz punkt  $M$ . Wyznaczyć proste  $g$  i  $h$  zawierające punkt  $M$ , jednakowo nachylone do płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  prostopadłe do krawędzi tych płaszczyzn (rys. 5.168a,b).

Uwaga: Proste  $g$  i  $h$  są równoległe do prostych  $d$  i  $e$  dwusiecznych kąta między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$ .

a)



b)



Rys. 5.168

## 10. Wielościany

Wielościanem nazywamy figurę będącą zbiorem skończonej liczby wielokątów płaskich spełniającą następujące warunki:

- 1) każde dwa wielokąty (zwane ścianami wielościanu) mają wspólny bok (krawędź), lub wierzchołek, albo nie mają żadnego punktu wspólnego,
- 2) każdy bok wielokąta jest bokiem wspólnym tylko dla dwóch wielokątów,
- 3) każdy wierzchołek wielokąta jest punkiem wspólnym (wierzchołkiem) dla co najmniej trzech wielokątów.

Wielościany dzielimy na wypukłe i wklęsłe. Jeżeli dowolna prosta przebija wielościan co najwyżej w dwu punktach — wielościan jest wypukły. Wielościan utworzony z wielokąta płaskiego o  $n$  bokach i z  $n$  trójkątów o wspólnym wierzchołku nazywamy ostrosłupem  $n$ -ściennym.  $N$ -kątem nazywamy podstawę, a trójkąty — ścianami bocznymi, suma zaś ścian bocznych — pobocznica. Odległość wierzchołka ostrosłupa od płaszczyzny podstawy nazywamy wysokością ostrosłupa. Jeżeli spodek wysokości  $S$  (punkt przebiecia płaszczyzny podstawy) z prostą zawierającą wierzchołek i prostopadłą do płaszczyzny podstawy) jest środkiem koła opisanego na wielokącie podstawy ostrosłupa, to jego krawędzie są tej samej długości i ostrosłup nazywa się prostym. Ponadto, jeżeli podstawa jest wielokątem foremnym i pobocznica składa się z przystających trójkątów równoramiennych, to ostrosłup nazywamy ostrosłupem prawidłowym.

Wielościan, który składa się z  $n$  równoległoboków oraz z dwóch przystających wielokątów płaskich o bokach parami równoległych nazywamy graniastostupem  $n$ -ściennym. Dwa przystające  $n$ -kąty nazywamy podstawami graniasto-

słupa, a równoległoboki — ścianami bocznymi, które razem tworzą poboczną graniastosłupa, a ich wspólne boki to krawędzie boczne, a boki wielokątów podstawy — krawędzie podstawy. Odległość płaszczyzn obu podstaw nazywamy wysokością graniastosłupa. Jeżeli krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, to ściany boczne są prostokątami, a graniastosłup nazywa się prostym. Ponadto gdy podstawy są wielokątami foremnymi, to ściany boczne są prostokątami przystającymi i taki graniastosłup nazywamy prawidłowym. Graniastosłup, którego podstawy są równoległobokami nazywamy równoległościaniem, a graniastosłup prosty, którego podstawy są prostokątami nazywamy prostopadłościaniem.

Wielościan, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi (umiarowymi) i w którym sąsiednie pary ścian zawierają równe kąty dwusienne nazywamy wielościanem foremnym (umiarowym). Na wierzchołkach wielościanu foremnego można opisać sferę, a także można wpisać sferę styczną do wszystkich ścian wielościanu. Środki obu sfer jednoczą się w punkcie zwanym środkiem wielościanu foremnego.

Istnieje tylko 5 wielościanów foremnych:

- 1) czworościan foremny, złożony z czterech trójkątów równobocznych,
- 2) sześciocian foremny, czyli sześciocian złożony z sześciu kwadratów,
- 3) ośmiościan foremny, złożony z ośmiu trójkątów równobocznych,
- 4) dwunastościan foremny, złożony z dwunastu pięciokątów foremnych,
- 5) dwudziestościan foremny, złożony z dwudziestu trójkątów równobocznych.

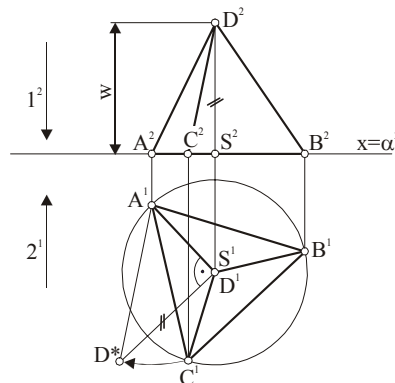
Rzutem wielościanu nazywamy zbiór rzutów wszystkich jego punktów. Na rysunku wyróżniamy tylko rzuty jego naroży i krawędzi. Widoczność krawędzi i ścian ustalamy jak w rozdziale III.

### 10.1. Budowa wielościanów

Przy rozwiązywaniu zadań związanych z wielościanami możemy posługiwać się metodami klasycznymi jak prostopadłość, kłady lub transformacje.

#### Ćwiczenie 92

Wykreślić rzuty podstawowe czworościanu foremnego, którego jedna ściana zawarta jest w rzutni pierwszej.



Rys. 5.169

### Rozwiązanie

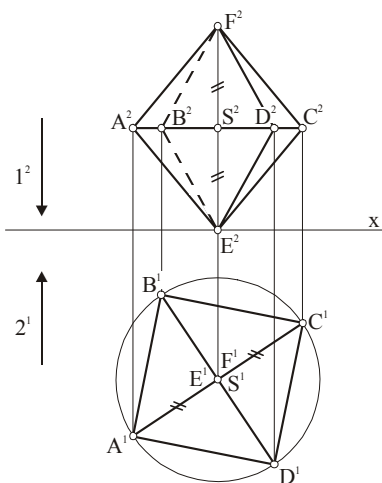
Kreślimy trójkąt równoboczny  $\langle ABC \rangle$  zawarty w  $\pi_1$ . Jego rzut drugi jest odcinkiem w osi  $x$  (rys. 5.169). Ze środka  $S$  tego trójkąta prowadzimy prostą pierwszorzutową, na której w punkcie  $D$  znajduje się wspólny wierzchołek pozostałych trzech trójkątów równobocznych. Cechę punktu  $D$  znajdujemy z układu na rzutnię  $\pi_1$  trójkąta  $\langle ASD \rangle$ . W trójkącie  $\langle A^1S^1D^* \rangle$  mamy  $|A^1D^*| = |A^1C^1|$ . Odcinek  $\langle S^1D^* \rangle$  jest wysokością czworosięca.

### Ćwiczenie 93

Wykreślić rzuty ośmiościanu foremnego gdy dana jest przekątna  $\langle EF \rangle$  prostopadła do  $\pi_1$ .

### Rozwiązanie

Trzy przekątne ośmiościanu foremnego są równe, wzajemnie prostopadłe i przecinają się w punkcie  $S$  - środku każdej przekątnej. Jeżeli  $\langle EF \rangle$  jest prostopadła do  $\pi_1$ , to pozostałe przekątne są warstwowe i ich końce są wierzchołkami kwadratu (rys. 5.170).



Rys. 5.170

### Ćwiczenie 94

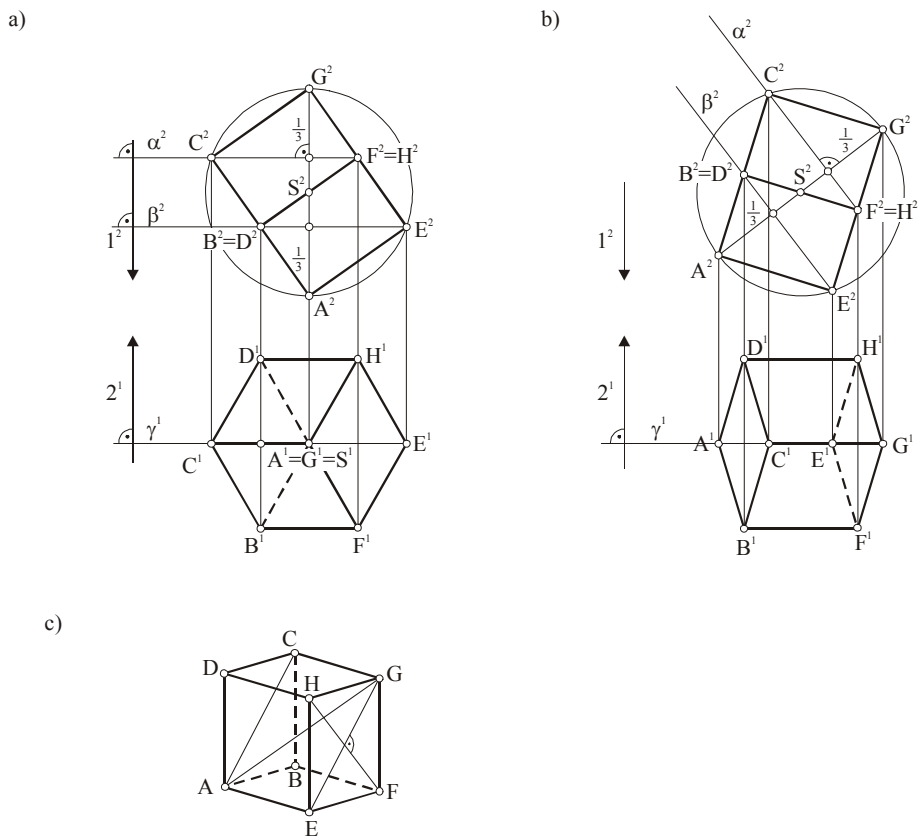
Dana jest przekątna główna  $\langle AG \rangle$  sześcianu  $\langle ABCDEFGH \rangle$  w położeniu: a) rzutującym, b) drugowarstwowym. Wyznaczyć rzuty sześcianu (rys. 5.171a,b).

### Rozwiązanie

Z własności sześcianu wiadomo, że w płaszczyznach  $\alpha$  i  $\beta$  prostopadłych do odcinka przekątnego głównego i dzielących go na trzy równe części znajdują się po 3 wierzchołki sześcianu.

Przekrój sześcianu płaszczyzną  $\gamma$  zawierają  $AG$  i  $CE$  jest prostokątem którego dwa boki są bokami sześcianu (rys. 5. 171c). Przy takim ustawieniu, że  $\gamma \perp AG$  i  $\alpha \perp CE$  rzut drugi prostokąta jest przystający do niego. Dzielimy odcinek  $\langle A^2G^2 \rangle$  na trzy części i prowadzimy rzuty płaszczyzny  $\alpha$ ,  $\beta \perp \langle A^2G^2 \rangle$ . Następnie ze środka  $S^2$  odcinka  $\langle A^2G^2 \rangle$  zakreślamy okrąg i przyjmujemy na przecięciu okręgu z  $\alpha^2$  (lub  $\beta^2$ ) punkt  $C$ . Punkt  $C^2$  połączony z końcami średnicy  $A^2$  i  $G^2$  wyznacza kąt prosty przy wierzchołku  $C^2$ . Punkt  $E^2$  wyznaczamy podobnie. (Prostokąt  $\langle AEGC \rangle \subset \gamma$ ). Punkty  $H^2F^2 \in \alpha^2$ ,  $B^2D^2 \in \beta^2$ . Proste  $HF$  i  $BD$  są prostymi drugorzutowymi, więc ich długość w rzucie pierwszym zostaje zachowana i  $|H^1F^1| = |E^2G^2|$ . Uzupełniamy rzuty krawędzi sześcianu oraz ustalamy widoczność (rys. 5.171a).

Na rys. 5.171c przedstawione jest rozwiązanie w przypadku, gdy przekątna główna jest w położeniu drugowaterswym.



Rys. 5.171

### Ćwiczenie 95

Wykreślić rzuty ostrosłupa trójściennego o podstawie trójkąta równobocznego mając dany odcinek  $\langle SW \rangle$  będący jego wysokością.

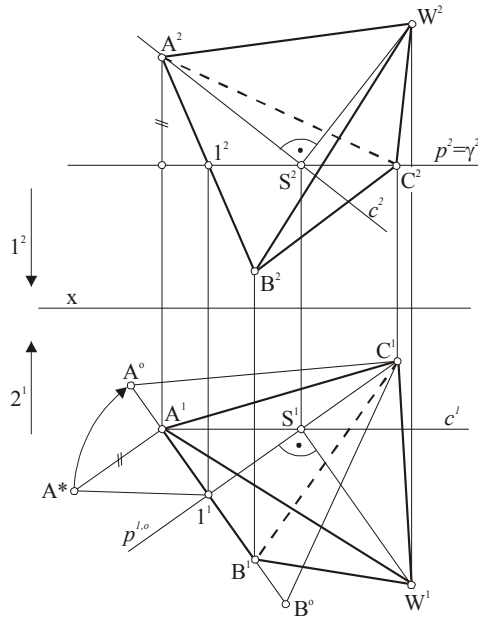
#### Rozwiązanie

Przez punkt  $S$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  prostopadłą do  $\langle SW \rangle$ .  $\alpha = pc$ , gdzie  $p \parallel \pi_1$   $c \parallel \pi_2$  i  $p \perp \langle SW \rangle$ ,  $c \perp \langle SW \rangle$  (rys. 5.172). Prowadzimy płaszczyznę pierwszorzadową  $\gamma \supset p$ , a następnie dowolnie obrany punkt  $A$  na prostej  $c$  obracamy dookoła prostej  $p$  tak, aby znalazł się na płaszczyźnie  $\gamma$ . Prosta  $p$  i punkt  $A$  wyznaczają kład płaszczyzny  $\alpha$  na płaszczyźnie  $\gamma$ . W kładzie płaszczyzny kreślimy trójkąt równoboczny  $\langle A^0 B^0 C^0 \rangle$ .  $\langle A^1 B^1 C^1 \rangle$  jest rzutem pierwszym podstawy.

Rzut drugi podstawy znajdujemy następująco: punkt  $C \in p$  więc  $C^2 \in p^2$ . Punkt  $B \in A^1$  więc  $B^2 \in A^2 l^2$ . Wyznaczamy rzuty krawędzi bocznych ostrosłupa oraz widoczność.

Zadanie można rozwiązać także metodą transformacji.





Rys. 5.172

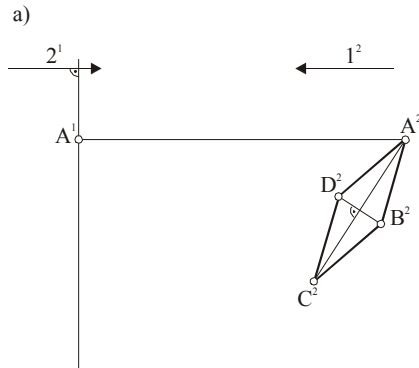
### Ćwiczenie 96

Dany jest romb  $\langle A^2B^2C^2D^2 \rangle$ , będący drugim rzutem kwadratu i pierwszy rzut punktu A. Wyznaczyć rzuty sześcianu  $\langle ABCDEFGH \rangle$  (rys. 5. 173a).

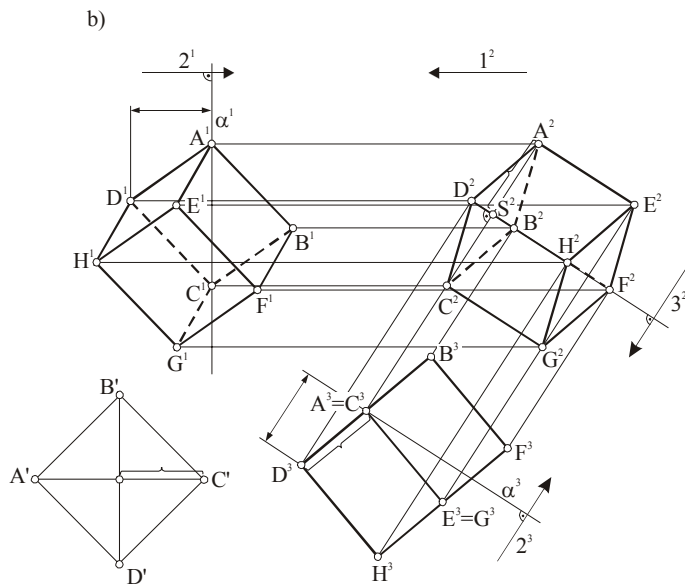
#### Rozwiązanie

$\langle AC \rangle$  i  $\langle BD \rangle$  są przekątnymi kwadratu i w rzucie drugim jest zachowany kąt prosty, wobec tego przekątna  $\langle AC \rangle$  o większej długości jest warstwowa.  $A^1 C^1 \perp 2$ . W układzie  $[1,2]$  wprowadzamy  $3 \parallel AC$ , powstaje układ  $[2, 3]$  i przyjmujemy płaszczyznę porównawczą  $\alpha \perp 2$ . Trzeci rzut kwadratu  $\langle ABCD \rangle$  jest odcinkiem. Z punktu  $A^3=C^3$  zakreślamy łuk długości równej  $|SA^2|$  do przecięcia z odnoszącą punktu D i otrzymujemy punkt  $D^3$ . Punkt  $B^3$  otrzymujemy symetrycznie (są dwa rozwiązania przy otrzymywaniu  $\langle D^3B^3 \rangle$ ).

Prostopadle do podstawy kreślimy w rzucie trzecim boki sześcianu o długości znalezionej z kwadratu  $\langle A^0B^0C^0D^0 \rangle$ . Proste AE, FB, ... są trzeciowarstwowe a więc prostopadle do prostej 3.  $A^2 F^2 \perp 3^2 \dots$  Rzut pierwszy sześcianu otrzymujemy za pomocą odnoszących i cech mierzonych od  $\alpha$ . Ustalamy widoczność (rys. 5.173b).



Rys 5.173a



Rys. 5.173b

### Ćwiczenie 97

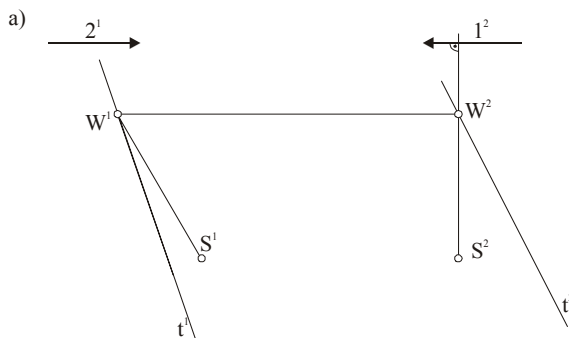
Dany jest odcinek  $\langle SW \rangle$  - wysokość ostrosłupa prawidłowego czterościennego oraz prosta  $t$ , zawierająca punkt  $W$ , w której zawarta jest krawędź  $\langle AW \rangle$  ostrosłupa. Wyznaczyć rzuty podstawowe ostrosłupa (rys. 5.174a).

*Rozwiązanie I* - metoda transformacji (rys. 5.174b)

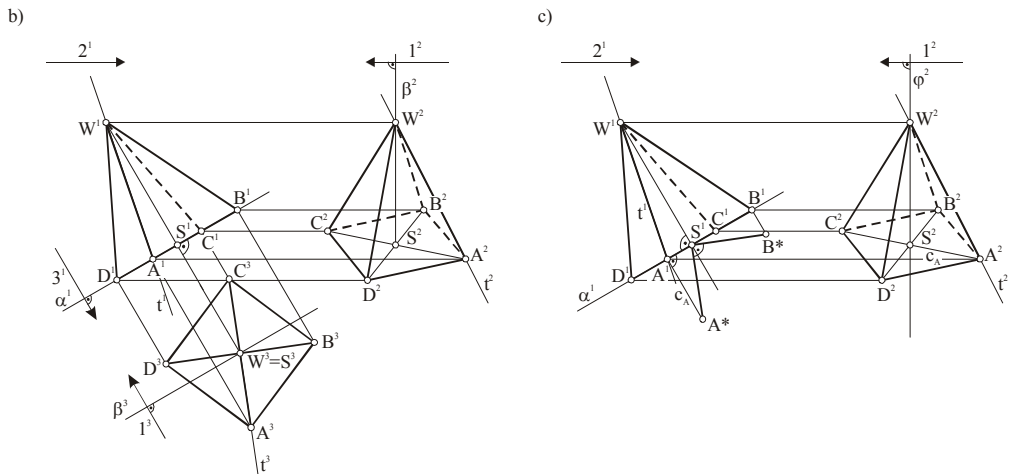
Ponieważ odcinek  $\langle SW \rangle$  jest pierwszorzutowy, płaszczyzna podstawy  $\alpha \perp \langle SW \rangle$  i zawierająca  $S$  jest pierwszorzutową i przecina prostą  $t$  w punkcie  $A$  ( $A^1 = \alpha^1 \cap t^1$ ). Prosta  $3 \perp \alpha$  sprawia, że płaszczyzna jest trzeciwarzstwową. Mamy  $[1, 2]$ ,  $[1, 3]$  i płaszczyznę porównawczą  $\beta \perp 1$ . W trzecim rzucie wyznaczamy  $W^3 = S^3$  i  $A^3$  oraz pozostałe wierzchołki kwadratu:  $B, C$  i  $D$ . Wyznaczamy rzuty podstawowe ostrosłupa i określamy widoczność.

*Rozwiązanie II* - metoda klasyczna (rys. 5.174c)

Jak w poprzednim rozwiązaniu  $S \in \alpha \perp WS$  i  $\alpha \cap t = A$ . W układzie prostokątnym płaszczyzny  $\alpha$  rysujemy  $\langle S^1 B^* \rangle \perp \langle S^1 A^* \rangle$  i  $|S^1 B^*| = |S^1 A^*| = 1/2$  przekątnej kwadratu  $\langle ABCD \rangle$ . Wyznaczamy rzuty punktu  $B: B^1$  i  $B^2$  oraz rzuty punktów  $C$  i  $D$ . Punkty  $A$  i  $C$  oraz  $B$  i  $D$  są symetrycznie położone względem środka kwadratu  $S$ .



Rys. 5.174a



Rys. 5.174b,c

### Ćwiczenie 98

Wykreślić rzuty sześcianu  $\langle ABCDEFGH \rangle$ , gdy jego ściana  $\langle ABCD \rangle$  zawarta jest w płaszczyźnie  $\alpha$  danej prostymi pierwszorzutowymi  $p$  i  $p_1$ , oraz gdy dany jest wierzchołek  $E$ , a wierzchołek  $B$  należy do prostej  $p$ . (Rys. 5.175a).

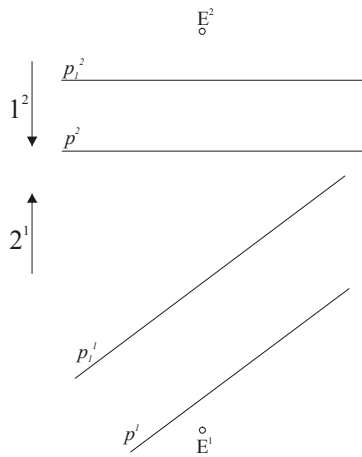
*Rozwiązanie I - metoda klasyczna.*

Przez punkt  $E$  prowadzimy prostą  $n \perp \alpha$ ,  $n \perp p$  i  $n \perp c$  ( $c \subset \alpha \wedge c \parallel \pi_2$ ). Punkt przebiecia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $n$  jest wierzchołkiem  $A$  (rys. 5.175b). Wyznaczamy długość odcinka  $\langle AE \rangle$  za pomocą układu prostokątnego płaszczyzny  $\phi$ . Wyznaczamy układ płaszczyzny  $\alpha$  wraz z punktem  $A$  na płaszczyznę pierwszorzutową  $\beta$  i kreślimy układ ściany  $\langle ABCD \rangle$ . Punkty przecięcia kwadratu  $\langle ABCD \rangle$  z prostą  $p_1^\circ$  wykorzystujemy do znalezienia rzutów tej ściany. Z rzutów punktów  $B, C$  i  $D$  podstawy wykreślamy rzuty odcinków równoległych do krawędzi  $\langle AE \rangle$  i kreślimy rzuty górnej podstawy oraz ustalamy widoczność.

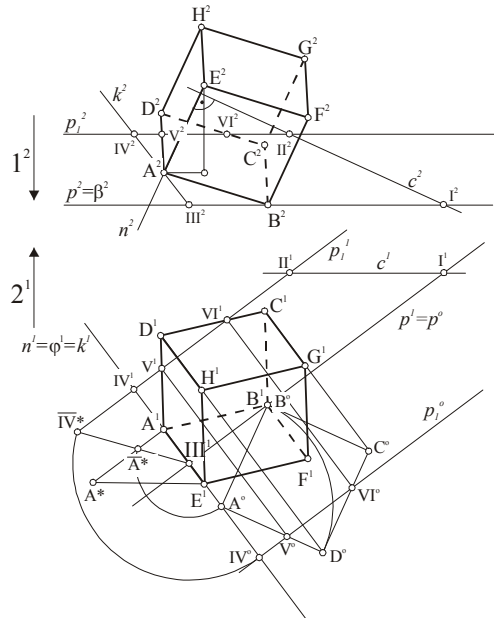
*Rozwiązanie II - metoda transformacji.*

Wprowadzamy prostą kierunkową  $3 \parallel p$  w układzie  $[1, 3]$ . Płaszczyzną porównawczą jest  $\beta \perp 1$  (rys. 5.175c). Płaszczyzna  $\alpha$  jest trzeciorzutująca. W rzucie trzecim wyznaczamy bok sześcianu  $\langle EA \rangle \perp \alpha$ . Prosta  $4 \perp \alpha$  daje nam układ  $[3, 4]$  i płaszczyzną porównawczą jest  $\gamma \perp 3$ . Płaszczyzna  $\alpha$  jest czwartorzutowa. Z punktu  $A^4 = E^4$  zakreślamy łuk o  $r = |A^3E^3|$  do przecięcia się z prostą  $p^4$  i otrzymujemy  $B^4 = F^4$ . Rzut czwarty sześcianu jest kwadratem. Wyznaczamy rzut trzeci sześcianu gdzie  $\langle A^3B^3C^3D^3 \rangle \subset \alpha^3$ , a  $\langle E^3F^3G^3H^3 \rangle \subset \varepsilon^3 \parallel \alpha^3$ . Rzut pierwszy i drugi wyznaczamy odmierzając cechy od płaszczyzn porównawczych  $\gamma$  i  $\beta$ . Określamy widoczność zgodnie ze zwrotami prostych kierunkowych.

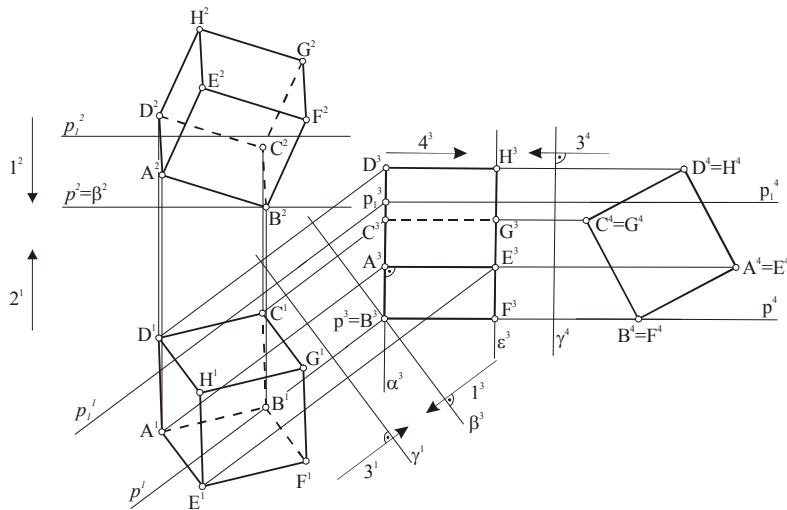
a)



b)



c)



Rys. 5.175

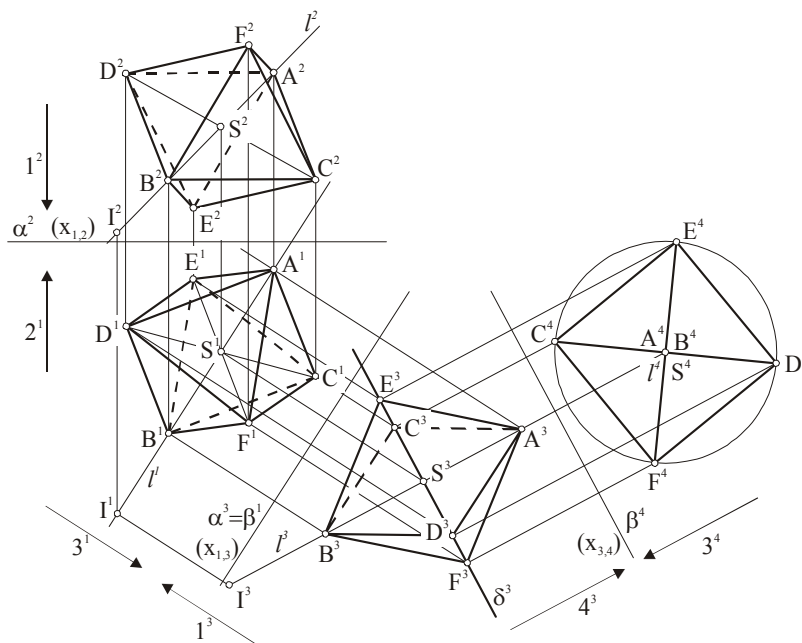
### Ćwiczenie 99

Dany jest punkt  $S$  zawarty w prostej  $l$ . Wykreślić rzuty ośmiościanu foremnego o środku  $S$  i przekątnej równej  $d$  cm zwartej w prostej  $l$ .

*Rozwiązanie*

Zadanie rozwiązujemy za pomocą transformacji (rys. 5.176). W układzie  $[1, 2]$  wprowadzamy  $3 \perp l$ ;  $[1, 3]$  i  $\alpha \perp 1$ . Trzeci rzut prostej  $l$  otrzymujemy za pomocą punktów  $S$  i  $I$ . Przekąt-

na ośmiościanu  $\langle AB \rangle$  zawarta jest w prostej  $l$  więc  $\langle A^3B^3 \rangle \subset l^3 \wedge |A^3B^3| = d$  cm. Prosta kierunkowa  $4||l$ , układ  $[3, 4]$  i  $\beta \perp 3$ . Prosta  $l$  jest czwartorzutująca, pozostałe dwie przekątne ośmiościanu prostopadłe do siebie są czwartowarstwowe, a więc ich długości są równe długościom rzutów. Zarys czwartego rzutu ośmiościanu foremnego jest kwadratem. Trzecie rzuty wierzchołków C, D i E, F znajdują się na rzucie płaszczyzny rzutującej  $\delta \perp l$  ( $\delta^3 \perp l^3$ ). Pozostałe rzuty otrzymujemy za pomocą odnoszących i cech punktów. Wyznaczamy widoczność.



Rys. 5.176

### Ćwiczenie 100

Wykreślić rzuty podstawowe ostrosłupa prostego  $\langle ABCW \rangle$  o podstawie czworokątnej zawartej w płaszczyźnie  $\alpha = Am$  i wysokości równej  $|AB|$ , w którym wierzchołki podstawy B i C zawarte są w prostej  $m$  i  $AB \perp BC$ . Krawędzie tej podstawy o wspólnym wierzchołku C są równe i wynoszą  $2/3$  długości odcinka  $\langle AB \rangle$ . Przeprowadzić dyskusję ile jest rozwiązań.

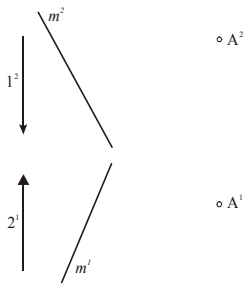
#### Rozwiązanie

Wprowadzamy prostą  $a \perp l$  i  $a \subset \alpha$  (rys. 5.177). Kierunek  $3||a$  powoduje, że  $\alpha$  jest trzeciorzutująca. Mamy układ  $[1, 2]$ ,  $[1, 3]$  i płaszczyznę porównawczą  $\varepsilon \perp l$ .

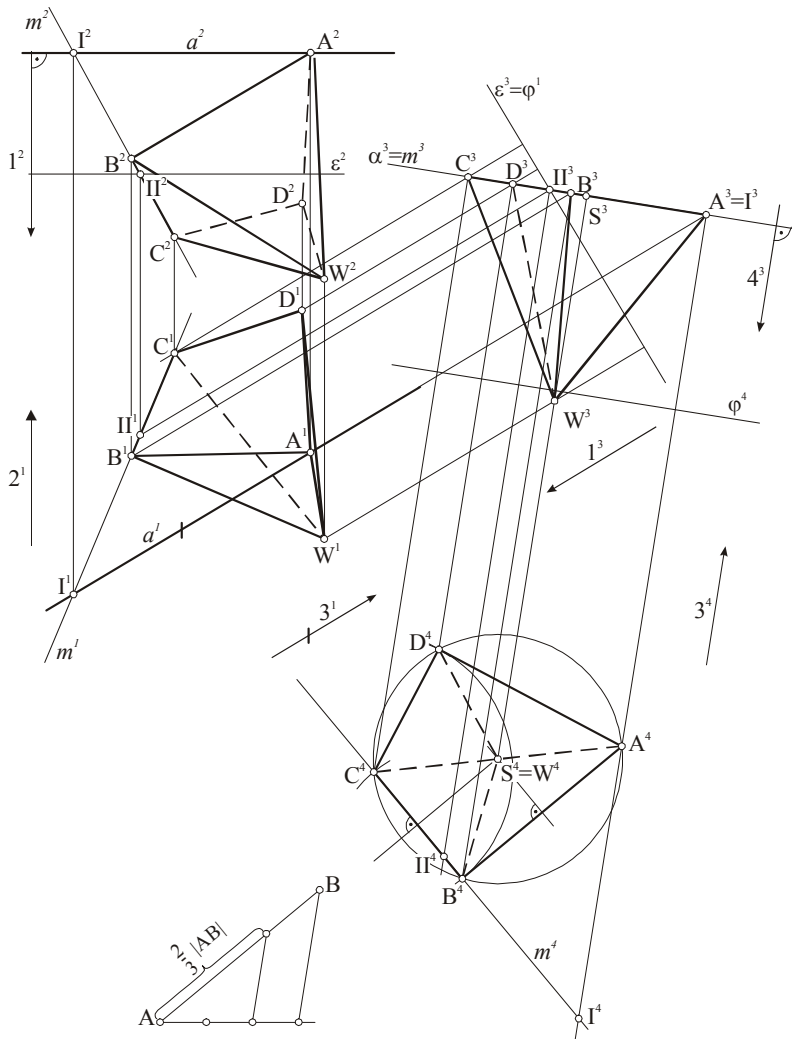
Następnie wprowadzamy układ  $[3, 4]$  gdzie  $4 \perp \alpha$  i  $\varphi \perp 3$  i  $\alpha$  jest czwartowarstwowa. Wyznaczamy czwarty rzut podstawy gdzie  $AB \perp m$  i  $BC \subset m$ . Następnie wyznaczamy symetralne odcinków  $\langle AB \rangle$ ,  $\langle BC \rangle$  i w punkcie przecięcia symetralnych wyznaczamy S środek okręgu opisanego na trójkącie  $\langle ABC \rangle$ . Punkt D musi się znaleźć na tym okręgu i  $|CD| = |CB|$ . Trzeci rzut podstawy wyznaczamy na  $\alpha^3$ , a pierwszy i drugi za pomocą cech. Wysokość ostrosłupa jest trzeciorzutowa, a więc  $|S^3W^3| = |SW| = |AB|$ . Wyznaczamy rzut pierwszy i drugi ostrosłupa oraz ustalamy widoczność. Ponieważ punkt C może być obrany na prostej  $m$  po jednej lub drugiej stronie punktu B, oraz punkt W może być obrany przed lub za płaszczyznę  $\alpha$ , istnieją cztery rozwiązania.

Zadanie można rozwiązać również metodą klasyczną.

a)



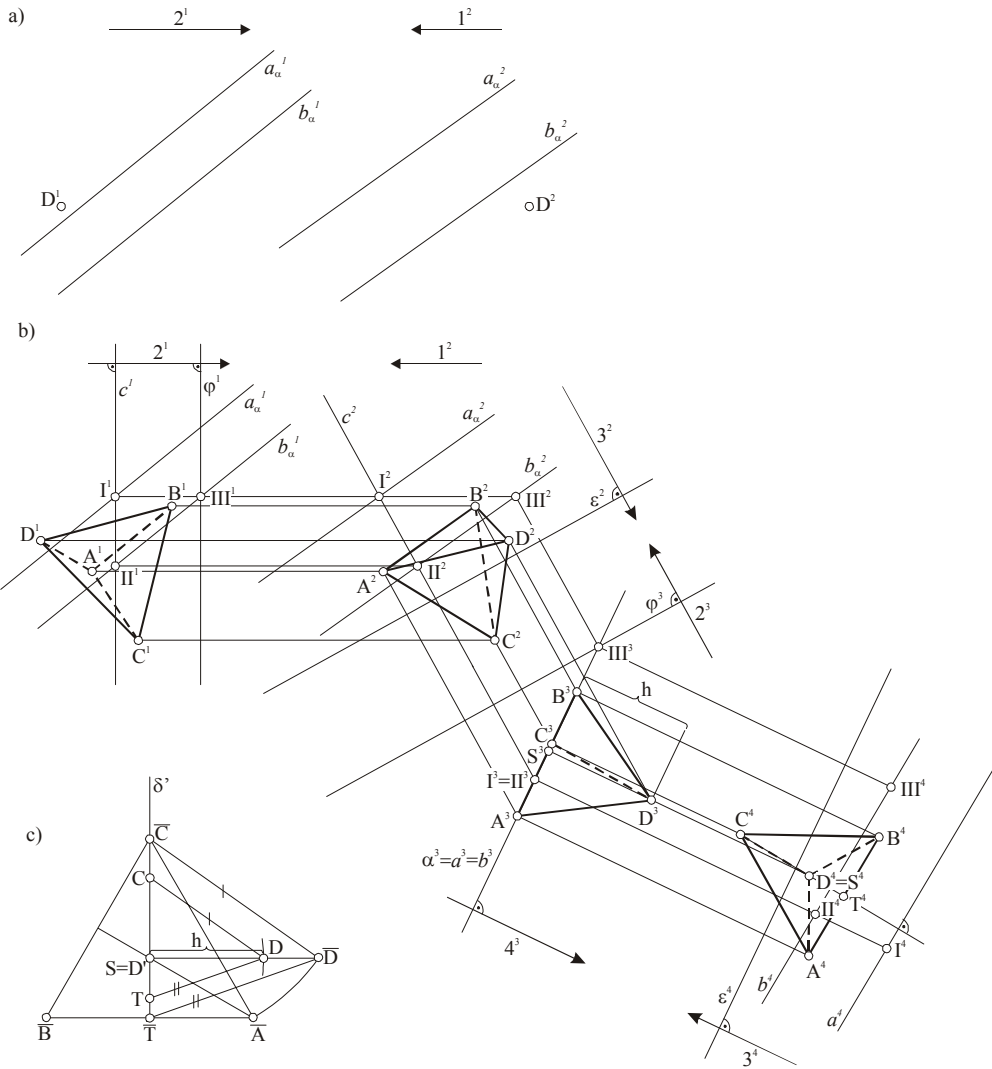
b)



Rys. 5.177

### Ćwiczenie 101

Dana jest płaszczyzna  $\alpha=ab$  oraz punkt D. Wyznaczyć rzuty czworobocianu foremnego  $\langle ABCD \rangle$  o podstawie  $\langle ABC \rangle \subset \alpha$  i boku  $AB \parallel a$  (rys. 5.178a).



Rys. 5.178a,b,c

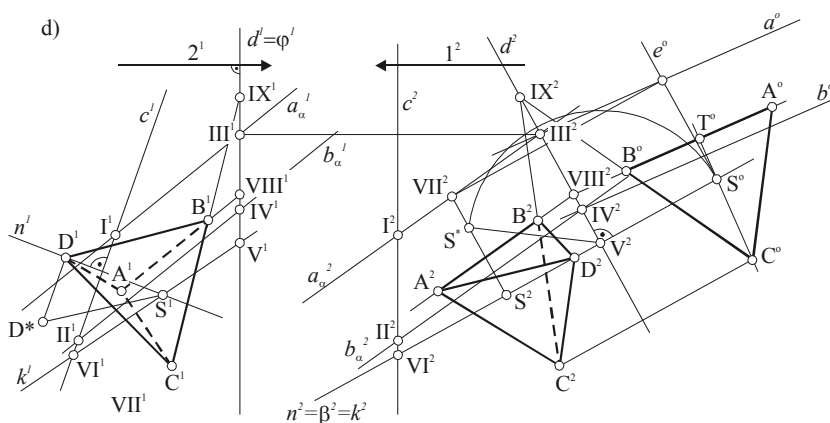
*Rozwiązanie I - metoda transformacji* (rys. 5.178b).

Transformujemy płaszczyznę  $\alpha$  do położenia rzutującego, a potem do położenia warstwowego. W układzie [1,2] obieramy prostą  $c \perp 2$  i  $c \subset \alpha$  i wprowadzamy  $3 \parallel c$ . Płaszczyzną porównawczą jest płaszczyzna  $\varphi \perp 2$ . W rzucie trzecim wyznaczamy odległość  $h$  punktu D od płaszczyzny  $\alpha$  równą  $\rho(D^3 \alpha^3)$ . Następnie wprowadzamy prostą  $4 \perp \alpha$ , układ [3, 4] i  $\varepsilon \perp 4$ . Płaszczyzna  $\alpha$  jest czwartowarstwowa,  $S^4 = D^4$ . Z punktu  $S^4$  rysujemy prostą prostopadłą do  $a^4$  i w niej odmierzymy wysokość trójkąta  $\langle ABC \rangle$ . Z boku rysunku wykreślamy dowolny trójkąt równoboczny  $\langle \overline{A} \overline{B} \overline{C} \rangle$  i w układzie prostokątnym płaszczyzny  $\delta$  wyznaczamy wysokość

czworościanu o boku  $\langle \overline{B C} \rangle$ ; jest nią odcinek  $\overline{SD}$ . Od punktu S odmierzymy na prostej  $\overline{SD}$  odcinek  $\langle SD \rangle = \langle S^3 D^3 \rangle$  i wyznaczamy trójkąty podobne  $\langle CDT \rangle$  i  $\langle \overline{C D T} \rangle$ . Odcinek  $\langle CT \rangle$  jest równy wysokości trójkąta  $\langle A^4 B^4 C^4 \rangle$ . Wyznaczamy rzuty trzeci, drugi, pierwszy i ustalamy widoczność (rys. 5.178b).

*Rozwiązanie II - metoda klasyczna (rys. 5.178d).*

Wyznaczamy proste warstwowe  $c \perp l$  i  $d \perp l$  zawarte w płaszczyźnie  $\alpha$  i przez punkt D prowadzimy prostą  $n \perp \alpha$ . ( $n \perp c \wedge n \perp d$ ). Punkt S jest punktem przebicia prostej  $n$  z płaszczyzną  $\alpha$  ( $n \subset \beta$ ,  $k = \alpha \cap \beta$ ,  $S = k \cap n$ ). Wyznaczamy kład prostokątny odcinka  $\langle S^* D^* \rangle$ : jest to wysokość czworościanu. Przyjmujemy oś obrotu  $d$  i obracamy punkt S i prostą  $a$  tak, aby otrzymać kład płaszczyzny  $\alpha$ . Z punktu S rysujemy prostą  $e^\circ$  prostopadłą do  $a^\circ$ . W tej prostej odmierzymy wysokość ściany czworościanu foremego. W tym celu na osobnym rysunku 5.178c wykreśliśmy dowolny trójkąt równoboczny  $\langle \overline{A B C} \rangle$  i wyznaczamy z podobieństwa trójkątów wielkość odcinka  $\langle C T \rangle$  który jest wysokością trójkąta podstawy szukanego czworościanu foremego. Z punktu S odmierzymy na prostej  $e^\circ$  w jedną stronę 1/3, a w drugą 2/3 tej wysokości. Rysujemy trójkąt równoboczny  $\langle A^\circ B^\circ C^\circ \rangle$  i wyznaczamy jego rzut drugi i pierwszy. Wykreśliśmy rzuty czworościanu foremego i ustalamy widoczność.



Rys.5.178d

### Ćwiczenie 102

Dane są rzuty podstawowe trójkąta  $\langle ABC \rangle \subset \alpha$ . Wykreślić rzuty graniastosłupa pochylego  $\langle ABCDEF \rangle$  o ścianie  $\langle ABDE \rangle$  będącej kwadratem i nachylonej do płaszczyzny podstawy pod kątem  $60^\circ$  oraz o podstawie  $\langle DEF \rangle$  zawartej w płaszczyźnie  $\beta \parallel \alpha$ .

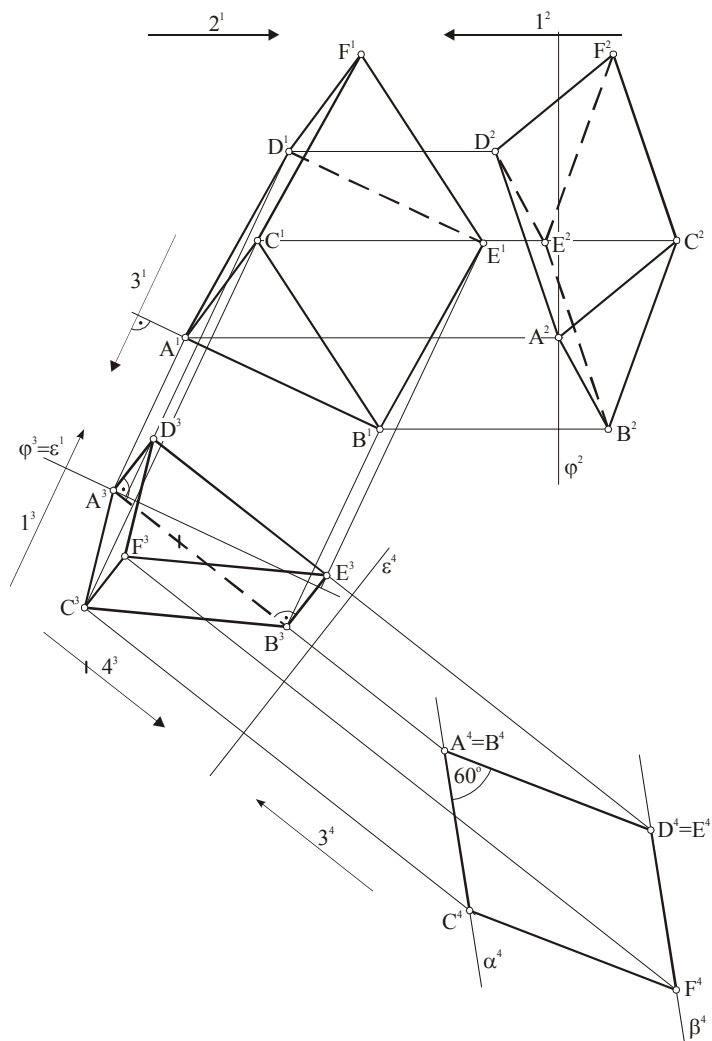
*Rozwiązanie*

Transformujemy bok trójkąta  $\langle AB \rangle$  do położenia trzeciorzutowego ( $3 \perp AB$ ) i czwartorzutowego ( $4 \parallel AB$ ), (rys. 5.179).

Układy wiążące i płaszczyzny porównawcze to:  $[1, 2] [1, 3]$ ,  $\varphi \perp 1$  i  $[3, 4]$ ,  $\varepsilon \perp 3$ . Płaszczyzna  $\alpha$  zawierająca trójkąt  $\langle ABC \rangle$  jest czwartorzutową. Kąt między płaszczyzną  $\alpha$  i ścianą  $\langle ABDE \rangle$  jest zachowany w rzucie czwartym i długość boku kwadratu jest równa długości  $|A^3 B^3|$  i  $|A^4 D^4|$ . Ponieważ proste zawierające odcinki  $\langle AD \rangle$  i  $\langle BE \rangle$  są czwartorazowe, to w rzucie trzecim  $A^3 D^3$  i  $B^3 D^3$  są prostopadłe do  $4^3$  i  $A^3 B^3$ . Pozostałe rzuty wyznaczamy odmierzając cechy punktów. Ustalamy widoczność. Tak sformułowany temat zadania pozwala



na znalezienie czterech rozwiązań. Płaszczyzna  $\beta \parallel \alpha$  może się znajdować po obu stronach płaszczyzny  $\alpha$  i kąt  $60^\circ$  może być odmierzony od płaszczyzny  $\alpha$  po obu stronach punktów A i B.



Rys. 5.179

**Ćwiczenie 103.**

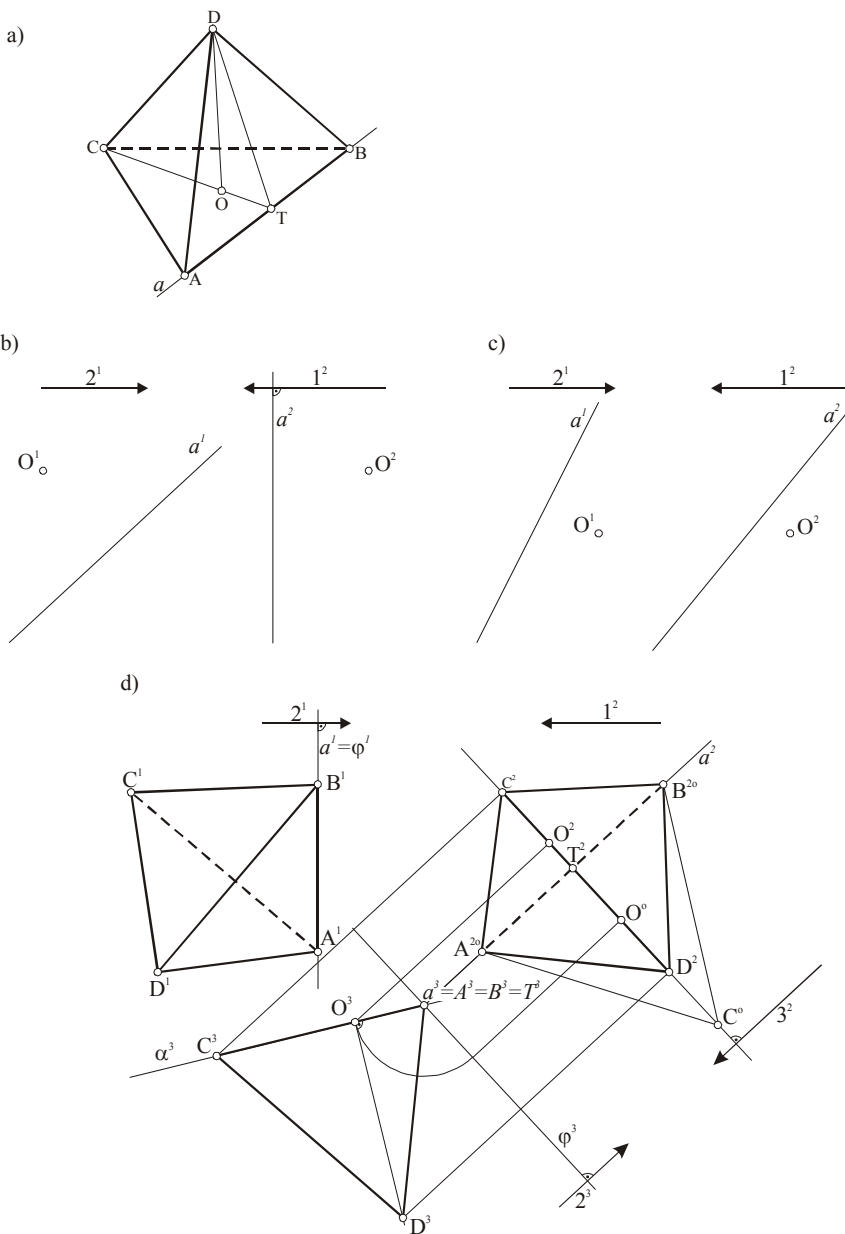
Dany jest punkt O ściany czworościanu foremnego oraz prosta  $a$  w której zawarta jest krawędź tej samej ściany. Wykreślić ten czworościan (rys. 5.180a,b,c,d).

*Rozwiązanie*

Przekrój płaszczyzną prostopadłą do prostej  $a$  i zawierającą punkt O jest trójkątem CDT, gdzie  $\langle CT \rangle = \langle TD \rangle$  (wysokość ściany czworościanu), zaś  $\langle CD \rangle$  jest bokiem ściany czworościanu. Zastosowano tu metodę transformacji (rys. 5.180d).

W układzie [1, 2] prosta  $a$  jest drugowarstwowa. Wprowadzamy kierunek  $3 \parallel a$ , układ [2,3] i płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp 2$ . Płaszczyzna  $\alpha = aO$  jest rzutująca. Do prostej  $a$  należą punkty A i B ( $a^3 = A^3 = B^3 = T^3$ ), punkt  $C^3$  znajdujemy odmierzając od punktu O odcinek równy

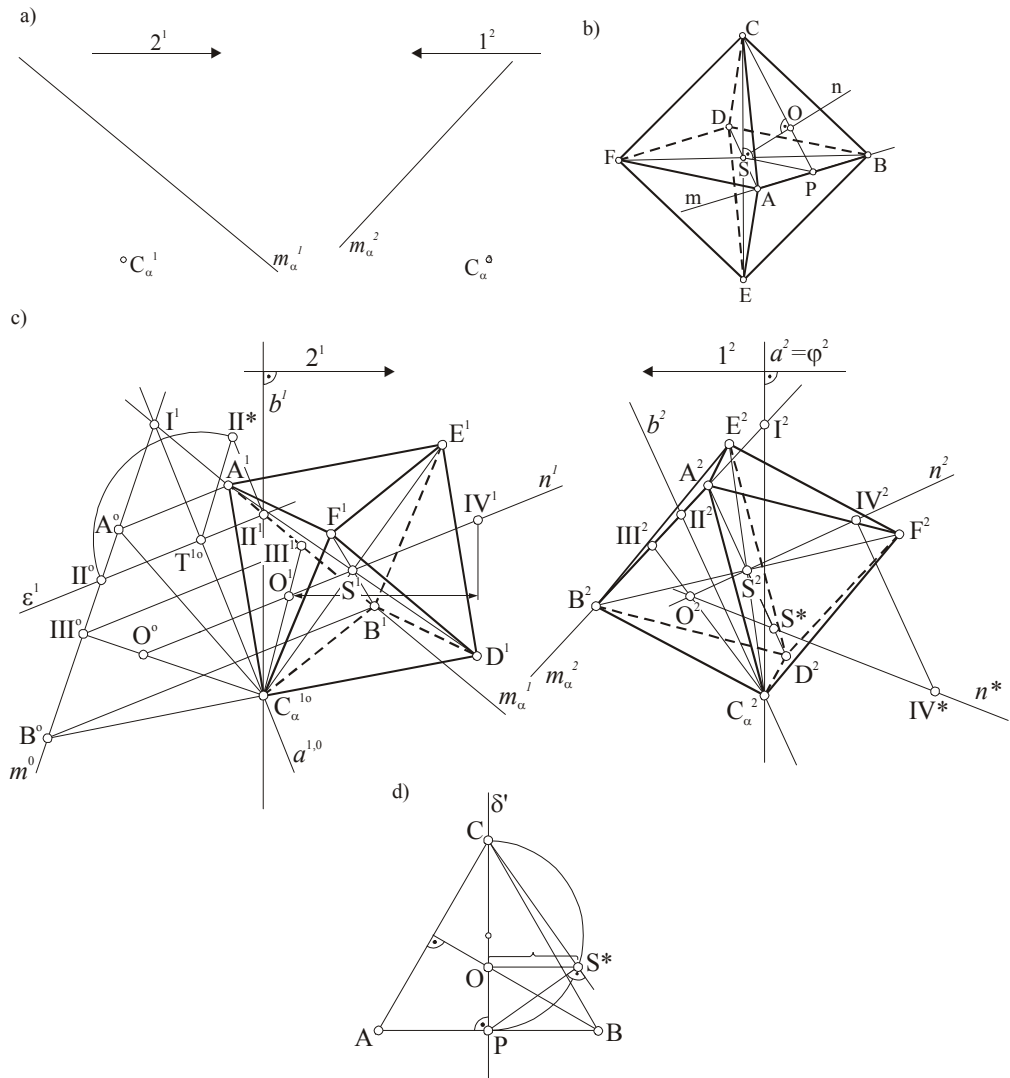
$2|O^3T^3|$ .  $\langle C^3T^3 \rangle$  jest wysokością ściany czworobocianu. Obracamy  $\alpha$  do położenia na płaszczyźnie  $\varphi$  i otrzymujemy  $C^{\circ}$  i  $O^{\circ}$ . Następnie budujemy trójkąt  $A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ}$  przy czym  $\langle A, B \rangle \subset a$ . W trzecim rzucie budujemy trójkąt przekroju czworobocianu płaszczyzną prostopadłą do  $a$ :  $\langle C^3D^3T^3 \rangle$ ,  $\langle C^3T^3 \rangle = \langle D^3T^3 \rangle = h$  ściany czworobocianu,  $\langle C^3D^3 \rangle$  równy długości boku czworobocianu. Wyznaczamy w rzucie drugim punkt D, oraz rzut pierwszy czworobocianu. Ustalamy widoczność. Przy rozwiązywaniu tematu c) potrzebne są dwie transformacje ponieważ prosta  $a$  jest ogólna:  $3 \perp a$  i  $4 \parallel a$ . Dalej zadanie rozwiązuje się jak d).



Rys. 5.180

### Ćwiczenie 104

Dana jest prosta  $m$  i punkt  $C$  wyznaczające płaszczyznę  $\alpha$ . Wyznaczyć rzuty ośmiościanu foremnego  $\langle ABCDEF \rangle$  gdy wierzchołki  $A$  i  $B \in m$  (rys. 5.181a).



Rys. 5.181

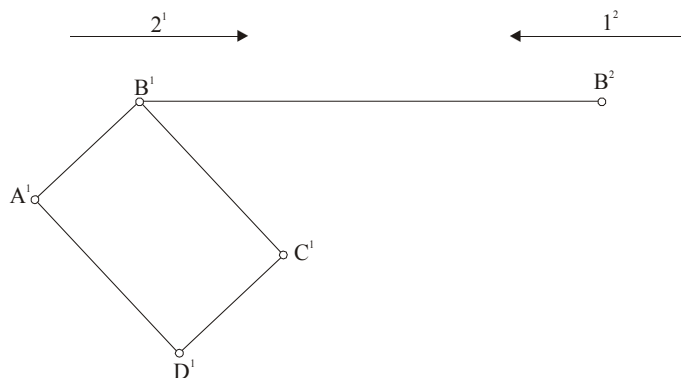
### Rozwiązanie

Rysunek 5.181c przedstawia rozwiązanie metodą klasyczną. Wyznaczamy kład płaszczyzny  $\alpha = mC$  na płaszczyznę pierwszorzadkową  $\varphi$ . Ośią obrotu jest prosta  $a = \alpha \cap \varphi$ . W kładzie wyznaczamy trójkąt równoboczny  $A^\circ B^\circ C^\circ$  oraz jego środek  $O^\circ$ . Wyznaczamy rzuty: pierwszy i drugi wierzchołków trójkąta i punktu  $O$ . Następnie przez punkt  $O$  prowadzimy prostą  $n$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ . Jest ona prostopadła do prostych warstwowych  $a$  i  $b$  zawartych w  $\alpha$ . Za pomocą punktu  $O$  i dowolnie obranego na prostej  $n$  punktu  $IV$  wyznaczamy kład prostokątny prostej  $n$ . Na tej prostej (na  $n^*$ ) odmierzymy odcinek  $(OS)$  czyli odle-

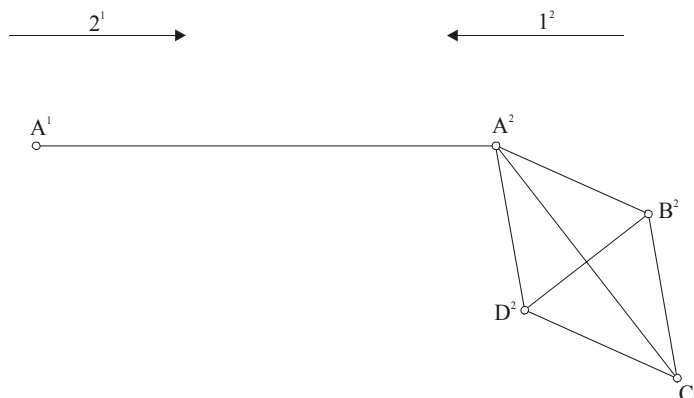
głość  $O$  - środka koła wpisanego w trójkąt od punktu  $S$  - środka ośmiościanu. Rysunek pogładowy ośmiościanu foremnego (rys. 5.181b) pokazuje jak wyznaczyć odcinek  $\langle SO \rangle$ . Trójkąt  $\langle CPS \rangle$  jest trójkątem prostokątnym a odcinek  $\langle SO \rangle$  jest wysokością tego trójkąta wystawioną z wierzchołka  $S$  prostopadłe do  $CP$ . Aby wyznaczyć odcinek  $\langle SO \rangle$  rysujemy trójkąt  $\langle ABC \rangle$  (rys. 5.181d) przystający do  $\langle A^\circ B^\circ C^\circ \rangle$  i obracamy płaszczyznę  $\delta \perp ABC$  o  $90^\circ$ . Ponieważ  $CS \perp SP$ , punkt  $S^*$  musi należeć do okręgu którego średnicą jest odcinek  $\langle CP \rangle$ . Odcinek równy  $|OS^*|$  z rysunku d) odmierzymy na  $n^*$  od punktu  $O^{2*}$ . Otrzymujemy na prostej  $n^2$  punkt  $S^2$  i na  $n^1$ :  $S^1$ . Punkt  $S$  jest środkiem symetrii dla pozostałych wierzchołków ośmiościanu:  $D, E$  i  $F$ . Wyznaczamy je rysując przez  $A, B$  i  $C$  przekątne i odmierzając te same odległości od punktu  $S$ . Ustalamy widoczność w obu rzutach.

### ZADANIA

1. Dany prostokąt  $\langle A^1 B^1 C^1 D^1 \rangle$  jest rzutem kwadratu będącego: 1) podstawą sześcianu  $\langle ABCDEFGH \rangle$ , 2) przekrojem ośmiościanu foremnego  $\langle ABCDEF \rangle$ , oraz dany jest pozostały rzut jednego z punktów prostokąta. Wykreślić rzuty podstawowe: 1) sześcianu, 2) ośmiościanu foremnego (rys. 5.182).
2. Dany romb  $\langle A^2 B^2 C^2 D^2 \rangle$  jest rzutem kwadratu będącego przekrojem ośmiościanu foremnego  $\langle ABCDEF \rangle$  oraz dany jest pierwszy rzut punktu  $A$ . Wykreślić rzuty podstawowe ośmiościanu (rys. 5.183).

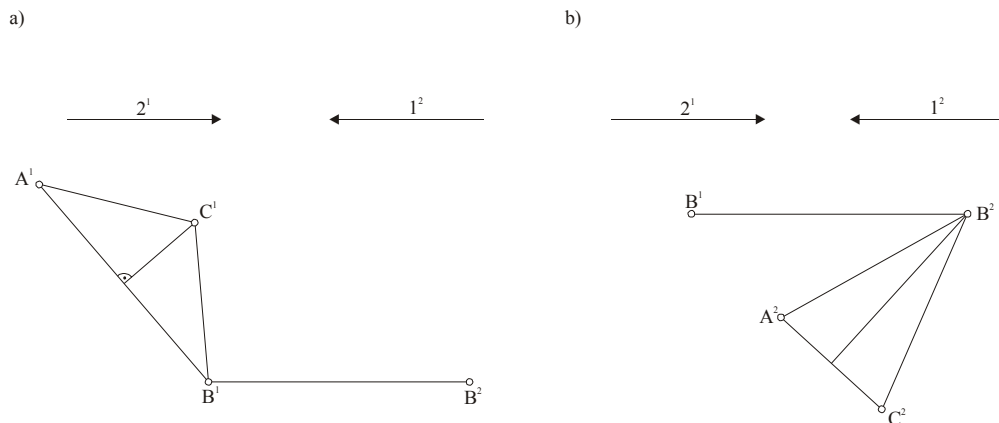


Rys. 5.182



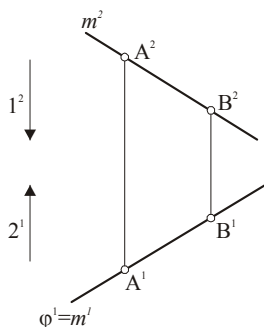
Rys. 5.183

3. Dany jest: a) rzut pierwszy, b) rzut drugi trójkąta równoramiennego  $\langle ABC \rangle$  będącego podstawą czworoscianu foremnego oraz pozostały rzut jednego z punktów trójkąta. Wyznać rzuty podstawowe czworoscianu (rys. 5. 184ab).

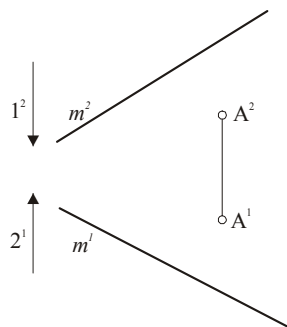


5.184ab

4. Wykreślić rzuty czworoscianu foremnego, którego podstawa  $\langle ABC \rangle$  zawarta jest w płaszczyźnie pierwszorzucającej  $\varphi$ , a bok  $\langle AB \rangle$  zawarty jest w prostej  $m$  (rys. 5.185).
5. Dane są rzuty prostej ogólnej  $m$  i punktu  $A \notin m$ . Wykreślić rzuty graniastosłupa prawidłowego  $\langle ABCDEFGH \rangle$ , którego jedna krawędź boczna zawarta jest w prostej  $m$ , a punkt  $A$  i prosta  $m$  należą do jednej ściany bocznej (rys. 5.186). Wysokość graniastosłupa równa jest  $2p(Am)$ .



Rys. 5.185

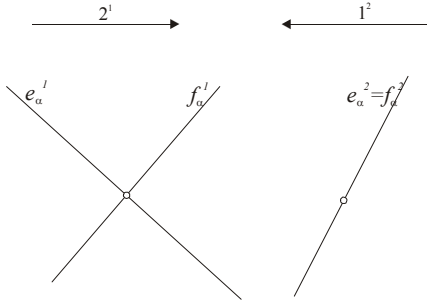


5.186

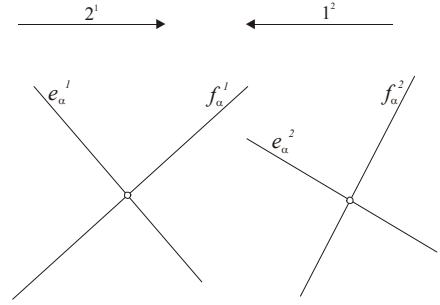
6. Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  prostymi przecinającymi się  $e$  i  $f$ . Wyznaczyć rzuty: 1) sześcianu o boku równym 3 cm i wierzchołkach  $A$  i  $B$  zawartych w prostej  $e$  i wierzchołku  $C$  należącym do prostej  $f$ , 2) ośmiościanu foremnego o boku równym 3 cm i o przekroju  $\langle ABCD \rangle$  zawartym w płaszczyźnie  $\alpha$  gdy wierzchołki  $A$  i  $B$  zawarte są w prostej  $f$  a wierzchołek  $C$  należy do prostej  $e$  (rys. 5. 187ab).
7. Dane są proste równoległe  $t$  i  $u$ , oraz punkt  $T \in t$ . Wyznaczyć rzuty sześcianu  $\langle ABCDEFGH \rangle$  o przeciwległych krawędziach  $\langle AB \rangle \subset t$ ,  $\langle GH \rangle \subset u$ . Punkt  $T$  jest środkiem krawędzi  $\langle AB \rangle$  (rys 5.188a,b,c,d).

Uwaga: Rysunki 5.188c i d pokazują dwa sposoby przestrzennego rozwiązania zadania.

a)

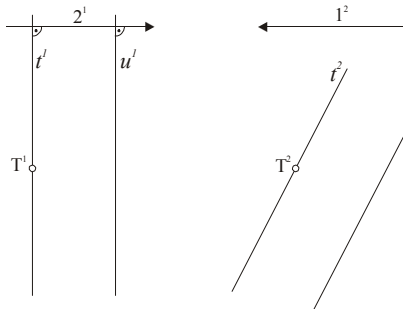


b)

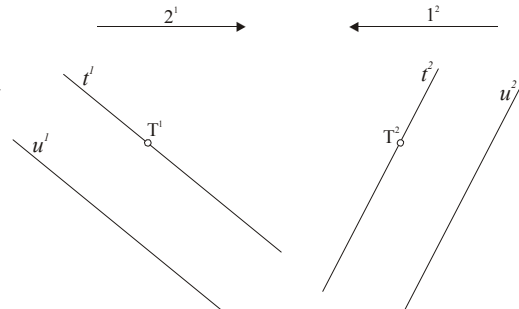


Rys. 5.187

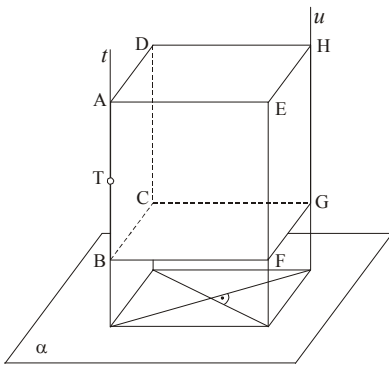
a)



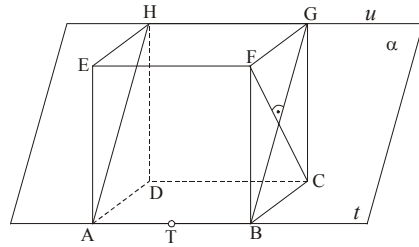
b)



c)

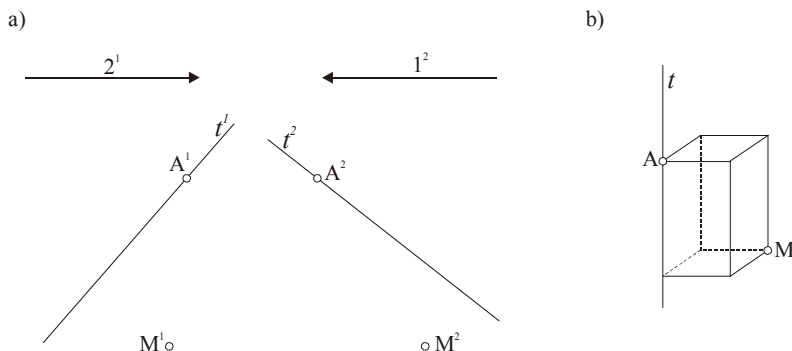


d)



Rys. 5.188

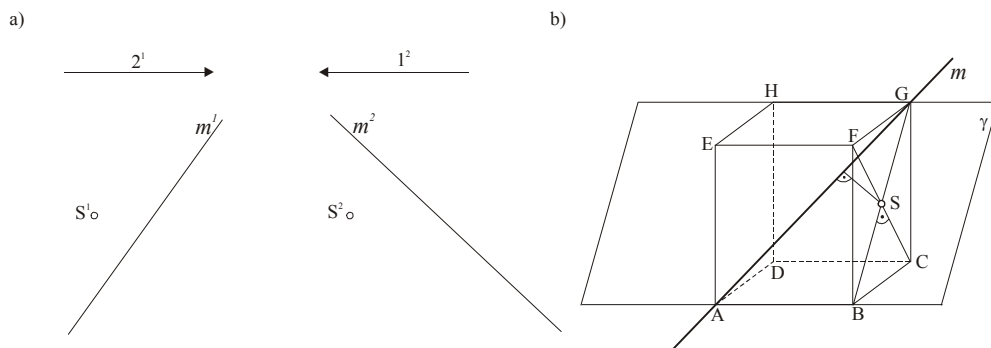
8. Dane są: prosta  $t$ , punkt  $A \in t$  oraz punkt  $M \notin t$ . Wykreślić rzuty prostopadłościanu  $\langle ABCDKLMN \rangle$  o podstawach będących kwadratami i boku  $\langle AK \rangle \subset t$  (rys. 5.189).



Rys. 5.189

9. Dana jest prosta  $m$  oraz punkt  $S \notin m$ . Punkt  $S$  jest środkiem ściany sześcianu, zaś do prostej  $m$  należy przekątna główna sześcianu. Wykreślić rzuty sześcianu (rys. 5.190).

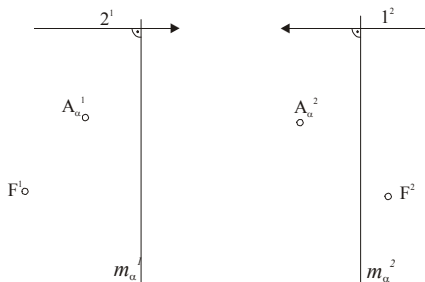
Uwaga: Wyznaczyć położenie warstwowe płaszczyzny  $\gamma = mS$  krojącej sześcian w prostokącie  $\langle ABGH \rangle$  i wyznaczyć odległość punktu  $S$  od prostej  $m$ . Następnie narysować na innym rysunku taki sam prostokąt przekroju dla dowolnego sześcianu i korzystając z podobieństwa figur wyznaczyć interesujący nas prostokąt i przenieść go na płaszczyznę  $\gamma$ . Przekątne ścian  $\langle FC \rangle$  i  $\langle ED \rangle$  są prostopadłe do płaszczyzny  $\gamma$  (rys. 5.190b).



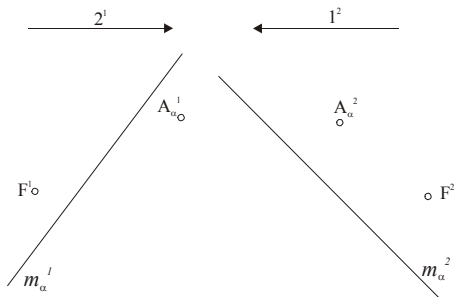
Rys. 5.190

10. Dane są: płaszczyzna  $\alpha = Am$ , oraz punkt  $F \notin \alpha$ . Wyznaczyć rzuty prostopadłościanu  $\langle ABCDEFGH \rangle$  o podstawie  $\langle ABCD \rangle \subset \alpha$  i wierzchołku  $D \in m$  (rys. 5.191a,b,c, ).
11. Dane są rzuty prostej  $m$  i punktu  $S$ . Punkt  $S$  jest środkiem ośmiościanu foremnego, zaś w prostej  $m$  zawarta jest krawędź ośmiościanu. Wyznaczyć jego rzuty (rys. 5.192a,b).

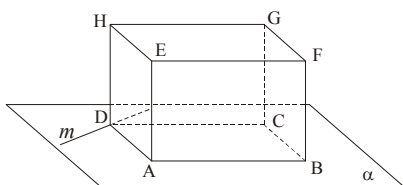
a)



b)

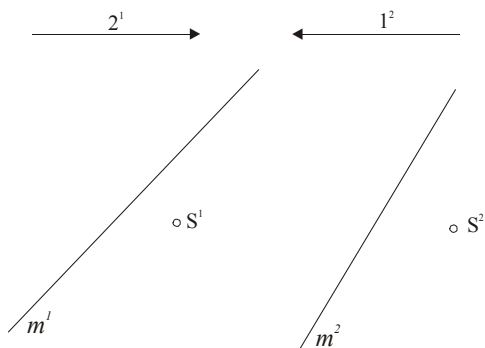


c)

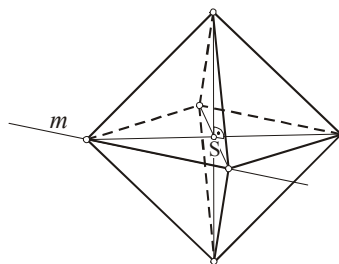


Rys. 5.191

a)



b)

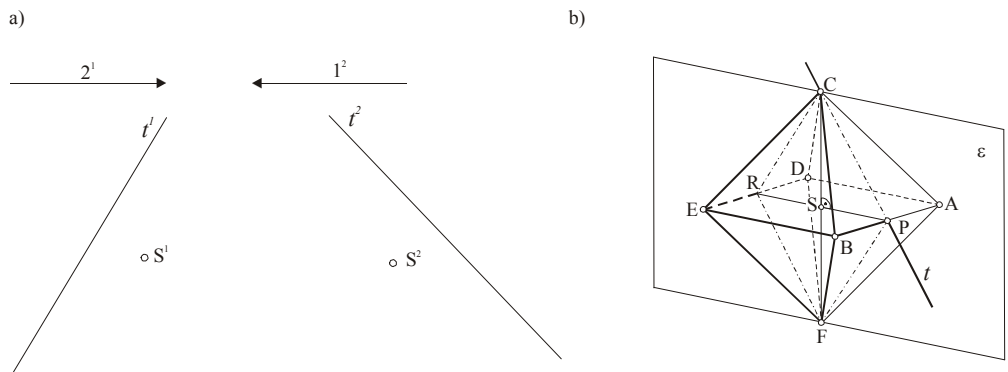


Rys. 5.192

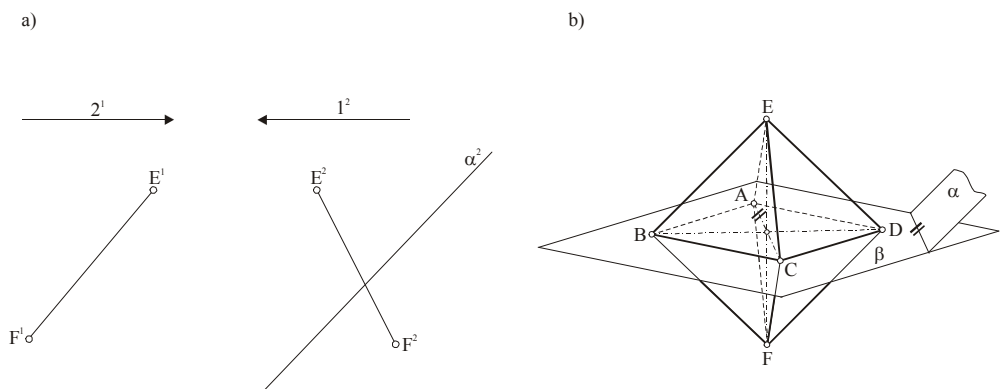
12. Dane są rzuty prostej  $t$  i punktu  $S$ . Punkt  $S$  jest środkiem ośmiościanu foremnego, zaś w prostej  $t$  zawarta jest wysokość ściany. Wykreślić rzuty tego ośmiościanu (rys. 5.193a,b).

Uwaga: Prosta  $t$  i punkt  $S$  wyznaczają płaszczyznę  $\varepsilon$ , która kroi ośmiościan foremny w rombie o bokach równych wysokości ścian będących trójkątami równobocznymi i przekątnych równych: jedna - długości boku, druga - odległości przeciwnych wierzchołków. Na rysunku 5.193b jest to romb  $\langle CPFR \rangle$ . Romb ten otrzymamy w układzie płaszczyzny przekroju  $\varepsilon$  lub w położeniu warstwowym płaszczyzny  $\varepsilon$  otrzymanym przez transformację. Boki  $\langle AB \rangle$  i  $\langle CD \rangle$  są prostopadłe do  $\varepsilon$ .





Rys. 5.193



Rys. 5.194

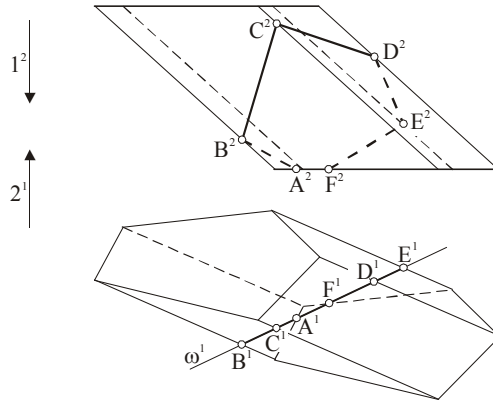
13. Dany jest odcinek  $\langle EF \rangle$  oraz płaszczyzna  $\alpha$ . Wyznaczyć rzuty ośmiościanu foremnego  $\langle ABCDEF \rangle$  o przekątnej  $\langle AC \rangle$  równoległej do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 5.194a,b).

Uwaga: Przekątna  $\langle AC \rangle$  jest równoległa do krawędzi płaszczyzny  $\alpha$  z płaszczyzną  $\beta$  zawierającą przekrój  $\langle ABCD \rangle$ .

## 10.2. Przekroje wielościanów

Płaszczyznę przecinającą wielościan nazywamy płaszczyzną sieczną, a wynik przecięcia przekrojem. Przekrój jest wielokątem płaskim, którego boki są odcinkami krawędzi ścian wielościanu z płaszczyzną sieczną, a wierzchołki są punktami przebicia płaszczyzny siecznej krawędziami wielościanu. Najwygodniej jest znaleźć przekrój wielościanu gdy płaszczyzna sieczna jest rzutująca. W przypadku jak na rysunku 5.195 pierwsze rzuty punktów przebicia płaszczyzny pierwszorzutuującej  $\omega$  krawędziami graniastostupa należą do  $\omega'$ , a drugie rzuty punktów, za pomocą odnoszących, znajdujemy na drugich rzutach odpowiednich krawędzi.

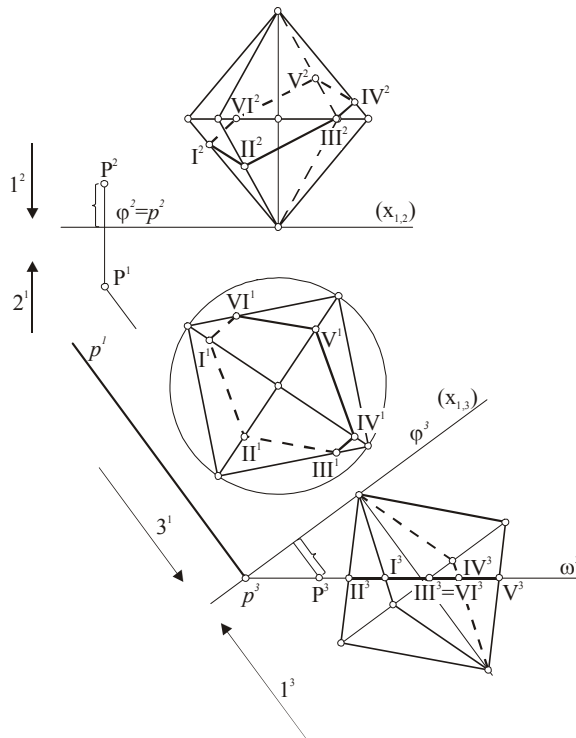
Jeżeli płaszczyzna sieczna nie jest rzutująca, można posługując się transformacją sprowadzić ją do położenia rzutującego.



Rys. 5.195

**Ćwiczenie 105**

Dane są rzuty podstawowe ośmiościanu foremnego oraz płaszczyzny siecznej  $\omega$  danej punktem P i prostą pierwszorzutową p. Wyznaczyć przekrój ośmiościanu.



Rys.5.196

**Rozwiązanie**

Wprowadzamy rzutnię  $\pi_3$  prostopadłą do p [1, 2],  $3 \parallel p$ , [1, 3] i płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp 3$ . Wyznaczyć trzeci rzut ośmiościanu oraz płaszczyzny  $\omega$  (rys. 5.196) Płaszczyzna jest trzeciorzutowująca, więc rzuty punktów przebicia krawędzi ośmiościanu z płaszczyzną

sieczną znajdujemy na  $\omega^3$ . Za pomocą odnoszących wyznaczamy rzuty pierwszy i drugi tych punktów na rzutach odpowiednich krawędzi. Ustalamy widoczność.

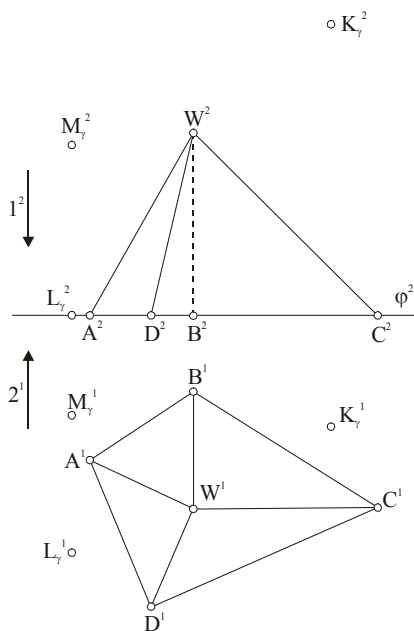
### Ćwiczenie 106

Dane są rzuty ostrosłupa  $\langle ABCDW \rangle$  o podstawie  $\langle ABCD \rangle$  zawartej w płaszczyźnie  $\varphi$  oraz płaszczyzny  $\gamma = KLM$ . Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną  $\gamma$  oraz ustalić widoczność części ostrosłupa znajdującej się pomiędzy płaszczyznami  $\varphi$  i  $\gamma$  (rys.5.197a).

#### Rozwiązanie

Wyznaczamy prostą  $a \perp l$  i  $a \subset \gamma$ . Kierunek  $3 \parallel a$ . Płaszczyzną porównawczą jest płaszczyzna  $\varphi$  (rys. 5.197b). Płaszczyzna  $\gamma$  jest trzeciorzutująca, wobec czego punkty przebicia krawędzi ostrosłupa znajdują się na  $\gamma^3$ . Oznaczamy te punkty od I do V kolejno na podstawie i sąsiednich krawędziach ostrosłupa. Znajdujemy rzuty pierwszy i drugi tych punktów. Nie zawsze można wyznaczyć rzuty w kolejności za pomocą tylko odnoszącej. I tak: punkt  $IV^1 \subset BW$  znajdujemy prowadząc z  $IV^3$  odnoszącą do przecięcia z  $B^1W^1$ ,  $IV^2$  wyznaczamy odmierając cechę, następnie  $III^1$  prowadząc odnoszącą z  $III^2$ . Łączymy wierzchołki przekroju i ustalamy widoczność: rzutu drugiego ze względu na zwrot prostej 2, rzutu pierwszego ze względu na zwrot prostej 1.

a)



Rys. 5.197a



W innych przypadkach należy:

- 1) przez prostą poprowadzić płaszczyznę,
- 2) wyznaczyć przekrój wielościanu tą płaszczyzną,
- 3) wyznaczyć punkty przecięcia się prostej z wielokątem przekroju.

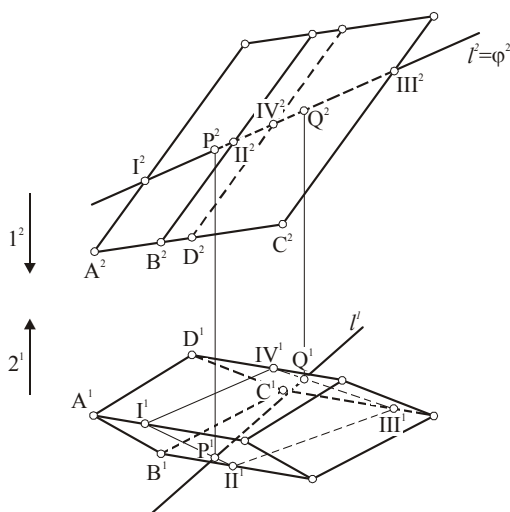
Praktyczne jest wprowadzenie pomocniczej płaszczyzny rzutującej, a ponadto: przy graniastosłupach — płaszczyzny równoległej do krawędzi bocznych graniastosłupa, przy ostrosłupach — płaszczyzny zawierającej wierzchołek ostrosłupa.

### Ćwiczenie 107

Wyznaczyć punkty przebiecia graniastosłupa prostą  $l$ .

#### Rozwiązanie I

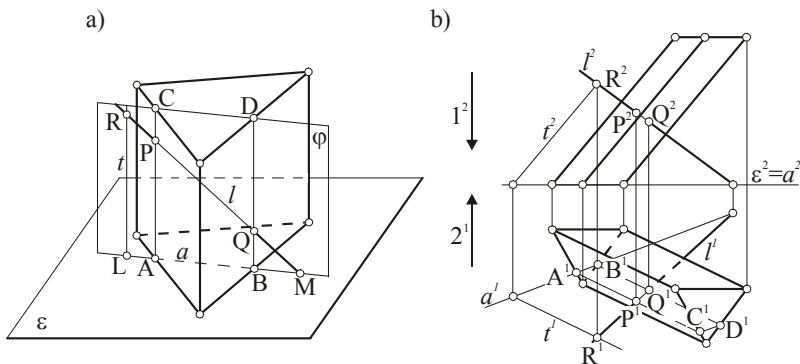
Przez prostą  $l$  prowadzimy płaszczyznę np. drugorzutującą  $\varphi$ , która przecina pobocznice graniastosłupa w czworokącie  $\langle I II III IV \rangle$  (rys. 5.200). Drugi rzut czworokąta przekroju  $\langle I^2 II^2 III^2 IV^2 \rangle$  jest odcinkiem. Wyznaczamy rzut pierwszy czworokąta. Pierwsze rzuty boków czworokąta  $\langle I^1 II^1 \rangle$  i  $\langle III^1 IV^1 \rangle$  przecinają prostą  $l$  odpowiednio w punktach  $P^1$  i  $Q^1$ . Drugie rzuty  $P^2$  i  $Q^2$  wyznaczamy za pomocą odnoszących na prostą  $l^2$ . Ustalamy widoczność prostej względem wielościanu. Punkt  $P$  w obu rzutach znajduje się na ścianie widocznej, a punkt  $Q$  w obu rzutach należy do ściany niewidocznej. Stąd prosta  $l$  jest widoczna w obu rzutach od punktu  $P$  i od zarysu wielościanu.



Rys. 5.200

#### Rozwiązanie II

Przez prostą  $l$  prowadzimy płaszczyznę  $\varphi$  równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa (rys. 5.201a, b). Płaszczyzna  $\varphi$  jest wyznaczona prostymi przecinającymi się  $l$  i  $t$ , gdzie  $t$  jest równoległa do krawędzi graniastosłupa. Wyznaczamy krawędź  $a$  płaszczyzny  $\varphi$  z płaszczyzną  $\varepsilon$  podstawy graniastosłupa ( $a = \varphi \cap \varepsilon$ ). Krawędź ta przecina trójkąt podstawy w punktach  $A$  i  $B$ . Przekrój graniastosłupa płaszczyzną  $\varphi$  jest równoległobokiem o bokach  $\langle AC \rangle \parallel t$  i  $\langle BD \rangle \parallel t$ . Wielokąt przekroju wyznaczony w pierwszym rzucie przecina prostą  $l^1$  w punktach  $P^1$  i  $Q^1$ , które są pierwszymi rzutami punktów przebiecia. Drugie rzuty punktów  $P$  i  $Q$  wyznaczamy za pomocą odnoszących. Wyznaczamy widoczność prostej  $l$  względem graniastosłupa.



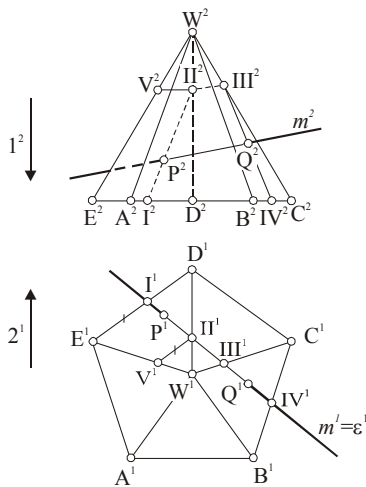
Rys. 5.201

### Ćwiczenie 108

Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa pięciokątnego o wierzchołku W prostą  $m$ .

#### Rozwiązanie I

Zadanie można rozwiązać (podobnie jak w ćwiczeniu 107, rozwiązanie I) wprowadzając przez prostą, płaszczyznę rzutującą  $\varepsilon$  (rys. 5.202). Przekrojem ostrosłupa płaszczyzną  $\varepsilon$  jest czworokąt  $\langle I, II, III, IV \rangle$ . Rzuty drugie punktów przekroju z wyjątkiem punktu II otrzymujemy za pomocą odnoszących, natomiast punkt II należy do krawędzi DW profilowej i możemy go znaleźć stosując twierdzenie Talesa lub jak na rys. 5.202. Punkt II umieszczamy na prostej  $II V$  zawartej w ścianie  $\langle EDW \rangle$  i równoległej do krawędzi ED. ( $II^1 V^1 \parallel D^1 E^1$ ),  $V^2 \in E^2 W^2$  i  $V^2 II^2 \parallel E^2 D^2$ . Ustalamy widoczność przekroju i punkty P i Q przecięcia przekroju z prostą  $m$ .

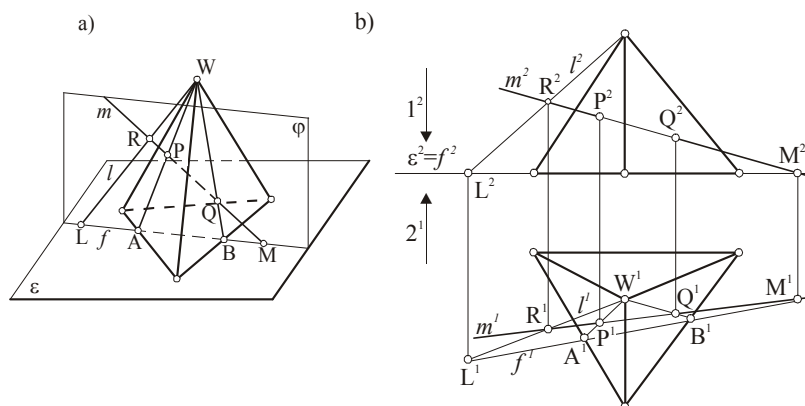


Rys. 5.202

#### Rozwiązanie II

Przez wierzchołek ostrosłupa prowadzimy prostą  $l$  przecinającą prostą  $m$  (lub równoległą do niej). Proste  $m$  i  $l$  wyznaczają płaszczyznę  $\phi$ , która przecina ostrosłup w trójkącie (rys. 5.203a, b). Wyznaczamy krawędź przecięcia się płaszczyzny  $\phi$  i płaszczyzny  $\varepsilon$  podstawy ostrosłupa -  $f$ . Krawędź  $f$  przecina podstawę w punktach A i B. Przekrój jest trójkątem

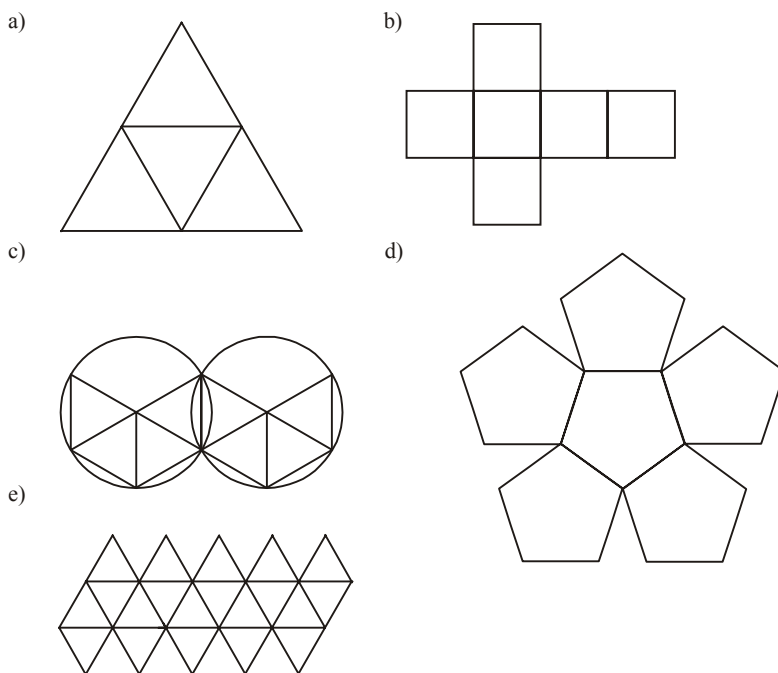
$\langle AWB \rangle$ , punkty P i Q przecięcia przekroju prostą  $m$  są punktami przebicia.



Rys. 5.203

### 10.4. Rozwinięcia wielościanów

Przez rozwinięcie wielościanu rozumiemy sumę kładów jego ścian. Rozwinięcie wielościanu nazywane jest też siatką. Rozwinięcia wielościanów foremnych wykreślamy bez użycia dodatkowych konstrukcji. Rysunek 5.204a,b,c,d,e przedstawia siatki wielościanów foremnych odpowiednio: czworościanu, sześciianu, ośmiościanu, połowy dwunastościanu i dwudziestoscianu.



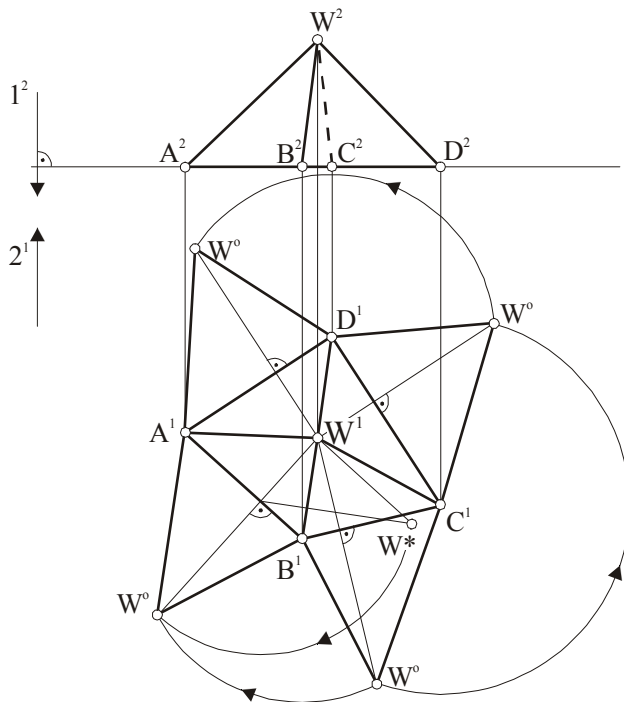
Rys. 5.204

### Ćwiczenie 109

Wyznaczyć rozwinięcie ostrosłupa.

#### Rozwiązanie I

Obracamy każdą ścianę boczną dookoła jej krawędzi z podstawą na płaszczyznę podstawy (rys. 5.205) (Kład płaszczyzny został omówiony w rozdziale V. 7, (rys. 5.91))



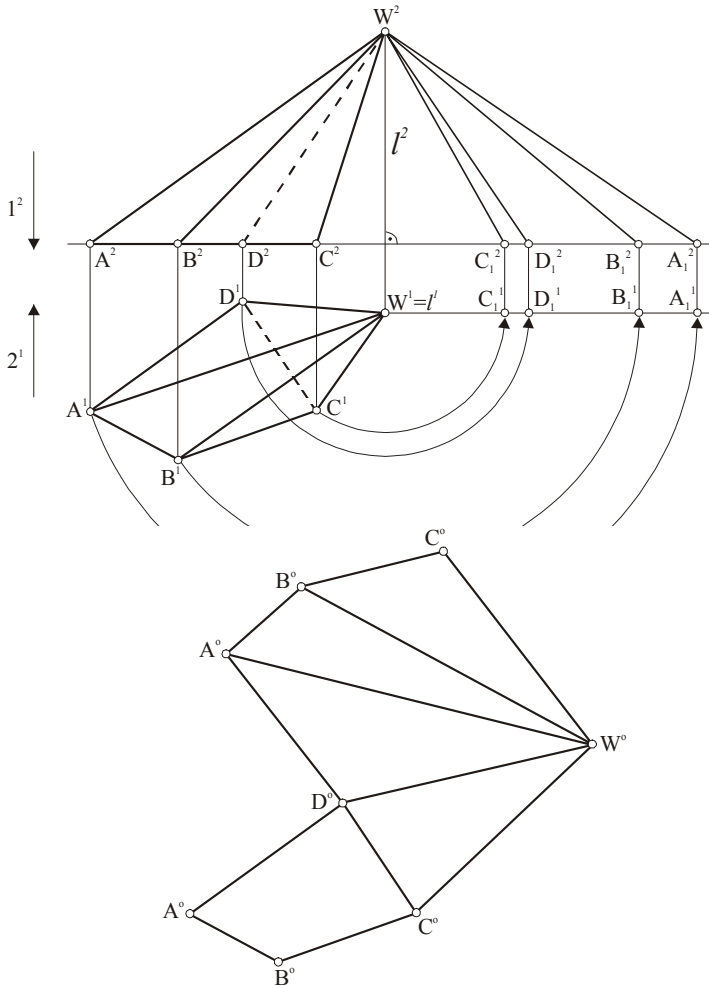
Rys. 5.205

#### Rozwiązanie II

Obracamy każdą krawędź boczną dookoła prostej  $l$  (w tym wypadku pierwszorzutującej) przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa, do położenia równoległego do rzutni drugiej jak na rysunku 5.88 (rys. 5.206).

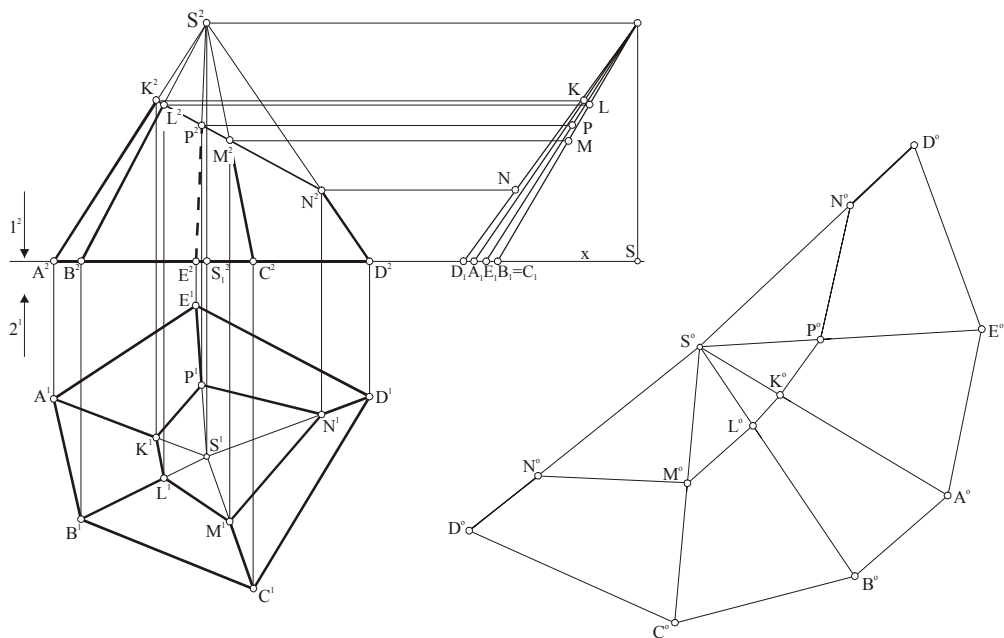
Długości krawędzi bocznych ostrosłupa  $WA \dots$  są równe długościom odcinków  $\langle W^2A_1^2 \rangle \dots$ . Jeśli podstawa zawarta jest w płaszczyźnie warstwowej, nie musimy wyznaczać jej wielkości. W innym przypadku wielkość podstawy uzyskamy za pomocą transformacji. Mając dane krawędzie podstawy, jej kształt oraz długości krawędzi pobocznic budujemy siatkę pobocznicy.





Rys. 5.206

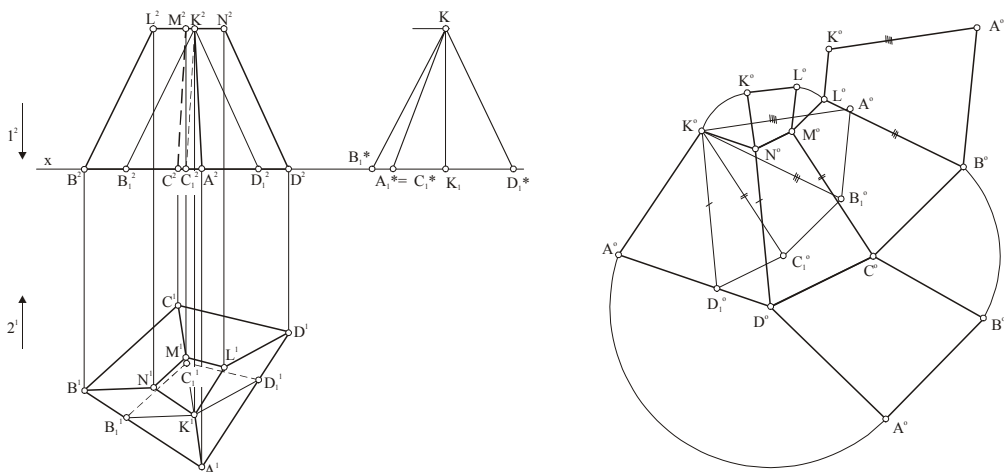
Siatkę ostrosłupa ściętego najwygodniej otrzymać rysując siatkę całego ostrosłupa, a następnie nanieść wierzchołki górnej podstawy na odpowiednie krawędzie. Rysunek 5.207 przedstawia rozwinięcie ostrosłupa ściętego. Zastosowano tu wyznaczanie długości krawędzi bocznych jak na rysunku 5.90. W przypadku, gdy są trudności w wyznaczaniu siatki nie ściętego ostrosłupa, np. niektóre elementy konstrukcji występują poza arkuszem rysunkowym, można podzielić jego ściany boczne na trójkąty i wyznaczyć ich wielkości lub wpisać w niego ostrosłup podobny o krawędziach bocznych równoległych do krawędzi danego ostrosłupa i wyznaczyć jego siatkę.



Rys. 5.207

**Ćwiczenie 110**

Wyznaczyć rozwinięcie ostrosłupa ściętego o podstawach równoległych  $\langle ABCD \rangle$  i  $\langle KLMN \rangle$ .



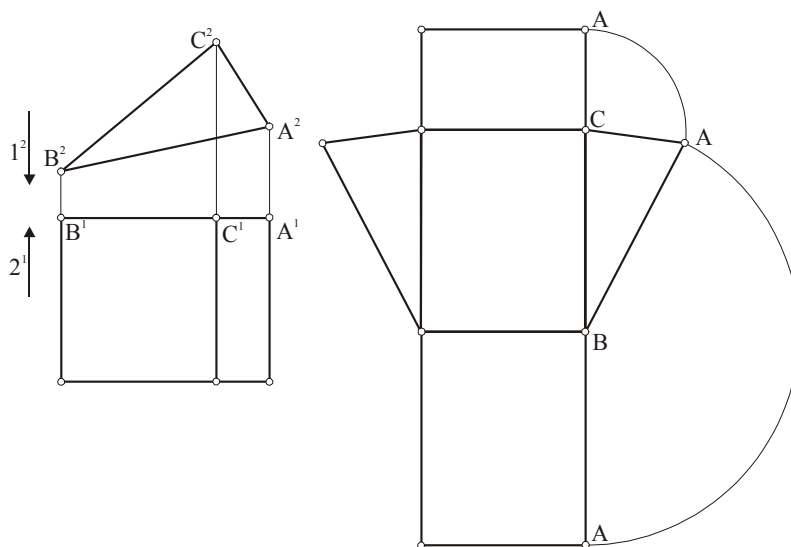
Rys. 5.208

**Rozwiązanie**

Przyjmujemy punkt  $K$  za wierzchołek ostrosłupa podobnego do danego i rysujemy krawędzie jego pobocznic  $\langle KD_1 \rangle \parallel \langle ND \rangle$ ,  $\langle KC_1 \rangle \parallel \langle MC \rangle$  i  $\langle KB_1 \rangle \parallel \langle LB \rangle$ . Podstawa  $\langle AB_1C_1D_1 \rangle$  jest podobna do  $\langle ABCD \rangle$  (rys. 5.208). Wyzniamy wielkość krawędzi  $\langle KA \rangle$ ,  $\langle KB_1 \rangle$ ,  $\langle KC_1 \rangle$

i  $\langle KD_1 \rangle$  i budujemy siatkę ostrosłupa o wierzchołku K. Na boku  $A^\circ D_1^\circ$  siatki nanosimy odcinek  $\langle A^\circ D^\circ \rangle = \langle AD \rangle$  i z punktu  $D^\circ$  kreślimy równoległą do odcinka  $\langle D_1 K^\circ \rangle$ . Równoległa do  $A^\circ D^\circ$  i zawierająca punkt  $K^\circ$  przecina poprzednio wykreśloną prostą w punkcie  $N^\circ$ . W podobny sposób kreślimy ścianę  $\langle D^\circ C^\circ M^\circ N^\circ \rangle$ . Z punktu  $D^\circ$  siatki kreślimy odcinek  $\langle D^\circ C^\circ \rangle = \langle DC \rangle$  równoległy do  $D_1=C_1$ , a z punktu  $C^\circ$  równoległą do  $K^\circ C_1^\circ$ , prosta przechodząca przez punkt  $N^\circ$  i równoległa do  $D^\circ C^\circ$  przecina poprzednio wykreśloną równoległą w punkcie  $M^\circ$ . Podobnie wykreślamy trzecią ścianę  $\langle C^\circ B^\circ L^\circ M^\circ \rangle$ , korzystając z tego, że  $\langle C^\circ B^\circ \rangle = \langle CB \rangle$  ( $C^\circ B^\circ \parallel C_1^\circ B_1^\circ$ ) i  $B^\circ L^\circ \parallel B_1^\circ K^\circ$ . Analogicznie też kreślimy ścianę  $\langle B^\circ A^\circ K^\circ L^\circ \rangle$ . Na koniec do krawędzi  $\langle D^\circ C^\circ \rangle$  dorysowujemy podstawę dolną  $\langle A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ \rangle$ , a do  $\langle M^\circ N^\circ \rangle$  - podstawę górną  $\langle K^\circ L^\circ M^\circ N^\circ \rangle$ .

Rozwinięcie graniastoslupa prostego, którego krawędzie są prostopadłe do rzutni można uzyskać bez dodatkowych konstrukcji jak na rysunku 5. 209. Przykłady rozwinięć graniastoslupa pochyłego podają ćwiczenia 111 i 112, oraz sposób przedstawiony na rys. 5 . 212.



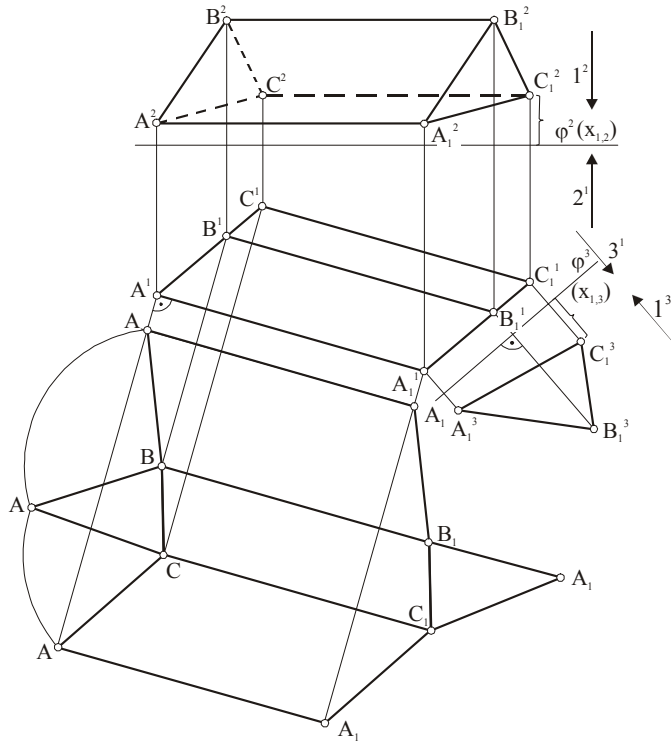
Rys. 5.209

### Ćwiczenie 111

Wyznaczyć rozwinięcie graniastoslupa pochyłego, którego krawędzie boczne są równoległe do rzutni.

#### Rozwiązanie

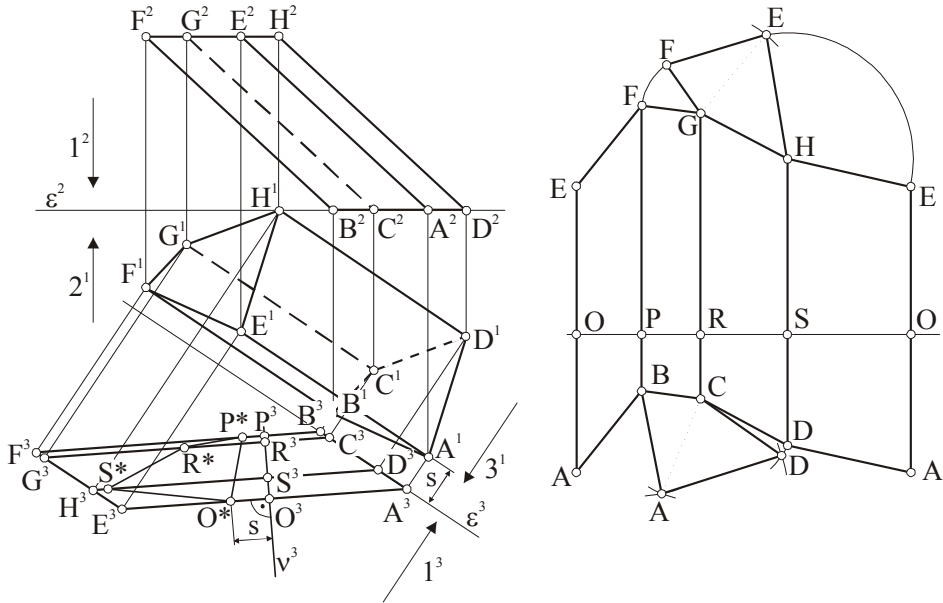
Pierwsze rzuty krawędzi bocznych są przystające do tych krawędzi (rys. 5.210). Wprowadzamy rzutnię  $\pi_3$  równoległą do wielokąta podstawy i otrzymujemy jego wielkość. Mamy układy [1, 2] i [1, 3] i płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp l$  (lub osie  $x_{1,2}$  i  $x_{1,3}$ ). Rozcinamy poboczną graniastoslupa wzdłuż krawędzi  $\langle AA_1 \rangle$  i obracamy wokół niej pozostałe ściany tak, aby były zawarte w płaszczyźnie warstwowej. Odcinki  $\langle AB \rangle$ ,  $\langle BC \rangle$  i  $\langle CA \rangle$  są przystające odpowiednio do odcinków  $\langle A_1^3 B_1^3 \rangle$ ,  $\langle B_1^3 C_1^3 \rangle$  i  $\langle C_1^3 A_1^3 \rangle$ .



Rys. 5.210

**Ćwiczenie 112**

Wyznaczyć siatkę graniastosłupa pochylego.



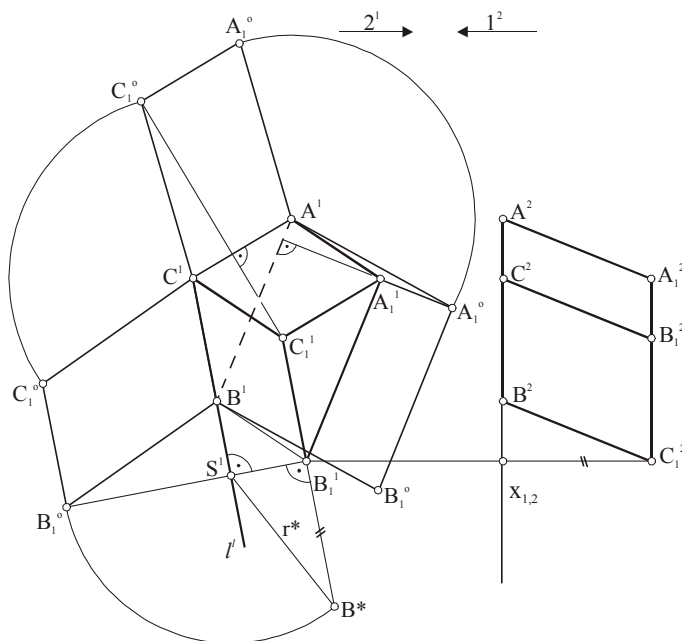
Rys. 5.211

### Rozwiązanie

Kreślimy nowy rzut graniastosłupa na płaszczyznę równoległą do krawędzi bocznych i otrzymujemy w tym rzucie długości krawędzi (rys. 5.211). W układzie [1,2] prosta 3 jest prostopadła do krawędzi graniastosłupa; układ [1,3] i płaszczyzna porównawcza  $\varepsilon \perp l$ .

Przecinamy graniastosłup płaszczyzną  $\nu$  prostopadłą do krawędzi bocznych i wyznaczamy wielkość przekroju zwanego przekrojem normalnym, stosując kład prostokątny płaszczyzny  $\nu$ . Kład przekroju  $\langle O^*P^*R^*S^* \rangle$  uzyskujemy przez odmierzenie odległości jego punktów od nowej rzutni równych odległościom punktów podstawy od tej rzutni. Boki powstałego przekroju są równe odległościom między krawędziami bocznymi. Kreślenie innych rzutów przekroju jest zbędne. Siatkę budujemy następująco: wykreślamy na dowolnej prostej boki przekroju normalnego i przez punkty O, P, R, S kreślimy proste prostopadłe do linii przekroju, po czym odmierzamy na nich długości poszczególnych krawędzi bocznych odmierzając po obu stronach linii przekroju odcinki leżące przed i za płaszczyzną  $\nu$ , np.:  $|OA| = |O^3A^3|$  oraz  $|OE| = |O^3E^3|$  itd. Uzupełniamy siatkę dorysowując obie podstawy.

Rozwinięcie graniastosłupa pochylego można jeszcze wykreślić przez obrót ścian pobocznych dookoła krawędzi podstawy do położenia na płaszczyznę podstawy (rys. 5.212).



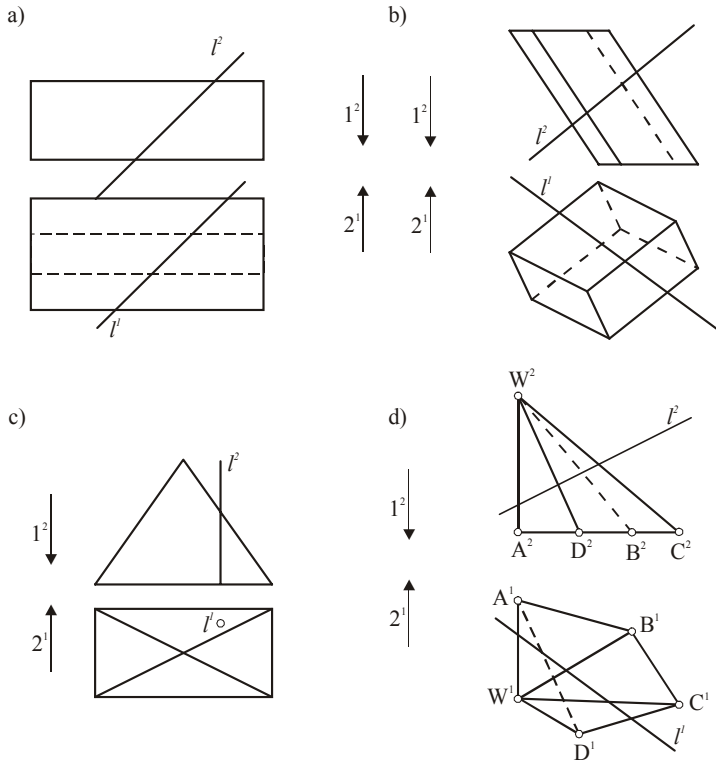
Rys. 5.212

## 10.5. Przenikanie wielościanów

Linia przenikania nazywamy zbiór punktów wspólnych ścian dwóch wielościanów. Wierzchołkami wielokąta przenikania są punkty przebiecia ścian jednego wielościanu krawędziami drugiego wielościanu oraz punkty przebiecia ścian drugiego wielościanu krawędziami pierwszego wielościanu. Linia przenikania jest na ogół wielokątem przestrzennym, choć może rozpaść się na dwa wielokąty. Sposoby wyznaczania linii przenikania wielościanów są przedstawione w literaturze F. E. Otto, Z. Lewandowski., T. Rachwał, St. Szerszeń i inne.

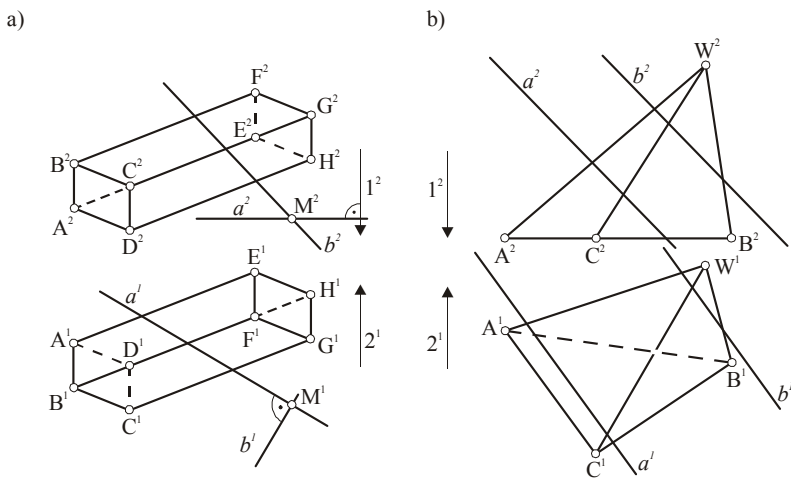
## ZADANIA

1. Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą (rys. 5.213) oraz ustalić widoczność prostej.



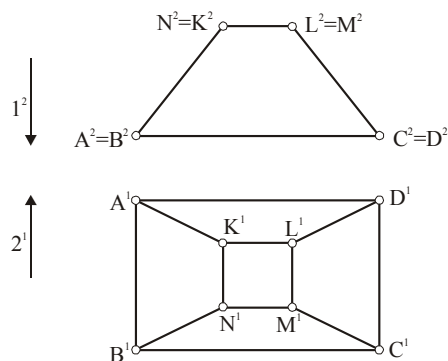
Rys. 5.213

2. Wykreślić rzuty przekroju wielościanu płaszczyzną  $\alpha = ab$  (rys. 5.214ab).



Rys. 5.214

3. Wyznaczyć rozwinięcie ostrosłupa ściętego (rys. 5.215).



Rys. 5.215

4. Wyznaczyć rozwinięcie graniastoslupa z zadania 1, (rys. 5.213ab) z naniesieniem punktów przebiccia na rozwinięciu.  
 5. Wyznaczyć rozwinięcie ostrosłupa z zadania 1. (rys. 5.213cd) z naniesieniem punktów przebiccia na rozwinięciu.

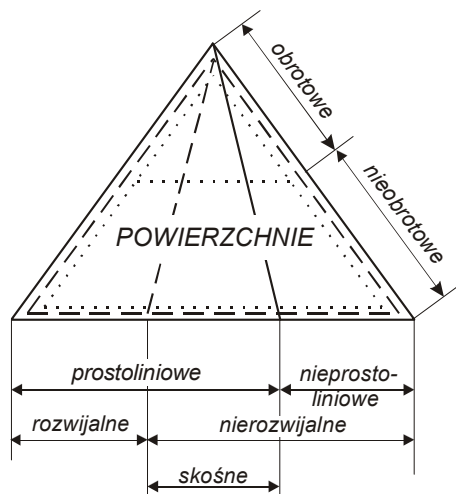
## 11. Powierzchnie

Przedmiotem rozważań w niniejszym rozdziale są właściwości powierzchni służących do projektowania i budowania obiektów inżynierskich budowlanych jak powłoki budowlane, oraz urządzenia do składowania i transportowania materiałów sypkich, ciekłych i gazowych stosowanych w urządzeniach sanitarnych.

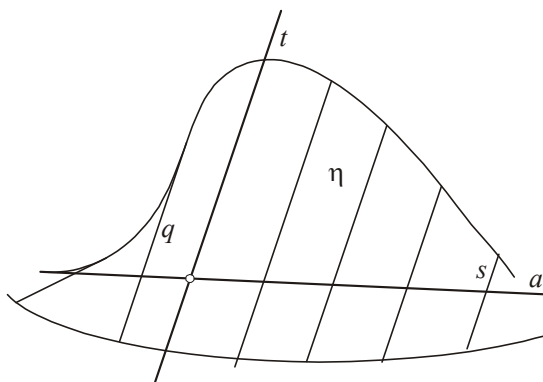
### 11.1. Klasyfikacja powierzchni

Klasyfikacja powierzchni podana jest tu za Stanisławem Polańskim „Geometria wykreślna — podstawy zapisu wykreślnego konstrukcji inżynierskich”. Rysunek 5.216 przedstawia podział zbioru powierzchni na odpowiednie podzbiory zwane klasami powierzchni. Zbiór powierzchni rozpada się na dwa podzbiory: klasę powierzchni prostoliniowych i klasę powierzchni nieprostoliniowych.

Powierzchnia prostoliniowa  $\eta$  ma tę właściwość, że każdy punkt  $X \in \eta$  należy co najmniej do jednej prostej  $x \subset \eta$ . Powierzchnia nieprostoliniowa tej właściwości nie ma. Tworzącą powierzchni prostoliniowej nazywamy każdą prostą  $x \subset \eta$ , gdy w jej otoczeniu istnieje inna prosta  $a \subset \eta$  różna od  $x$ . Na rysunku 5.217 proste  $t, q, s$  są tworzącymi, natomiast prosta  $a$  — nie. Inny podział zbioru powierzchni wyróżnia klasę powierzchni rozwijalnych i nierozwijalnych. Powierzchnia prostoliniowa  $\eta$  jest rozwijalna, jeżeli przez dwa punkty zwyczajne powierzchni, należące do jednej tworzącej poprowadzone płaszczyzny styczne są identyczne. Wszystkie wyżej wymienione powierzchnie są albo obrotowe albo nieobrotowe. Powierzchnie obrotowe powstają przez obrót prostej lub krzywej dookoła prostej.



Rys. 5.216



Rys. 5.217

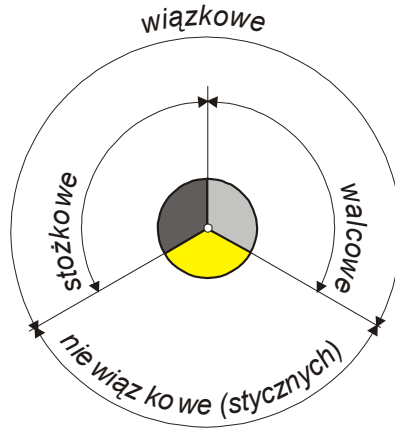
Z rysunku 5.216 wynika, że możemy wyróżnić sześć klas powierzchni. Rysunek 5.218 przedstawia dalszy podział powierzchni rozwijalnych, a rysunek 5.219 - podział powierzchni skośnych.

W budownictwie, a w szczególności w tworzeniu powłok budowlanych szerokie zastosowanie mają powierzchnie prostoliniowe rozwijalne oraz nierozwijalne zwane skośnymi. Omówimy tylko niektóre z nich. Powierzchnie te przedstawione są dokładnie w literaturze: „Geometria powłok budowlanych” — St. Polańskiego oraz w literaturze uzupełniającej.

Wśród powierzchni rozwijalnych wyróżniamy powierzchnie wiązkowe i niewiązkowe. Powierzchnie wiązkowe są to takie, dla których łącz każdy dwóch różnych tworzących jest płaszczyzną. Częścią wspólną wszystkich tworzących jest punkt. Jeżeli jest on punktem właściwym zwanym wierzchołkiem, to powierzchnię nazywamy stożkową. Jeżeli jest to punkt niewłaściwy — powierzchnią walcową. Kierownicą powierzchni nazywamy krzywą zawartą w powierzchni przecinającą wszystkie tworzące tej powierzchni.

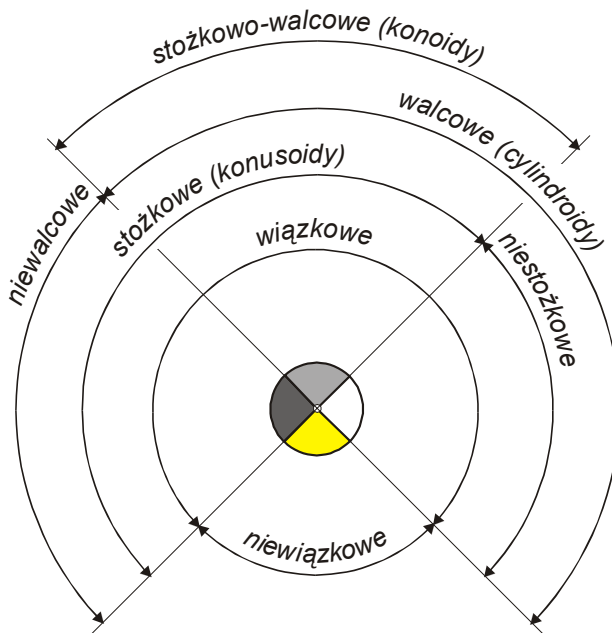


POWIERZCHNIE  
ROZWIJALNE



Rys. 5.218

POWIERZCHNIE  
SKOŚNE



Rys. 5.219

## 11.2. Punkt zawarty w powierzchni

Punkt jest zawarty w powierzchni jeżeli należy do prostej lub krzywej zawartej w powierzchni.

### Ćwiczenie 113

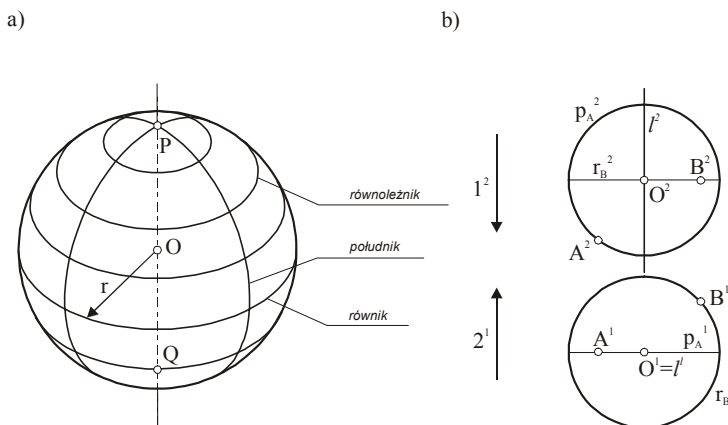
a) Wyznaczyć rzuty punktu A leżącego na południku głównym danej sfery, oraz punktu B leżącego na jej równiku. Przyjąć, że jeden z rzutów obu punktów jest niewidoczny.

b) Dany jest drugi rzut punktu A sfery. Wyznaczyć pierwszy rzut punktu A sfery, przyjmując, że w rzucie drugim punkt A jest niewidoczny.

### Rozwiązanie a)

Wykreślmy rzut pierwszy południka głównego  $p_A(A \in p_A)$  oraz rzut drugi równika  $r_B(B \in r_B)$  (rys. 5.220a,b).

Wszystkie punkty południka głównego  $p_A$  są w drugim rzucie widoczne. Wynika z tego, że punkt A jest niewidoczny w rzucie pierwszym. Zatem punkt A i jego drugi rzut  $A^2$  muszą mieć mniejszą cechę niż równik sfery. Przyjmujemy drugi rzut punktu A poniżej rzutu równika, po czym odnosimy go do rzutu pierwszego.

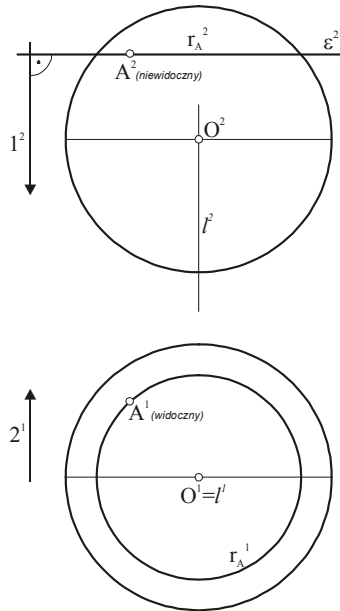


Rys. 5.220

Wszystkie punkty równika  $r_B$  są w pierwszym rzucie widoczne. Aby punkt B był w drugim rzucie niewidoczny musimy tak przyjąć jego rzut pierwszy, by jego cecha była mniejsza od cechy południka głównego i odnosimy go do rzutu drugiego.

### Rozwiązanie b)

Kreślmy drugi rzut płaszczyzny  $\varepsilon$  pierwszorzędowej, zawierającej punkt A (rys. 5.221). Płaszczyzna  $\varepsilon$  przecina sferę w równoleżniku  $r_A$ . Wyznaczamy pierwszy rzut równoleżnika i za pomocą odnoszącej wyznaczamy  $A^1$  tak, aby cecha punktu A była mniejsza od cechy południka głównego. Punkt A w rzucie pierwszym jest widoczny ponieważ leży przed równikiem.



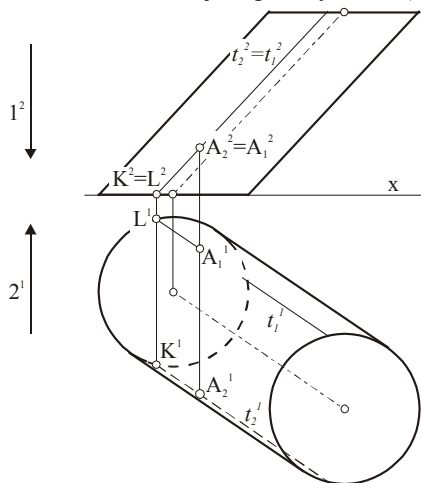
Rys. 5.221

### Ćwiczenie 114

Dane są rzuty podstawowe powierzchni walcowej o kierownicy zawartej w  $\pi_1$ , oraz drugi rzut punktu  $A_1$  zawartego w tej powierzchni. Wyznaczyć pierwszy rzut punktu.

#### Rozwiązanie

Zadanie ma dwa rozwiązania. Punkt  $A$  może należeć do widocznej w drugim rzucie części pobocznic walca jak i do niewidocznej. Zapišmy więc:  $(A_2^2 = A_1^2)$ , (rys. 5.222).



Rys. 5.222

Przez punkt  $A_1^2 = A_2^2$  poprowadzimy drugi rzut tworzących  $t_1^2 = t_2^2$ . Tworzące te przecinają kierownicę walca w punktach  $L$  i  $K$ . Wyznaczamy pierwsze rzuty tworzących  $t_1^1$  i  $t_2^1$  i na nich pierwsze rzuty punktów  $A_1$  i  $A_2$ . W rzucie drugim widoczny jest punkt  $A_2$  gdyż ma

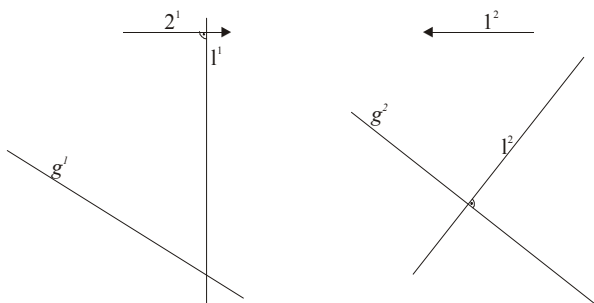


### 11.3. Budowa brył obrotowych

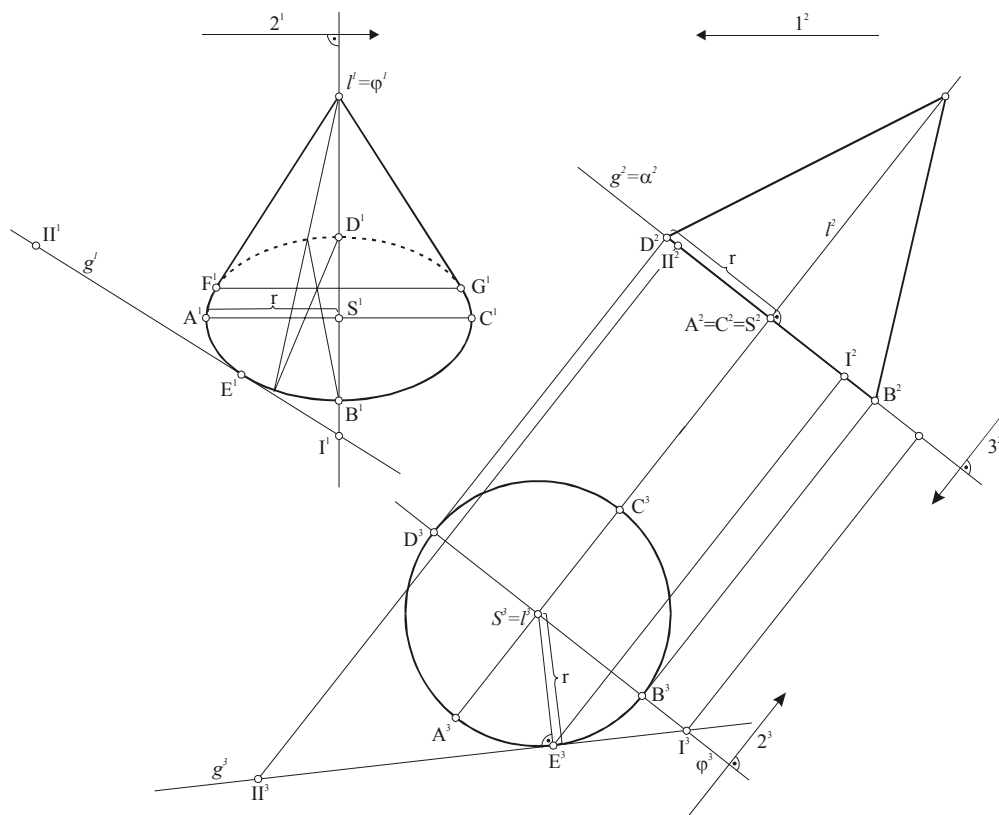
#### Ćwiczenie 116

Dane są rzuty prostej  $l \perp \Pi_2$  i prostopadłej do niej prostej  $g (g \perp l)$ . Wyznaczyć rzuty stożka obrotowego o osi  $l$  wysokości równej 50mm i okręgu podstawy stycznym do prostej  $g$  (rys. 5.225a).

a)



b)



Rys. 5.225

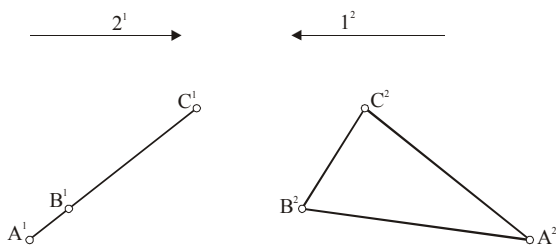
*Rozwiązanie*

Prosta  $g \perp l$  zawarta jest w płaszczyźnie  $\alpha \perp l$ . Płaszczyzna  $\alpha$  jest drugorzutuująca (rys. 5.225b). Wprowadzamy  $3 \parallel l$ ;  $[1, 2] \perp [1, 3]$  i  $\varphi \perp 2$ . W trzecim rzucie otrzymujemy  $S^3 = l^3$  i prostą  $g^3$ .  $\rho(S^3 g^3) = r^3$ . Wykreślamy okrąg podstawy styczny w punkcie E do prostej  $g$ . Wygodnie jest przyjąć na okręgu podstawy dwie średnice prostopadłe do siebie:  $\langle AB \rangle \perp 2$  i  $\langle CD \rangle \parallel 2$ , (patrz ćwiczenie 90, rys. 5.157). Drugi rzut okręgu jest odcinkiem o długości  $2r$ , a drugi rzut stożka jest trójkątem. Wyznaczamy pierwsze rzuty średnic  $\langle AB \rangle$ ,  $\langle CD \rangle$  i wykreślamy elipsę lub zastępujący ją owal. Punkt E jest punktem styczności do prostej  $g$ . Wyznaczamy z konstrukcji V, rys. 1.6 styczne do podstawy stożka. Kreślimy rzut pierwszy stożka i ustalamy widoczność podstawy w rzucie pierwszym posługując się kierunkiem i zwrotem prostej 1.

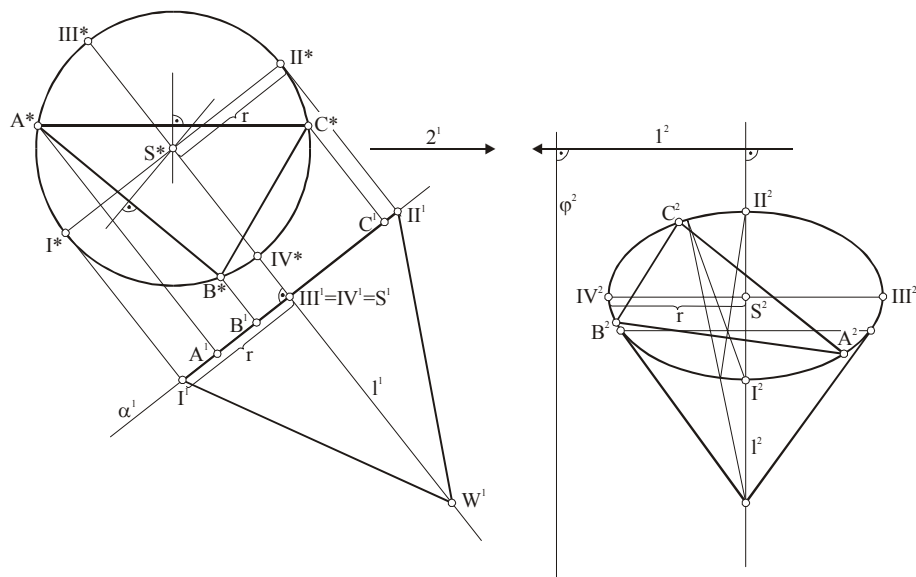
**Ćwiczenie 117**

Dany jest trójkąt  $\langle ABC \rangle$  w położeniu rzutującym (rys. 5.226a). Wyznaczyć rzuty stożka obrotowego o okręgu podstawy opisanym na trójkącie  $\langle ABC \rangle$ . Wysokość stożka równa się 45 mm.

a)



b)



Rys. 5.226

*Rozwiązanie*

Obracamy płaszczyznę  $\alpha$  trójkąta o  $90^\circ$  i rysujemy jego kład prostokątny na płaszczyźnie  $\varphi$ . Kreślimy okrąg opisany na trójkącie  $\langle A^*B^*C^* \rangle$  i przyjmujemy na nim dwie średnice  $\langle I$

II) i (III IV) prostopadłe do siebie i jedną równoległą do  $\alpha^1$ , a drugą prostopadłą. Rzut pierwszy okręgu jest odcinkiem o długości  $2r$ . Wykreślamy rzut drugi okręgu. Jest to elipsa o osiach  $(III^2 IV^2)=2r$  i  $(I^2 II^2)$ . Zamiast elipsy można wykreślić owal. W prostej  $l \perp \alpha$  zawierającej środek S okręgu odmierzymy w rzucie pierwszym wysokość równą 45mm. Rzut pierwszy stożka jest trójkątem. W rzucie drugim wyznaczamy punkty styczności (rys. 1.8) i rysujemy z punktu W wierzchołka styczne do elipsy. Ustalamy widoczność. W zadaniu na rysunku 5.226 podstawa stożka jest widoczna.

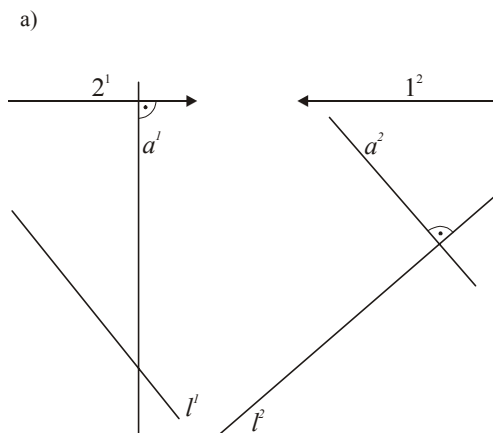
### Ćwiczenie 118

Dane są: oś walca obrotowego  $l$  oraz prosta drugowarstwowa  $a$  prostopadła do osi  $l$ . Wyznaczyć rzuty walca obrotowego o okręgu podstawy stycznym do prostej  $a$  oraz o wysokości równej 4 cm (rys. 5.227a).

#### Rozwiązanie

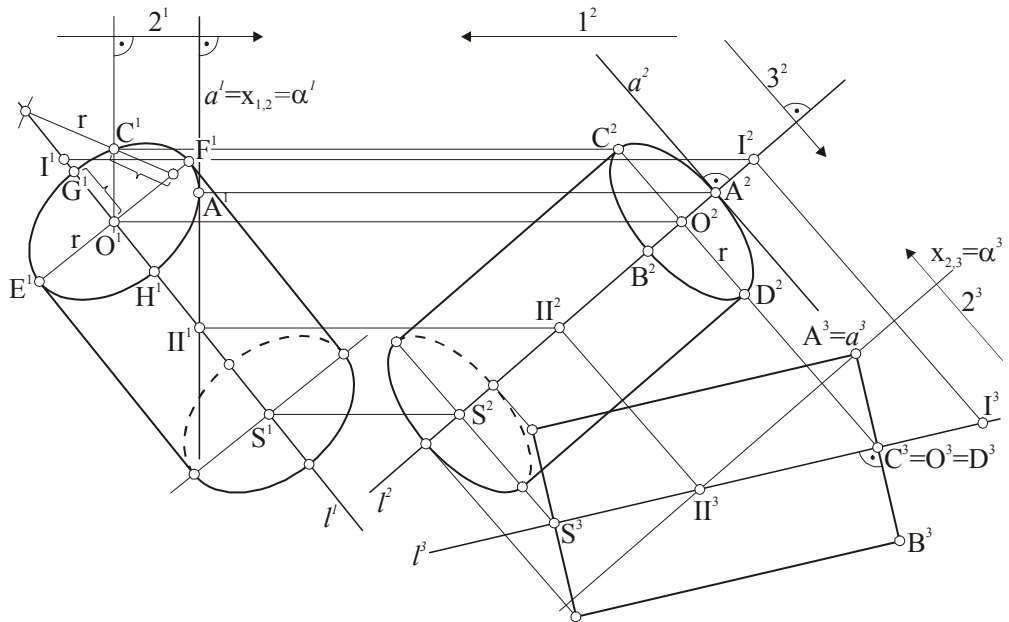
Na rys. 5.227b przedstawione jest rozwiązanie za pomocą transformacji. W układzie  $[1, 2]$  wprowadzona jest prosta kierunkowa  $3 \perp l$ , powstaje układ  $[2, 3]$  i wprowadzona jest płaszczyzna porównawcza  $\alpha \perp 2$ . Prosta  $l$  jest trzeciorawstwowa a prosta  $a$  jest rzutująca.

Trzeci rzut okręgu podstawy walca stycznego do prostej  $a$  jest odcinkiem  $\langle A^3 B^3 \rangle \perp l^3$ . Odcinek  $\langle A^3 B^3 \rangle$  jest średnicą okręgu w położeniu trzeciorawstwowym, zaś odcinek  $\langle CD \rangle \perp \langle AB \rangle$  jest trzeciorzutujący, a tym samym drugowarstwowy. Rzeczywista wielkość promienia okręgu  $r$  występuje:  $r = \langle A^3 O^3 \rangle = \langle O^3 B^3 \rangle = \langle C^2 O^2 \rangle = \langle O^2 D^2 \rangle$ . Wyznaczając rzut pierwszy nie korzystamy ze znalezienia rzutów odcinków  $\langle AB \rangle$  i  $\langle CD \rangle$  gdyż będą to w rzucie pierwszym odcinki sprzężone elipsy. Odcinek osiowy główny  $\langle EF \rangle$  jest prostopadły do osi  $l$  ( $\langle E^1 F^1 \rangle \perp l^1$ ). Wyznaczamy jeden z punktów elipsy, np. C i za pomocą konstrukcji XIII, rys. 1.21 wyznaczamy odcinek osiowy poboczny  $\langle GH \rangle$ . Wysokość walca odmierzymy na prostej  $l^3$ . Odcinek  $\langle O^3 S^3 \rangle = 4$  cm. Rzuty drugiej podstawy walca o środku S są przystające do poprzednio wyznaczonej i wykreśla się ją tak samo. Ustalamy widoczność podstaw.



Rys. 5.227a

b)

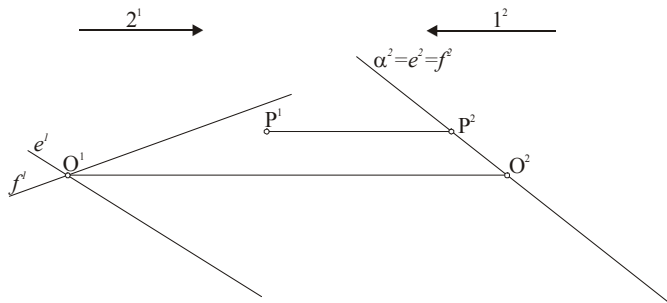


Rys. 5.227b

**Ćwiczenie 119**

Dane są dwie proste przecinające się  $e$  i  $f$  zawarte w płaszczyźnie drugorzutującej  $\alpha$ , oraz punkt  $P$  należący do  $\alpha$ . Wyznaczyć rzuty walca o wysokości 60mm i okręgu podstawy zawierającym punkt  $P$  i stycznym do prostych  $e$  i  $f$  (rys. 5.228a).

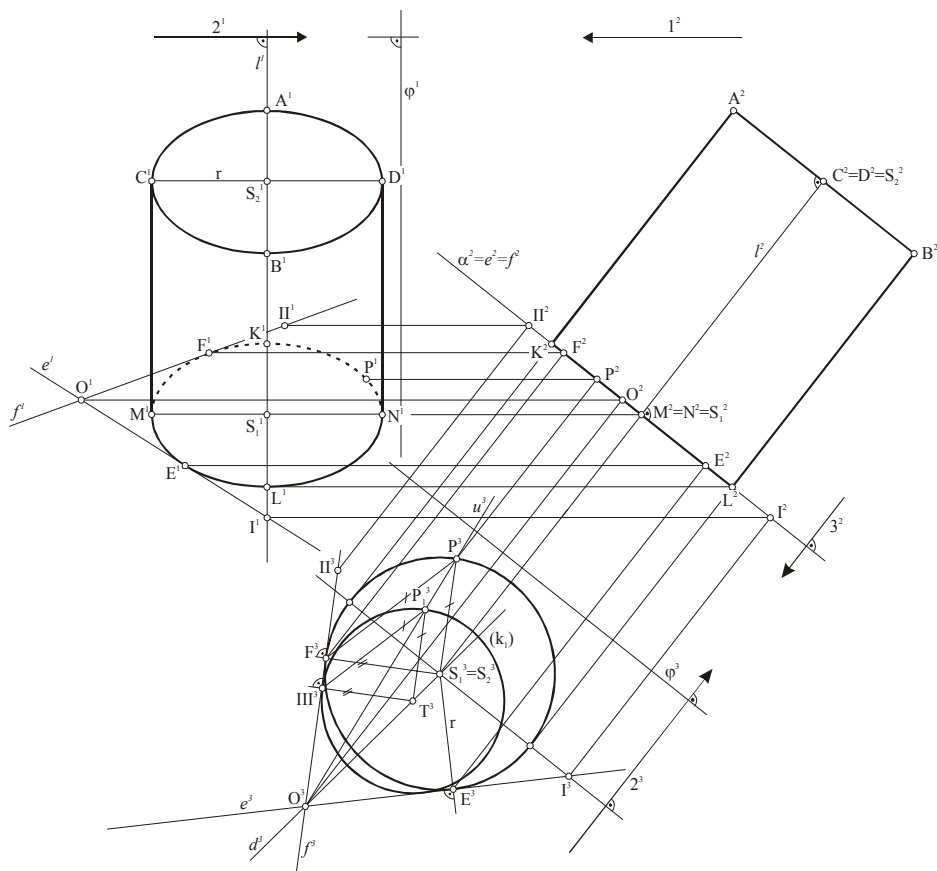
a)



Rys. 5.228a



b)



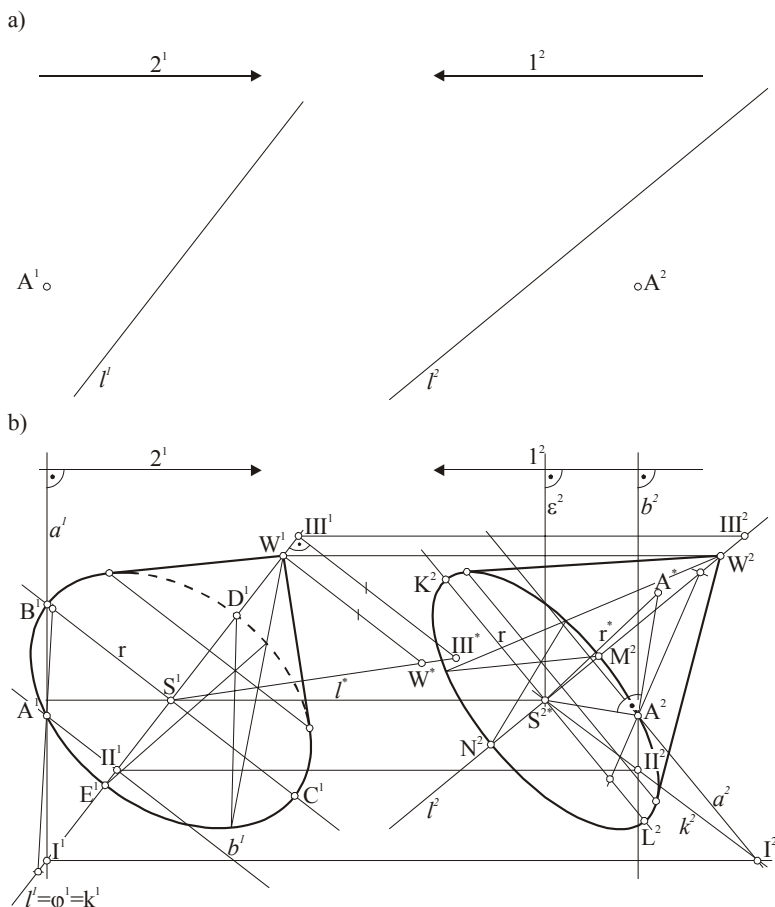
Rys. 5.228b

### Rozwiązanie

W układzie [1, 2] wprowadzamy prostą  $3 \perp \alpha$ , mamy układ [2, 3] i płaszczyznę porównawczą  $\varphi \perp 2$  (rys. 5.228b). Płaszczyzna  $\alpha$  jest trzeciowarstwowa. W rzucie trzecim wyznaczamy dwusieczną  $d^3$  kąta między prostymi  $e^3 f^3$ . Na prostej  $d^3$  obieramy dowolny punkt  $T^3$  i kreślimy okrąg  $(k_1)$  o środku  $T$  styczny do prostych  $e$  i  $f$ . Przez punkt  $P^3$  rysujemy prostą  $u^3$ . Prosta ta przecina okrąg  $(k_1)$  w punkcie  $P_1^3$ . Budujemy trójkąt np.  $\langle P_1^3 T^3 III^3 \rangle$  oraz przez punkt  $P$  trójkąt podobny  $\langle P^3 S^3 E^3 \rangle$  o bokach równoległych i kątach równych. Punkt  $S$  należący do  $d$  jest środkiem szukanego okręgu o promieniu  $\langle PS \rangle$ . Zastosowaliśmy tu jednokładność o środku w punkcie  $O$ . Trzeci rzut walca jest okręgiem ponieważ oś walca  $l$  jest trzeciorzutuująca. Aby nie zaciemniać rysunku pomijamy przyjęcie średnic sprzężonych okręgu (średnic prostopadłych) jak na rysunku 5.226. Rzuty drugie okręgów podstaw walca są odcinkami o długościach równych  $2r$ . Odległość podstaw jest równa wysokości walca. Rzut drugi walca jest prostokątem. W rzucie drugim przyjmujemy rzuty dwóch par średnic walca:  $\langle AB \rangle$  i  $\langle KL \rangle \perp l$  drugorzutowe i  $\langle CD \rangle$  i  $\langle MN \rangle$  drugorzutuujące. Wyznaczamy pierwsze rzuty tych średnic i kreślimy dwie przystające elipsy (lub owale). Proste styczne do obu elips są zarysem walca. Ustalamy widoczność. Ze względu na zwrot prostej  $l$  widoczna jest podstawa o środku  $S_2$ .

### Ćwiczenie 120

Dane są rzuty prostej  $l$  oraz punktu  $A$ . Wyznaczyć rzuty stożka obrotowego o osi  $l$ , wysokości równej 4 cm i okręgu podstawy zawierającym punkt  $A$ .



Rys. 5.229

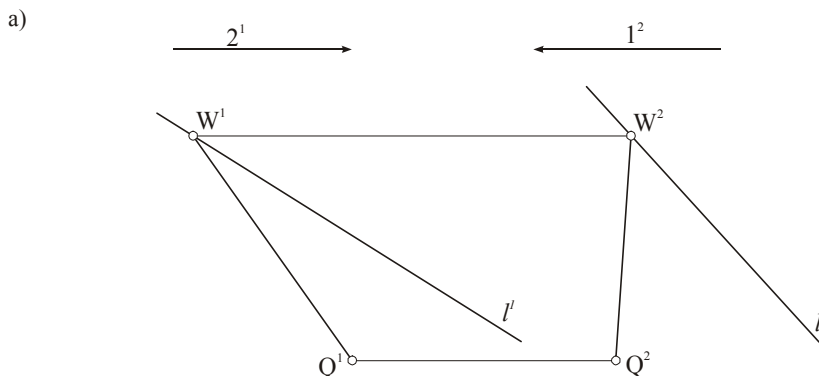
### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązane jest metodą klasyczną (rys. 5.229b). Podstawa stożka zawarta jest w płaszczyźnie  $\alpha$  prostopadłej do osi  $l$ , wyznaczonej prostymi warstwowymi  $a$  i  $b$ , zawierającymi punkt  $A$  i prostopadłymi do osi  $l$ . Punkt  $S$  jest punktem przecięcia prostej  $l$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Wielkość promienia okręgu podstawy została wyznaczona przez kład prostokątny odcinka  $\langle SA \rangle$ ,  $|S^*A^*| = r$ . Przez punkt  $S^1$  prowadzimy prostą równoległą do  $b^1$ , a przez  $S^2$  prostą równoległą do  $a^2$  i odmierzymy na nich średnice okręgu podstawy równe  $2r$ . Średnice  $\langle B^1C^1 \rangle$  i  $\langle K^2L^2 \rangle$  elips będących rzutami podstawy są osiami głównymi. Osie poboczne jednoczą się z rzutami  $l^1$  i  $l^2$ . Długość odcinków osiowych pobocznych  $\langle E^1D^1 \rangle$  i  $\langle N^2M^2 \rangle$  wyznaczamy z konstrukcji podanej w rozdziale I (rys. 1.21). Jedną ze znanych metod podanych w rozdziale I

wykreślamy elipsy. Wyznaczamy kład prostokątny osi  $l$  i odmierzymy na  $l^*$  odcinek  $\langle S^*W^* \rangle = h$ . Punkty  $W^1$  i  $W^2$  są rzutami wierzchołka. Z punktów  $W^1$  i  $W^2$  wykreślamy styczne do elipsy jak na rys. 1.6. Ustalamy widoczność podstaw.

### Ćwiczenie 121

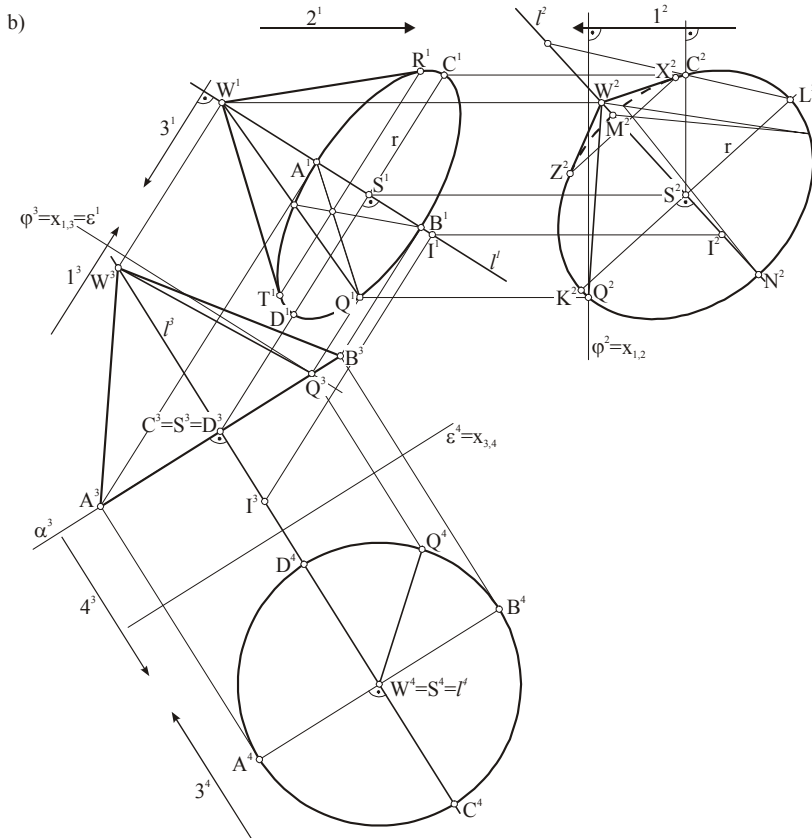
Dana jest prosta  $l$  i odcinek  $\langle WQ \rangle$ , przy czym  $W \in l$  (rys. 5.230a). Wyznaczyć rzuty pobocznicy stożka obrotowego powstałego w wyniku pełnego ciągłego obrotu odcinka  $\langle WQ \rangle$  dookoła osi  $l$ .



Rys. 5.230a

### Rozwiązanie

Kierunki  $3 \perp l$  i  $4 \parallel l$  powodują to, że prosta  $l$  i oś obrotu jest rzutująca (rys. 5.230). Mamy następujące układy wiążące  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  i płaszczyznę porównawczą  $\phi \perp l$ . Przez punkt  $Q$  prowadzimy w rzucie trzecim płaszczyznę podstawy  $\alpha \perp l$ .  $l \cap \alpha = S$  - środek okręgu. Następnym układem wiążącym jest  $[3, 4]$  i płaszczyznę porównawczą  $\epsilon \perp 3$ . Rzutnia  $\pi_4 = \alpha^4$  jest płaszczyzną obrotu dla punktu  $Q$  i kolejne położenia punktu  $Q$  wyznaczają okrąg będący kierownicą wycinka powierzchni stożkowej. Obieramy odcinki średnicowe sprzężone okręgu  $\langle A^4B^4 \rangle \perp 3^4$  i  $\langle C^4D^4 \rangle \parallel 3^4$ . Trzeci rzut okręgu jest odcinkiem  $\langle A^3B^3 \rangle$ , a stożka trójkątem. Pierwszy rzut okręgu jest elipsą o odcinkach osiowych: głównym  $\langle CD \rangle$  i pobocznym  $\langle AB \rangle$ . Rzut drugi okręgu wyznaczamy jak w ćwic. 69, rozwiązanie II (rys. 5.93e). Oś główna  $\langle KL \rangle$  jest prostopadła do prostej  $l$ . Oś poboczną wyznaczamy za pomocą konstrukcji XIII (rys. 1.21) po uprzednim wyznaczeniu punktu  $C$ . Z punktów  $W^1$  i  $W^2$  wyznaczamy styczne do elipsy jak na rys. 1.6 oraz ustalamy widoczność.



Rys. 5.230b

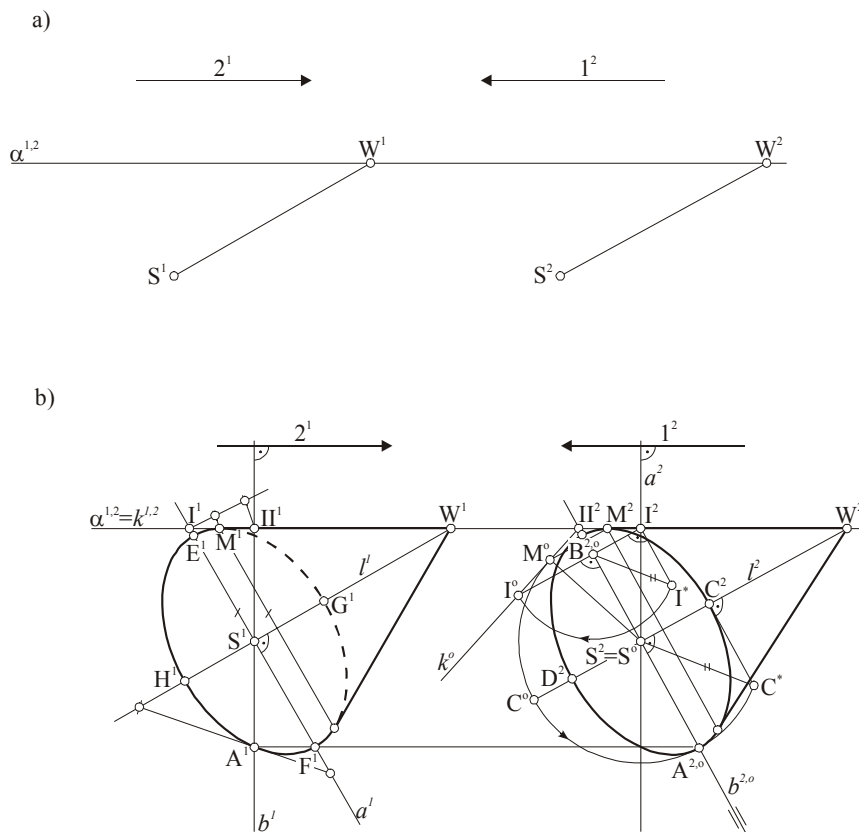
### Ćwiczenie 122

Dane są rzuty odcinka  $\langle WS \rangle$  oraz płaszczyzna  $\alpha$  dwurzutująca zawierająca punkt  $W$ . Wyznaczyć rzuty stożka obrotowego o wierzchołku  $W$  i środku podstawy  $S$  stycznego do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 5.131a).

#### Rozwiązanie I

Na rys. 5.231b przedstawione jest rozwiązanie za pomocą metod klasycznych. Przez punkt  $S$  prowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon \perp WS$ . Wyznaczają ją proste prostopadłe do  $WS$ : pierwszorzędowa  $a$  i drugorzędowa  $b$ . Następnie punkty przebicia prostych  $a$  i  $b$ :  $I$  i  $II$  z płaszczyzną  $\alpha$  wyznaczają krawędź  $k$  tych płaszczyzn. Wyznaczamy kład płaszczyzny  $\varepsilon$  obracając punkt  $I$  prostej  $k$  dookoła osi  $b$  do położenia warstwowego. Okrąg o środku  $S^0 = S^\circ$  styczny do prostej  $k^\circ$  w punkcie  $M^\circ$ , jest kładem podstawy stożka. Rzutem drugim tej podstawy jest elipsa o odcinkach osiowych  $\langle A^2B^2 \rangle$  i  $\langle C^2D^2 \rangle$ . Średnica okręgu  $\langle A^0B^0 \rangle$  zawarta jest w osi obrotu  $h^\circ = b^2$ , a więc  $\langle A^2B^2 \rangle$  jednoczy się z nią. Punkt  $C^2$  wyznaczamy przez obrót punktu  $C^0$  z kładu do rzutu. Punkty  $C^2$  i  $D^2$  są symetrycznie położone względem  $S$ . Pierwszy rzut podstawy wyznaczamy za pomocą odcinków osiowych  $\langle E^1F^1 \rangle$  i  $\langle G^1H^1 \rangle$ . Odcinek osiowy  $\langle E^1F^1 \rangle$  jest prostopadły do prostej  $l^1$  i zachowuje długość  $2r$  okręgu podstawy. Wyznaczamy punkt  $A^1 \subset b^1$  i za pomocą konstrukcji XIII (rys. 1.21) wyznaczamy  $1/2$  odcinka osiowego pobocznego. Punkt  $M$  jest punktem styczności elipsy do prostej  $k$ , której rzuty są jedną z zewnętrznych tworzących rzutów stożka.  $M^2$  wyznaczamy dzięki  $M^0M^2 \perp b^{02}$ ,  $M^1$  za pomocą

twierdzenia Talesa. Drugi punkt styczności jest wraz z M w każdym rzucie symetrycznie położony względem osi pobocznych w kierunku osi głównych. Wykreślamy rzuty stożka oraz widoczność podstawy w obu rzutach.

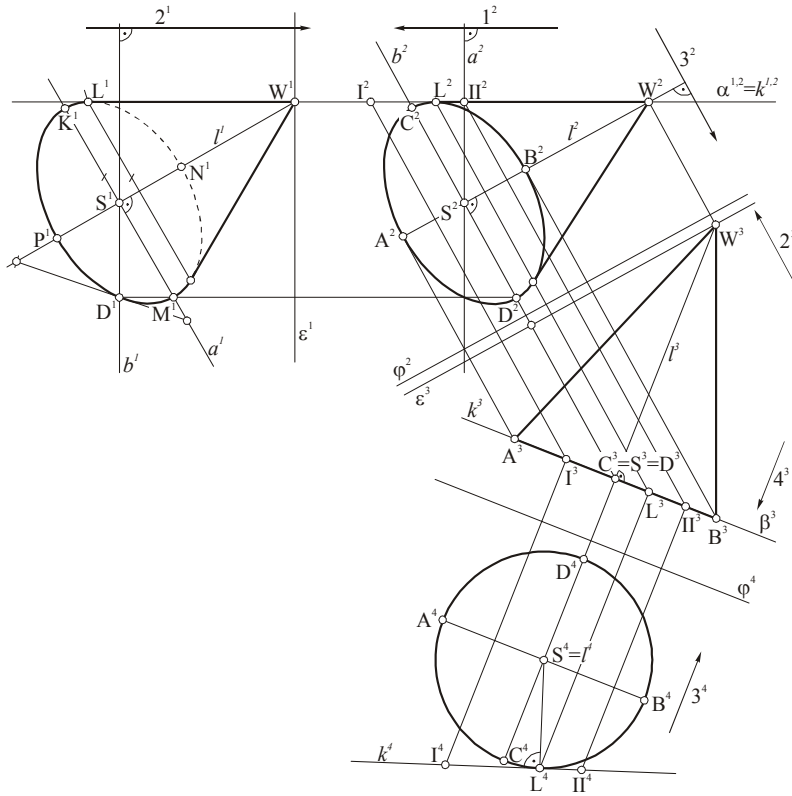


Rys. 5.231a,b

### Rozwiązanie II

Do układu [1,2] wprowadzamy układ wiążący [2, 3] i  $\varepsilon \perp 2$ , przy czym  $3 \perp l$ . W rzucie trzecim możemy wprowadzić przez punkt S płaszczyznę  $\beta \perp l$  (rys. 5.231c). Wprowadzamy k krawędź płaszczyzny:  $\alpha$  i  $\beta$  ( $k^2 = \alpha^2$  i  $k^3 = \beta^3$ ) i obieramy na prostej k dwa dowolne punkty I i II, które pozwolą na wyznaczenie czwartego rzutu krawędzi w kierunku  $4 \parallel l$ . Mamy układ [3, 4] i  $\varphi \perp 3$ . Czwartym rzutem podstawy stożka jest okrąg o środku  $S^4$  styczny w punkcie  $L^4$  do prostej  $k^4$ . Wyznaczamy dwie prostopadłe do siebie średnice okręgu  $\langle A^4B^4 \rangle \perp 3^4$  i  $\langle C^4D^4 \rangle \parallel 3^4$ . Tak przyjęte średnice okręgu dadzą nam w rzucie drugim osie: główną i poboczną elipsy będącej rzutem okręgu. Rzut pierwszy okręgu wyznaczamy za pomocą innych średnic okręgu, z których  $\langle K^1M^1 \rangle$  jest warstwowa i prostopadła do  $l$ , a więc jej długość w rzucie pierwszym równa się  $2r$  okręgu podstawy. Oś poboczną znajdujemy z konstrukcji XIII, rys. 1.21 wyznaczając uprzednio dowolny punkt w tym przypadku D. Z punktów  $W^1$  i  $W^2$  wyznaczamy styczne do elipsy, oraz określamy widoczność podstawy w obu rzutach.

c)



Rys. 5.231c

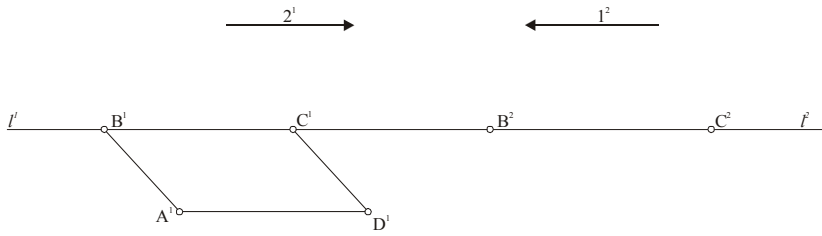
### Ćwiczenie 123

Dane są rzuty osi  $l$  profilowej oraz rzut pierwszy równoległoboku  $\langle ABCD \rangle$ , gdzie  $B$  i  $C \in l$ , będącego prostokątem. Wyznaczyć rzuty bryły powstałej w wyniku ciągłego obrotu prostokąta  $\langle ABCD \rangle$  dookoła osi  $l$  (rys. 5.232a).

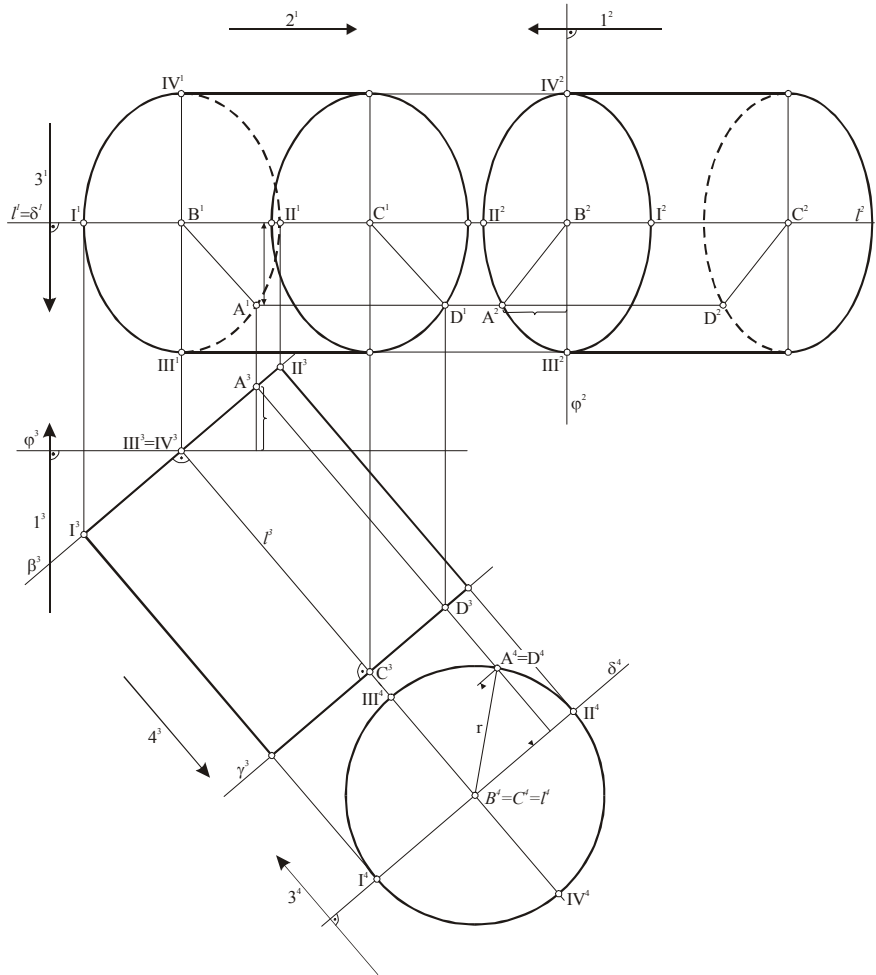
#### Rozwiązanie

Obracający się dookoła prostej  $l$  prostokąt utworzy w przestrzeni walec obrotowy. W układzie  $[1, 2]$  wprowadzamy  $3 \perp l$ , układ  $[1, 3]$  i  $\varphi \perp 1$ . Prosta  $l$  jest trzeciorzutowa. Przez punkty  $B$  i  $C$  prowadzimy płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma \perp l$  ( $B^3 \in \beta^3$ ,  $C^3 \in \gamma^3$ ). Ponieważ  $\langle AB \rangle \perp l$  i  $\langle CD \rangle \perp l$  punkty  $A$  i  $D$  muszą należeć do płaszczyzn  $\beta$  i  $\gamma$ . Wprowadzamy  $4 \parallel l$ , układ  $[3, 4]$  i  $\delta \perp 3$ . Rzut czwarty prostokąta jest odcinkiem, a rzut walca okręgiem. Podstawy walca znajdują się w płaszczyznach  $\beta$  i  $\gamma$ , ich rzuty trzecie są odcinkami. Rzuty pierwsze są przystającymi elipsami. Średnice prostopadłe okręgu, których rzuty pozwalają na wykreślenie elips (lub owali) są przyjęte tylko na jednej podstawie. Proste styczne do obu podstaw są brzegiem rzutów walca. Ustalamy widoczność.

a)



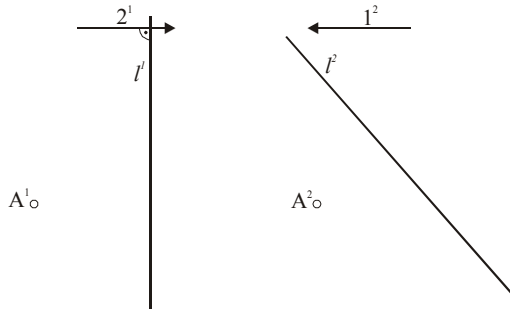
b)



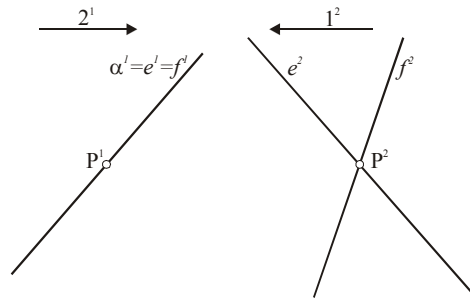
Rys. 5.232

## ZADANIA

1. Dana jest prosta  $l$  oraz punkt  $A$ . Wyznaczyć rzuty: 1) stożka obrotowego, 2) walca obrotowego o osi  $l$ , wysokości równej 50mm i okręgu podstawy zawierającym punkt  $A$  (rys. 5.233).
2. Dane są proste przecinające  $e$  i  $f$  zawarte w płaszczyźnie pierwszorzutującej  $\alpha$ . Wykreślić rzuty stożka obrotowego o wysokości równej 50mm i okręgu podstawy o promieniu  $r=30\text{mm}$  stycznym do prostych  $e$  i  $f$  (rys. 5.234).
3. Dane są rzuty trójkąta  $\langle ABC \rangle$ : a) w położeniu rzutującym, b) w położeniu ogólnym. Wykreślić rzuty stożka obrotowego o wysokości  $h = 40\text{mm}$  i okręgu podstawy wpisanym w trójkąt (rys. 5.235a i b).

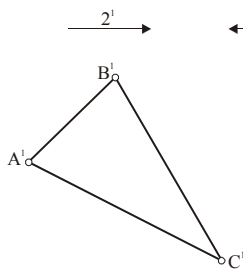


Rys. 5.233

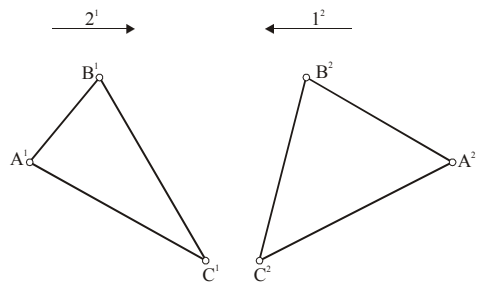


Rys. 5.234

a)



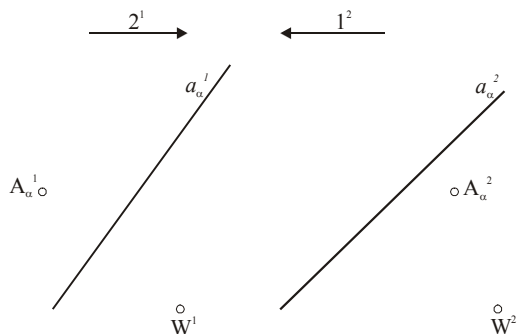
b)



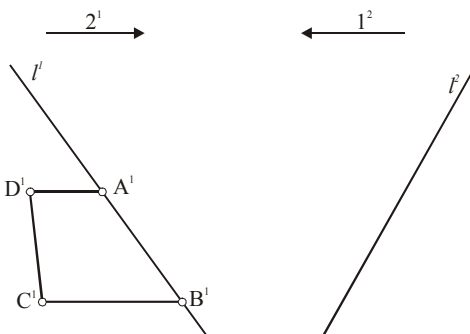
Rys. 5.235



4. Dane są rzuty punktu  $W$  i płaszczyzny  $\alpha = Aa$ . Wyznaczyć rzuty stożka obrotowego o wierzchołku  $W$  i okręgu podstawy zawartym w płaszczyźnie  $\alpha$ . Promień okręgu  $r=25\text{mm}$  (rys. 5.236).

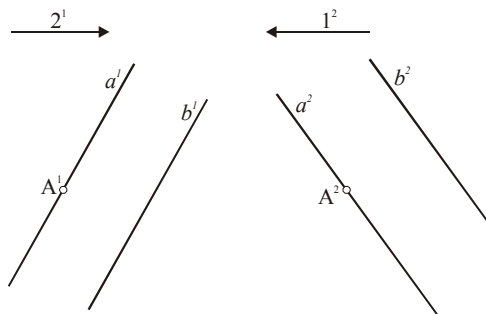


Rys. 5.236

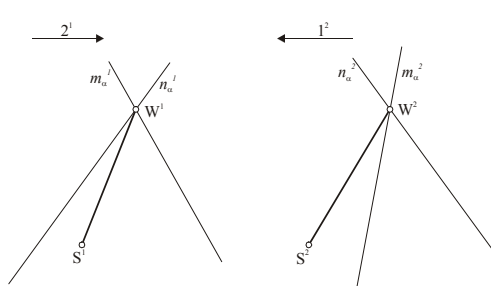


Rys. 5.237

5. Dana jest prosta  $l$ , oraz rzut  $\langle A^1 B^1 C^1 D^1 \rangle$  trapezu prostokątnego  $\langle ABCD \rangle$  o kątach prostych przy wierzchołkach  $A$  i  $B$  ( $A \in l, B \in l$ ). Wyznaczyć rzuty ściętego stożka obrotowego powstałego w wyniku ciągłego obrotu trapezu dookoła prostej  $l$  (rys. 5.237).
6. Dane są dwie proste równoległe  $a$  i  $b$  i punkt  $A \in a$ . Wykreślić rzuty walca obrotowego dla którego proste  $a$  i  $b$  są tworzącymi. Promień podstawy walca równa się  $30\text{mm}$  i punkt  $A$  należy do okręgu jednej podstawy. Wysokość walca  $h=60\text{mm}$  (rys. 5.238).
7. Dany jest odcinek  $\langle WS \rangle$  oraz płaszczyzna  $\alpha = mn$  do której należy punkt  $W$ . Wyznaczyć rzuty stożka obrotowego o wierzchołku  $W$  i środku podstawy  $S$ , stycznego do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 5.239).



Rys. 5.238



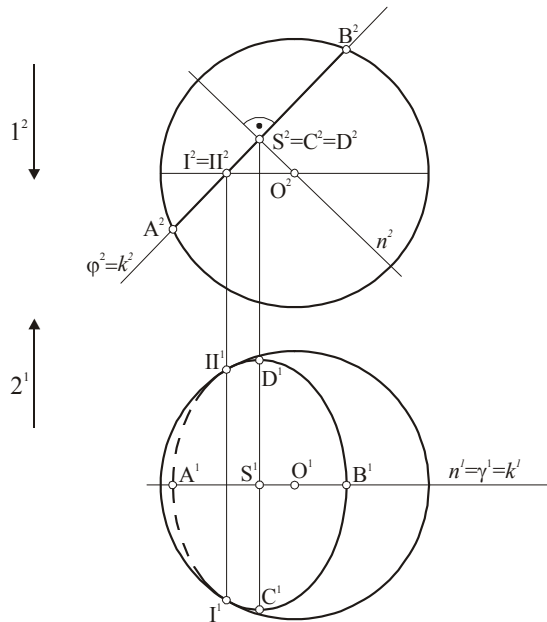
Rys. 5.239

## 11.4. Przekroje powierzchni

### Przekrój sfery

#### Ćwiczenie 124

Wyznaczyć przekrój sfery o środku  $O$  płaszczyzną drugorzutującą  $\varphi$ .



Rys. 5.240

#### Rozwiązanie

Linia przekroju sfery płaszczyzną jest okrąg. W przypadku jak na rysunku 5.240 jest to okrąg o środku  $S = n \cap \varphi$ , gdzie  $n$  jest prostą prostopadłą do płaszczyzny siecznej zawierającą środek sfery. Pierwszym rzutem okręgu jest elipsa, zaś rzutem drugim odcinek  $\langle A^2B^2 \rangle$ , który jest również rzutem drugowarstwowego odcinka średnicowego  $\langle AB \rangle$  okręgu. Końce tego odcinka średnicowego leżą na południku głównym sfery. Odcinek średnicowy  $\langle CD \rangle$  sprzężony z  $\langle AB \rangle$  zawarty jest w prostej drugorzutującej przechodzącej przez  $S$ . Jej drugim rzutem jest punkt  $C^2 = D^2$ , a rzutem pierwszym odcinek  $\langle C^1D^1 \rangle = \langle A^2B^2 \rangle$ . Punkty  $I$  i  $II$  okręgu, które należą do równika dzielą elipsę na część widoczną i niewidoczną.

#### Ćwiczenie 125

Wyznaczyć przekrój sfery o środku  $O$  płaszczyzną  $\varphi = Lp$ .

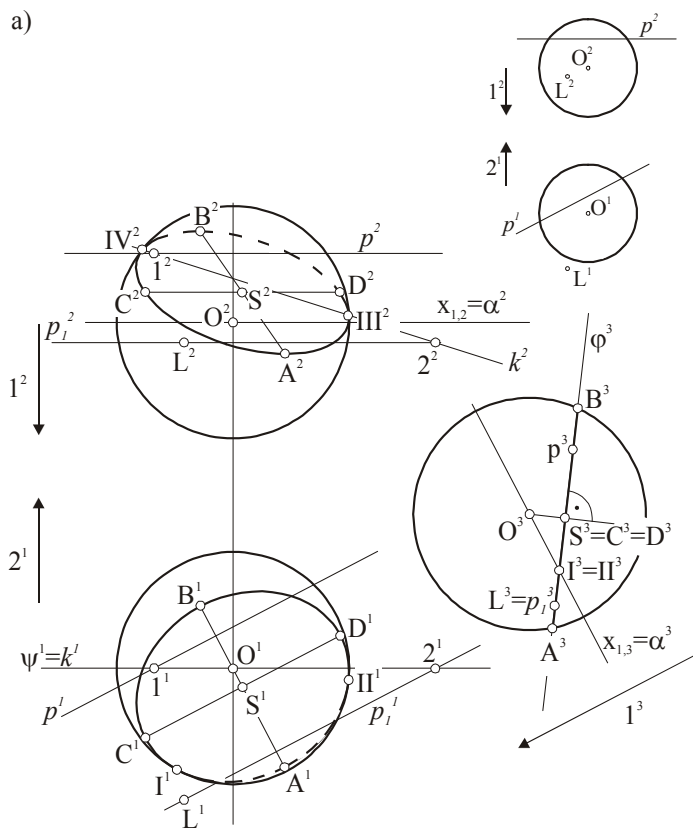
#### Rozwiązanie I

Najprostszym sposobem rozwiązania tego zadania jest rozwiązanie za pomocą transformacji, przyjmując trzeci kierunek rzutowania równoległy do prostej pierwszorzutowej  $p(3^1 \parallel p^1)$  (rys.5.241a). Kreślimy trzeci rzut sfery i trzeci rzut płaszczyzny  $\varphi$ . Tak samo jak w ćwiczeniu 124 znajdujemy pierwsze rzuty odcinków średnicowych sprzężonych  $\langle AB \rangle$

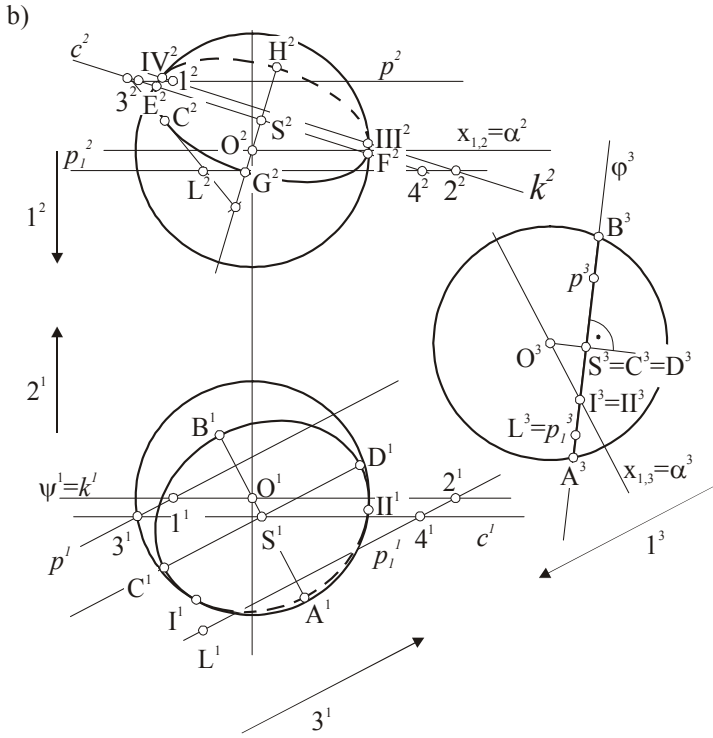
i  $\langle CD \rangle$  okręgu przekroju, z których jeden jest równoległy, a drugi prostopadły do trzeciej rzutni, oraz rzuty punktów I i II przecięcia przekroju z równikiem sfery. Wyznaczamy drugie rzuty punktów A, B, C i D. W rzucie pierwszym odcinki  $\langle A^1B^1 \rangle$  i  $\langle C^1D^1 \rangle$  są odcinkami osiowymi elipsy, w rzucie drugim  $\langle A^2B^2 \rangle$  i  $\langle C^2D^2 \rangle$  są odcinkami sprzężonymi. W dalszej kolejności wyznaczamy punkty III i IV wspólne okręgu przekroju i południka głównego sfery. W tym celu przez środek sfery O prowadzimy płaszczyznę drugowarstwową  $\psi$  i znajdujemy krawędź  $k = \varphi \cap \psi$ . Drugie rzuty tych punktów dzielą elipsę na część widoczną i niewidoczną.

*Rozwiązanie II*

Jak w rozwiązaniu I posługujemy się transformacją przekształcającą płaszczyznę  $\varphi$  na rzutującą. Trzeci i pierwszy rzut przekroju znajdujemy sposobem opisanym w rozwiązaniu I (rys. 5.241b). W rzucie drugim nie wyznaczamy odcinków  $\langle A^2B^2 \rangle$  i  $\langle C^2D^2 \rangle$  będących odcinkami średnicowymi sprzężonymi lecz po wyznaczeniu punktów  $S^2$  i  $C^2$  — jednego (dowolnego) punktu należącego do elipsy, wyznaczamy odcinki osiowe elipsy jak w ćw. 69 rozw. II, (rys.5.93b). Odcinek  $\langle E^2F^2 \rangle$  zawarty w prostej drugowarstwowej  $c$  jest odcinkiem osiowym głównym. Odcinek  $\langle G^2H^2 \rangle$  jest odcinkiem osiowym pobocznym. Punkty III i IV wspólne okręgu przekroju i południka głównego znajdujemy jak w rozwiązaniu I.



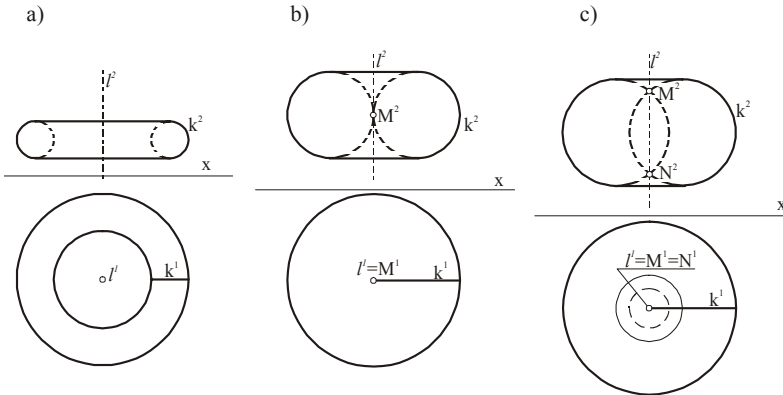
Rys. 5.241a



Rys. 5.241b

### Przekrój torusa

Torus, inaczej powierzchnia pierścieniowa powstaje przez obrót okręgu  $k$  dookoła prostej  $l$ , która nie jest średnicą i jest zawarta w płaszczyźnie okręgu. Gdy prosta jest zewnętrzna względem okręgu — otrzymujemy torus zwykły (rys. 5.242a), gdy jest styczna do okręgu — torus z jednym biegunem (na rysunku 5.242b biegunem jest punkt M), gdy jest sieczna — torus z dwoma biegunami (na rysunku 5.242c biegunami są punkty M i N). Biegunami nazywamy punkty wspólne powierzchni i osi obrotu.



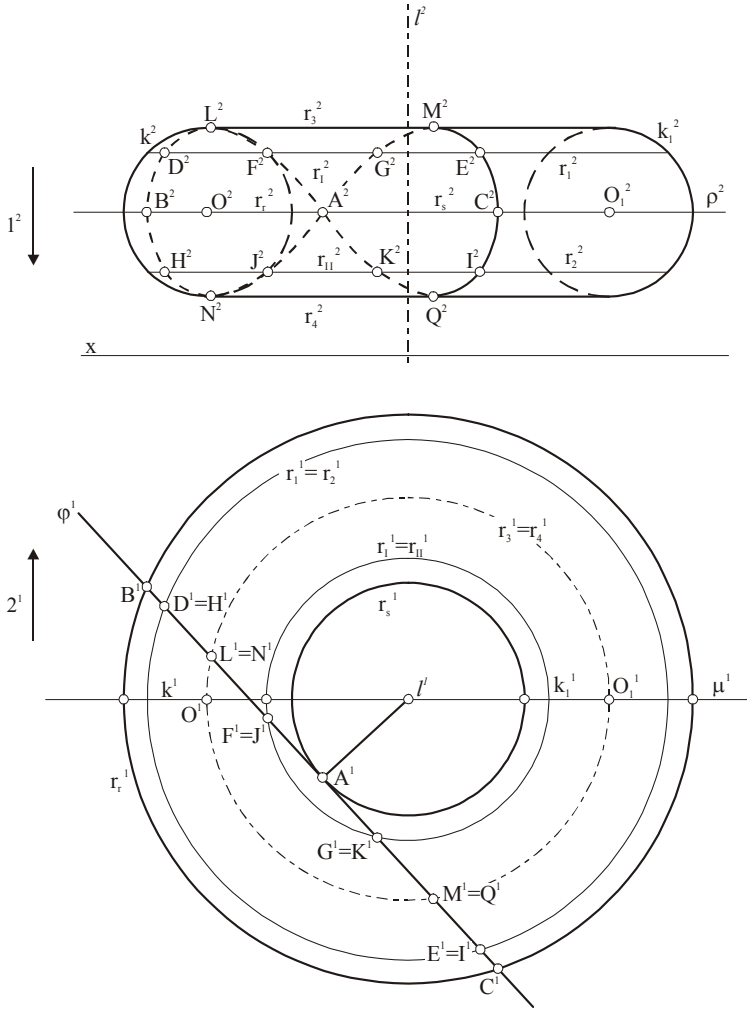
Rys. 5.242

**Ćwiczenie 126**

Wykreślić rzuty przekroju torusa o pierwszorządzącej osi  $l$  płaszczyzną pierwszorzędującą  $\phi$ .

*Rozwiązanie*

Pierwszy rzut przekroju jest odcinkiem  $\langle B^1C^1 \rangle$  (rys. 5.243). Punkty te znajdują się na równiku torusa. Pozostałe punkty wyznaczamy za pomocą równoleżników torusa. W rzucie drugim łuk przekroju  $\langle M^2E^2C^2I^2Q^2 \rangle$  jest widoczny, pozostała część przekroju jest niewidoczna.

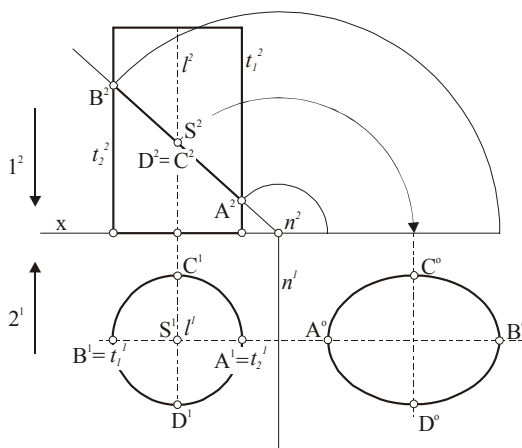


Rys. 5.243

## Przekroje powierzchni walcowej

### Ćwiczenie 127

Wyznaczyć przekrój walca obrotowego płaszczyzną rzutującą oraz wyznaczyć wielkość przekroju.



Rys. 5.244

### Rozwiązanie

Walcem nazywamy bryłę ograniczoną częścią powierzchni walcowej i dwiema równoległymi podstawami.

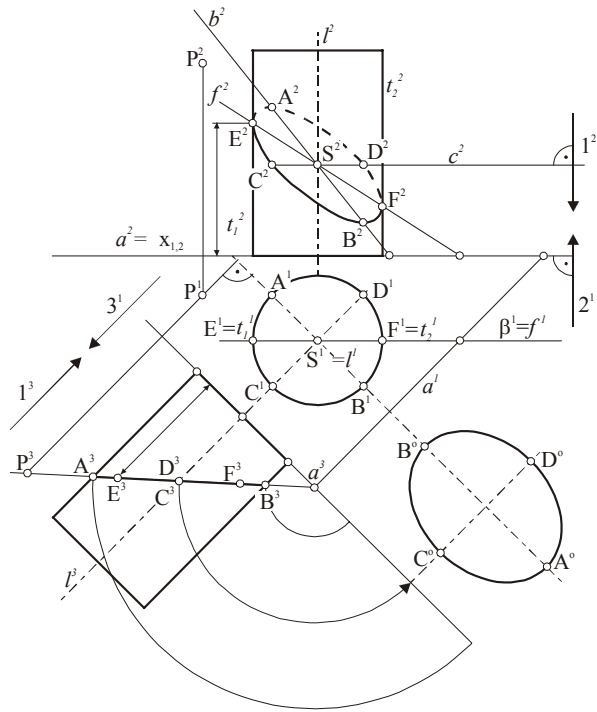
Płaszczyzna  $\alpha$  przecina powierzchnię walca w elipsie. Pierwszy rzut tej elipsy jest okręgiem (rys. 5.244) o odcinkach średnicowych sprzężonych  $\langle A^1B^1 \rangle$  i  $\langle C^1D^1 \rangle$ . Drugi rzut elipsy jest odcinkiem  $\langle A^2B^2 \rangle$ . Odcinek średnicowy  $\langle CD \rangle$  zawarty jest w prostej drugorzutującej, a więc  $C^2 = D^2$ . Wielkość przekroju znajdujemy przez obrót płaszczyzny  $\alpha$  do położenia na rzutnię  $\pi_1$ . Oś obrotu jest krawędź  $\alpha$  i  $\pi_1$ ;  $n = \alpha \cap \pi_1$ .

### Ćwiczenie 128

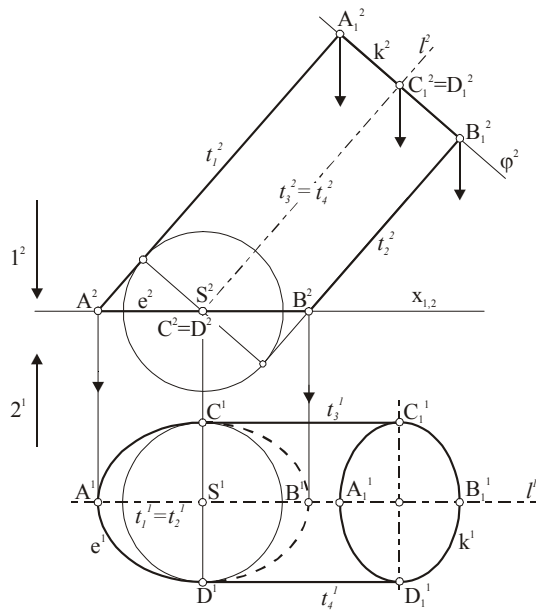
Wyznaczyć przekrój walca płaszczyzną ogólną  $\alpha = Pa(a \subset \pi_1)$ .

### Rozwiązanie

Wprowadzamy  $\pi_3 \perp a$  aby płaszczyzna  $\alpha$  stała się trzeciorzutuącą (rys. 5.245). Rzut trzeci przekroju jest odcinkiem, rzut pierwszy okręgiem. Wyznaczamy rzut drugi odcinków średnicowych sprzężonych  $\langle A^2B^2 \rangle$  i  $\langle C^2D^2 \rangle$  oraz punkty styczności przekroju z zarysem walca w rzucie drugim. W tym celu przez oś walca  $l$  prowadzimy płaszczyznę  $\beta$  tnącą walec w przekroju będącym brzegiem drugiego rzutu, wyznaczamy prostą  $f = \alpha \cap \beta$ . Punkty EF przecięcia prostej  $f$  z zarysem walca są punktami dzielącymi elipsę na część widoczną i niewidoczną. Cechy punktów E i F mierzone w rzucie drugim i trzecim są równe. Wielkość elipsy otrzymujemy w układzie płaszczyzny  $\alpha$  na rzutnię pierwszą  $\pi_1$ .



Rys. 5.245



Rys. 5.246

### Ćwiczenie 129

Dana jest powierzchnia walcowa obrotowa (opisana na kuli) o osi  $l \parallel \pi_2$ . Wykreślić rzuty kierownicy  $e$  tej powierzchni zawartej w  $\pi_1$  oraz rzuty przekroju powierzchni płaszczyzną normalną  $\varphi$ .

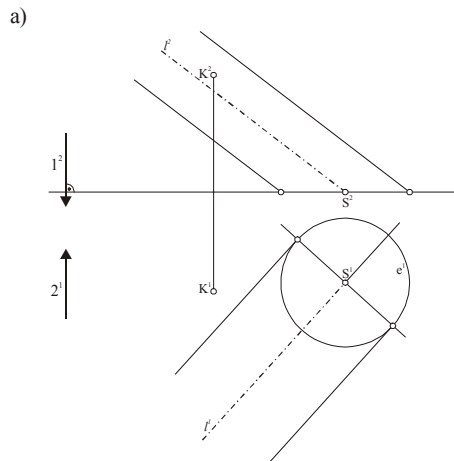
#### Rozwiązanie

Drugi rzut kierownicy  $e$  jest odcinkiem  $\langle A^2B^2 \rangle$ .  $S$  jest punktem przebiecia  $\pi_1$  osią  $l$ . Przekrój  $e$  powierzchni walcowej rzutnią  $\pi_1$  jest elipsą, której drugi rzut jest odcinkiem  $\langle A^2B^2 \rangle$  (rys. 5.246). Punkty  $A, B$  znajdują się na tworzących  $t_1$  i  $t_2$ ; punkty  $C, D$  na  $t_3$  i  $t_4$ . Pierwszy rzut kierownicy  $e$  jest elipsą o odcinkach osiowych  $\langle A^1B^1 \rangle$  i  $\langle C^1D^1 \rangle$ .

Przekrój powierzchni walcowej płaszczyzną  $\varphi (\varphi \perp l)$  jest okręgiem. Jego drugi rzut jest odcinkiem  $\langle A^2B^2 \rangle$ , a rzut pierwszy elipsą o odcinkach osiowych:  $\langle A^1B^1 \rangle$  odcinek osiowy poboczny i  $\langle C^1D^1 \rangle$  odcinek osiowy główny.

### Ćwiczenie 130

Dana jest powierzchnia walcowa nieobrotowa o osi  $l$  i kierownicy ( $e$ ) będącej okręgiem o środku  $S$  zawartym w płaszczyźnie pierwszorzutowej  $\varphi$ , oraz dany jest punkt  $K$  (rys. 5.247a). Wyznaczyć przekrój powierzchni walcowej płaszczyzną  $\alpha$  zawierającą punkt  $K$  i prostopadłą do osi  $l$ . Ustalić widoczność bryły ograniczonej płaszczyznami  $\varphi$  i  $\alpha$ , oraz wyznaczyć rzuty powierzchni (rys. 5.247a).



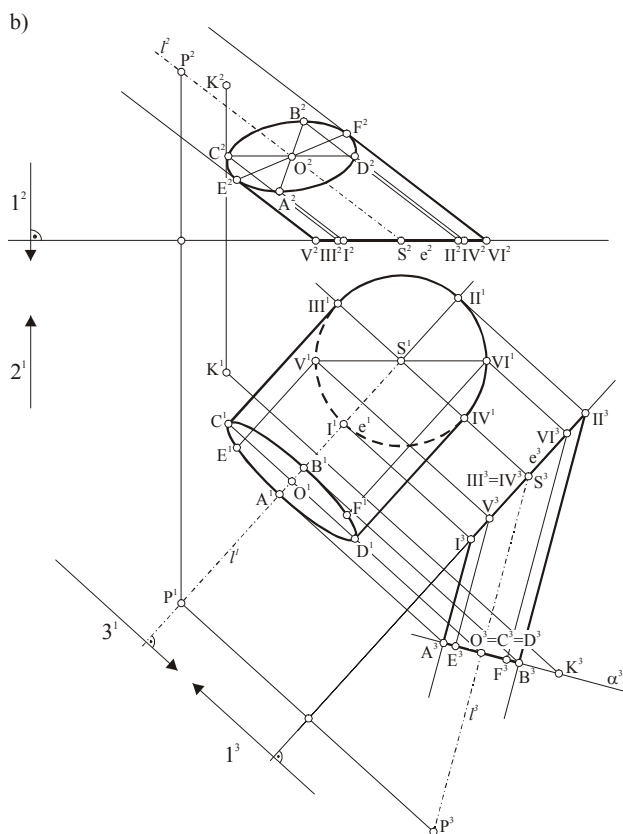
Rys. 5.247a

#### Rozwiązanie

W układzie [1,2] wprowadzamy prostą  $3 \perp l$  i mamy układ [1, 3]. Płaszczyzną porównawczą jest płaszczyzna  $\varphi \perp l$  (rys. 5.247b). Obejmujemy dowolny punkt  $P$  należący do osi powierzchni walcowej i wyznaczamy trzeci rzut punktów  $S, P$  i  $K$ .  $S^3P^3 = l^3$ . Trzeci rzut okręgu  $e$  jest odcinkiem, tworzące będące zarysem trzecim powierzchni walcowej są równoległe do rzutu osi:  $l^3$ . Prosta  $l$  jest w położeniu trzeciowarstwowym, a więc płaszczyzna  $\alpha$  jest trzeciorzutuująca: przez  $K^3$  kreślimy  $\alpha^3 \perp l^3$ . Płaszczyzna  $\alpha$  przecina powierzchnię walcową w elipsie, której trzeci rzut jest odcinkiem  $\langle A^3B^3 \rangle$ . Odcinek średnicowy  $\langle AB \rangle$  zawarty jest w prostej trzeciowarstwowej a prostopadły do niego odcinek  $\langle CD \rangle$  jest trzeciorzutuujący i pierwszorzutowy. Rzuty pierwsze i drugie odcinków średnicowych  $\langle AB \rangle$  i  $\langle CD \rangle$  wyznaczamy za pomocą tworzących w których są zawarte. Punkty przecięcia wymienionych tworzących z okrę-



giem  $e$  oznaczone są: I, II, III i IV. W rzucie pierwszym związanym z rzutem trzecim odcinki  $\langle A^1B^1 \rangle$  i  $\langle C^1D^1 \rangle$  są osiami elipsy; w rzucie drugim odcinki  $\langle A^2B^2 \rangle$  i  $\langle C^2D^2 \rangle$  są odcinkami średnicowymi sprzężonymi. Ważne jest wyznaczenie punktów styczności przekroju z zarysem powierzchni. W rzucie pierwszym tymi punktami są:  $C^1$  i  $D^1$ . W rzucie drugim punkty te wyznaczamy następująco: zewnętrzne tworzące przecinają okrąg  $e$  w punktach V i VI. Wyznaczamy rzuty pierwsze i trzecie tych punktów oraz rzuty tworzących przez nie przechodzących i w rzucie trzecim wyznaczamy ich punkty przebicia z płaszczyzną  $\alpha$ . Są to punkty E i F ( $E^3, F^3$ ), oraz punkty symetryczne. Znajdujemy rzuty pierwsze i drugie punktów E i F.  $E^2$  i  $F^2$  są punktami styczności przekroju z zarysem drugim powierzchni. Wykreślamy elipsy oraz wyznaczamy widoczność w obu rzutach traktując figurę ograniczoną między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\varphi$  częścią powierzchni jako walec. Ze względu na zwrot prostych 1 i 2 zarówno w pierwszym jak i w drugim rzucie elipsa zawarta w płaszczyźnie  $\alpha$  jest widoczna.



Rys. 5.247b

### Przekroje powierzchni stożkowej

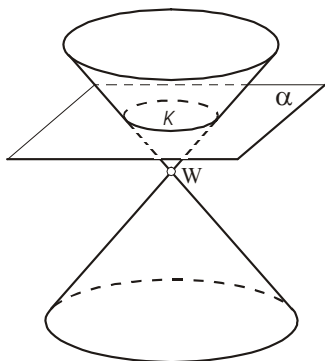
Przekrojem powierzchni stożkowej obrotowej, bądź nieobrotowej o kierownicy będącej okręgiem lub elipsą, jest stożkowa. Gdy płaszczyzna sieczna przechodzi przez wierzchołek, stożkowa jest zdegenerowana; jeśli nie przechodzi przez wierzchołek, stożkowa jest niezdegenerowana i jest elipsą lub okręgiem, parabolą lub hiperbolą.

Jeżeli płaszczyzna sieczna przecina wszystkie tworzące w punktach właściwych, to przekrojem jest okrąg lub elipsa (rys. 5.248ab).

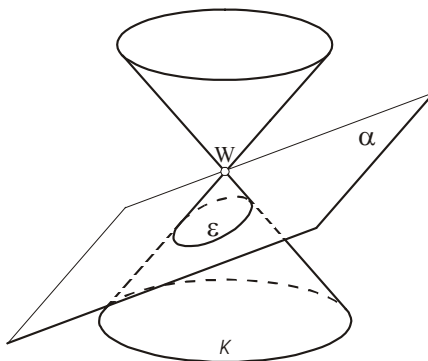
Jeżeli płaszczyzna sieczna jest równoległa do jednej tworzącej, to przekrojem jest parabola (rys. 5.249).

Jeżeli płaszczyzna sieczna jest równoległa do dwóch tworzących, to przekrojem jest hiperbola (rys. 5.250).

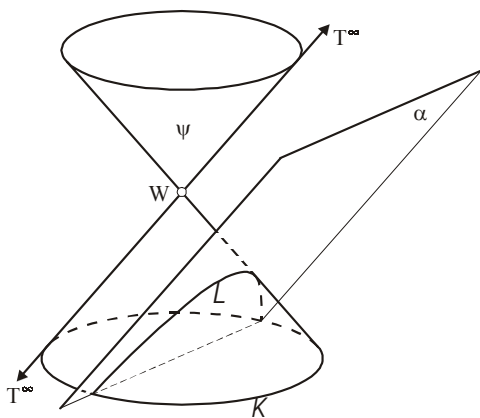
a)



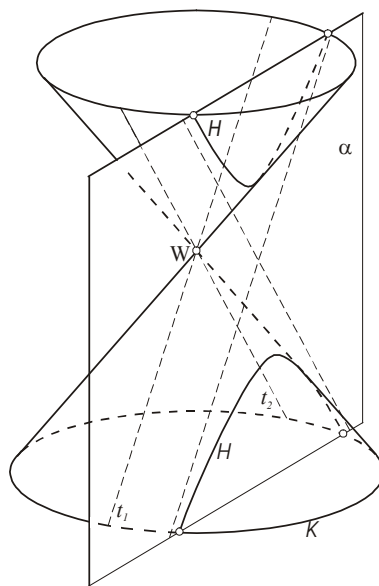
b)



Rys. 5.248



Rys. 5.249



Rys. 5.250

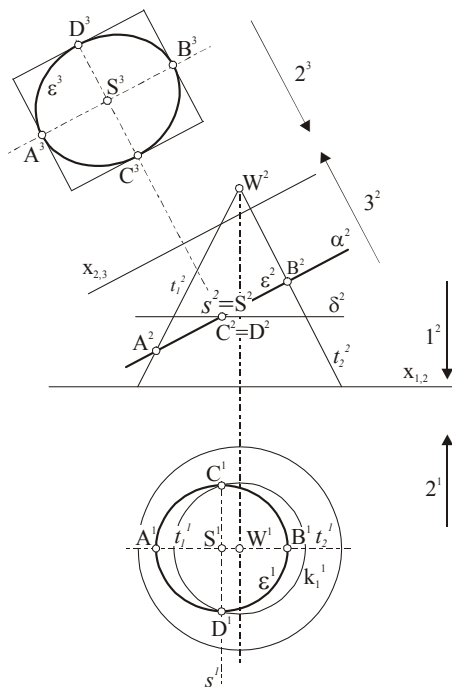
### Ćwiczenie 131

Wyznaczyć przekrój stożka obrotowego płaszczyzną drugorzutującą, przecinającą w punktach właściwych wszystkie tworzące pobocznicę stożka, oraz wyznaczyć kład przekroju.

#### Rozwiązanie

Przekrojem jest elipsa  $\varepsilon$ , której rzutem drugim jest odcinek  $\langle A^2B^2 \rangle$  (rys.5.251). Pierwszy rzut elipsy wyznaczamy znajdując jej odcinki osiowe  $\langle A^1B^1 \rangle$  i  $\langle C^1D^1 \rangle$ . Punkty A B znajduje-

my na tworzących  $t_1$  i  $t_2$ . Dla wyznaczenia odcinka  $\langle CD \rangle$  prowadzimy przez środek elipsy  $S$  płaszczyznę pierwszorzutową  $\delta$ . Przecina ona płaszczyznę  $\alpha$  w krawędzi  $s$ , a pobocznice stożka w okręgu  $k_1$ . Okrąg  $k_1^1$  przecina prostą  $s^1$  w punktach  $C^1$  i  $D^1$ . Wykreślamy rzut trzeci elipsy na rzutni  $\pi_3 \parallel \alpha$ . Elipsa  $\varepsilon^3$  jest przystająca do elipsy  $\varepsilon$  przekroju.



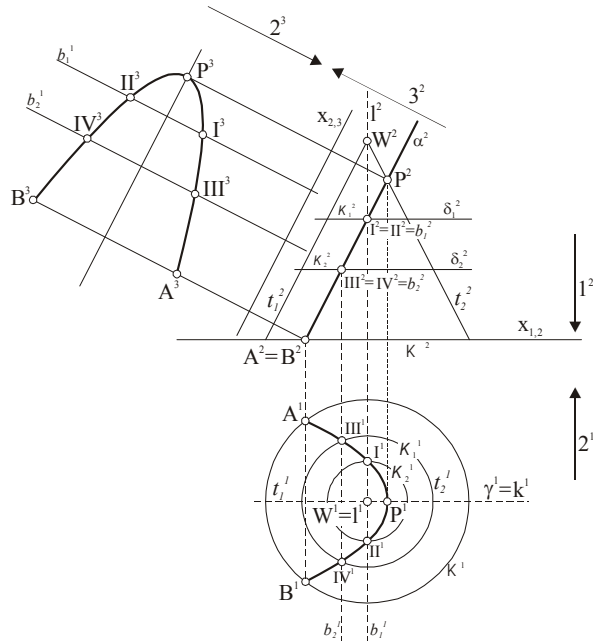
Rys. 5.251

### Ćwiczenie 132

Wyznaczyć przekrój stożka w paraboli płaszczyzną drugorzutową  $\alpha$  oraz wyznaczyć wielkość przekroju.

#### Rozwiązanie

Płaszczyznę  $\alpha$  kreślimy równolegle do jednej tworzącej  $t_1$  (rys. 5.252). Drugim rzutem odcinka paraboli jest odcinek, którego końcami są  $A^2 = B^2$  i  $P^2$ . Płaszczyzna  $\gamma$  przechodząca przez oś  $l$  stożka przecina pobocznice w tworzących  $t_1$  i  $t_2$ , zaś płaszczyznę  $\alpha$  w krawędzi  $k$ . Punkt  $P$  jest wierzchołkiem paraboli ( $P = t_2 \cap k$ ). Punkty  $A$  i  $B$  powstałe w wyniku przecięcia okręgu  $K$  podstawy stożka płaszczyzną  $\alpha$  są punktami paraboli. Dalsze punkty paraboli wyznaczamy za pomocą płaszczyzn pierwszorzutowych  $\delta_1, \delta_2, \dots$  prostopadłych do osi stożka. Płaszczyzny te przecinają pobocznice stożka w okręgach  $K_1, K_2, \dots$  oraz płaszczyznę  $\alpha$  w prostych  $b_1, b_2, \dots$ . Punktami przekroju są punkty I, II i III, IV, w których proste  $b_1$  i  $b_2$  przecinają okręgi  $K_1$  i  $K_2$ . Przekrojem stożka płaszczyzną  $\alpha$  jest obszar ograniczony łukiem paraboli i odcinkiem  $\langle AB \rangle$ . Wielkość przekroju wyznaczamy wprowadzając  $\pi_3 \parallel \alpha$ .



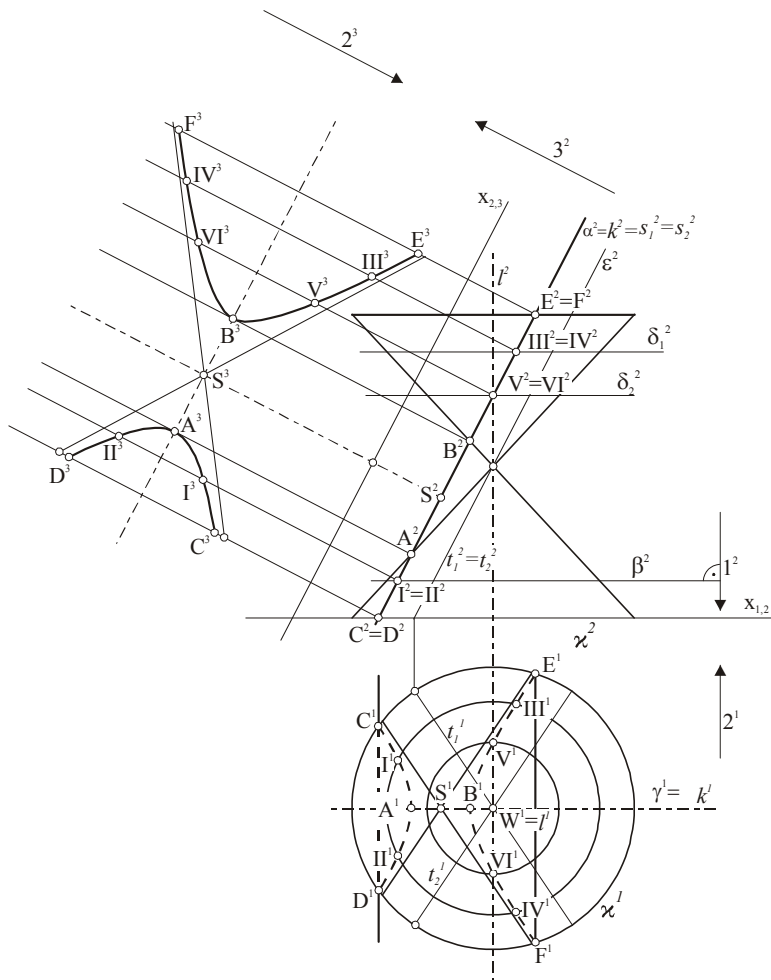
Rys. 5.252

### Ćwiczenie 133

Wyznaczyć przekrój stożka płaszczyzną drugorzutującą równoległą do dwóch tworzących  $t_1$  i  $t_2$ .

#### Rozwiązanie

Płaszczyzna  $\alpha$  przecina pobocznice stożka w odcinkach hiperboli (rys. 5.253). Punkty tej hiperboli wyznaczamy następująco: przez oś stożka prowadzimy płaszczyznę drugorzutującą  $\gamma$  przecinającą pobocznice stożka w tworzących  $t_3$  i  $t_4$  oraz płaszczyznę  $\alpha$  w prostej  $k$ . Punkty A, B przecięcia  $k$  z  $t_3$  i  $t_4$  są wierzchołkami hiperboli. Środek S odcinka  $\langle AB \rangle$  jest środkiem przekroju. Punkty CD, w których płaszczyzna  $\alpha$  przecina okrąg  $\chi$  podstawy stożka są punktami hiperboli. Dalsze punkty wyznaczamy przecinając pobocznice stożka płaszczyznami  $\beta$ ,  $\delta_1$  i  $\delta_2$  prostopadłymi do osi  $l$  stożka. Asymptoty hiperboli otrzymamy prowadząc przez punkt S proste  $s_1 \parallel t_1$  i  $s_2 \parallel t_2$ . Przekrojem stożka są dwa obszary ograniczone łukami hiperboli i odcinkami  $\langle CD \rangle$  i  $\langle EF \rangle$ .  $\pi_3 \parallel \alpha$  pozwala wyznaczyć wielkość przekroju.



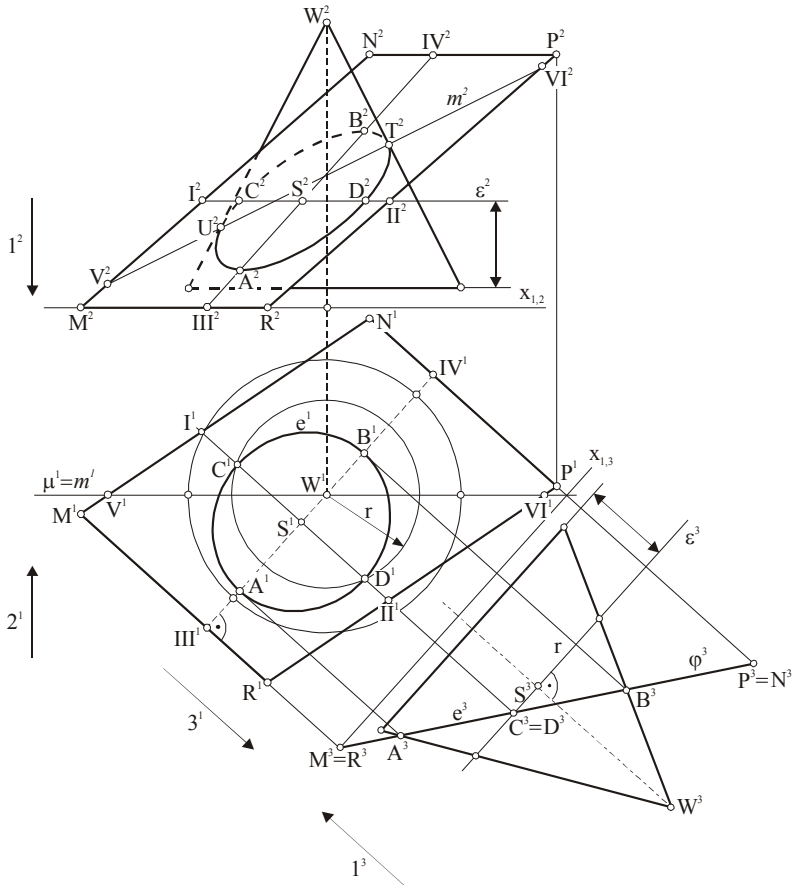
Rys. 5.253

### Ćwiczenie 134

Wyznaczyć przekrój stożka obrotowego o osi  $l$  płaszczyzną  $\varphi$  równoległoboku (MNPR).

#### Rozwiązanie

Wyznaczamy  $\pi_3$  prostopadłe do płaszczyzny  $\varphi$  czyli prostopadłe do prostych pierwszorzędowych NP i MR (rys. 5.254). Wyznaczamy trzeci rzut płaszczyzny i trzeci rzut stożka. Płaszczyzna przecina powierzchnię stożka w elipsie, której trzeci rzut jest odcinkiem  $\langle A^3B^3 \rangle$ . Rzut pierwszy wyznaczamy podobnie jak w ćwiczeniu 68 kreśląc odcinki osiowe  $\langle A^1B^1 \rangle$  i  $\langle C^1D^1 \rangle$ . Drugie rzuty tych odcinków dają odcinki średnicowe sprzężone elipsy. Punkty U, T styczności elipsy przekroju z zarysem powierzchni stożkowej w drugim rzucie wyznaczamy wprowadzając płaszczyznę drugorzędową  $\mu$  przechodzącą przez oś stożka. Płaszczyzna  $\mu$  przecina  $\varphi$  w prostej  $m(m=\mu \cap \varphi)$ , a powierzchnię stożkową w dwóch tworzących będących zarysem powierzchni w rzucie drugim. Punkty T i U są wspólne dla  $m$  i tych tworzących i są granicą widoczności przekroju w rzucie drugim.



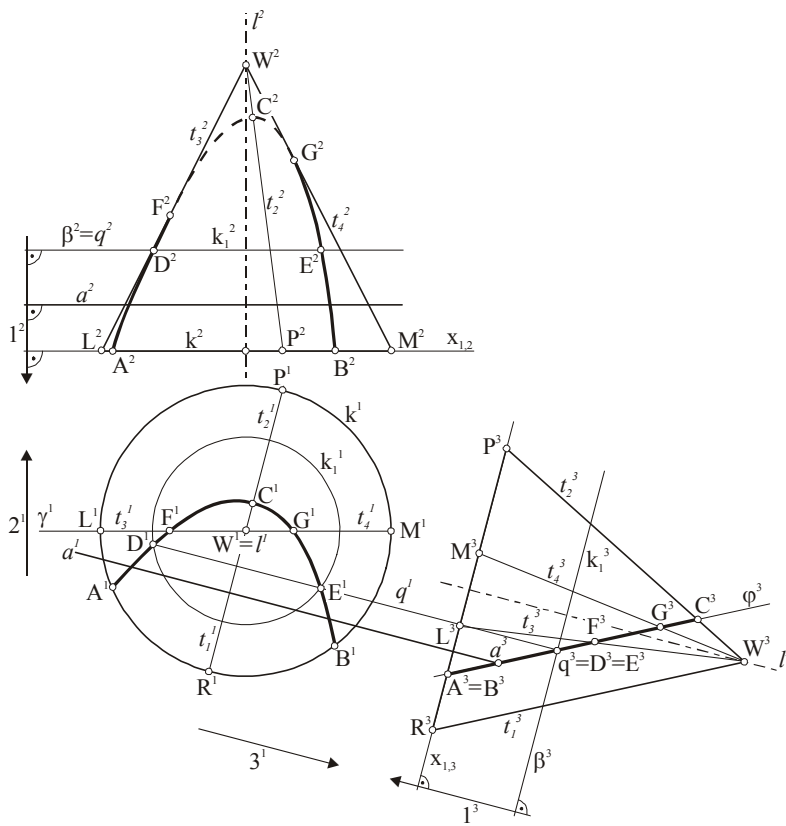
Rys. 5.254

### Ćwiczenie 135

Dany jest stożek obrotowy o podstawie  $k$  i wierzchołku  $W \in l$  oraz prosta pierwszorzędowa  $a$ . Wyznaczyć przekrój stożka w paraboli płaszczyzną  $\varphi$  zawierającą prostą  $a$ .

#### Rozwiązanie

Wprowadzamy rzutnię  $\pi_3 \perp a$  i wyznaczamy trzeci rzut stożka i trzeci rzut prostej  $a$ :  $a^3$  (rys. 5.255). Przez prostą  $a$  prowadzimy płaszczyznę  $\varphi \parallel t_1$ . Płaszczyzna jest trzeciorzutująca ponieważ prosta  $a$  jest trzeciorzutująca. Trzeci rzut przekroju (odcinka paraboli) jest odcinkiem  $\langle A^3 = B^3, C^3 \rangle$ . Pierwszy rzut wyznaczamy podobnie jak w ćwiczeniu 128 (rys. 5.252). Punkty  $A$  i  $B$  znajdują się na podstawie stożka  $A^1$  i  $B^1$  na  $k^1$  i  $A^2, B^2$  na  $k^2$ . Punkt  $C$ , wierzchołek paraboli znajduje się na tworzącej  $t_2$ . Dowolne punkty paraboli jak  $D$  i  $E$  wyznaczamy przecinając stożek i płaszczyznę  $\varphi$  płaszczyzną pierwszorzędową  $\beta \perp l$ . Płaszczyzna przecina powierzchnię stożka w okręgu  $k_1$ , a płaszczyznę  $\varphi$  w krawędzi  $q$ . Punkty wspólne dla prostej  $q$  i okręgu  $k_1$  są punktami paraboli. Następnie wyznaczamy punkty wspólne przekroju i zarysu stożka w rzucie drugim. W tym celu przez prostą  $l$  prowadzimy płaszczyznę drugorzędową  $\gamma$ . Płaszczyzna ta kroi stożek w tworzących  $t_3$  i  $t_4$ . Wyznaczamy trzecie rzuty tych tworzących i punkty  $F^3 = t_3^3 \cap \varphi^3$  i  $G^3 = t_4^3 \cap \varphi^3$ ; następnie rzuty  $F^1, G^1$  i  $F^2, G^2$ . Płaszczyzna  $\gamma$  dzieli stożek na część widoczną i niewidoczną w rzucie drugim; punkty  $F$  i  $G$  są granicą widoczności.



Rys. 5.255

### 11.5. Punkty przebicia powierzchni prostą

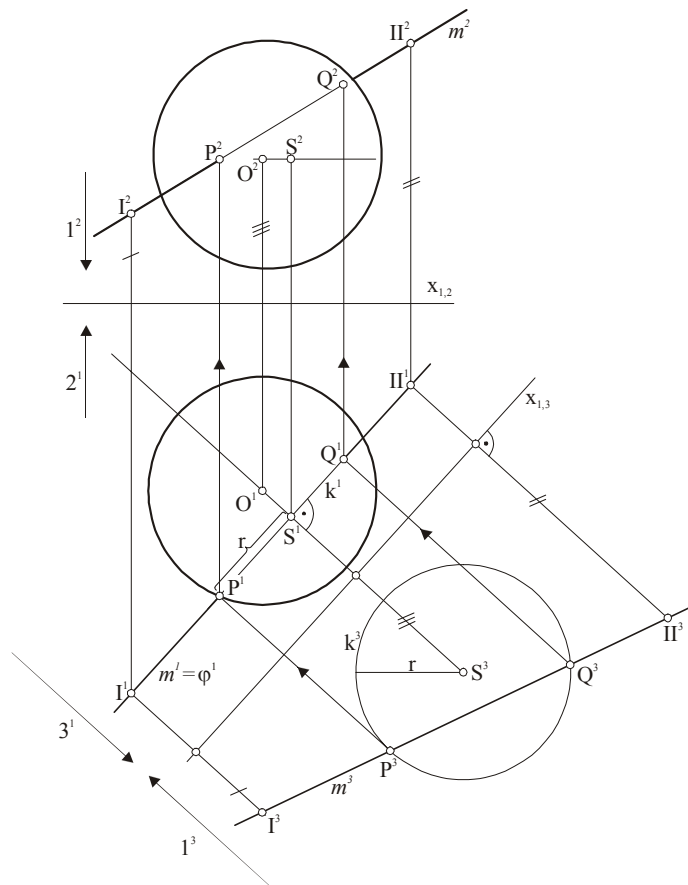
Aby wyznaczyć punkty przebicia powierzchni prostą postępujemy następująco:  $1^\circ$  — przez prostą prowadzimy płaszczyznę,  $2^\circ$  — wyznaczamy przekrój powierzchni płaszczyzną,  $3^\circ$  — wyznaczamy punkty przecięcia przekroju prostą.

#### Ćwiczenie 136

Wyznaczyć punkty przebicia sfery prostą  $m$ .

#### Rozwiązanie

Przez prostą  $m$  prowadzimy płaszczyznę  $\phi \perp \pi_1$ . Przekrój sfery płaszczyzną  $\phi$  jest okręgiem  $k$ , którego pierwszy rzut jest odcinkiem. Wprowadzamy  $\pi_3 \parallel \phi$  i wyznaczamy trzeci rzut przekroju i trzeci rzut prostej  $m$  (rys. 5.256). Punkty  $P^3$  i  $Q^3$  przecięcia  $m^3$  z okręgiem  $k^3$  są trzecimi rzutami punktów przebicia. Rzuty pierwszy i drugi tych punktów wyznaczamy odpowiednio na  $m^1$  i  $m^2$ . Określamy widoczność prostej.



Rys. 5.256

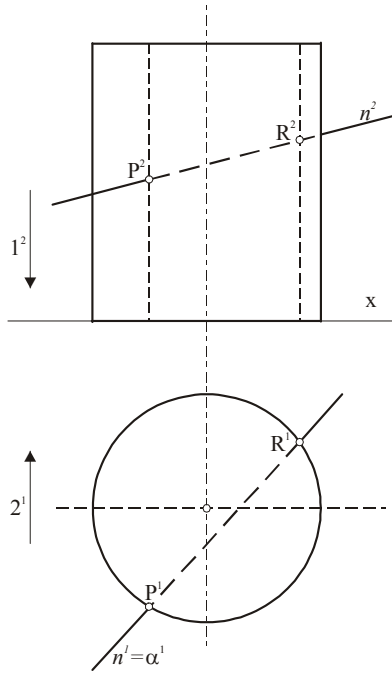
### Ćwiczenie 137

Wyznaczyć punkty przebiecia powierzchni walcowej prostą  $m$ .

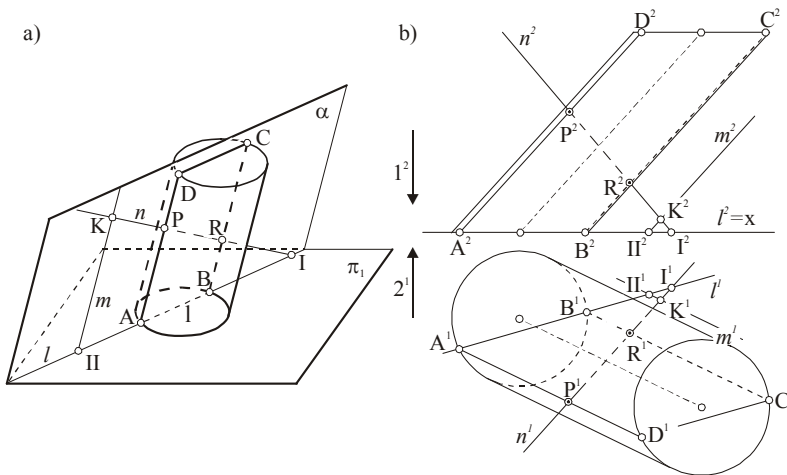
#### Rozwiązanie

Jeżeli powierzchnia walca jest rzutująca, punkty przebiecia znajdujemy od razu jak na rysunku 5.257. W innym przypadku przez prostą  $n$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  równoległą do tworzących walca za pomocą prostej  $m$  przecinającej prostą  $n$  w punkcie  $K$  i równoległą do tworzących (rys. 5.258a,b). Punkty przebiecia prostych  $m$  i  $n$  z rzutnią  $\pi_1$  wyznaczają prostą  $l$  która przecina okrąg podstawy walca w punktach  $A$  i  $B$ . Przekrój walca płaszczyzną  $\alpha$  jest równoległobokiem  $\langle ABCD \rangle$ . Punkty  $P$  i  $R$  przecięcia przekroju prostą  $n$  są punktami przebiecia. Na rysunku 5.258b wyznaczamy widoczność prostej  $n$ . Tworząca  $AD$  jest widoczna w obu rzutach, a więc punkt  $P$  jest widoczny w obu rzutach i prosta  $n$  jest widoczna do punktu  $P$ . Tworząca  $BC$  jest niewidoczna w obu rzutach, a więc i punkt  $R$  jest niewidoczny i prosta  $n$  jest widoczna od zarysu walca.





Rys. 5.257



Rys. 5.258

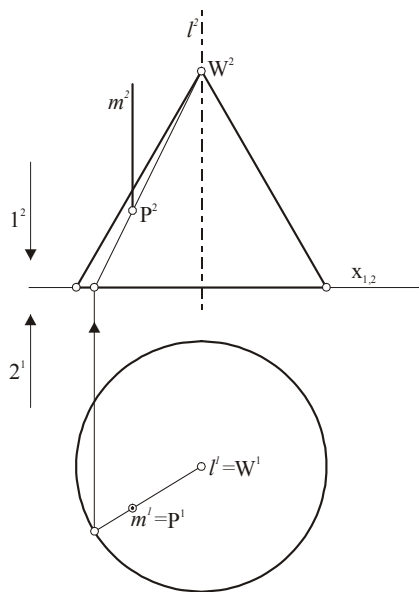
### Ćwiczenie 138

Wyznaczyć punkty przebiecia pobocznicy stożka prostą  $m$ .

*Rozwiązanie*

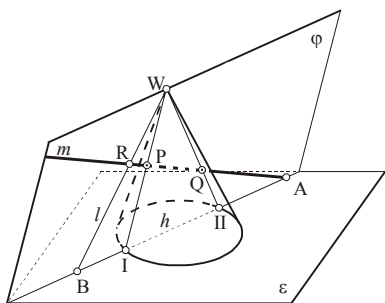
W przypadku, gdy prosta  $m$  jest rzutująca jak na rysunku 5.259 punkt przebiecia  $P$  znajdujemy na przecięciu z odpowiednią tworzącą. Gdy prosta  $m$  jest prostą ogólną prowadzimy przez prostą  $l$  i przez wierzchołek powierzchni stożkowej płaszczyznę  $\varphi$  za pomocą prostej  $l$  przecinającej prostą  $m$  i przechodzącej przez wierzchołek  $W$  (rys. 5.260a, b). Płaszczyzna  $\varphi$

przecina płaszczyznę podstawy  $\varepsilon$  w prostej  $h$ , która w punktach I i II przecina kierownicę powierzchni stożkowej. Tworzące IW i IIW są przekrojem powierzchni stożkowej płaszczyzną  $\varphi$ . Punkty P i Q przecięcia przekroju prostą  $m$  są punktami przebicia. Ustalamy widoczność prostej  $m$ .

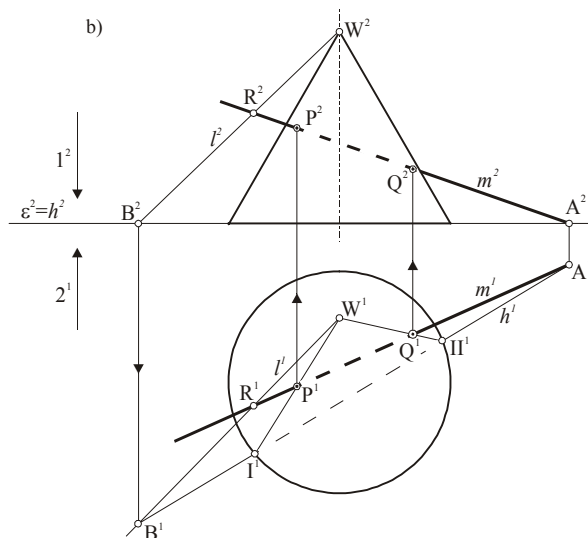


Rys. 5.259

a)



b)



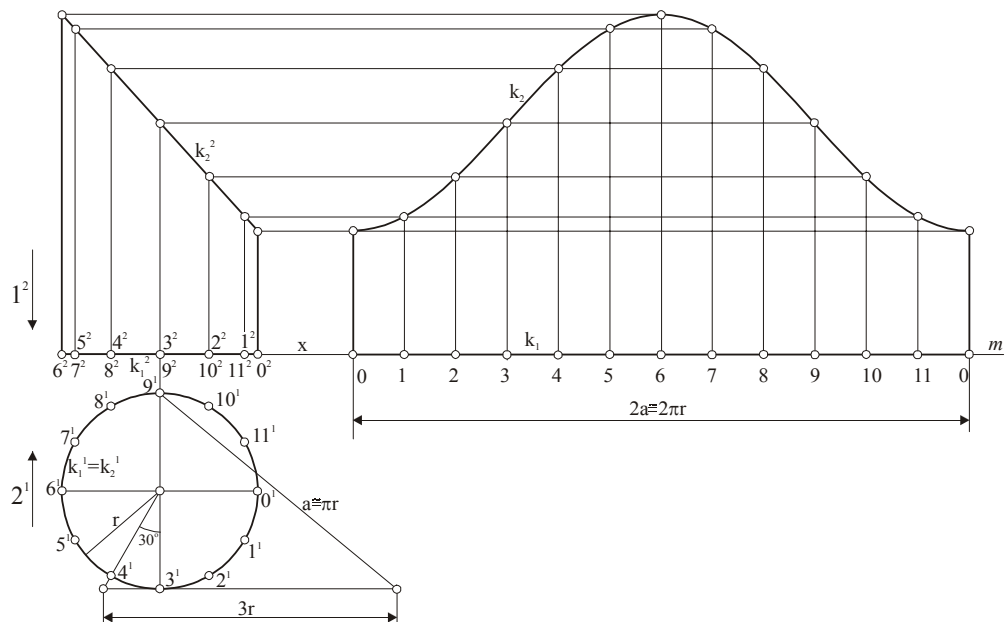
Rys. 5.260

## 11.6. Rozwinięcia powierzchni stożkowych i walcowych

Rozwinięcia powierzchni walcowych konstruuje się podobnie jak rozwinięcia grania-  
stosłupów.

### Ćwiczenie 139

Wyznaczyć rozwinięcie pobocznicę powierzchni walcowej obrotowej ograniczonej  
dwoma przekrojami  $k_1$  i  $k_2$ .



Rys. 5.261

### Rozwiązanie

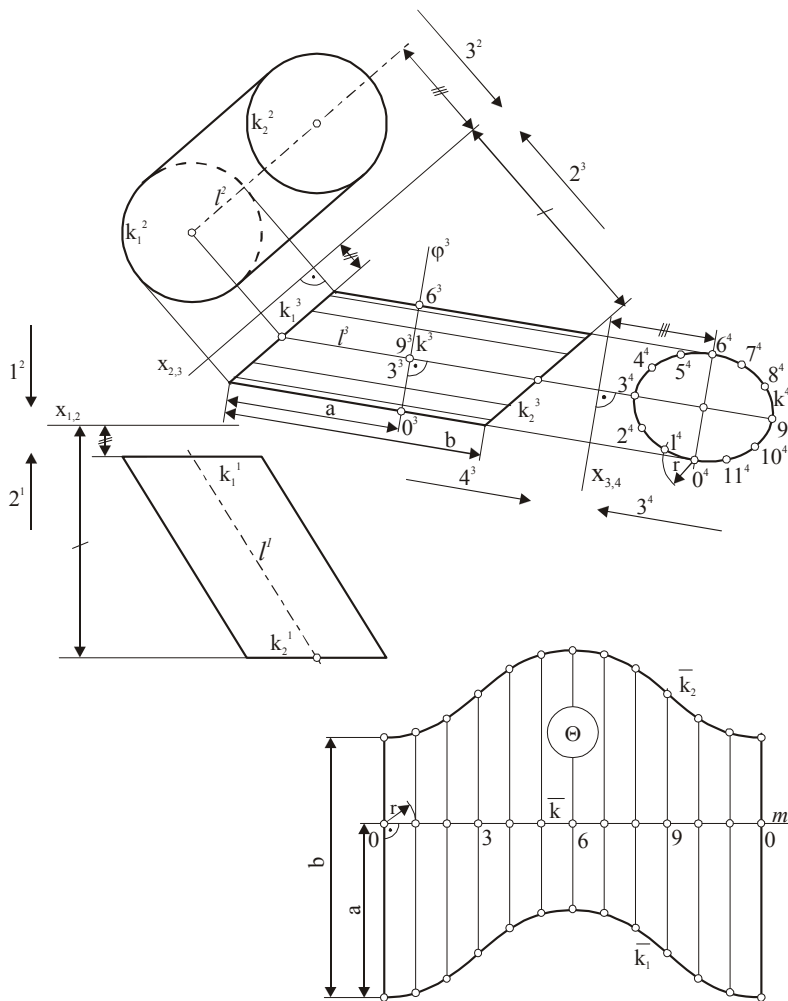
Przekrój  $k_1$  jest przekrojem normalnym (rys. 5.261). Dzielimy go punktami 1, 2, 3... na n łuków równej długości i przez punkty podziału prowadzimy tworzące. Na dowolnej prostej  $m$  odmieramy  $2\pi r = 2a$  znalezione uprzednio metodą A. Kochańskiego (rozdział I, rys. 1.3) i dzielimy na tyle samo części jak okrąg  $k_1$ . Z punktów 0, 1, 2, ... kreślimy odcinki tworzących o długościach równych drugim rzutom odpowiednich odcinków. Na koniec rysujemy rozwinięcie linii  $k_2$ .

### Ćwiczenie 140

Wykreślić rozwinięcie wycinka powierzchni walcowej ograniczonej przekrojami  $k_1$  i  $k_2$ .

### Rozwiązanie

Wprowadzamy  $\pi_3 || l$  (rys. 5.262) i otrzymujemy oś  $l$  i tworzące powierzchni w położeniu warstwowym. Kreślimy przekrój normalny powierzchni płaszczyzną  $\varphi$  prostopadłą do  $l$  i wyznaczamy wielkość przekroju. Przekrój jest elipsą, której łuk dzielimy na pewną ilość odcinków, np. na 12, punktami 0, 1, 2, ... W dowolnym miejscu kreślimy prostą  $m$ , na której odmieramy cięciwy zastępujące łuki  $\langle 0\ 1 \rangle$ ,  $\langle 1\ 2 \rangle$ ;  $\langle 2\ 3 \rangle$  ... i przez punkty 0, 1, 2, ... kreślimy tworzące prostopadłe do  $m$  i odmieramy na nich odpowiednie długości odcinków tworzących, leżących przed i za płaszczyzną  $\varphi$ .



Rys. 5.262

### Ćwiczenie 141

Wyznaczyć rozwinięcie powierzchni walcowej o osi  $l \parallel \pi_2$  ograniczonej przekrojami  $k_1$  i  $k_2$ .

#### Rozwiązanie

Zamiast wprowadzać przekrój normalny rozwinięcie wykonujemy następująco: okrąg  $k_1$  dzielimy na części i wyznaczamy odcinki tworzących  $\langle AA_1 \rangle, \langle 1 1_1 \rangle, \langle 2 2_1 \rangle \dots$  (rys. 5.263) Przewodzący przez oś  $l$  płaszczyznę  $\varphi$  drugorazową. Odcinek  $\langle AA_1 \rangle$  tworzącej jest osią obrotu i  $A^2 = A^\circ, A_1^2 = A_1^\circ$ . Kolejne tworzące obracamy wokół  $A^\circ A_1^\circ$  do położenia na płaszczyźnie  $\varphi$ . Poszczególne płaszczyzny obrotu dla punktów 1, 2, ... są prostopadłe do  $A^\circ A_1^\circ$  a długości łuków  $|A^\circ 1^\circ|, |1^\circ 2^\circ| \dots$  są równe długościom łuków  $|A 1|, |1 2|, \dots$

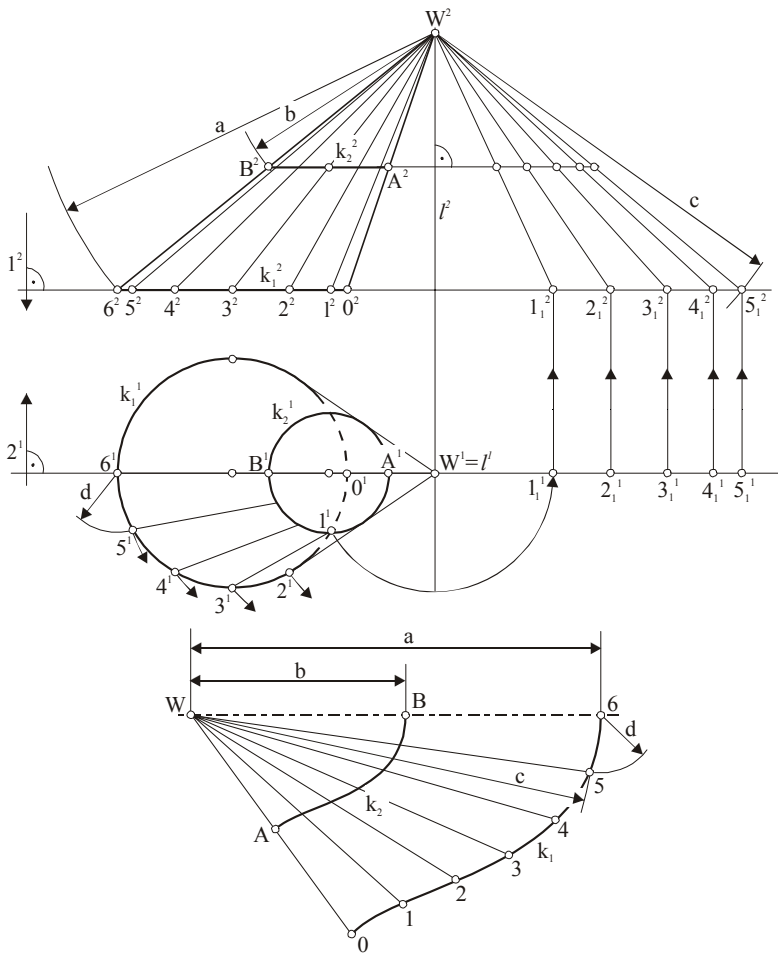


### Ćwiczenie 142

Wyznaczyć rozwinięcie powierzchni stożkowej obrotowej o osi  $l \perp \pi_1$  ograniczonej wierzchołkiem  $W$  i przekrojem  $k$ .

#### Rozwiązanie

Oś  $l$  jest prostą pierwszorzutową, zatem kierownicą powierzchni jest okrąg  $k_p \subset \pi_1$  o promieniu  $r$ . Długość tworzącej zawartej między  $W$  i  $k_p$  oznaczamy:  $t$ . Rozwinięciem powierzchni stożkowej obrotowej ograniczonej wierzchołkiem  $W$  i równoleżnikiem  $k_p$  jest wycinek koła o środku  $W$ , promieniu  $t$  i kącie środkowym  $\omega = 360^\circ \frac{r}{t}$ . Długość łuku  $k_p$  jest równa długości okręgu  $k_p$ . Na to rozwinięcie przenosimy wybrane tworzące powierzchni:  $W0, W1, W2, \dots$ , a na nie długości poszczególnych tworzących (np.  $a, b$ ). W ten sposób powstało rozwinięcie linii  $k$ . Na rysunku 5.264 skonstruowano połowę rozwinięcia powierzchni stożkowej obrotowej zawartej między wierzchołkiem  $W$  i przekrojem  $k$ . Figura  $\Theta$  jest połową szukanego rozwinięcia.



Rys. 5.265

### Ćwiczenie 143

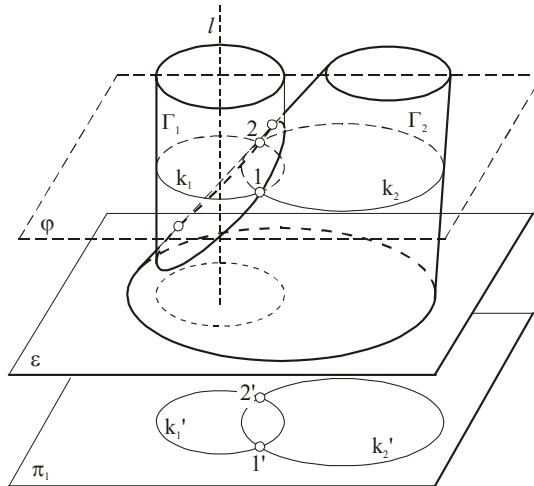
Wykreślić rozwinięcie powierzchni stożkowej nieobrotowej o kierownicach  $k_1$  i  $k_2$  będących okręgami należącymi do jednej rodziny.

#### Rozwiązanie

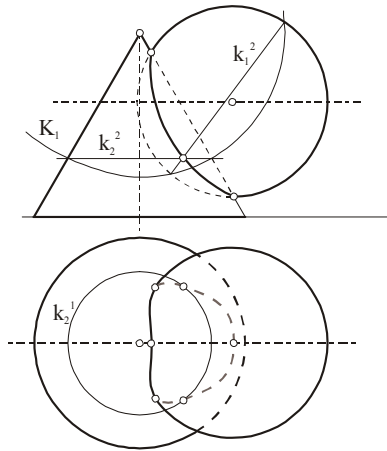
Powierzchnię stożkową nieobrotową rozwijamy podobnie jak pobocznice ostrosłupa. Wyznaczamy rzuty wybranych tworzących:  $W_0, W_1, W_2 \dots$  i obracamy je dookoła prostej pierwszorzutowującej  $l$  do położenia drugorazstwowego. Odcinki  $\langle W^2_0^2 \rangle, \langle W^2_1^2 \rangle, \langle W^2_2^2 \rangle \dots \langle W^2_6^2 \rangle$  są przystające do odcinków  $\langle W_0 \rangle, \langle W_1 \rangle, \langle W_2 \rangle \dots \langle W_6 \rangle$ . Z odcinków tworzących i odcinków kierownicy  $k_1 \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots$  konstruujemy trójkąty, lecz zamiast linii łamanej  $\langle 0, 1, 2, \dots, 6 \rangle$  kreślimy krzywą  $k_1$ . Punkty kierownicy  $k_2$  nanosimy na poszczególne tworzące uwzględniając ich odległości od  $W$ , znalezione na obróconych tworzących (rys. 5.265).

### 11.7. Przenikanie powierzchni

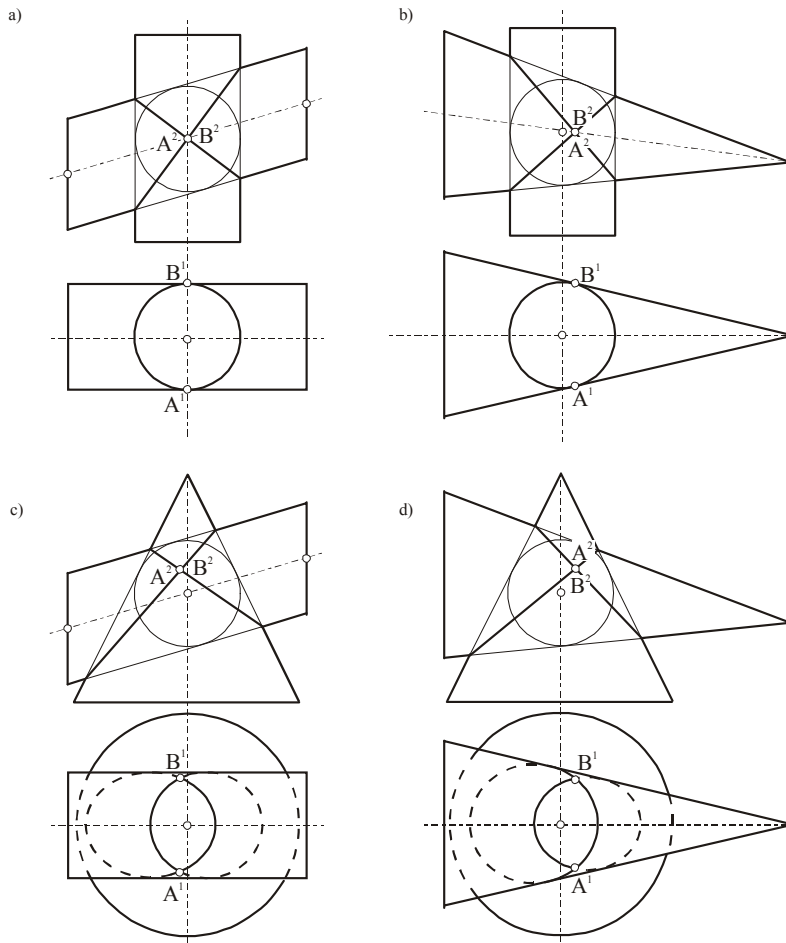
Linia przenikania dwu powierzchni nazywamy zbiór punktów wspólnych tych powierzchni. Linia tę wyznaczamy na ogół następująco: kroimy obie powierzchnie płaszczyznami wyznaczającymi łatwe przekroje (okręgi, proste) i wyznaczamy punkty wspólne przekrojów (rys. 5.266). W szczególnych przypadkach zamiast płaszczyzn wprowadzamy kule, które przecinają obie powierzchnie w okręgach. Punkty wspólne okręgów są punktami przenikania (rys. 5.267). Na ogół linia przenikania dwóch powierzchni jest linią przestrzenną, choć często rozpada się na dwie linie. Jeżeli obie powierzchnie opisane są na wspólnej kuli, linia przenikania rozpada się na dwie krzywe płaskie. Rysunek 5.268 przedstawia takie przykłady.



Rys. 5.266



Rys. 5.267



Rys. 5.268

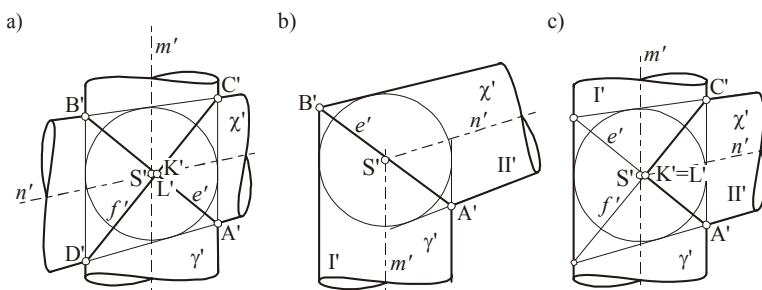


## Rozdział VI

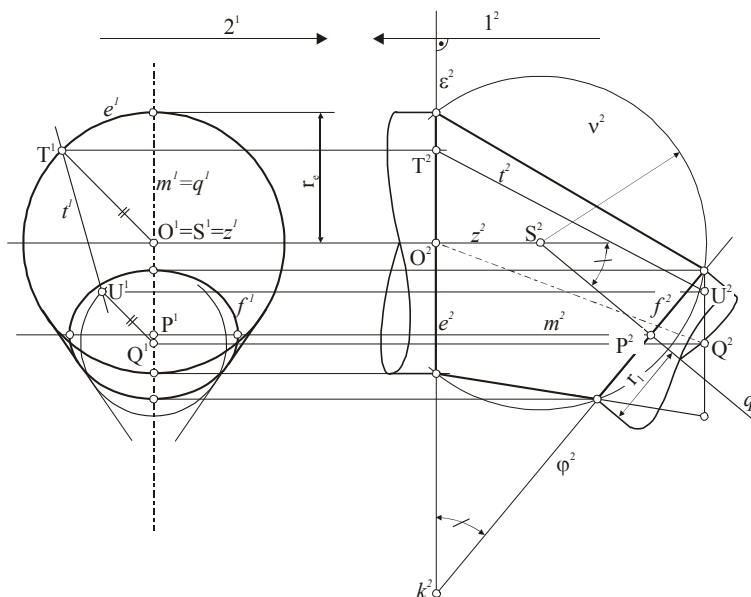
### PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ POWIERZCHNI

#### 1. Tworzenie łączników powierzchniowych

Przewody rurowe mogą być połączone bezpośrednio lub za pomocą łączników. Rozróżniamy połączenia boczne lub czołowe. Na rysunku 6.1a dwa przewody rurowe o osiach  $m$  i  $n$  przenikają się w dwóch elipsach  $e$  i  $f$ , których rzutami są odcinki  $e'$  o końcach  $A', B'$  i  $f'$  o końcach  $C', D'$ . Jeśli pozostawimy tylko linię  $e$  — połączenie nazywamy czołowym (rys. 6.1b). Jeżeli pozostawimy część linii  $e$  i część linii  $f$  do punktów  $K$  i  $L$  jest to połączenie boczne (rys. 6.1c).



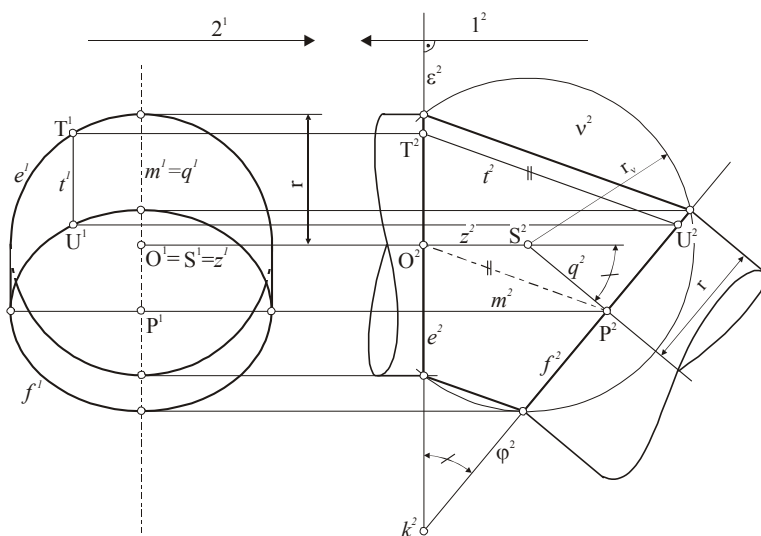
Rys. 6.1



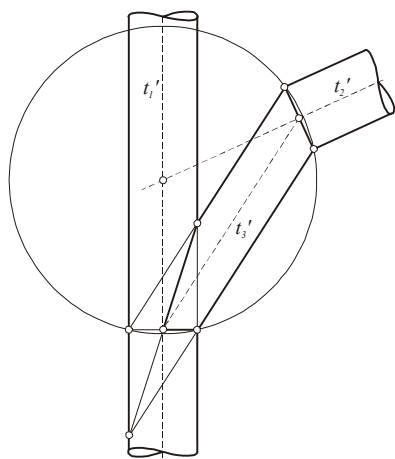
Rys. 6.2

Łączniki mogą być obrotowe, bądź nieobrotowe. W przypadku powierzchni nieobrotowych musimy umieć znaleźć w nich okręgi należące do dwóch różnych rodzin. Rysunki 6.2 i 6.3 przedstawiają powierzchnię stożkową i walcową przeciętą w dwóch okręgach, należących do dwóch różnych rodzin i wyznaczonych za pomocą sfery o środku  $S$ . Środek sfery  $S$  należy do prostych  $z$  i  $q$ , prostopadłych do płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$  zawierających okręgi i przechodzących przez środki  $O$  i  $P$  tych okręgów. Płaszczyzny przecinające powierzchnie przedstawione na rysunkach 6.2 i 6.3 i równoległe do płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$  wyznaczają przekroje w okręgach należących do dwóch różnych rodzin.

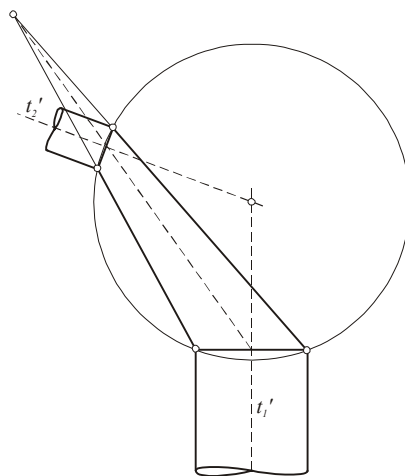
Wycinki takich powierzchni mogą być wykorzystane jako łączniki dwóch przewodów rurowych, walcowych obrotowych o osiach  $t_1$  i  $t_2$  przecinających się. Rysunek 6.4 przedstawia rzut łącznika walcowego nieobrotowego połączonego bocznie z przewodem o osi  $t_1$  i czołowo z przewodem o osi  $t_2$ . Na rysunku 6.5 przedstawiony jest rzut łącznika stożkowego nieobrotowego połączonego czołowo z łączonymi przewodami.



Rys. 6.3

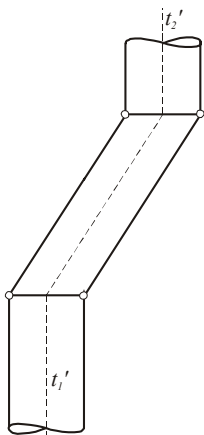


Rys. 6.4

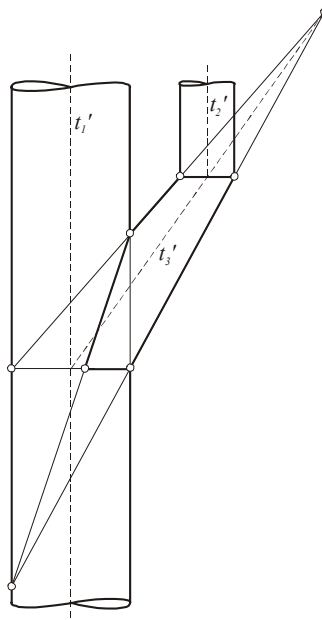


Rys. 6.5

Jeżeli osie łączonych przewodów są równoległe, łącznik nieobrotowy tworzymy za pomocą linii (okręgów) nasadowych równoległych, należących do jednej rodziny.



Rys. 6.6



Rys. 6.7

Rysunek 6.6 przedstawia łącznik walcowy nieobrotowy będący połączeniem dwóch przewodów rurowych, walcowych, obrotowych o osiach  $t_1 || t_2$  zawartych w płaszczyźnie warstwowej. Łącznik jest czołowo połączony z obydwooma przewodami. Rysunek 6.7 przedstawia łącznik stożkowy nieobrotowy łączący dwa przewody rurowe, walcowe, obrotowe o osiach  $t_1$  i  $t_2$  zawartych w płaszczyźnie warstwowej. Z przewodem o osi  $t_1$  łącznik jest połączony bocznie, z przewodem o osi  $t_2$  czołowo. Jeśli okręgi należące do jednej czy też do dwóch rodzin mają równe średnice - powierzchnia łącznika jest wycinkiem powierzchni walcowej. Jeśli mają różne średnice - powierzchnia jest stożkowa.

Łączniki obrotowe tworzymy opisując je na sferach wpisanych w łączone przewody rurowe (rys. 6.8).

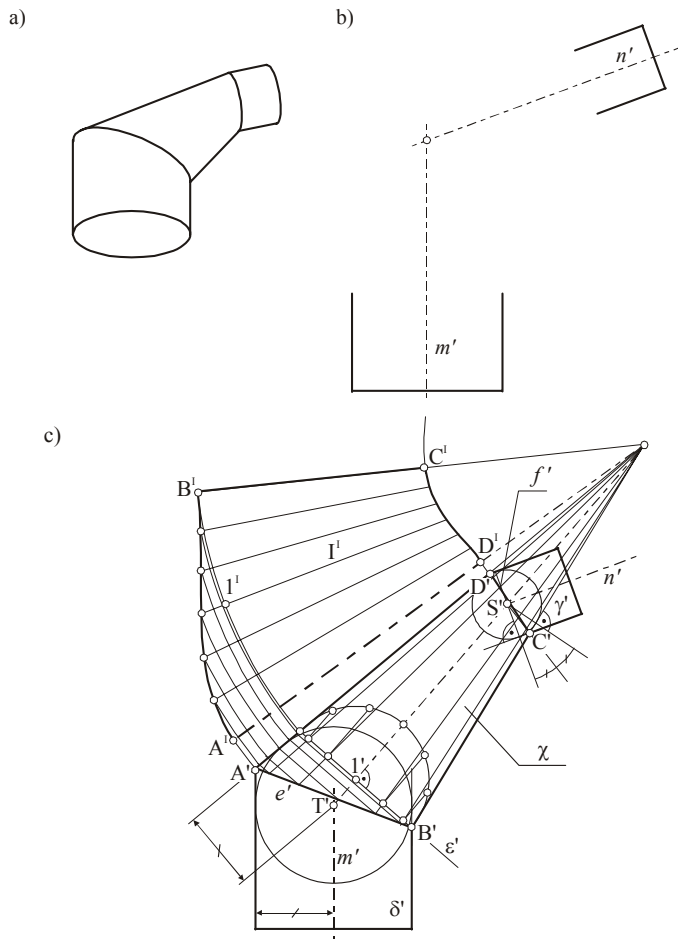
#### Ćwiczenie 144

Dany jest rzut prostokątny dwóch przewodów rurowych  $\delta$  i  $\gamma$  o osiach  $m$  i  $n$  zawartych w płaszczyźnie warstwowej i o różnych średnicach. Zaprojektuj połączenie czołowe obrotowe łączące te przewody (rys. 6.8ab).

#### Rozwiązanie

Osie przewodów  $\delta$  i  $\gamma$  zawarte są w płaszczyźnie warstwowej w związku z czym, zadanie można rozwiązać w jednym rzucie. Wpisujemy w przewód  $\delta$  sferę o środku  $T \in m$  i w przewód  $\gamma$  sferę o środku  $S \in n$ . Na sferach opisujemy powierzchnię stożkową  $\chi$  (rys. 6.8c). Powierzchnia ta jest powierzchnią obrotową styczną do obu sfer. Wybieramy tak części linii przenikania powierzchni stożkowej z walcowymi aby uzyskać połączenia czołowe. Linia przenikania powierzchni  $\chi$  i  $\delta$  jest elipsa  $e$ , a  $\chi$  i  $\gamma$  elipsa  $f$ . Rzuty  $e$  i  $f$  są odcinkami odpowiednio  $\langle A'B' \rangle$  i  $\langle C'D' \rangle$ . Wyznaczamy rozwinięcie powierzchni łącznika. W tym celu przez punkt B prowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$  prostopadłą do osi powierzchni stożkowej. Płaszczyzna  $\varepsilon$

przecina powierzchnię stożkową w okręgu. Wykonujemy kład okręgu na płaszczyznę warstwową i dzielimy go na pewną ilość równych części. Z punktami podziału (np. 1) wracamy na rzut okręgu; przez te punkty prowadzimy tworzące powierzchni. Następnie rozwijamy powierzchnię stożkową jak w ćwiczeniu 141, rys. 5.264 .



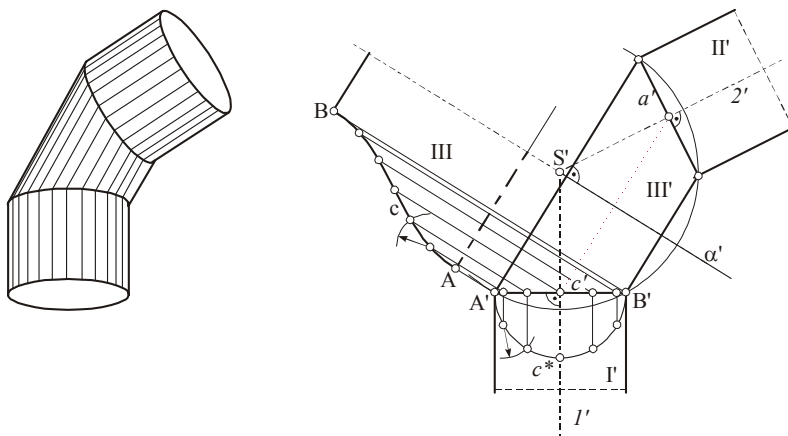
Rys. 6.8

### Ćwiczenie 145

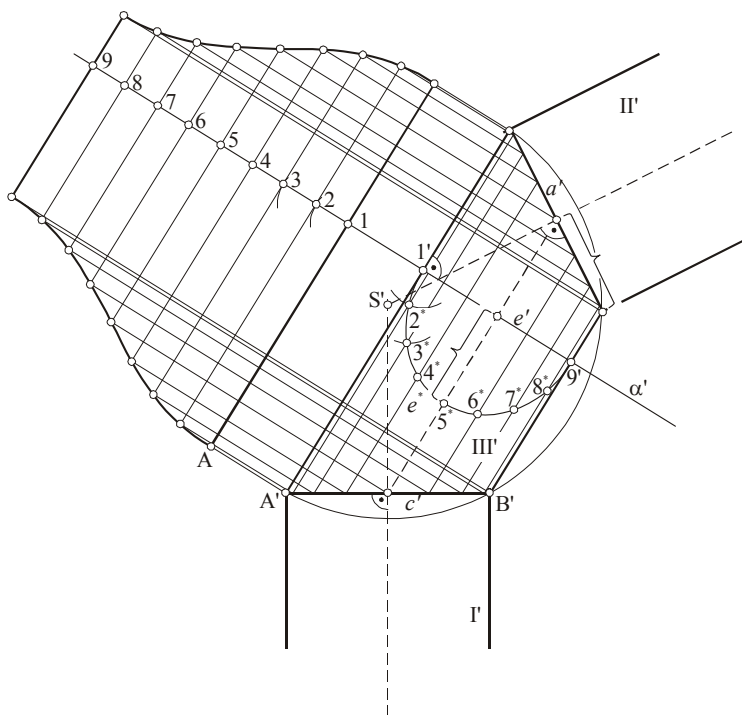
Dane są osie  $l$  i  $2$  powierzchni walcowych obrotowych I, II o równych średnicach zawarte w płaszczyźnie warstwowej. Zaprojektować połączenie czołowe tych powierzchni za pomocą łącznika walcowego nieobrotowego.

#### Rozwiązanie I

Jak poprzednie zadanie rozwiązujemy w jednym rzucie. Kreślimy rzut sfery o środku  $S' = l' \cap 2'$ . Sfera przecina powierzchnie walcowe w okręgach  $a$  i  $c$ . Rzuty tych okręgów są odcinkami  $a'$  i  $c'$  (rys.6.9). Wykreślamy łącznik walcowy III zawierający okręgi  $c$  i  $a$ . W celu rozwinięcia tego łącznika wprowadzamy płaszczyznę  $\alpha$  prostopadłą do osi łącznika III. Następnie wykonujemy kład okręgu  $c$  i dzielimy go na pewną liczbę części. Przez punkty podziału przechodzą wybrane tworzące łącznika. Obracamy kolejno poszczególne tworzące dookoła tworzącej zawierającej punkt A jak w ćwiczeniu 140, rysunek 5.263.



Rys. 6.9



Rys. 6.10

### Rozwiązanie II

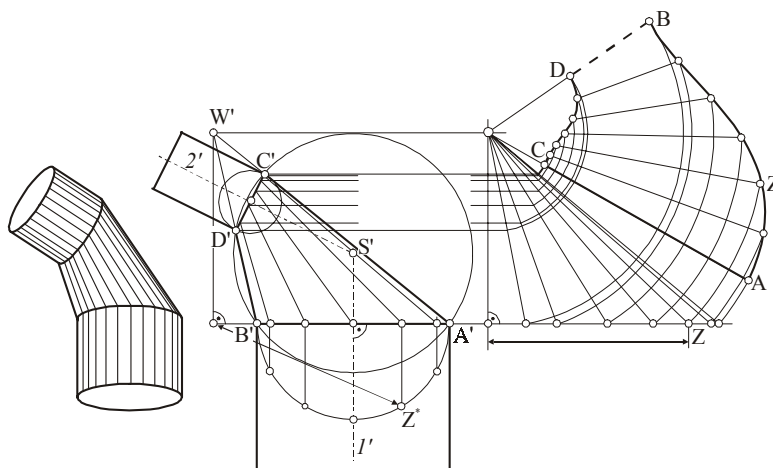
Płaszczyzna  $\alpha$  prostopadła do osi łącznika III przecina go w elipsie  $e$  (rys. 6.10). Wykonujemy kład elipsy i dzielimy ją na pewną ilość odcinków. Przez punkty podziału elipsy prowadzimy tworzące łącznika. Następnie odmierzymy na prostej  $a'$  odcinki równe cięciwom łuków wynikających z podziału elipsy i przez nie prowadzimy odpowiednie tworzące łącznika. Punkty tworzących należące do okręgów  $a$  i  $c$  obracają się w swoich płaszczyznach obrotu prostopadłych do osi.

### Ćwiczenie 146

Dane są przewody rurowe walcowe (o osiach  $l$  i  $2$  zawartych w płaszczyźnie warstwowej) o różnych średnicach. Zaprojektować łącznik stożkowy nieobrotowy łączący te przewody czołowo.

#### Rozwiązanie

Okręgi wyznaczające powierzchnię stożkową otrzymuje się z przecięcia powierzchni walcowych o osiach  $l$  i  $2$  sferą o środku  $S = l \cap 2$ . Rzutami tych okręgów są odcinki  $\langle A'B' \rangle$  i  $\langle C'D' \rangle$  (rys. 6.11). Pary punktów  $A, C$  i  $B, D$  wyznaczają tworzące zarysu powierzchni stożkowej. Wierzchołkiem tej powierzchni jest punkt  $W$  przecięcia tych tworzących. Rozwinięcie powierzchni łącznika może być skonstruowane metodą przedstawioną w ćwiczeniu 142, rysunek 5.265.



Rys. 6.11

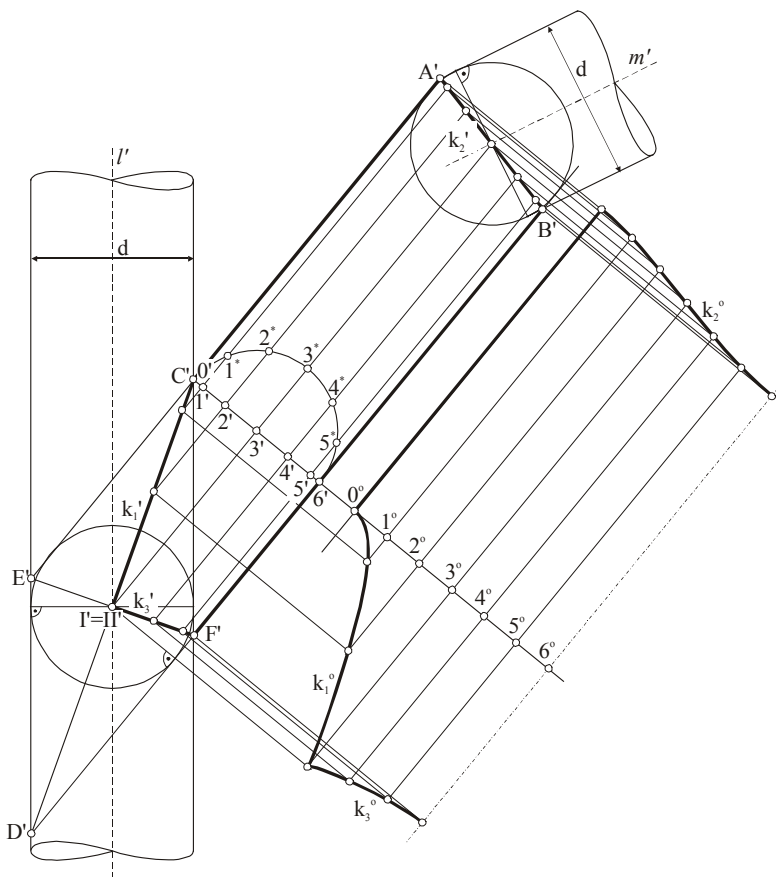
### Ćwiczenie 147

Dane są przewody rurowe walcowe o jednakowych średnicach i osiach  $l$  i  $m$ . Zaprojektować łącznik walcowy obrotowy połączony czołowo z przewodem o osi  $m$  i bocznie z przewodem o osi  $l$ .

#### Rozwiązanie

Powierzchnię walcową obrotową opisujemy na dwóch sferach wpisanych w oba przewody, o środkach zawartych w osiach  $m$  i  $l$ . Przy założeniu, że osie obu przewodów  $m$  i  $l$  zawarte są w jednej płaszczyźnie warstwowej, rzutami linii przenikania są odcinki  $\langle A'B' \rangle$ ,  $\langle C'D' \rangle$  i  $\langle E'F' \rangle$ . Są one elipsami. Przy połączeniu bocznym linia połączenia obu przewodów składa się z łuków elips (I C II) i (I F II) (rys. 6.12). Rozwinięcie powierzchni łącznika konstruujemy podobnie jak w ćwiczeniu 139, rys. 5.261 i rys. 5.262. Rozwijamy przekrój normalny powierzchni łącznika i obracamy kolejne tworzące do położenia warstwowego.

W niektórych przypadkach w praktyce inżynierskiej stosuje się połączenia trzech powierzchni. Przykład takiego połączenia podaje ćwiczenie 148 i 149.



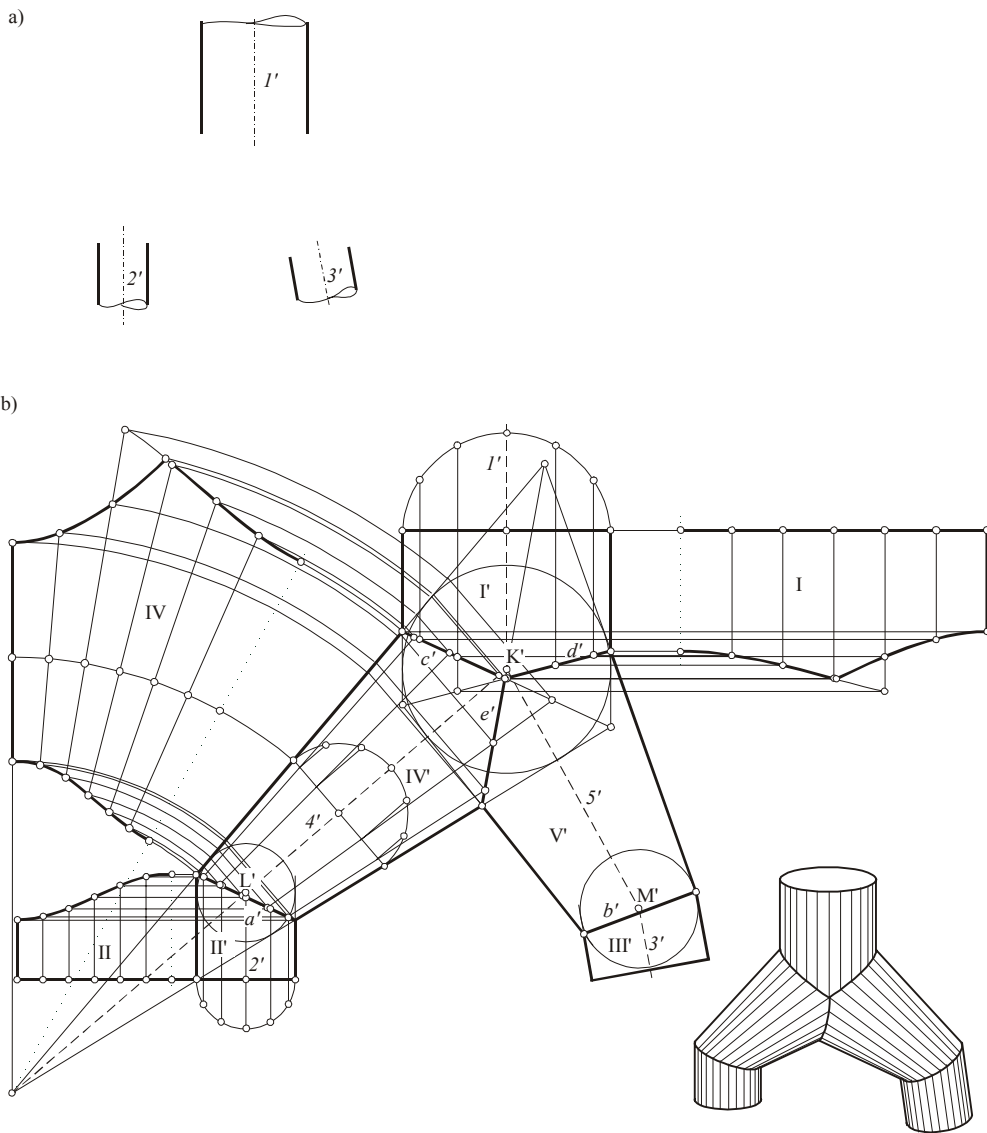
Rys. 6.12

### Ćwiczenie 148

Dane półproste  $l, 2, 3$  nie przechodzące przez jeden punkt, zawarte w płaszczyźnie warstwowej są osiami powierzchni walcowych obrotowych I, II, III o różnych średnicach. Wyznaczyć połączenie tych przewodów za pomocą łącznika obrotowego zwanego trójnikiem.

#### Rozwiązanie

Obieramy trzy różne punkty  $K \in l, L \in 2, M \in 3$  i wyznaczamy proste  $4(K,L)$  i  $5(K,M)$  (rys. 6.13). W powierzchni walcowe I, II, III o osiach  $l, 2, 3$  wpisujemy kule o środkach odpowiednio w punktach K, L, M. Na każdych dwóch kulach wyznaczamy powierzchnie stożkowe IV i V o osiach 4 i 5. Łącznik tworzy się z ustalonych w ten sposób powierzchni stożkowych oraz z części powierzchni walcowych I, II, III. Pary powierzchni (II, IV) i (III, V) są połączone czołowo, liniami połączeń są elipsy  $a$  i  $b$ . Liniami połączeń trójki powierzchni (I, IV, V) są łuki trzech elips połączeń czołowych  $c, d, e$ . W tym przykładzie zostały wykreślone rozwinięcia powierzchni I, II i IV, sposobami jak na rysunku 5.21, ćwiczenie 139 i rys. 5.264 ćwiczenie 142.



Rys. 6.13

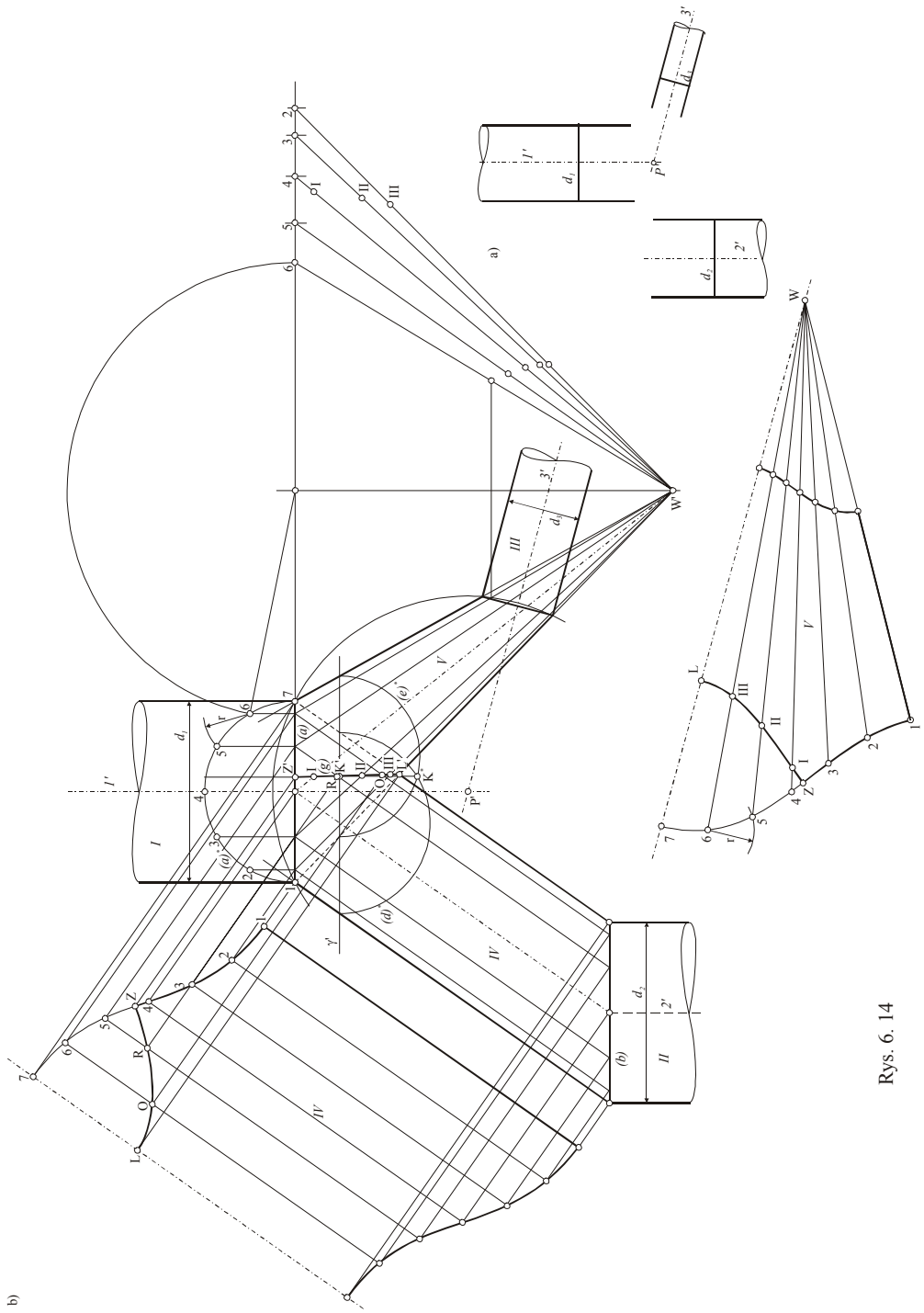
### Ćwiczenie 149

Dane są przewody rurowe o osiach  $1, 2, 3$  zawartych w jednej płaszczyźnie i średnicach  $d_1 = d_2$  i  $d_3 < d_1$ . Osie  $1 \parallel 2$  i  $1 \cap 3 = L$ . Wyznaczyć połączenie tych przewodów za pomocą łącznika nieobrotowego zwanego trójnikiem (rys. 6.14a).

#### Rozwiązanie

Ponieważ na rysunku 6.14 osie powierzchni I i II są równoległe a średnice równe, przyjmujemy dwa równoległe okręgi (a) i (b) zawarte w powierzchniach walcowych I i II i tworzymy powierzchnię walcową nieobrotową IV. Następnie z punktu P przecięcia osi 1 i 3 zakreślamy okrąg będący rzutem sfery przecinającej powierzchnie walcowe I i III w okręgach (a) i (c).



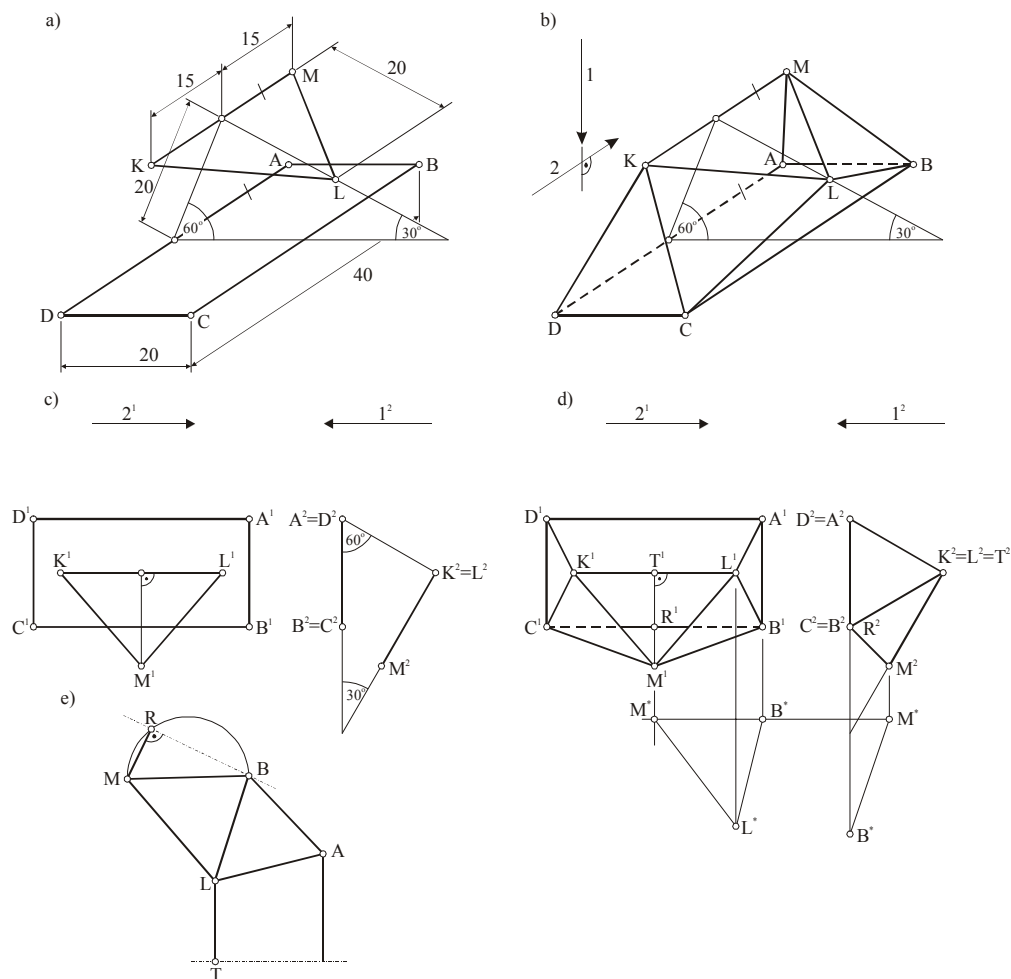


Rys. 6. 14

Ponieważ zawarte w sferze okręgi ( $a$ ) i ( $c$ ) nie są równe, powstaje powierzchnia stożkowa nieobrotowa  $V$ . Linia przenikania powierzchni  $IV$  i  $V$  rozpada się na dwie krzywe płaskie: okrąg ( $a$ ) i elipsa ( $g$ ). Obie krzywe: ( $a$ ) i ( $g$ ) są rzutujące, rzutem elipsy jest odcinek  $\langle L'M' \rangle$  przecięcia zewnętrznych tworzących powierzchni. Ponieważ punkt  $M$  jest niedostępny wprowadzamy płaszczyznę rzutującą  $\gamma$  przecinającą powierzchnię  $IV$  w okręgu ( $d$ ), a powierzchnię  $V$  w okręgu ( $e$ ). W układzie prostokątnym płaszczyzny  $\gamma$  okręgi ( $e$ )\* i ( $d$ )\* przecinają się w punkcie  $K^*$ .  $K^* \in \gamma$ . Odcinek  $\langle L'M' \rangle$  zawiera punkt  $K'$ . Na rysunku 6.14 zostały wykreślone rozwinięcia powierzchni:  $IV$  jak w ćwic. 141, rys. 5.263 i powierzchni  $V$  - ćwiczenie 142, rys. 5.265.

## 2. Łączniki płaskościennie

W celu transportowania materiałów sypkich stosuje się czasem przewody płaskościennie. Przewody takie o różnych przekrojach muszą być czasem łączone za pomocą łączników płaskościennych. Przykłady tworzenia takich łączników podaje ćwiczenie 150 (rys. 6.15)



Rys. 6.15

### Ćwiczenie 150

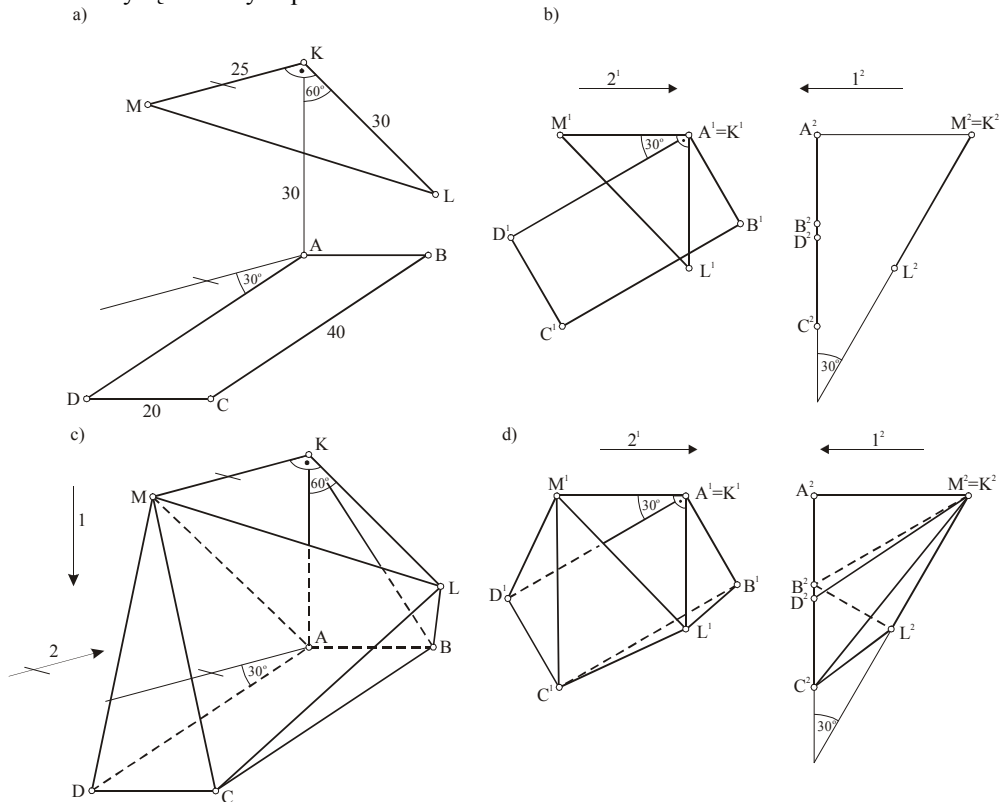
Dane są linie nasadowe dwóch przewodów rurowych płaskościennych: czworokąt  $\langle ABCD \rangle$  i trójkąt  $\langle KLM \rangle$  oraz ich usytuowanie (rys. 6.15a). Wyznacz łącznik płaskościenny łączący te przewody oraz jego rozwinięcie.

#### Rozwiązanie

Dobieramy kierunki rzutowania  $1$  i  $2$  tak, aby płaszczyzny zawierające kąty znalazły się w położeniach warstwowych. Zwroty prostych mogą być dowolne. Wyznaczamy rzuty podstawowe linii nasadowych (rys. 6.15b) a następnie krawędzie ścian łącznika. Na rysunku poglądowym 6.15b krawędzie  $\langle AD \rangle$  i  $\langle KL \rangle$  są równoległe a więc wyznaczają wielokąt  $\langle ADKL \rangle$ . Wyznaczenie trójkąta  $\langle CBL \rangle$  nie wymaga zastanowienia. Powstałe czworokąty:  $\langle ABML \rangle$  i  $\langle CDKM \rangle$  są czworokątami przestrzennymi i należy je podzielić na dwie pary trójkątów tak, aby powstałe ściany łącznika tworzyły wielokąt wypukły. Są to więc pary:  $\langle ABL \rangle$  i  $\langle LBM \rangle$  oraz  $\langle CDK \rangle$  i  $\langle CKM \rangle$ . Wyznaczamy rzuty podstawowe łącznika oraz widoczność (rys. 6.15d). Na rysunku 6.15e przedstawiona jest siatka rozwinięcia połowy łącznika. Brakujące długości odcinków wyznaczone są na rysunku 6.15d (jak rys. 5.90b), zachowane zostały długości odcinków warstwowych jak również kąty proste.

### Ćwiczenie 151

Dane są linie nasadowe oraz usytuowanie przewodu płaskościennego o przekroju prostokątnym  $\langle ABCD \rangle$ , oraz przewodu płaskościennego o przekroju trójkątnym  $\langle KLM \rangle$ . Wyznacz ściany łącznika tych przewodów.



Rys. 6.16

### Rozwiązanie

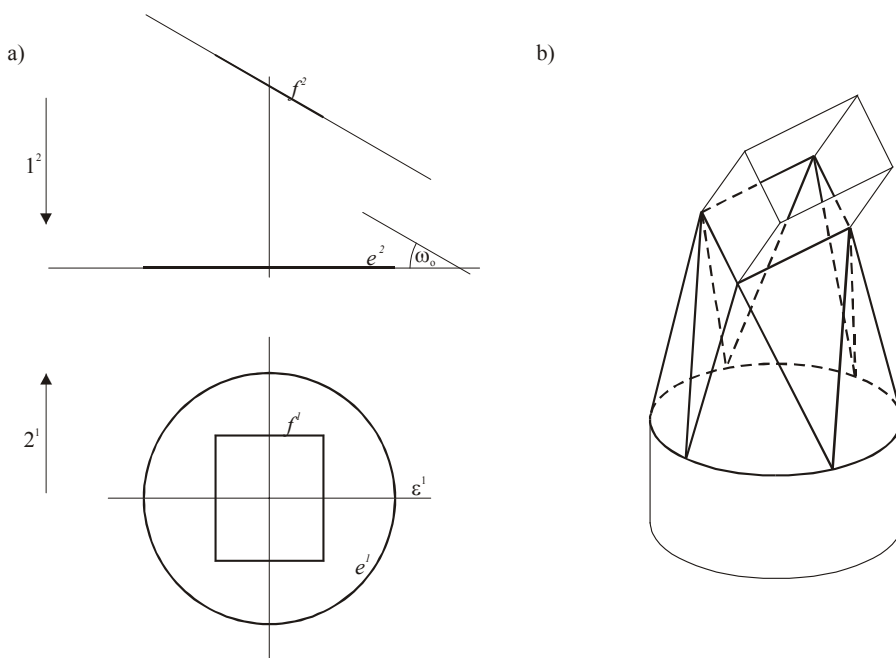
Na rysunku 6.16a linie nasadowe są tak usytuowane że ściany łącznika są trójkątami. Tu również obieramy kierunki rzutowania prostopadłe do siebie oraz do płaszczyzn kątów. Projektujemy krawędzie ścian, wyznaczamy rzuty prostokątne linii nasadowych (rys. 6.16b) oraz całego łącznika (rys. 6.16d) i wyznaczamy widoczność.

## 3. Łączenie przewodów rurowych obrotowych z przewodem płaskościennym

W przypadkach gdy musimy połączyć przewód rurowy o przekroju normalnym będącym okręgiem z przewodem płaskościennym stosujemy łączniki będące wycinkami powierzchni lub wielościanów, albo stosujemy łączniki mieszane: płaskościennie-powierzchniowe.

### Ćwiczenie 152

Dane są linie nasadowe dwóch przewodów rurowych:  $e$  okrąg i  $f$  prostokąt  $\langle ABCD \rangle$ . Płaszczyzny zawierające owe linie nachylone są pod pewnym kątem  $\omega$  (rys. 6.17a). Wyznaczyć łącznik płaskościennie-powierzchniowy łączący te przewody, oraz wyznaczyć jego rozwinięcie.

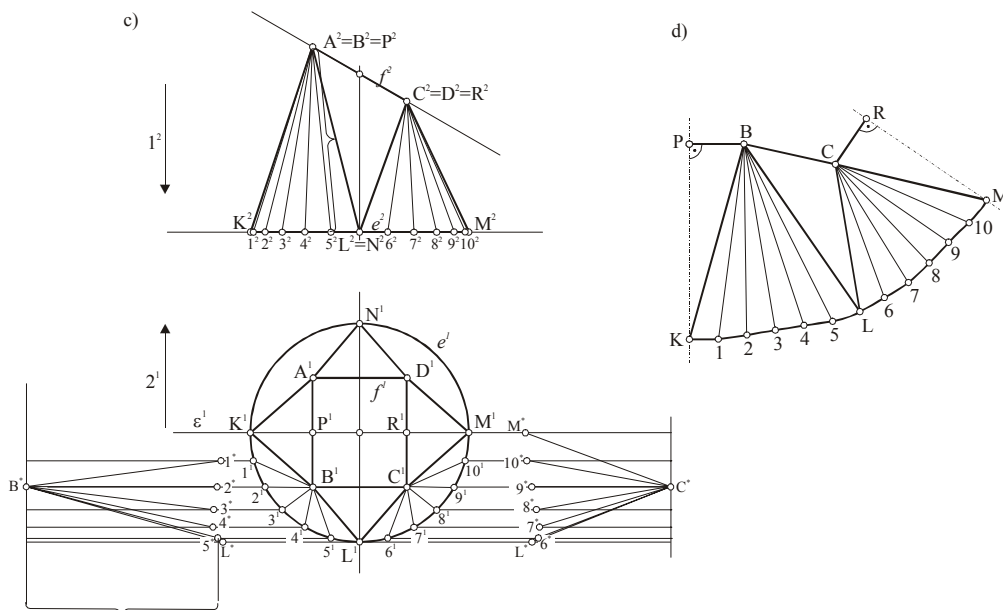


Rys. 6.17ab

### Rozwiązanie

Wyznaczamy cztery trójkąty  $\langle ABK \rangle$ ,  $\langle BCL \rangle$ ,  $\langle CDM \rangle$ ,  $\langle DAN \rangle$  oraz cztery wycinki powierzchni stożkowych nieobrotowych (rys. 6.15b) których wierzchołkami są punkty A,B,C,D i kierownicami są odcinki okręgu  $e$ :  $(NK)$ ,  $(KL)$ ,  $(LM)$ ,  $(MN)$ . Płaszczyzna  $\varepsilon$  jest płaszczyzną symetrii, wystarczy więc wyznaczyć  $\frac{1}{2}$  rozwinięcia (rys. 6.17c). Trójkąt  $\langle BPK \rangle$  będący połową trójkąta  $\langle ABK \rangle$  jest wyznaczony następująco:  $BP \perp PK$ ,  $|BP| = |B^1P^1|$ ,  $|PK| = |P^2K^2|$ .

Powierzchnię stożkową o wierzchołku B wyznaczamy znajdując wielkości odcinków tworzących  $\langle 1B \rangle$ ,  $\langle 2B \rangle$ ,  $\langle 3B \rangle$ ,  $\langle 4B \rangle$ ,  $\langle 5B \rangle$  sposobem podanym na rysunku 5.90b. Jest to również pokazane na przykładzie wyznaczenia odcinka  $\langle B^*5^* \rangle$ . Mając dane długości tworzących oraz długości łuków przyjęte jako cięciwy wyznaczamy trójkąty  $\langle BK1 \rangle$ ,  $\langle B1 2 \rangle$  i.t.d., oraz zastępujemy łamaną  $K1, 1 2, \dots, 5L$ , łukiem. Trójkąt  $\langle BCL \rangle$  wyznaczamy dzięki odcinkom  $|BC| = |B^1C^1|$ ,  $|CL| = |C^*L^*|$ ,  $|BL| = |B^*L^*|$ . Powierzchnię stożkową LCM wyznaczamy podobnie jak KBL, a trójkąt  $\langle CMR \rangle$  będący połową trójkąta  $\langle CDM \rangle$  wyznaczamy dzięki  $|M^*C^*| = |MC|$ ,  $|CR| = |C^1R^1|$  i  $|MR| = |M^2R^2|$ . Kąt między odcinkami  $\langle CR \rangle$  i  $\langle RM \rangle$  jest prosty.



Rys. 6. 17cd

W przypadku gdy chcemy połączyć dwa przewody rurowe o przekrojach normalnych będących okręgiem i wielokątem, możemy zaprojektować łącznik stożkowy lub ostrosłupowy. Przykłady takich łączników podane są w ćwicz. 153 i 154 na rysunkach 6.18ab, 6.19ab, 6.20ab, 6.21ab.

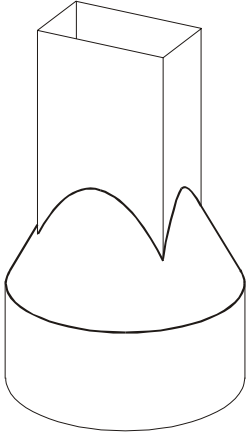
### Ćwiczenie 153

Dane są dwa przewody rurowe: walcowy o linii nasadowej będącej okręgiem  $e$  i płaskościenny o linii nasadowej  $f$  (rys. 6.18a i 6.19a). Wykreśl rzuty i rozwinięcie łącznika zbudowanego z płata powierzchni stożkowej o kierownicy  $e$  i wierzchołku W.

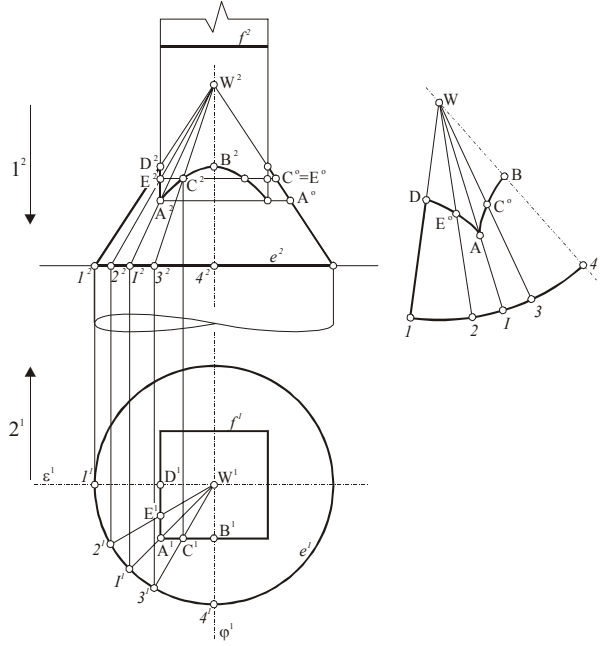
### Rozwiązanie

Na rysunkach 6.18ab i 6.19ab, łącznikiem przewodu rurowego o przekroju  $e$  będącym okręgiem i przewodu płaskościennego  $f$  o przekroju normalnym będącym kwadratem jest wycinek powierzchni stożkowej obrotowej (rys. 6.18a i 6.19a). Ponieważ płaszczyzny przewodu płaskościennego są równoległe do dwóch tworzących linia przenikania składa się z czterech odcinków hiperbol. Wyznaczamy je za pomocą tworzących stożka które przecinają płaszczyzny wielościanu (rys. 6.18b, 6.19b). Rozwinięcie łącznika wyznaczamy jak na rys. 5.264 i rys. 6.8. Na rysunkach 6.18b i 6.19b występują dwie płaszczyzny symetrii  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Wystarczy rozwinąć  $\frac{1}{4}$  część łączników.

a)

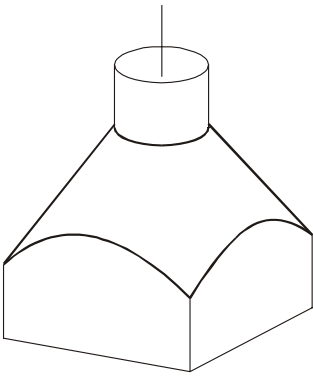


b)

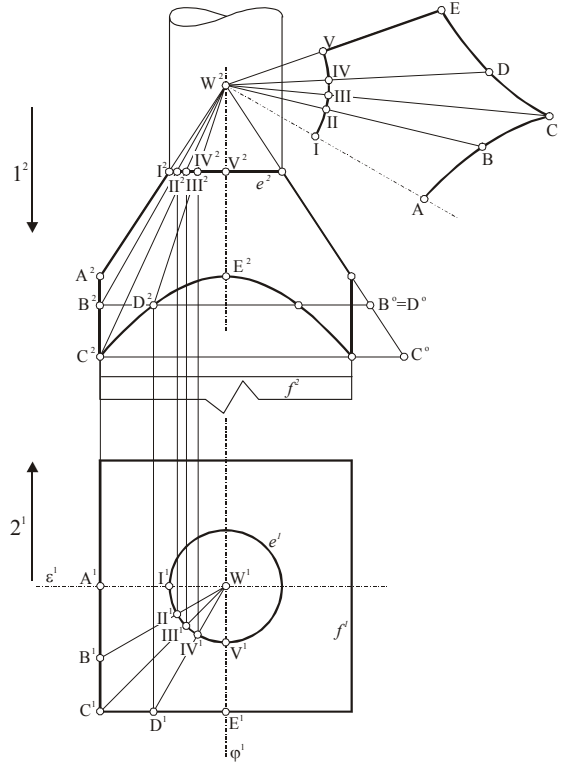


Rys. 6.18

a)



b)



Rys. 6.19

Rozwinięcie łącznika z rys. 6.18b.

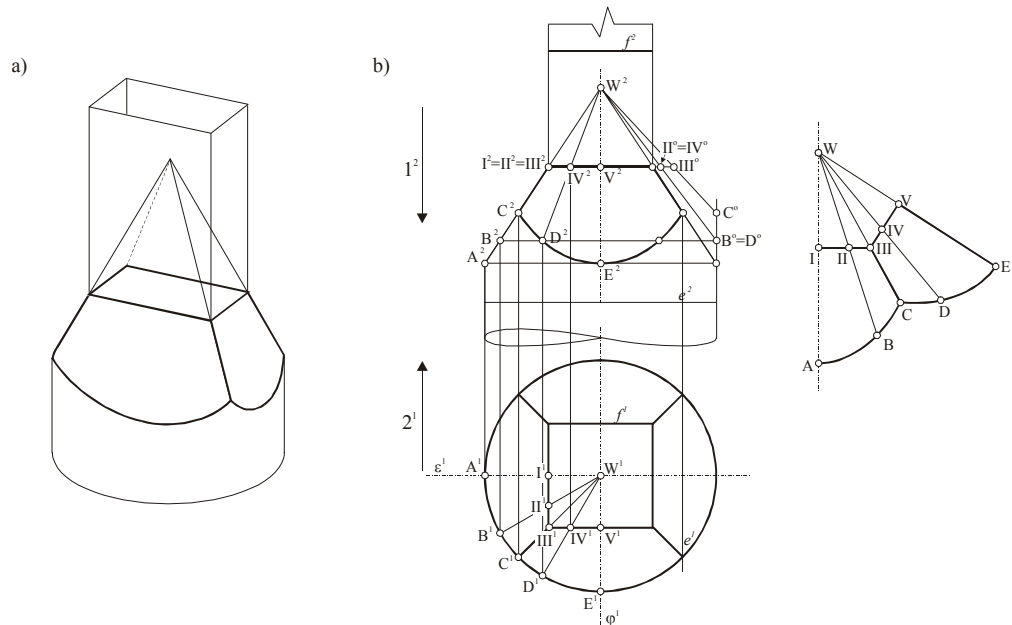
Dzielimy  $\frac{1}{4}$  łuku  $e$  na równe odcinki punktami 1, 2, 3, 4. Tworzące powierzchni stożkowej są równe  $\langle W^2 1^2 \rangle$ . Zakreślamy łuk i na nim nanosimy punkty 1, 2, 3, 4, a także I i II. Punkty linii przenikania D i B znajdują się w odległości  $|W^2 D^2|$  od wierzchołka, pozostałe tworzące wraz z punktami AC i E obracamy do położenia drugowarstwowego i przenosimy ich odległość od wierzchołka z rzutu drugiego. Łączymy kolejne punkty i otrzymujemy rozwinięcie wycinków hiperbol.

Sposób rozwinięcia łącznika z rys. 6.19 podobny jest do poprzedniego. Kierownicą powierzchni stożkowej o wierzchołku W jest okrąg  $e$ . Przedłużenia tworzących przecinają ściany łącznika płaskościennego. Linia przenikania są cztery wycinki hiperbol, których części to linia ABC i CDE.

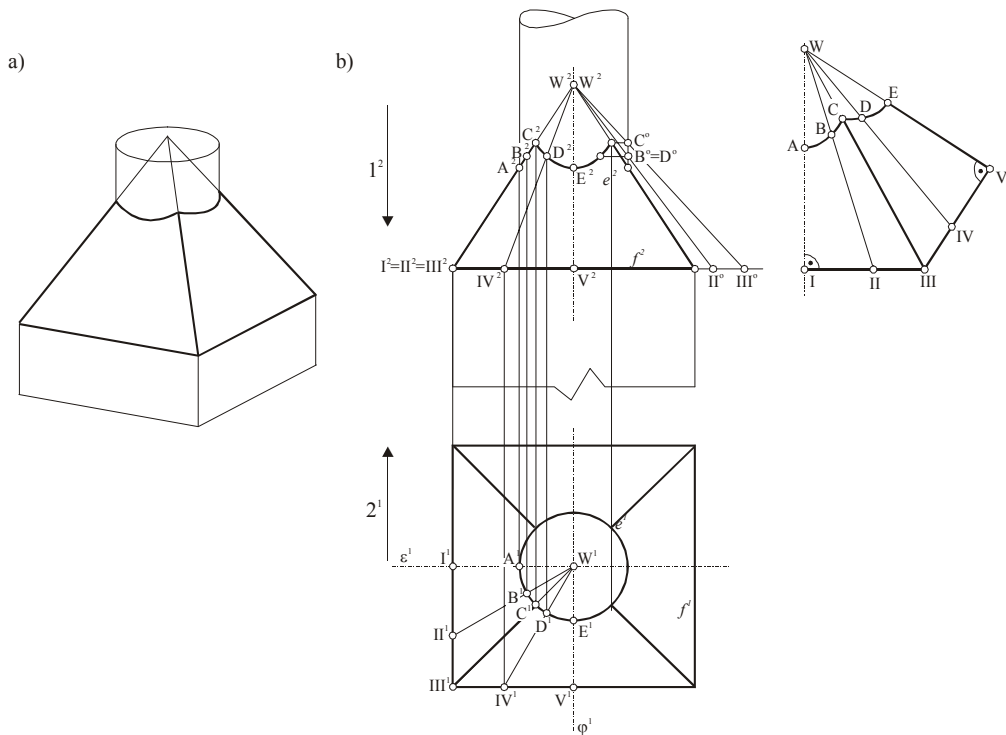
Rozwinięcie: wykreślamy łuk o promieniu  $\langle W^2 I \rangle = \langle W^2 I^2 \rangle$  i na nim odmierzymy cięciwy  $\langle I II \rangle = \langle I^1 II^1 \rangle$ ,  $\langle II III \rangle = \langle II^1 III^1 \rangle$ ,  $\langle III IV \rangle = \langle III^1 IV^1 \rangle$  i  $\langle IV V \rangle = \langle IV^1 V^1 \rangle$ . Przez punkty I, II, III, IV i V prowadzimy tworzące powierzchni łącznika na których odmierzymy odcinki  $\langle WA \rangle = \langle WE \rangle = \langle W^2 A^2 \rangle$ ,  $\langle WB \rangle = \langle WD \rangle = \langle W^2 B^2 D^2 \rangle$ ,  $\langle WC \rangle = \langle W^2 C^2 \rangle$ . Punkty  $A^0 B^0 C^0 D^0$  należą do tworzących obróconych do położenia równoległego do rzutni (rys. 6.19b).

### Ćwiczenie 154

Wykreśl rzuty i rozwinięcie łącznika między przewodem walcowym o kierownicy  $e$  i płaskościennym o kierownicy  $f$ . Łącznik zbuduj z części wielościanu ostrosłupowego o wierzchołku W i kierownicy  $f$  (rys. 6.20 i 6.21).



Rys. 6.20a,b



Rys. 6.21a,b

### Rozwiązanie

Rysunki 6.20a i 6.21a przedstawiają łączniki ostrosłupowe łączące przewody walcowe z płaskościennymi. Linia przenikania ostrosłupa z powierzchnią walcową w przyjętych rozwiązaniach, składa się z czterech odcinków elips wyznaczonych za pomocą punktów przebicia krawędzi ostrosłupa i prostych zawartych na ścianach ostrosłupa z powierzchnią walca (rys. 6.20b i 6.21b).

Rozwinięcie łącznika ostrosłupowego wyznacza się jak na rys. 5.205 i 5.206. W tych przypadkach zachowane są w rzucie pierwszym długości odcinków krawędzi linii  $f$  oraz kąty proste z wysokościami trójkątów. Wysokości ścian zachowane są w rzucie drugim. Punkty A, B, C, D, E przekrojów znajdujemy jak poprzednio obracając proste, w których są zawarte, do położenia równoległego do rzutni drugiej.

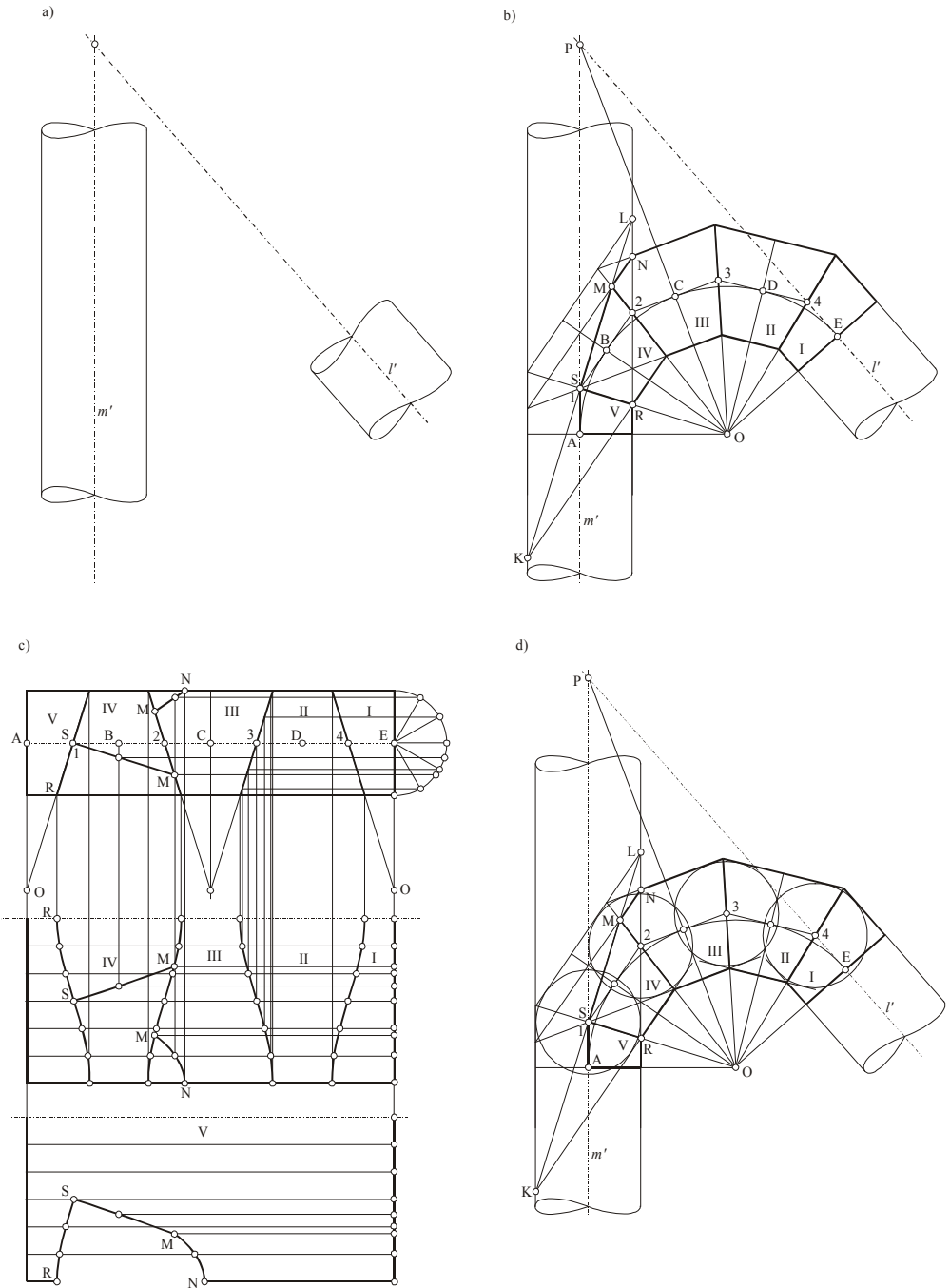
## 4. Łączniki pierścieniowe

Często w rozwiązaniach technicznych przy łączeniu dwóch przewodów rurowych stosuje się łączniki pierścieniowe. Łączniki takie mogą być walcowe lub stożkowe, złożone z wycinków powierzchni walcowych lub stożkowych obrotowych lub nieobrotowych. W praktyce lepsze własności eksploatacyjne posiadają łączniki złożone z segmentów powierzchni obrotowych (przy zastosowaniu łączników złożonych z segmentów nieobrotowych występują większe zaburzenia przepływu).

### Ćwiczenie 155

Dane są dwa przewody rurowe o osiach  $l$  i  $m$  zawartych w jednej płaszczyźnie i o równych średnicach. Wyznaczyć łącznik pierścieniowy łączący oba przewody. Łącznik zaprojektować z segmentów powierzchni walcowych obrotowych (rys. 6.22a).





Rys. 6.22

*Rozwiązanie*

Ponieważ osie  $m$  i  $l$  łączonych przewodów zawarte są w jednej płaszczyźnie zadanie można rozwiązać w jednym rzucie, przyjmując płaszczyznę zawierającą osie jako warstwo-

wą. Projektowany łącznik połączony jest z przewodem o osi  $m$  bocznie, a z przewodem o osi  $l$  czołowo. Osie  $m$  i  $l$  przecinają się w punkcie P (rys. 6.22b). W celu wyznaczenia segmentów łącznika odkłada się na osiach  $m$  i  $l$  przystające odcinki  $\langle PA \rangle$  i  $\langle PE \rangle$  po czym przez punkty A i E prowadzi się proste prostopadłe do osi  $m$  i  $l$  przecinające się w punkcie O (punkt O jest środkiem łuku AE okręgu). Łuk  $\langle AE \rangle$  dzieli się na dowolną liczbę przystających części i wyznacza się na nim punkty B, C, D, w których rysuje się styczne do łuku będące osiami poszczególnych segmentów. Tworząc zarysu poszczególnych segmentów otrzymujemy kreśląc je równoległe do osi segmentów przy założeniu, że w punktach A, B, C, D i E znajdują się środki okręgów przekrojów normalnych segmentów płaszczyznami przechodzącymi przez punkt O. Osie poszczególnych segmentów przecinają się w punktach 1, 2, 3, 4. Linie połączeń segmentów są elipsami i znajdują się w płaszczyznach zawierających punkty O 1, O 2, O 3, O 4. Łącznik został zaprojektowany przy pierwotnym założeniu, że oba połączenia z przewodami rurowymi o osiach  $m$  i  $l$  są czołowe. Składa się z pięciu segmentów, przy czym segmenty zewnętrzne stanowią  $\frac{1}{2}$  długości segmentów środkowych.

Ten sam wynik otrzymamy gdy zamiast przyjmować okręgi normalne w poszczególnych segmentach wyznaczamy rzuty sfer o środkach w punktach 1, 2, 3, 4. Poszczególne segmenty są styczne do dwóch sąsiednich sfer (rys. 6.22d). W dalszej kolejności wyznaczamy linię połączenia bocznego. Linią tą są części elips, których rzutem są odcinki  $\langle RS \rangle$ ,  $\langle SM \rangle$  i  $\langle MN \rangle$ .

W celu rozwinięcia segmentów łącznika oraz powierzchni o osi  $m$  nakładamy je na powierzchnię walcową obrotową o osi  $q$  i średnicy równej średnicom wyznaczanych powierzchni, obracając o  $180^\circ$  co drugi segment łącznika. Wyznaczamy tak przygotowane rozwinięcie powierzchni walcowej.

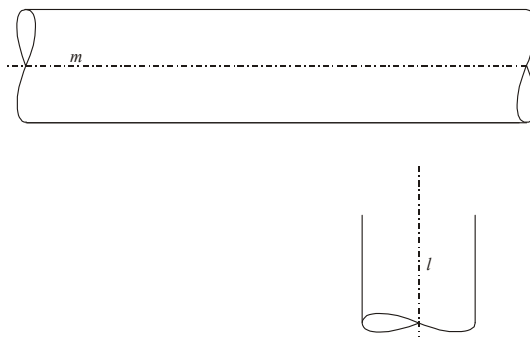
### Ćwiczenie 156

Dane są rzuty prostokątne dwu przewodów rurowych o osiach  $l$  i  $m$  zawartych w płaszczyźnie warstwowej. Wykreślić rzut i rozwinięcie łącznika pierścieniowego połączonego z przewodem o osi  $l$  czołowo, a z przewodem o osi  $m$  bocznie. Łącznik zaprojektować z wycin-  
kó powierzchni walcowych nieobrotowych (rys. 6.23a).

#### Rozwiązanie

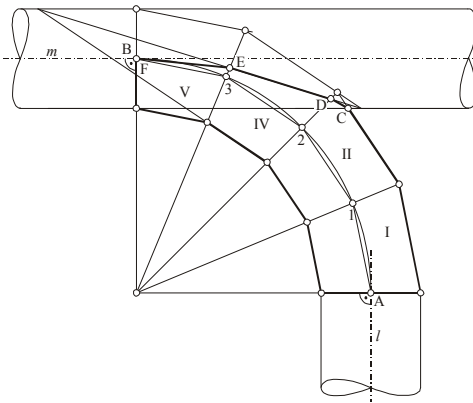
Wyznaczamy łuk  $\langle AB \rangle$  o środku O i dzielimy go na równe odcinki  $\langle A 1 \rangle$ ,  $\langle 1 2 \rangle$ ,  $\langle 2 3 \rangle$ ,  $\langle 3 B \rangle$ . Przez punkty A, 1, 2, 3, B kreślimy rzuty okręgów o średnicach równych średnicom przewodów rurowych. Każde dwa sąsiednie okręgi wyznaczają poszczególne segmenty łącznika. Wyznaczamy linię przenikania łącznika z przewodem o osi  $m$  (rys. 6.23b). Rozwinięcie łącznika wykreślamy nanosząc jego segmenty na powierzchnię walcową nieobrotową, dokonując obrotów co drugich segmentów o  $180^\circ$ . Rozwinięcie wyznaczamy jak na rysunku 5.263, korzystając z układu okręgu o środku B (rys. 6.23c).

a)

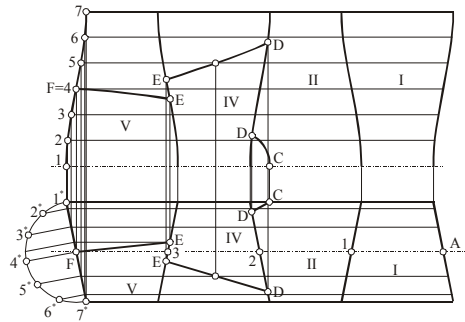


Rys. 6.23a

b)



c)

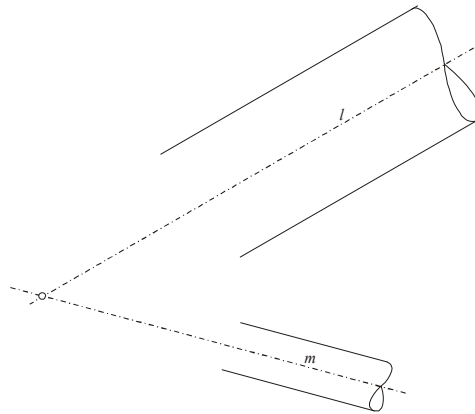


Rys. 6.23bc

**Ćwiczenie 157**

Wyznaczyć łącznik rurowy pierścieniowy łączący dwa przewody rurowe o różnych średnicach i osiach  $l$  i  $m$ . Łącznik wyznaczyć z wycinków powierzchni stożkowych obrotowych. Wyznaczyć rozwinięcie łącznika (rys. 6.24a).

a)



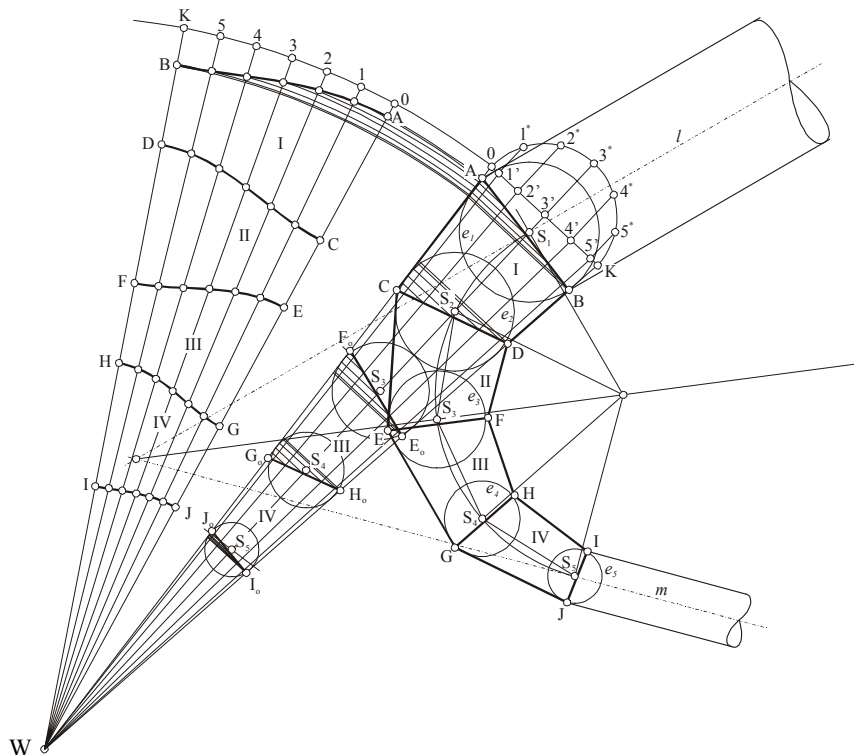
Rys. 6.24a

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy łuk okręgu stycznego do osi  $l$  i  $m$  w punktach  $S_1$  i  $S_5$ . Łuk ten dzielimy na pewną ilość równych odcinków, np. cztery:  $\langle S_1S_2 \rangle$ ,  $\langle S_2S_3 \rangle$ ,  $\langle S_3S_4 \rangle$  i  $\langle S_4S_5 \rangle$ . Cięciwy tych okręgów są osiami poszczególnych segmentów (rys. 6.24b). Wszystkie cztery segmenty powinny mieć ten sam kąt wierzchołkowy. Na osi  $S_1S_2$  pierwszego segmentu odmierzamy sumę cięciw  $\langle S_1S_2 \rangle + \langle S_2S_3 \rangle + \langle S_3S_4 \rangle + \langle S_4S_5 \rangle$ . W punkcie  $S_1$  rysujemy równik kuli wpisanej w przewód walcowy o osi  $l$ , a w punkcie  $S_5$  równik kuli wpisanej w przewód walcowy o osi  $m$ . Styczne obu tych równików wyznaczają powierzchnię stożkową obrotową o wierzchołku  $W$ , z której należy wyciąć poszczególne segmenty. W ten stożek wpisujemy kule w punktach  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  i  $S_5$  po czym takie same kule rysujemy w punktach  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  i  $S_5$  na łuku  $(S_1S_5)$  stycznym do prostych  $l$  i  $m$ . Powierzchnie stożkowe opisane na dwóch sąsiednich kulach są segmentami łącz-

nika. Każde dwie sąsiednie powierzchnie są opisane na tej samej kuli, otrzymujemy więc rozpad linii przenikania na krzywe płaskie elipsy  $e_1, e_2, e_3, e_4$  i  $e_5$ , zawarte w płaszczyznach rzutujących zawierających naprzeciwległe pary wierzchołków AB, CD, EF, I J, wyznaczone z przecięcia zewnętrznych tworzących dwóch walców i czterech stożków.

b)



Rys. 6.24b

Segment I ABCD jest wycięty z poboczniczy stożka obrotowego o wierzchołku W i okręgu podstawy  $d$  zawartej w płaszczyźnie prostopadłej do osi stożka i zawierającej punkt A. Segment II CDEF wycięty jest z tego samego stożka jako segment  $CDE_0F_0$ , przy czym  $|CE| = |DE_0|$  i  $|DF| = |CF_0|$ . W następnych parach równych segmentów mamy  $|EG| = |F_0G_0|$  i  $|FH| = |E_0H_0|$  oraz  $|GI| = |H_0I_0|$  i  $|HJ| = |G_0J_0|$ .

Rozwinięcie  $\frac{1}{2}$  poboczniczy stożka obrotowego o wierzchołku W okręgu podstawy  $d$ , wraz z jego eliptycznymi przekrojami wyznaczone zostało jak w ćwiczeniu 141, rys. 5.264 i na rys. 6.8.

Dwa inne sposoby utworzenia pierścieniowego łącznika stożkowego oraz rozwinięcia przedstawione są w literaturze: Stanisław Polański „Zastosowania powierzchni w technice” (rys. 4.38, 4.39).

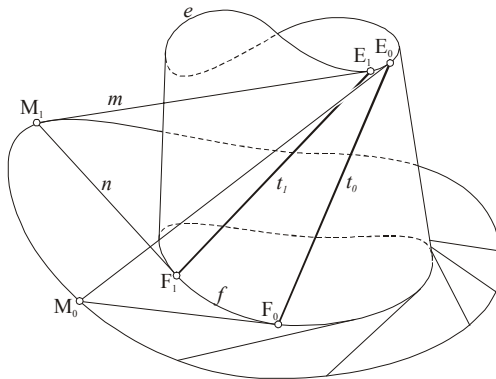
## 5. Tworzenie niektórych powłok budowlanych

Projektanci budownictwa i architektury zainteresowani są projektowaniem powłok budowlanych, będących modelami geometrycznymi powierzchni budynków, a w szczególności kościołów, obiektów sportowych, hal przemysłowych i innych. Powłoki budowlane tworzone są z wycinków powierzchni niepłaskich. Przede wszystkim brane są pod uwagę powierzchnie prostoliniowe (prostokreślne). Powłoki utworzone z takich powierzchni posiadają kształtującą ją elementy prostoliniowe. Oprócz powierzchni prostoliniowych rozpatrywane są powierzchnie będące wycinkami powierzchni nieprostoliniowych.

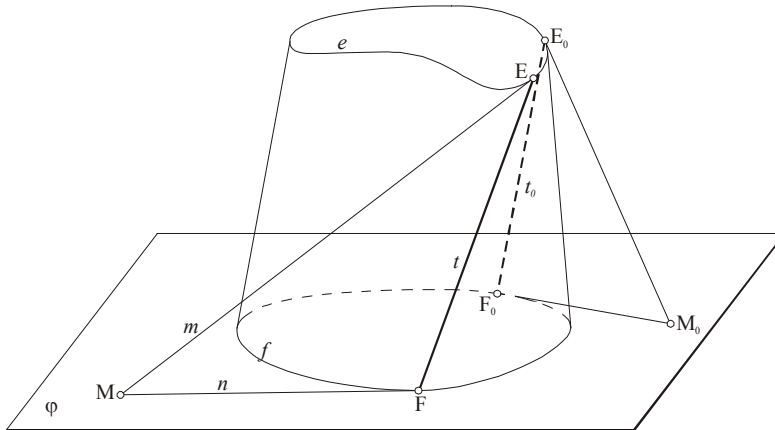
### 5.1. Powierzchnie stycznych.

Powierzchnia stycznych jak każda powierzchnia rozwijalna może być wyznaczana przez dwie kierownice rozłączne  $e$  i  $f$ . Każdemu punktowi  $E_n$  kierownicy  $e$  odpowiada jeden punkt  $F_n$  kierownicy  $f$  taki, że punkty  $E_n F_n$  wyznaczają tworzącą powierzchni. Mówimy, że utworzoną tak powierzchnię wyznaczamy w sposób obwiedniowy. Weźmy pod uwagę dwie kierownice które mogą być:

- 1) krzywymi przestrzennymi (rys. 6.25)
- 2) jedną krzywą przestrzenną i jedną krzywą płaską (rys. 6.26),
- 3) dwiema krzywymi płaskimi (rys. 6.27).

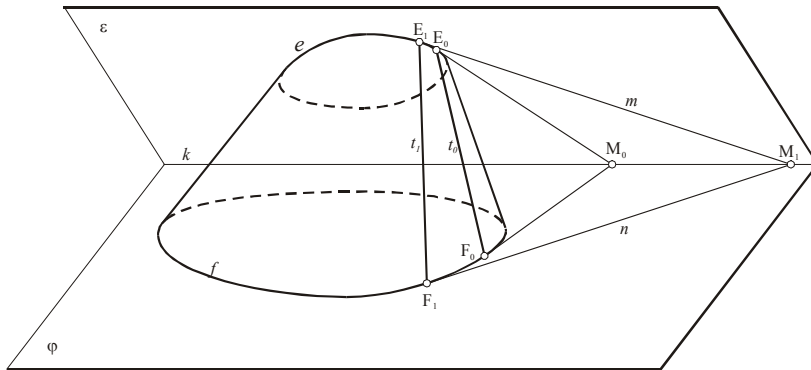


Rys. 6.25

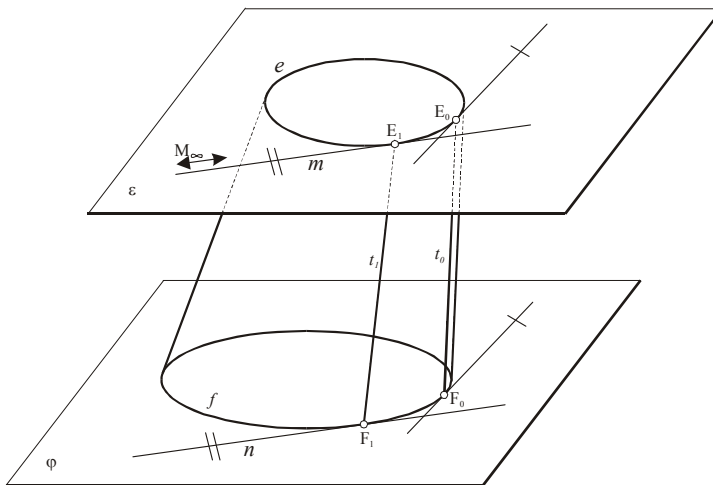


Rys. 6.26

a)



b)



Rys. 6.27

Przypadek 1), jako dość skomplikowany w rozwiązaniach, jest rzadko stosowany. Rysunek 6.25 przedstawia przestrzenne wyznaczanie płaszczyzn stycznych do powierzchni i wyznaczanie jej tworzących.

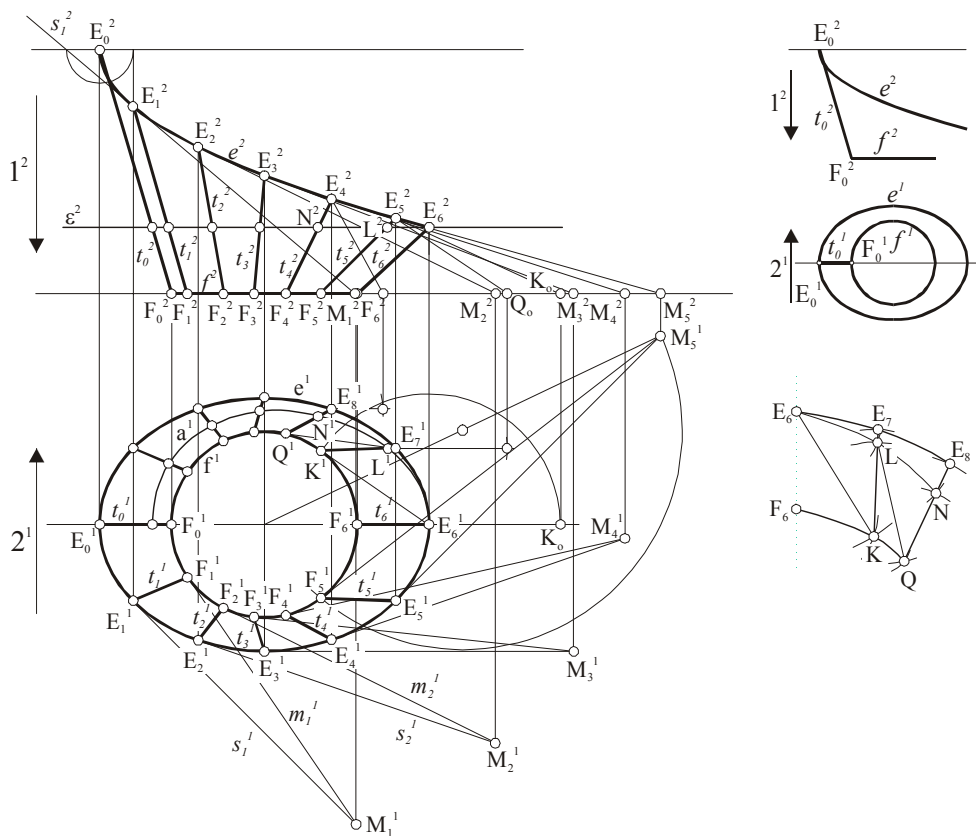
Przypadek 2), przedstawiony na rysunku 6.26 przedstawia rozwiązanie gdy kierownica  $e$  jest krzywą przestrzenną, zaś kierownica  $f$  krzywą płaską zawartą w płaszczyźnie  $\varphi$ . Tworzące tej powierzchni otrzymujemy następująco: na kierownicy  $e$  (niepłaskiej) wybieramy punkt  $E$  i wyznaczamy prostą  $m$  styczną do niej. Styczna  $m$  przebija płaszczyznę  $\varphi$  w punkcie  $M$  należącym do krawędzi płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Następnie przez punkt  $M$  prowadzimy styczną  $n$  do kierownicy  $f$  w punkcie  $F$ . Punkty  $E$  i  $F$  wyznaczają tworzącą  $t$ , a proste  $m$  i  $n$  płaszczyznę  $\varepsilon$  styczną do powierzchni.

Przypadek 3), gdy obie kierownice są płaskie przedstawiony jest na rysunku 6.27a,b. Kierownice  $e$  i  $f$  znajdują się w płaszczyznach  $\varepsilon$  i  $\varphi$  przecinających się krawędzi  $k$  (rys. 6.27a). Z punktu  $E \in e$  prowadzimy styczną  $m$  do kierownicy  $e$  w punkcie  $E$ . Przebija ona płaszczyznę  $\varphi$  w punkcie  $M$  na krawędzi  $k$ . Przez punkt  $M$  prowadzimy styczną  $n$  do kierownicy  $f$  w punkcie  $F$ . Tworząca  $t$  jest wyznaczona punktami  $E$  i  $F$ .

Jeżeli płaszczyzny  $\varepsilon$  i  $\varphi$  są równoległe - krawędź tych płaszczyzn jest prostą niewłaściwą - styczne  $m$  i  $n$  do obu kierownic są równoległe (rys. 6.27b). W obu przypadkach a) i b) jest obojętne czy najpierw wybieramy  $E \in e$  i  $m \supset E$  czy  $F \in f$  i  $n \supset F$ . Punkt  $M = m \cap \varphi$  i  $M = n \cap \varepsilon$ .

### Ćwiczenie 158

Dane są kierownice powierzchni obwiedniowej:  $e$  będąca krzywą przestrzenną i  $f$  - krzywa płaska - okrąg, oraz tworząca  $t_0 = E_0F_0$ . Drugi rzut kierownicy  $e$  jest parabolą o wierzchołku  $E_0$ , pierwszy rzut jest elipsą (rys. 6.28). Krzywa  $f$  jest okręgiem. Wyznaczyć rozwinięcie wycinka powierzchni.



Rys. 6.28

### Rozwiązanie

Na krzywej  $e$  wybieramy punkty  $E_1, E_2, \dots$  i wyznaczamy styczne  $s_1, s_2, \dots$  do krzywej w obu rzutach jak na rysunku 6.26. Następnie wyznaczamy punkty przebiecia  $M_1, M_2, \dots$  stycznych  $s_1, s_2, \dots$  z płaszczyzną  $\varphi$  zawierającą krzywą  $f$ . Z punktów przebiecia  $M_1, M_2, \dots$  prowadzimy styczne do okręgu i otrzymujemy punkty  $F_1, F_2, \dots$ . Tworzące  $t_1, t_2, \dots$  wyznaczone są parami punktów  $E_1F_1, E_2F_2, \dots$ .

W celu wyznaczenia rozwinięcia powierzchni wygodnie jest przyjąć dwie krzywe zawarte w powierzchni równoległej do siebie. Na rysunku 6.28 wyznaczony został przekrój płaszczyzną pierwszorzędową  $\varepsilon$ . Linią przekroju jest krzywa  $a$ . Dzielimy trapezy wpisane w powierzchnię, lub opisane na powierzchni, zawarte między krzywymi  $f$  i  $a$ , oraz sąsiednimi tworzącymi. Z kolei trapezy dzielimy na trójkąty i wyznaczamy ich wielkość (rys. 6.28).

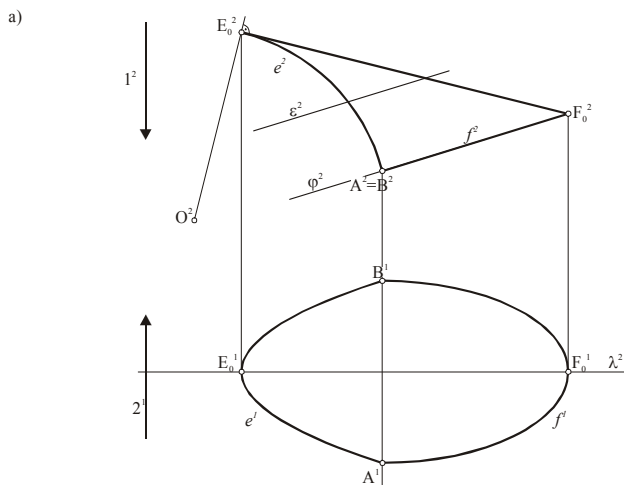
Trójkąt  $\langle E_6F_6K \rangle$  ma dwa boki warstwowe, długość  $\langle KE_6 \rangle$  otrzymujemy obracając odcinek  $\langle K^1E^1_6 \rangle$  do położenia warstwowego. Następne trójkąty wyznaczamy podobnie i na przedłużeniach tworzących znajdujemy punkty  $F_7 \dots$ . Odcinki łamane (cięciwy krzywych) zastępujemy łukami.

### Ćwiczenie 159

Dane są kierownice  $e$  i  $f$  powierzchni wyznaczonej metodą obwiedniową oraz tworząca  $t^0$ . Kierownica  $e$  jest krzywą niepłaską, której rzut drugi jest wycinkiem okręgu  $e^2$  o środku  $O^2$ , a rzut pierwszy  $e^1$  parabolą. Kierownica  $f$  jest elipsą zawartą w płaszczyźnie  $\varphi$  drugorzutu, której rzut pierwszy jest elipsą  $f^1$  o odcinku osiowym  $\langle A^1B^1 \rangle$  i wierzchołku głównym  $F^1_0$ . Wykreślić trzy rzuty powłoki zawartej pomiędzy kierownicami  $e$  i  $f$ , oraz przekrój płaszczyzny  $\varepsilon \parallel \varphi$  (rys. 6.29a).

#### Rozwiązanie

Obieramy na krzywej  $e$  punkty  $E_1, E_2 \dots$  i kreślimy styczne:  $m_1, m_2 \dots$  ( $m^1_1$  styczna do paraboli,  $m^2_1$  styczna do okręgu) jak na rysunku 6.26. Wyznaczamy punkty przebiecia  $P_1, P_2 \dots$  prostych  $m_{1,2} \dots$  z płaszczyzną  $\varphi$  np.  $m_1 \cap \varphi = P_1$ . Z punktów  $P^1_1, P^1_2 \dots$  kreślimy styczne do elipsy  $f^1$  (jak w rozdziale I rys. 1.7) i otrzymujemy punkty styczności  $F^1_1, F^1_2 \dots$ . Odcinki  $\langle E_1F_1 \rangle, \langle E_2F_2 \rangle$  są tworzącymi powłoki. Przekrój płaszczyzną  $\varepsilon$  wyznaczamy z przecięcia z tworzącymi jak punkt  $Q$  (rys. 6.29b). Rzut trzeci wyznaczamy korzystając z cech punktów odmierzanym od płaszczyzny porównawczej  $\lambda$ .



Rys. 6.29a

### Ćwiczenie 160

Dane są okręgi  $e$  i  $f$  zawarte w płaszczyznach  $\varepsilon$  i  $\varphi$  będące kierownicami powierzchni wyznaczonej metodą obwiedniową, oraz dana jest tworząca  $t_0$ . Wyznaczyć inne tworzące tej powierzchni (rys. 6.30).

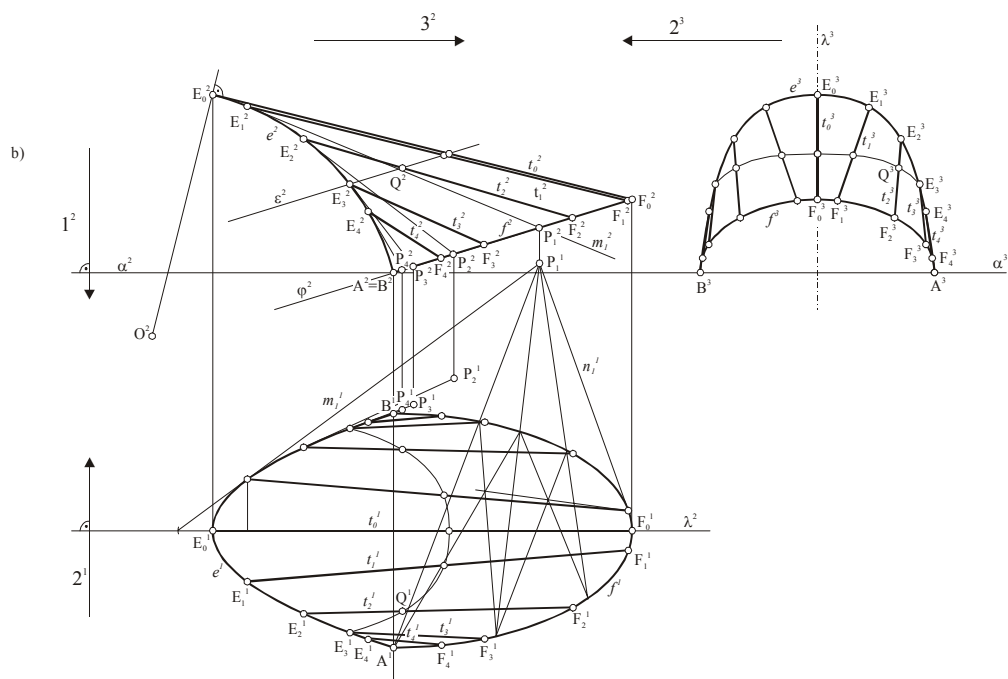
#### Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy według schematu podanego na rysunku 6.27a.

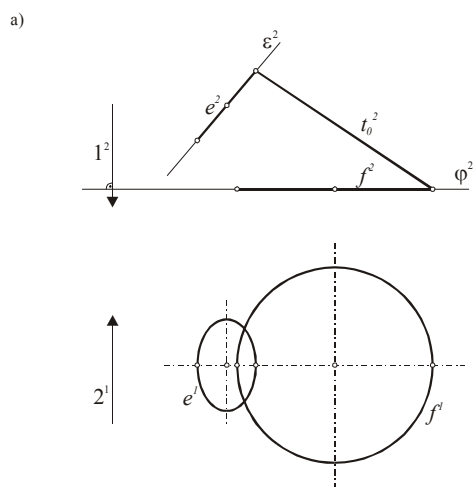
Wyznaczamy krawędź  $k$  płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , oraz obrót płaszczyzny  $\varepsilon$  do położenia na płaszczyznę  $\varphi$  i kład okręgu  $e$ :  $e^o$  ponieważ wygodniej jest kreślić styczne do okręgu niż styczne do elipsy. Obieramy na  $e^o$  punkty  $E^o_1, E^o_2, E^o_3 \dots$  i kreślimy styczne  $m_1, m_2 \dots$  do



okręgu  $e^\circ$  do przecięcia z prostą  $k^1$  w punktach  $M^1_1, M^1_2 \dots$ . Z punktów  $M^1_{1,2} \dots$  kreślimy styczne  $n_1, n_2 \dots$  do okręgu  $f^1$  w punktach  $F^1_1, F^1_2 \dots$ . Na elipsie  $e$  będącej rzutem pierwszym okręgu  $e$  wyznaczamy punkty  $E^1_1, E^1_2$ . Następnie wyznaczamy drugie rzuty par punktów  $E_1F_1, E_2F_2 \dots$ . Pary punktów  $EF$  wyznaczają tworzące powierzchni. Na rysunku 6.30 przedstawione są styczne  $m^2_0$  i  $n^1_2$  w punktach  $E^2_0$  i  $F^1_2$  do okręgów  $e^\circ$  i  $f^1$  przecinających się w punkcie  $M^1_2 \in k^1$  (rzut stycznej  $m_2=m^1_2$  nie jest konieczny do wyznaczenia punktu  $E^1_2$ ).

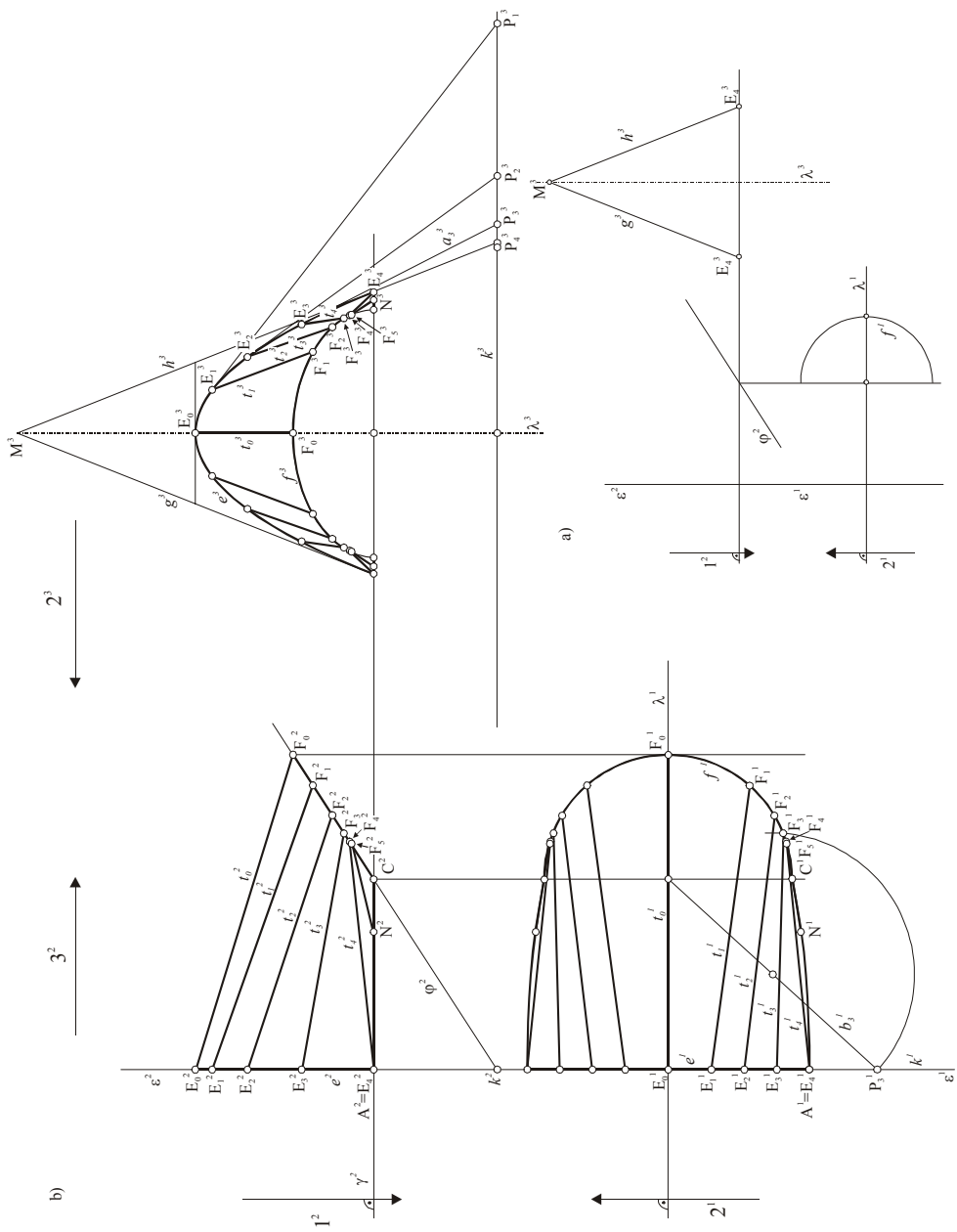


Rys. 6.29b



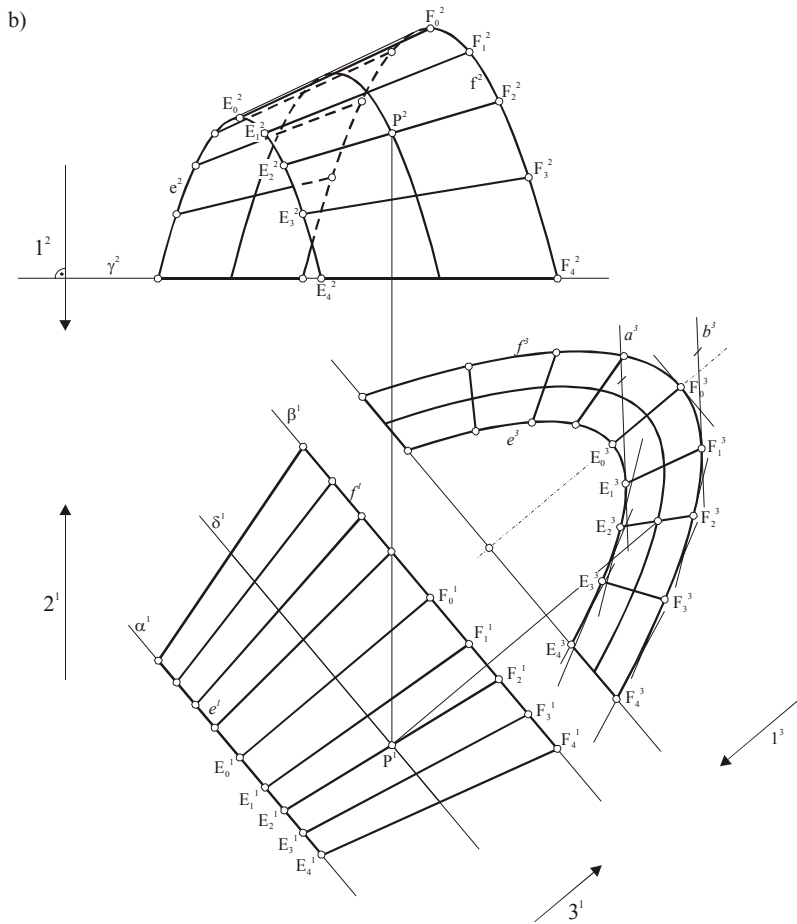
Rys. 6.30a





Rys. 6.31





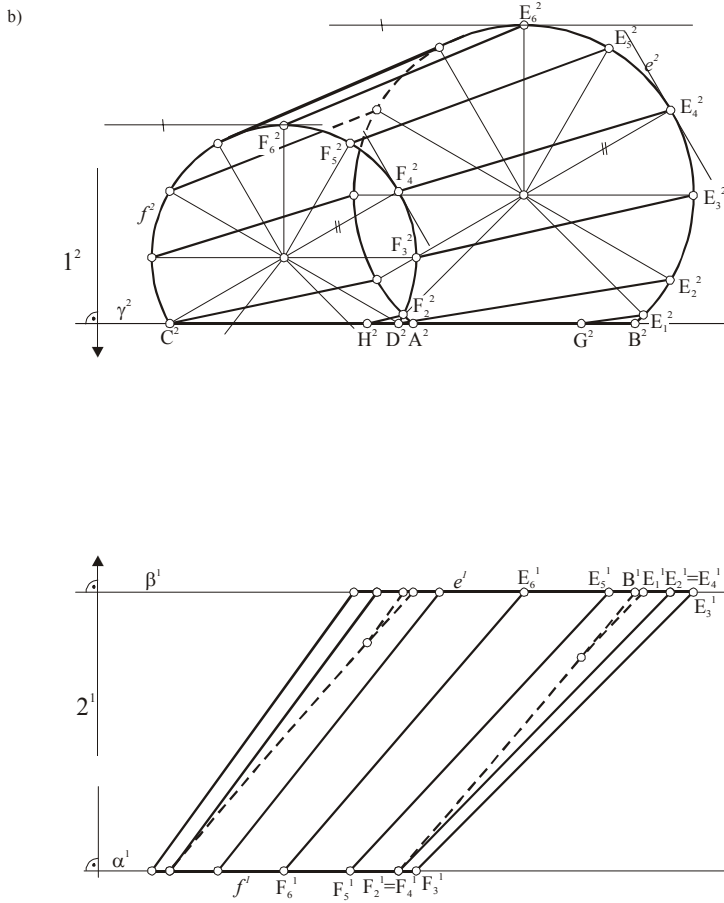
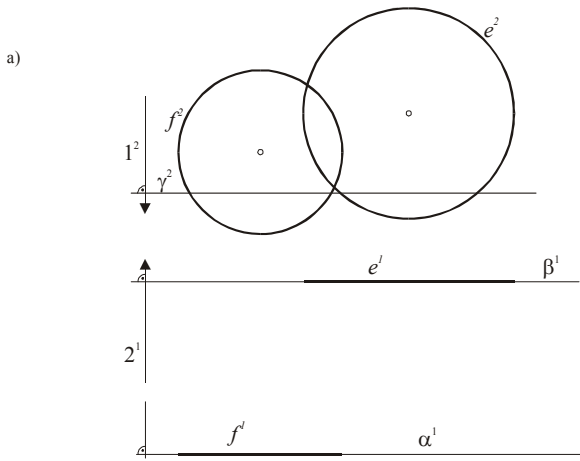
Rys. 6.32b

### Ćwiczenie 163

Dane są dwa okręgi zawarte w płaszczyznach równoległych  $\alpha$  i  $\beta$  przecięte płaszczyzną  $\gamma$ . Wyznaczyć powłokę będącą wycinkiem powierzchni stycznych wyznaczoną kierownicami  $e$  i  $f$  zawartą między płaszczyznami  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  (rys. 6.33a).

### Rozwiązanie

Ponieważ kierownice  $e$  i  $f$  zawarte są w płaszczyznach równoległych, styczne do krzywych są również równoległe do siebie i wyznaczają tworzące (rys. 6.33b). Schemat podający rozwiązanie: rysunek 6. 17b.

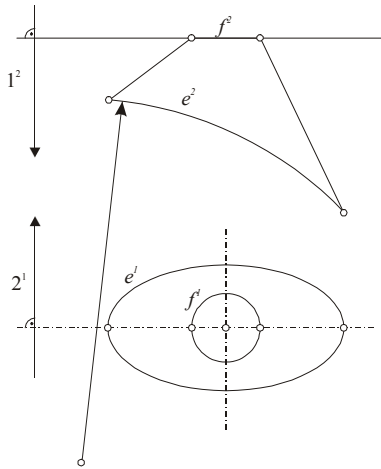


Rys.6.33a,b

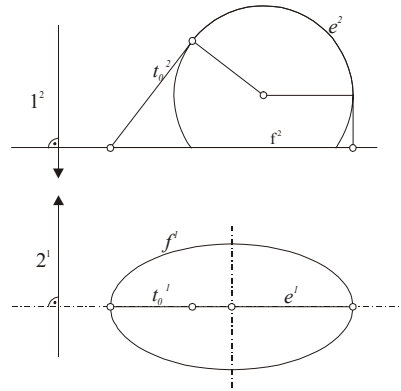
### ZADANIA

Wykreśl powłokę wyznaczoną z wycinka powierzchni stycznych odwzorowanej na rysunku 6.34 a, b, c, d, e.

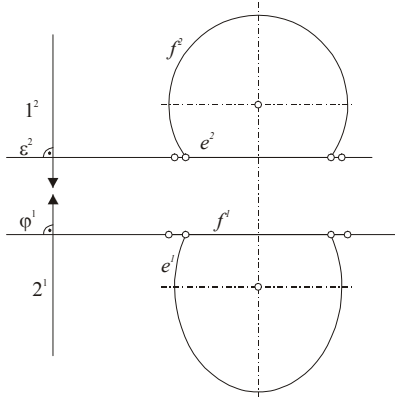
a)



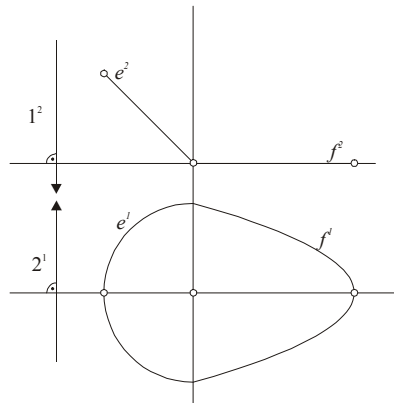
b)



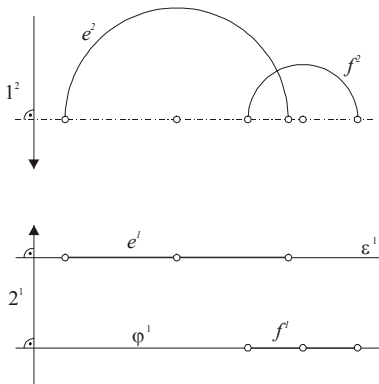
c)



d)



e)



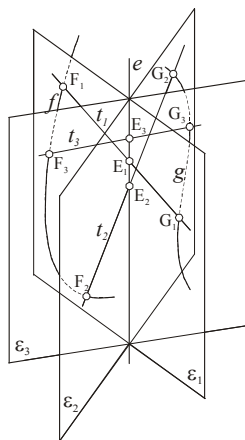
Rys. 6.34

## 5.2. Powłoki tworzone z powierzchni skośnych.

Klasyfikacja powierzchni skośnych wiązkowych przedstawiona jest za St. Polańskim na rys. 5.218 . Do tworzenia takich powierzchni wymagane są trzy kierownice. Każda tworząca powierzchni przecina wszystkie trzy kierownice. Rozróżniamy następujące przypadki występowania kierownic:

- 1) dwie krzywe, jedna prosta właściwa,
- 2) jedna krzywa, dwie proste właściwe,
  - powierzchnia utworzona przez kierownice wymienione w punktach 1) i 2) jest powierzchnią stożkową zwaną *konusoidą*,
- 3) dwie krzywe, jedna prosta niewłaściwa - powierzchnia walcowa - *cyldroida*,
- 4) jedna krzywa, jedna prosta właściwa, jedna prosta niewłaściwa - powierzchnia stożkowo-walcowa - *konoida*,
- 5) trzy proste skośne - *kwadryka prostokreślna*,
  - a) dwie proste właściwe, jedna niewłaściwa,
  - b) trzy proste właściwe równoległe do jednej i tej samej płaszczyzny, a) i b) - *paraboloida hiperboliczna*,
  - c) trzy proste skośne takie, że nie istnieje płaszczyzna równoległa do każdej z nich - *hiperboloida jednopowłokowa*.

Jeżeli dane są kierownice  $e, f$  i  $g$  gdzie  $g$  jest prostą właściwą czy niewłaściwą, to aby wyznaczyć tworzącą powierzchni należy przez prostą  $g$  poprowadzić płaszczyznę i wyznaczyć punkty przebicia  $E$  i  $F$  kierownic  $e$  i  $f$  z tą płaszczyzną. Tworzącą wyznaczają punkty  $E$  i  $F$ . Gdy kierownice  $e$  i  $f$  są krzywymi przestrzennymi czy to w przypadku powierzchni stożkowej (rys. 6.35), czy też w przypadku powierzchni walcowej (rys. 6.39) przy wyznaczaniu rzutów takiej powierzchni wygodnie jest aby płaszczyzny  $\gamma_{1,2,\dots}$  zawierające prostą  $g$  były rzutujące. Punkty  $E_{1,2,\dots}$  i  $F_{1,2,\dots}$  przecięcia kierownic  $e$  i  $f$  płaszczyznami znajdujemy od razu i łatwe jest wyznaczenie tworzących. Ułatwieniem w wyznaczaniu tworzących jest położenie rzutujące jednej z kierownic.

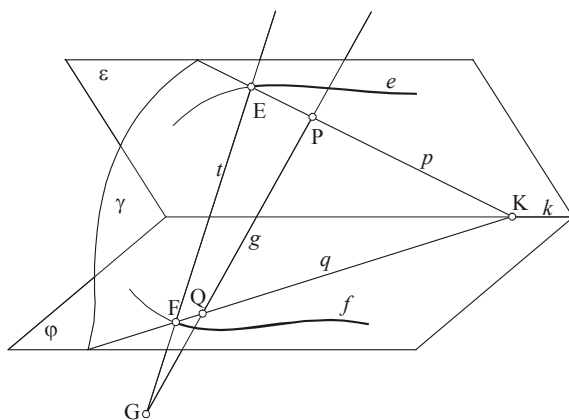


Rys. 6.35

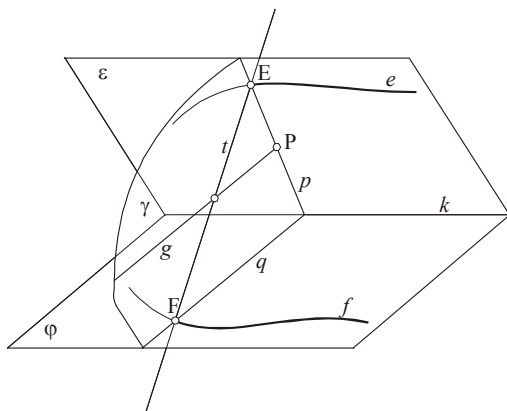
Gdy krzywe  $e$  i  $f$  są płaskie, zawarte w płaszczyznach  $\varepsilon$  i  $\varphi$  wyznaczamy krawędź  $k$  płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , oraz punkty przebicia  $P$  i  $Q$  prostej  $g$  z tymi płaszczyznami. Płaszczyzna zawierająca prostą  $g$  wyznacza krawędzie  $p$  i  $q$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Proste  $p$  i  $q$  przecinają się w prostej  $k$  (rys. 6.36). Proste  $p$  i  $q$  przecinają krzywe  $e$  i  $f$  w punktach  $E$  i  $F$ .



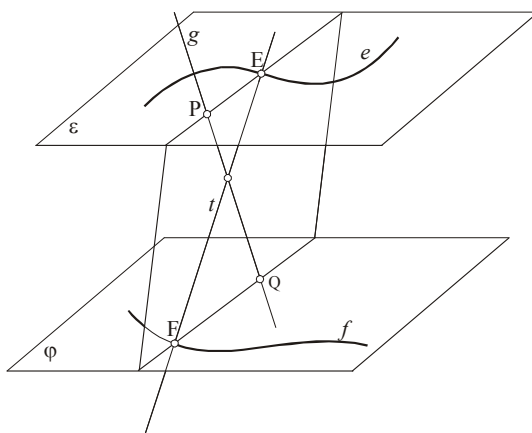
Może się zdarzyć, że prosta  $g$  jest równoległa do jednej z płaszczyzn  $\varepsilon$  lub  $\varphi$ , wtedy jedna z prostych  $p$  lub  $q$  jest do niej równoległa (rys. 6.37).



Rys. 6.36



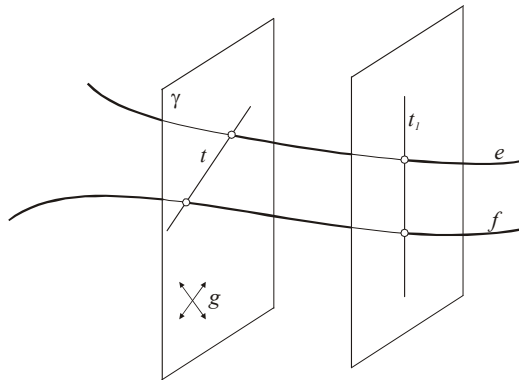
Rys. 6.37



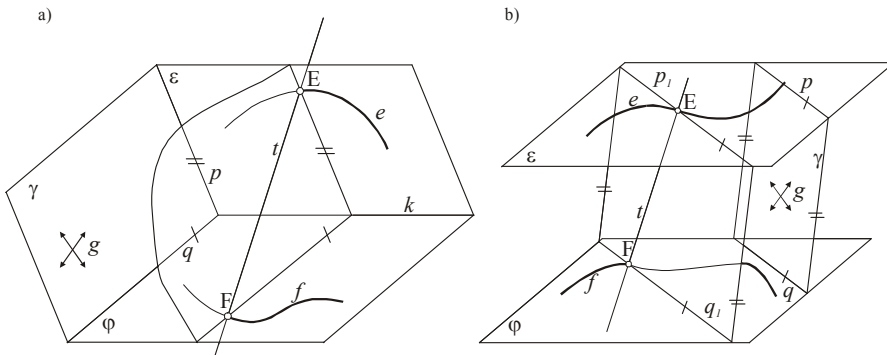
Rys. 6.38

Jeżeli płaszczyzny  $\varepsilon$  i  $\varphi$  zawierające krzywe  $e$  i  $f$  są do siebie równoległe, wyznaczamy punkty przebicia P i Q prostej  $g$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Przez punkty P i Q prowadzimy proste  $p$  i  $q$  równoległe, wyznaczające płaszczyznę zawierającą kierownicę  $g$ . Proste  $p$  i  $q$  przecinają krzywe  $e$  i  $f$  w punktach E i F wyznaczających tworzącą  $t$  (rys. 6.38).

W przypadku trzecim, gdy kierownice  $e$  i  $f$  są krzywymi płaskimi bądź przestrzennymi a kierownica  $g$  jest prostą niewłaściwą zawartą w płaszczyźnie  $\gamma$ , tworzące wyznaczamy za pomocą płaszczyzn równoległych do  $\gamma$  przecinających kierownice  $e$  i  $f$  (rys. 6.39). Jeżeli kierownice  $e$  i  $f$  zawarte są w płaszczyznach  $\varepsilon$  i  $\varphi$  a prosta  $g$  niewłaściwa zawarta jest w płaszczyźnie  $\gamma$  przecinającej  $\varepsilon$  i  $\varphi$  w krawędziach  $p$  i  $g$ , tworzące wyznaczamy jak na rysunku 6.40a i b. Krawędzie kolejnych płaszczyzn równoległych do  $\gamma$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$  są równoległe do  $p$  i  $q$ . Przecinają kierownice  $e$  i  $f$  w punktach E i F, które wyznaczają tworzące. Na rysunku 6.40a krawędzie  $p$ ,  $q$  i  $k$  mają punkt wspólny, na rysunku 6.40b krawędź  $p$  jest równoległa do  $q$  ponieważ  $\varepsilon \parallel \varphi$ .



Rys. 6.39



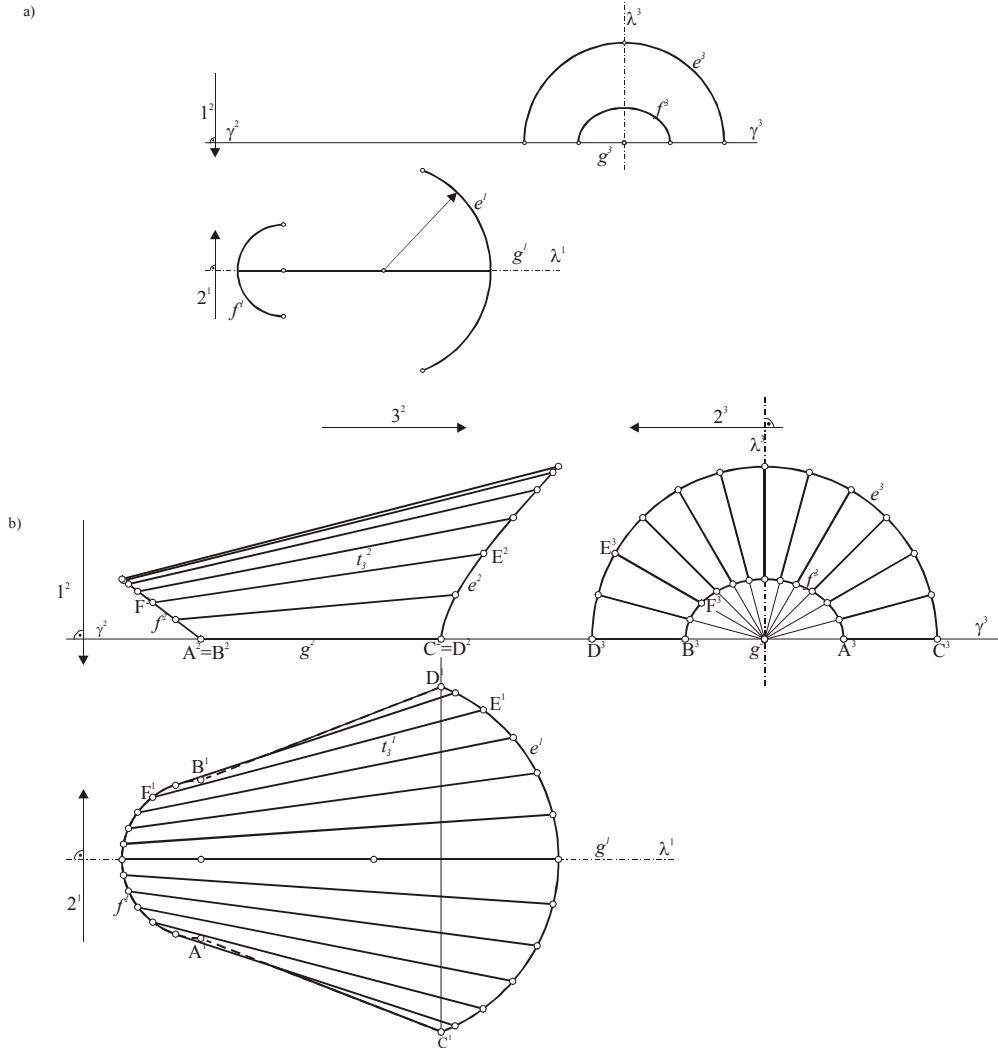
Rys. 6.40

### Ćwiczenie 164

Dane są rzuty pierwsze i trzecie krzywych  $e$  i  $f$ , oraz rzuty prostej właściwej  $g$ . Krzywe  $e$  i  $f$  i prosta  $g$  są trójką kierownic powierzchni prostokreślnej zwanej powierzchnią stożkową lub konusoidą. Wyznaczyć powłokę ograniczoną krzywymi  $e$  i  $f$ , powierzchnią, oraz przekrojem płaszczyzny  $\gamma$  (rys. 6.41a). Krzywa  $e$  jest w rzucie pierwszym i trzecim łukiem okręgu, krzywa  $f$  w rzucie pierwszym jest łukiem okręgu, a w rzucie trzecim  $\frac{1}{2}$  elipsy. Kierownica  $g$  jest prostą trzeciorzutującą.

**Rozwiązanie**

Zadanie rozwiązujemy według schematu 6.25. Płaszczyzny zawierające poszczególne tworzące prowadzimy przez prostą  $g$  (np.  $G^3 \in \varepsilon^3$ ) w rzucie trzecim. Punkty E i F są punktami przebiecia krzywych  $e$  i  $f$  z płaszczyznami. Wyznaczamy rzut drugi krzywych  $e$  i  $f$  (są to krzywe przestrzenne), oraz rzuty pierwszy i drugi tworzących (rys. 6.41b).

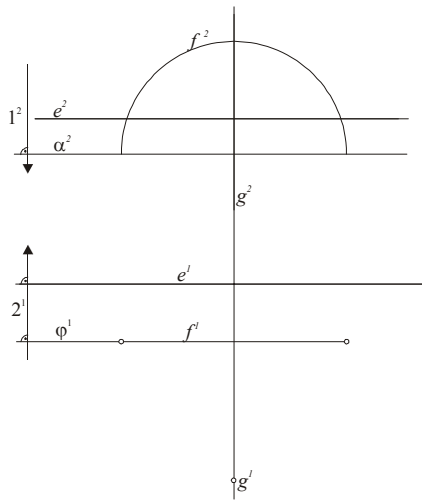


Rys. 6.41ab

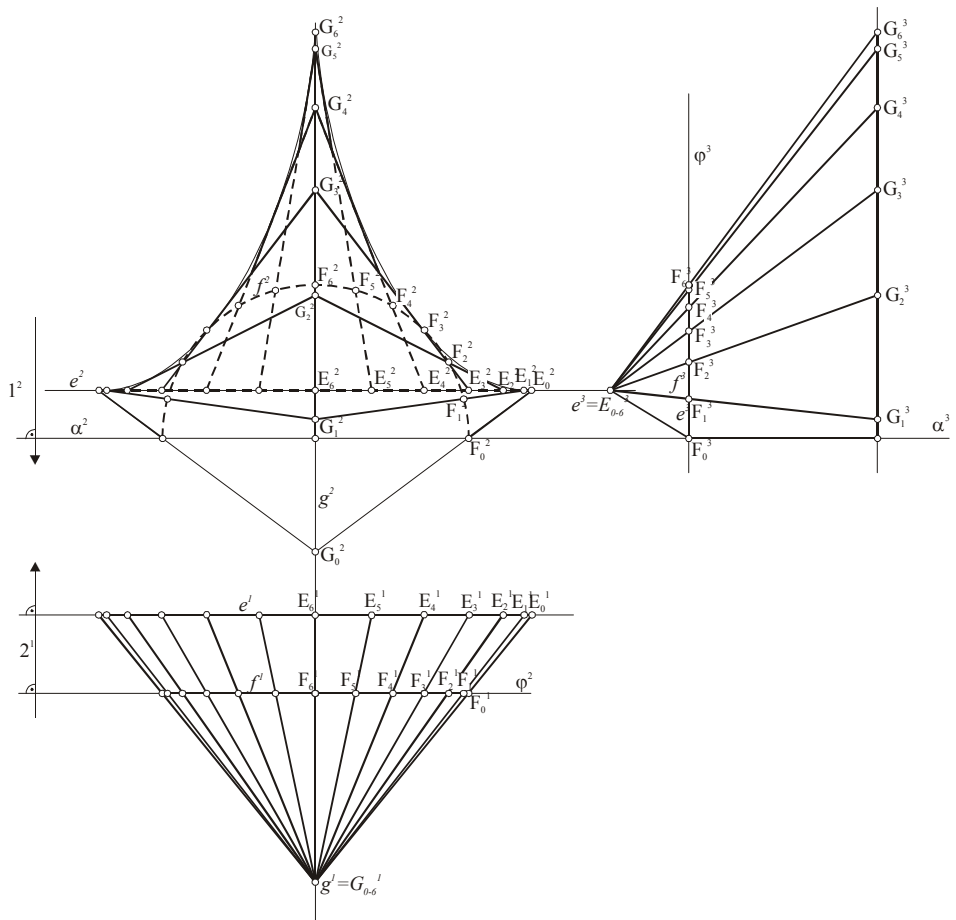
**Ćwiczenie 165**

Wykreślić trzy rzuty powłoki skośnej wiązkowej, będącej conusoidą, daną za pomocą trójki kierownic:  $e, f, g$ , ograniczonej kierownicami  $e$  i  $g$ , przekrojem płaszczyzną  $\alpha$ , oraz wycinkiem powierzchni (rys. 6.42a). Kierownice  $e$  i  $g$  są prostymi właściwymi. Kierownica  $f$  jest okręgiem zawartym w płaszczyźnie drugorastwowej  $\varphi$ .

a)



b)



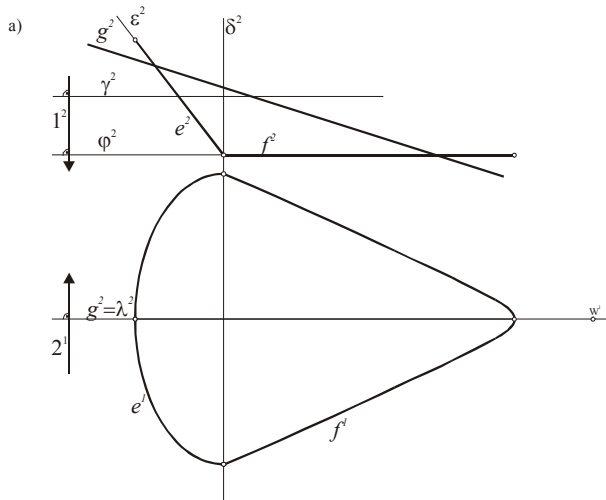
Rys. 6.42

*Rozwiązanie*

Prosta  $g$  jest pierwszorzutująca, prosta  $e$  jest trzeciorzutująca. Tworzące w rzucie trzecim przecinają się w  $e^3$  w rzucie pierwszym przecinają się w  $g^1$ . Rzuty drugie tworzących znajdujemy dzięki punktom przecięcia poszczególnych tworzących z okręgiem  $f$ , oraz prostymi  $g$  i  $e$  (rys. 6.42b). Wyznaczamy obwiednię tworzących w rzucie drugim oraz widoczność.

**Ćwiczenie 166**

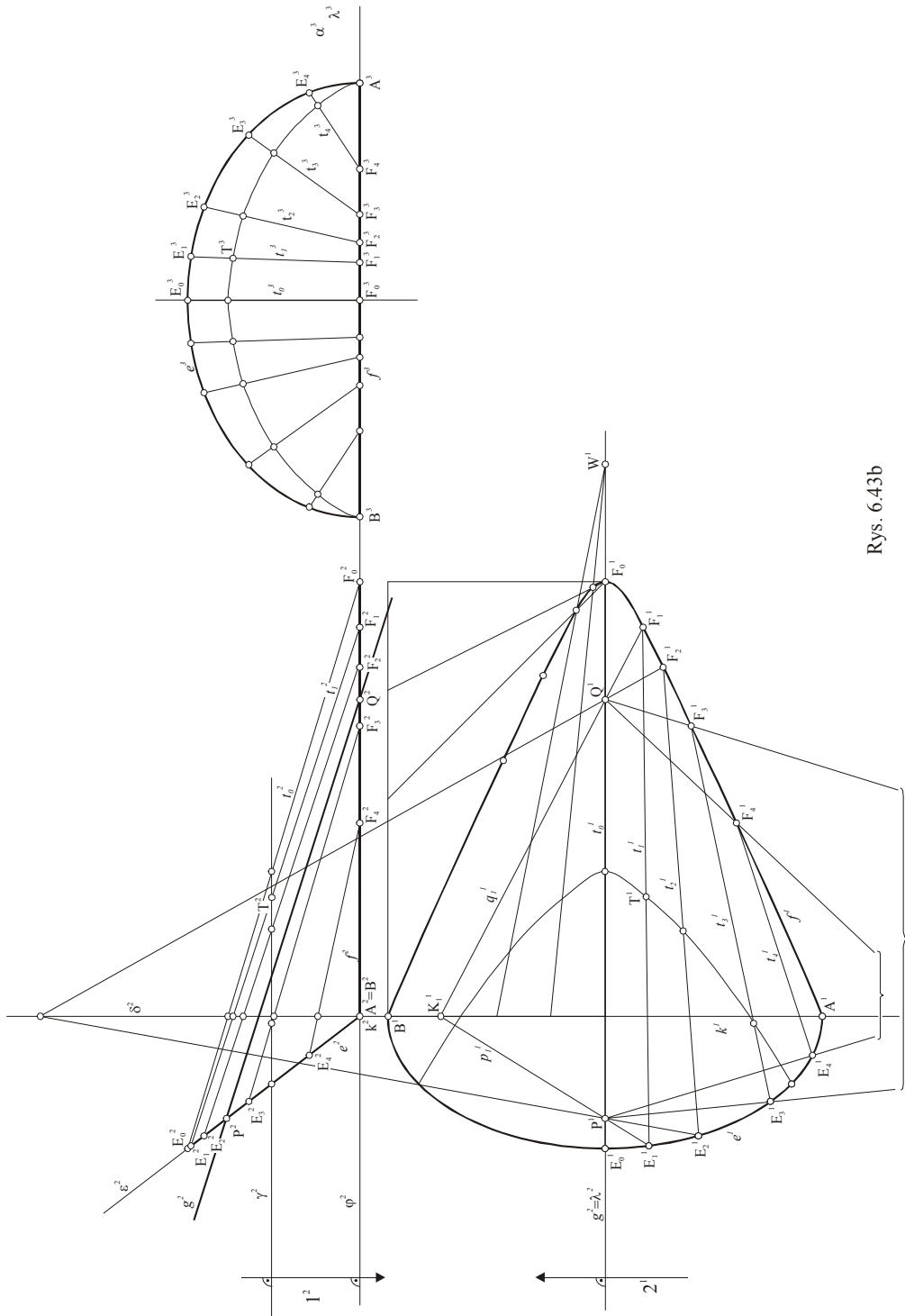
Dane są trzy kierownice  $e, f, g$  wyznaczające powłokę skośną stożkową (rys. 6.43a). Kierownica  $e$  jest okręgiem zawartym w płaszczyźnie drugorzutującej  $\varepsilon$ , kierownica  $f$  jest hiperbolą daną wierzchołkami  $F_0$  i  $W$ , oraz punktami  $A$  i  $B$  (wierzchołek  $W$  potrzebny jest do kreślenia hiperboli zgodnie z konstrukcją XVI (rys. 1.25)). Hiperbola  $f$  zawarta jest w płaszczyźnie pierwszowarstwowej  $\varphi$ . Trzecią kierownicą jest prosta właściwa  $g$  drugowarstwowa. Wykreślić trzy rzuty powłoki zawartej pomiędzy krzywymi  $e$  i  $f$  oraz wyznaczyć przekrój płaszczyzną  $\gamma \perp l$ .



Rys. 6.43a

*Rozwiązanie*

Kreślimy rzuty: pierwszy i trzeci okręgu  $e$  - są to elipsy, oraz wyznaczamy rzut pierwszej hiperboli  $f:f^1$ . Następnie jak na rysunku 6.26 wyznaczamy punkty przebiecia  $P$  i  $Q$  prostej  $g$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$  oraz krawędź  $k$  płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Płaszczyzna symetrii hiperboli  $\lambda \perp 2$  zawiera prostą  $g$  i tworzącą powierzchni  $t_0$  wyznaczoną punktami  $F_0$  i  $E_0$  ( $F_0=f \cap \lambda$ ,  $E_0=e \cap \lambda$ ). Pozostałe tworzące wyznaczamy w rzucie pierwszym co przedstawiamy na przykładzie  $t_1$ . Obieramy na kierownicy  $f$  punkt  $F_1$  i prowadzimy przez niego i punkt  $Q$  prostą  $q^1$ , przecina ona prostą  $k$  w punkcie  $K^1$  przez który i przez punkt  $P$  kreślimy prostą  $p^1$ . Prosta  $p^1$  przecina krzywą  $e^1$  w punkcie  $E^1$ . Proste  $p$  i  $q$  są to krawędzie płaszczyzny  $\delta$  zawierającej kierownicę  $g$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Wyznaczamy brakujące rzuty tworzących oraz przekrój płaszczyzną  $\gamma$  (rys. 6.43b).



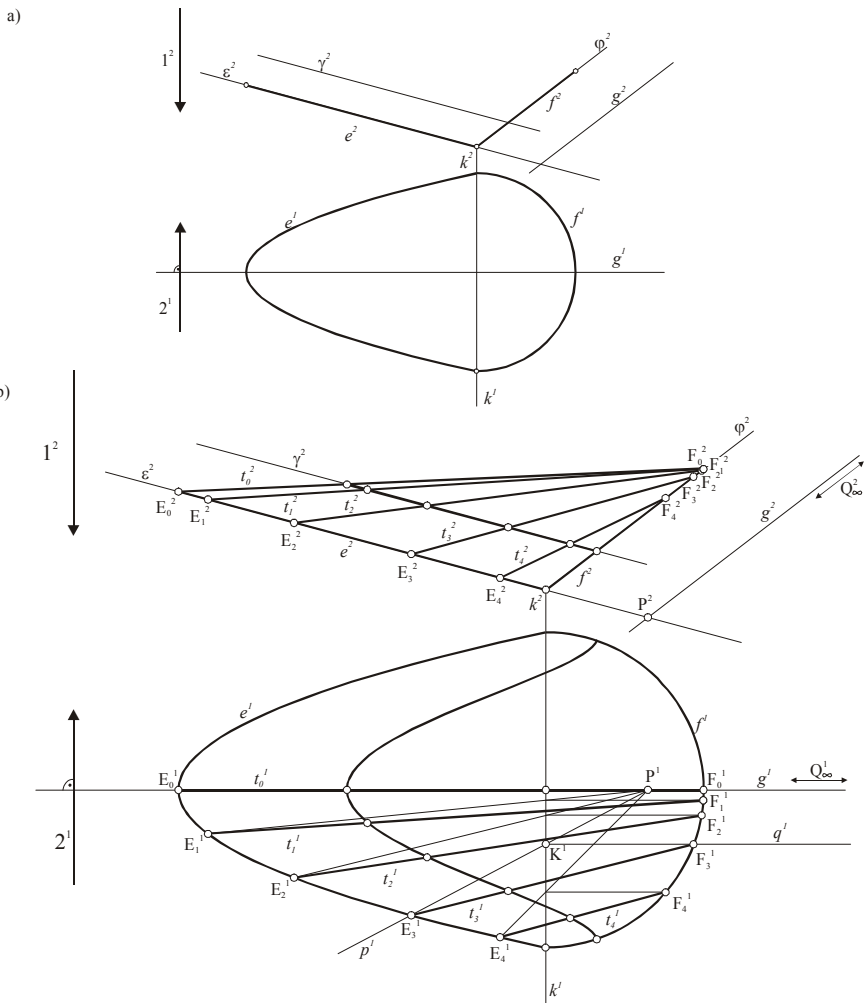
Rys. 6.43b

### Ćwiczenie 167

Wykreślić rzuty podstawowe powłoki będącej wycinkiem powierzchni skośnej wiaźkowej, stożkowej (konusoidy) wyznaczonej trójką kierownic: paraboli  $e$  zawartej w drugorzutuującej płaszczyźnie  $\varepsilon$ , elipsy  $f$  zawartej w drugorzutuującej płaszczyźnie  $\varphi$  (rzut pierwszy elipsy jest okręgiem), oraz kierownicy  $g$  będącej odcinkiem prostej właściwej równoległej do płaszczyzny  $\varphi$ . Wyznaczyć przekrój płaszczyzną  $\gamma$  (rys. 6.44a).

#### Rozwiązanie

Podobnie, jak w ćwiczeniu 166 wyznaczamy krawędź  $k$  płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , oraz punkty przebiecia prostej  $g$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$ .  $\varepsilon \cap g = P$  (punkt właściwy),  $\varphi \cap g = Q_\infty$  (punkt niewłaściwy). Tworzące wyznaczamy jak na rysunku 6.37. Przez  $E_3$  i  $P$  prowadzimy prostą  $p$ , przecina ona prostą  $k$  w punkcie  $K$ , przez który prowadzimy prostą  $q \parallel g$ ;  $q \cap g = Q_\infty$ . Prosta  $q$  przecina kierownicę  $f$  w punkcie  $F_3$ .  $E_3 F_3 = t_3$ . Proste  $p$  i  $q$  wyznaczają płaszczyznę zawierającą kierownicę  $g$  (rys. 6.44b). Punkty przecięcia tworzących z płaszczyzną  $\gamma$  wyznaczają przekrój.



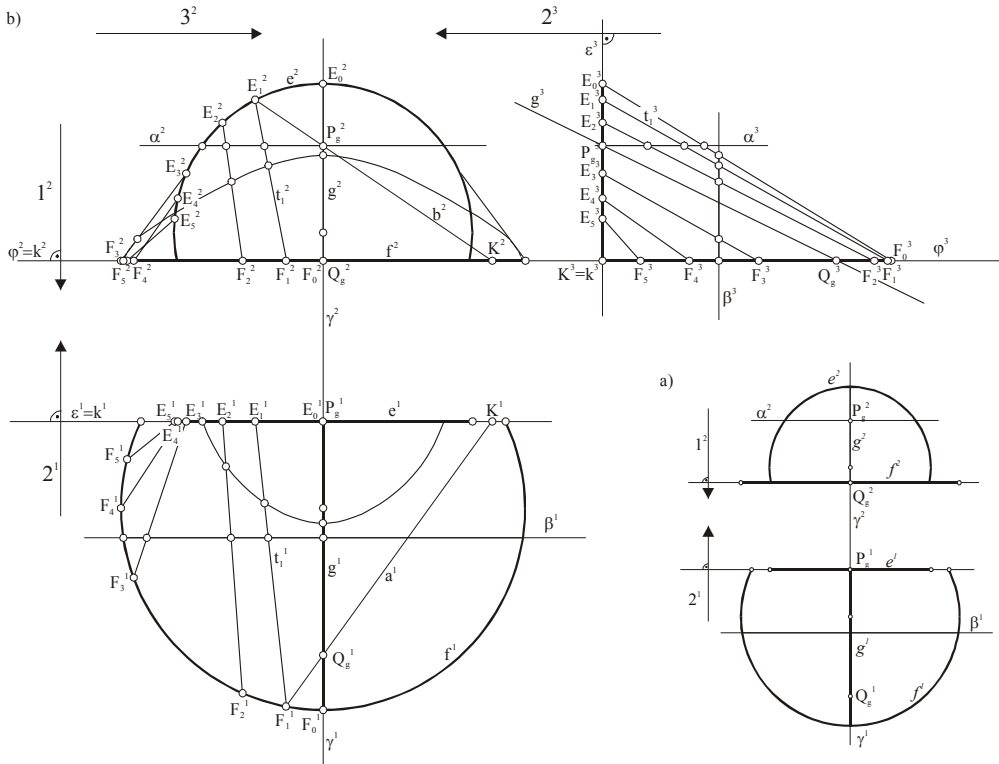
Rys. 6.44

### Ćwiczenie 168

Wykreślić trzy rzuty powłoki będącej wycinkiem konusoidy - powierzchni skośnej wiązkowej której kierownicami są: okrąg  $e$  zawarty w płaszczyźnie  $\varepsilon \perp \Pi_2$ , okrąg  $f$  zawarty w płaszczyźnie  $\varphi \perp \Pi_1$ , oraz prosta właściwa  $g$ . Powłoka ograniczona jest krzywymi  $e$  i  $f$  oraz wycinkiem powierzchni (rys. 6.45a).

#### Rozwiązanie

Punkty przebiecia  $P$  i  $Q$  prostej  $g$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$  wyznaczają w rzucie trzecim. Krawędź  $k$  ma rzuty  $k^1 = \varepsilon^1$  i  $k^2 = \varphi^2$ . Płaszczyzna symetrii  $\gamma$  dwurzutująca wyznacza tworzącą  $t_0 = E_0F_0$ . Tworzącą  $t_1$  wyznacza płaszczyzna zawierająca prostą  $g$  i posiadająca krawędź  $a$  z płaszczyzną  $\varphi$  i  $b$  z płaszczyzną  $\varepsilon$ . Krawędzie  $a$ ,  $b$ , i  $k$  posiadają punkt wspólny  $K$  i zawierają punkty przebiecia  $P$  i  $Q$ . Punkty  $F \in f$  i  $E \in e$  wyznaczają tworzącą (rys. 6.45b). Wyznaczone zostały dwa przekroje płaszczyznami  $\alpha \parallel \Pi_1$  i  $\beta \perp \Pi_2$ .



Rys. 6.45

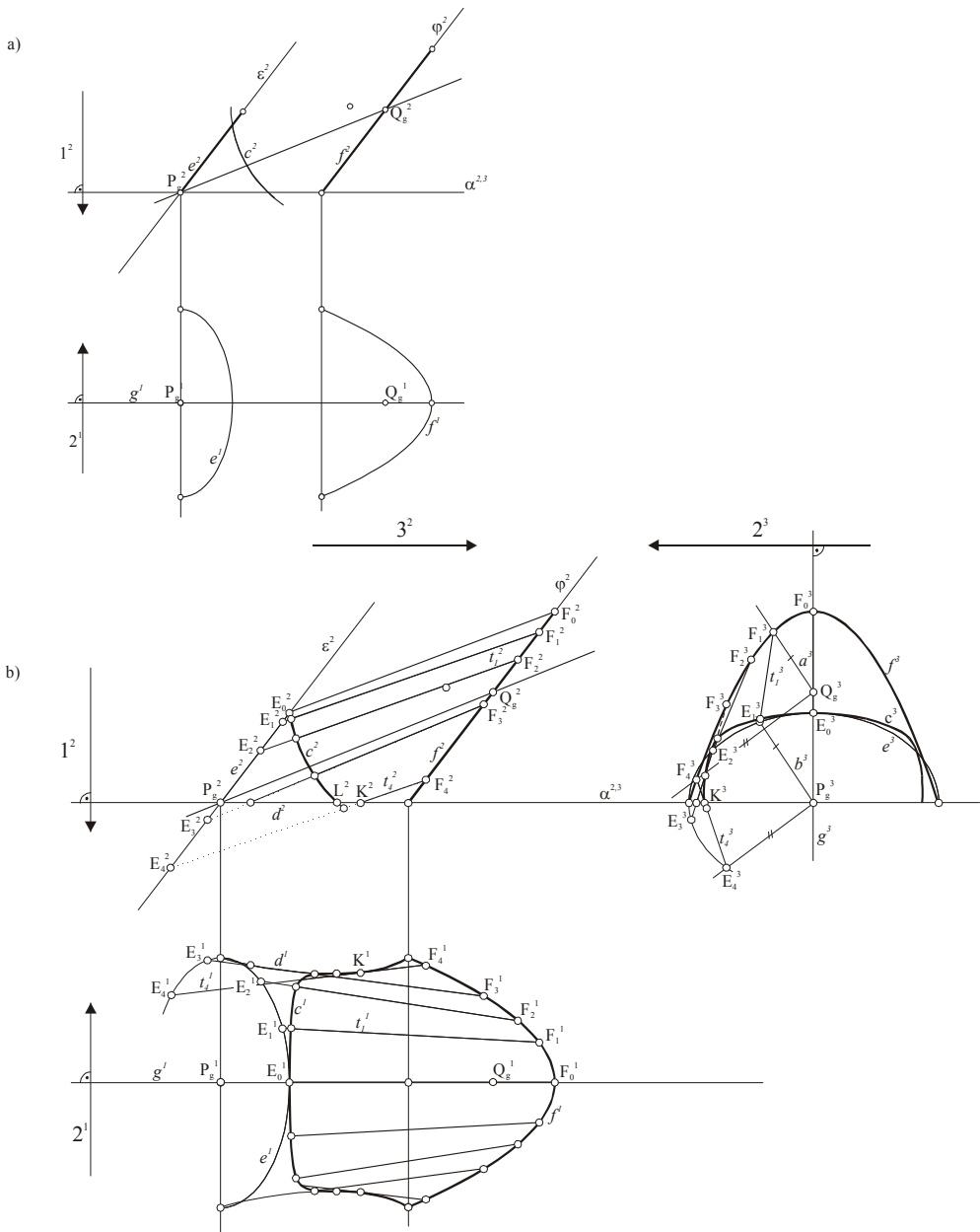
### Ćwiczenie 169

Dane są trzy kierownice:  $e$  - elipsa zawarta w płaszczyźnie  $\varepsilon$ ,  $f$  - parabola zawarta w płaszczyźnie  $\varphi$  równoległej do  $\varepsilon$  oraz prosta właściwa  $g$ . Wyznaczyć trzy rzuty powłoki będącej wycinkiem powierzchni skośnej wiązkowej, której brzegiem jest krzywa  $f$ , krzywa  $a$  - przekrój powłoki płaszczyzną  $\alpha$ , oraz linia  $c$  - linia przenikania powłoki z walcem obrotowym (rys. 6.46a).



**Rozwiązanie**

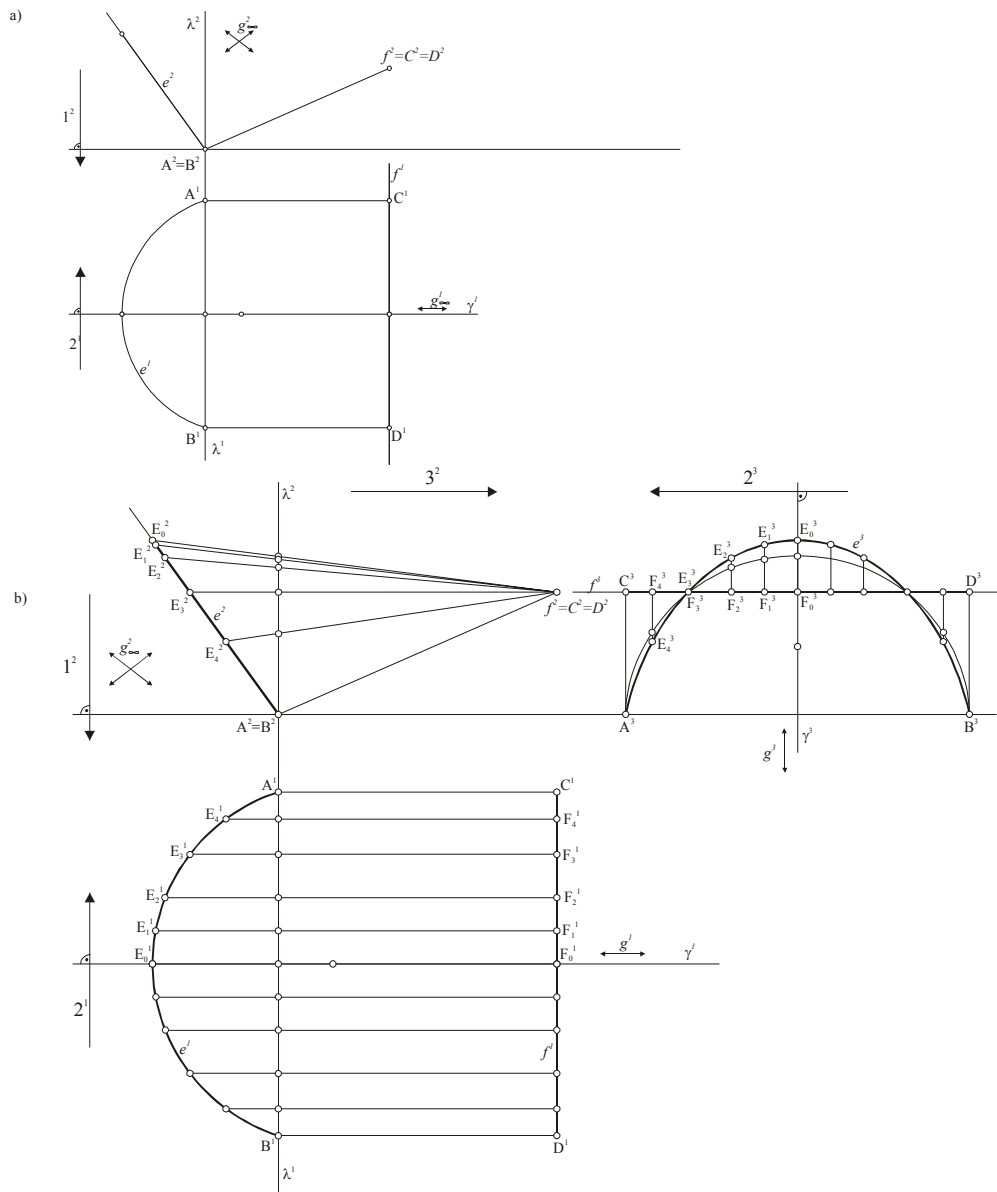
Kierownice  $e$ ,  $f$  i  $g$  wyznaczają konusoide. Wykreślamy trzecie rzuty kierownic  $e$  i  $f$  oraz punkty przebiecia  $P$  i  $Q$  prostej  $g$  z tymi płaszczyznami. Ponieważ  $\varepsilon$ , jest równoległa do  $\varphi$ , płaszczyzny zawierające prostą  $g$  posiadają z  $\varepsilon$  i  $\varphi$  krawędzie równoległe. Wyznaczamy je w rzucie trzecim np. :  $a \parallel b$  wyznaczają tworzącą  $t$ , (schemat rys. 6.38). Linię  $a$  wyznaczamy za pomocą dodatkowego punktu na tworzącej  $t_4$ ,  $K=t_4 \cap \alpha$  (rys. 6.46b).



Rys. 6.46

### Ćwiczenie 170

Wyznaczyć trzy rzuty - powierzchni skośnej wiązkowej danej trzema kierownicami z których:  $e$  - jest elipsą zawartą w płaszczyźnie drugorzutuującej  $\varepsilon$ ,  $f$  - jest prostą właściwą drugorzutuującą i  $g$  - jest prostą niewłaściwą zawartą w płaszczyźnie  $\gamma$  drugowarstwowej. Powłoką jest część powierzchni której brzegiem jest część łuku elipsy  $AB$ , odcinki tworzących  $\langle AC \rangle$  i  $\langle BD \rangle$ , oraz odcinek  $\langle CD \rangle$  prostej  $f$  (rys. 6.47a). Wyznacz przekrój powłoki płaszczyzną  $\lambda$ .



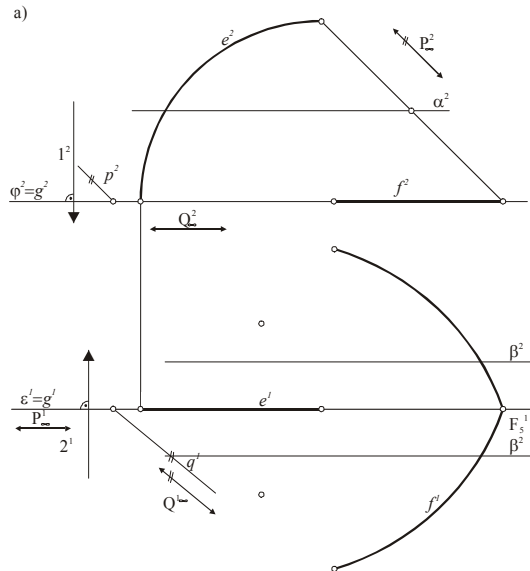
Rys. 6.47

**Rozwiązanie**

Powierzchnia, której jedną z trzech kierownic jest prosta właściwa, a druga prosta niewłaściwa jest powierzchnią stożkowo-walcową zwaną konoidą. Rozwiązuje się ją wykorzystując położenia rzutujące kierownic. W przypadku jak na rysunku rzuty drugie tworzących zawierają prostą  $f^2$  której rzut drugi jest punktem, pierwsze rzuty zawierają prostą  $g^1_\infty$  czyli są równoległe do  $\gamma^1$ . Odpowiednie tworzące przecinają kierownicę  $e$  w punktach  $E_1, E_2 \dots$  (rys. 6.47b). Wyznaczamy trzeci rzut kierownicy  $e$ . Tworzące w rzucie trzecim są równoległe do  $\gamma^3$  i przecinają kierownicę  $f$  w punktach  $F_1, F_2 \dots$ . Przekrój płaszczyzną  $\lambda$  wyznaczamy za pomocą punktów przebicia z tworzącymi.

**Ćwiczenie 171**

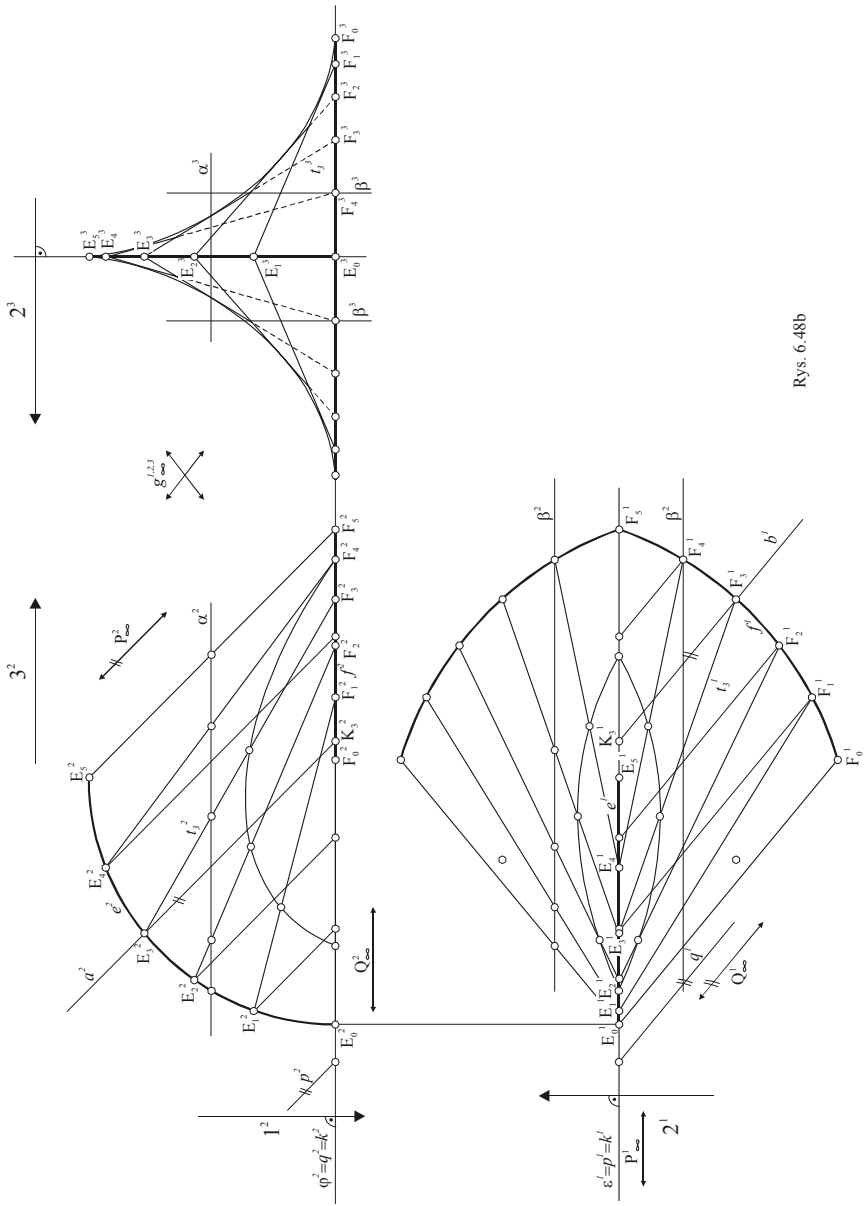
Dane są trzy kierownice powierzchni skośnej-wiązkowej: łuk okręgu  $f$  zawarty w płaszczyźnie pierwszowarstwowej  $\varphi$ ,  $e$  łuk okręgu zawarty w płaszczyźnie drugowarstwowej  $\varepsilon$  oraz prosta niewłaściwa  $g$  dana punktami  $P_\infty$  i  $Q_\infty$  należącymi do prostych  $p$  i  $q$ , zawarta w płaszczyźnie  $\gamma=pq$ . Proste  $p$  i  $q$  są krawędziami płaszczyzny  $\gamma$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Wyznaczyć trzy rzuty powłoki dwusegmentowej dla której brzegiem jednego segmentu jest odcinek tworzącej  $\langle E_0 F_0 \rangle$ , odcinek okręgu  $\langle E_0 E_5 \rangle$ , odcinek tworzącej  $\langle E_5 F_5 \rangle$  oraz łuk  $\langle F_5 F_0 \rangle$ . Wyznaczyć dwa przekroje powłoki płaszczyzną  $\alpha \perp l$  i  $\beta \perp l$  (rys. 6.48a).



Rys. 6.48a

**Rozwiązanie**

Powierzchnia skośno-wiązkowa której jedną z kierownic jest prosta niewłaściwa, a zadana z dwu pozostałych kierownic nie jest prostą właściwą, jest cylindroidą - powierzchnią skośną walcową. Zadanie rozwiązujemy według schematu na rysunku 6.40a. Krawędź  $k$  płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$  ma rzuty  $k^1 \subset \varepsilon^1$  i  $k^2 \subset \varphi^2$ . Na przykładzie tworzącej  $t_3$  pokazany jest sposób wyznaczania tworzących. Na kierownicy  $e^2$  wybieramy punkt  $E^2$  i prowadzimy przez ten punkt prostą  $a^2 \parallel p^2$ ;  $a^2 \cap k^2 = K^2_3$ . Pierwszy rzut punktu  $K_3 K^1_3$  zawarty jest w prostej  $k^1$ . Przez punkt  $K^1_3$  prowadzimy prostą  $b^1 \parallel q^1$ . Przecina ona rzut pierwszy kierownicy  $f$ :  $f^1$  w punkcie  $F^1_3$ . Wyznaczamy brakujące rzuty punktów  $E_3$  i  $F_3$  i rzuty tworzącej  $t_3$ . Inne tworzące wyznaczamy podobnie (rys. 6.48b). Oba segmenty są symetryczne: płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna  $\varepsilon$ .

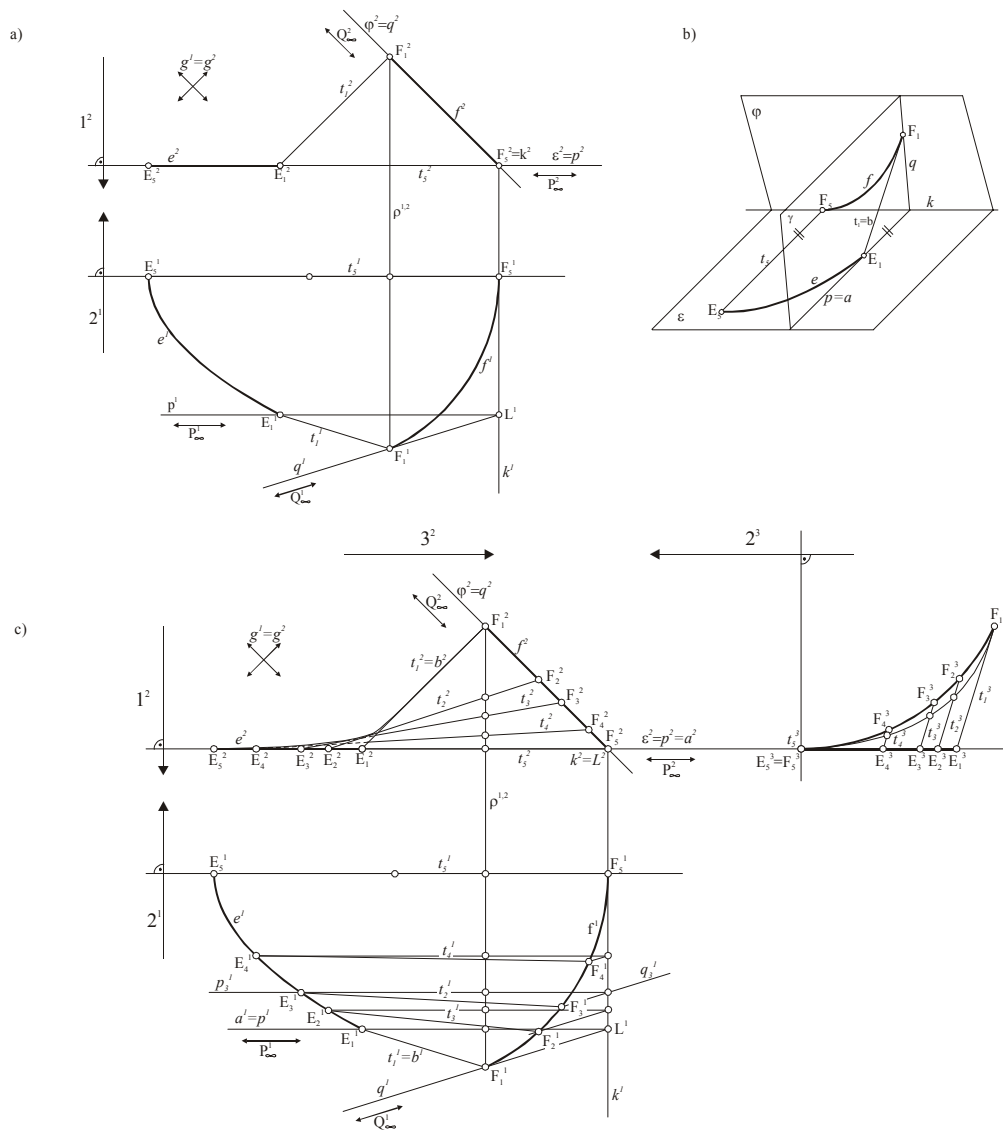


Rys. 6.48b

W niektórych przypadkach powierzchnie prostokreślne nierozwijalne wyznaczone są w sposób bardziej skomplikowany. Ma to miejsce w przypadku cylindroidy, gdy zamiast jednej z kierownic podane są dwie tworzące.

### Ćwiczenie 172

Dane są dwie kierownice płaskkie:  $e$  będąca parabolą o wierzchołku  $E_5$  i  $f$  będąca łukiem elipsy, której rzutem pierwszym  $e^1$  jest wycinek łuku okręgu. Kierownice te zawarte są w płaszczyznach drugorzutujących  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , ponadto  $\varepsilon$  jest płaszczyzną pierwszorzutową, więc  $e=e^1$ . Dane są ponadto dwie tworzące powierzchni  $t_1$  i  $t_5$  będącej cylindroidą. Wyznaczyć pozostałe tworzące powierzchni, w rzutach podstawowych, trzeci rzut, oraz przekrój płaszczyzną dwurzutującą (rys. 6.49a).



Rys. 6.49

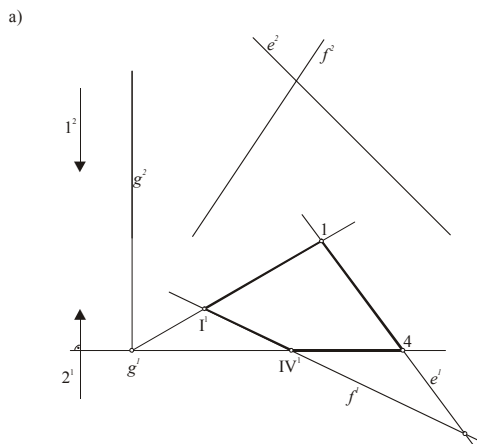
*Rozwiązanie*

Dla uzyskania możliwości konstruowania nowych tworzących musimy wyznaczyć płaszczyznę  $\gamma$  równoległą do obu danych tworzących  $t_1$  i  $t_5$  w której zawarta jest trzecia kierownica prostoliniowa  $g$ . Jest to prosta niewłaściwa, przecinająca tworzące  $t_1$  i  $t_5$ . Rysunek poglądowy 6.49b przedstawia położenie kierownic  $e$  i  $f$  oraz tworzących  $t_1$  i  $t_5$ . Płaszczyzna  $\gamma$  wyznaczona jest prostymi przecinającymi się  $a \parallel t_5$  i  $b = t_1$ ,  $a \cap b = E_1$  (rys. 6.49c). Krawędzie  $p = \varepsilon \cap \gamma$  i  $q = \varphi \cap \gamma$  przecinają się w prostej  $k = \varepsilon \cap \varphi$ . Dalej postępujemy jak w schemacie podanym na rysunku 6.40. Punkty przebicia  $P$  i  $Q$  prostej niewłaściwej  $g$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$  są punktami niewłaściwymi prostych  $p$  i  $q$ . Prowadzimy płaszczyzny równoległe do  $\gamma$  czyli zawierające prostą  $g$  za pomocą par prostych równoległych do  $p$  i  $q$  i w punktach przecięcia się ich z kierownicami  $e$  i  $f$  wyznaczamy punkty kolejnych tworzących (rys. 6.49c). Na koniec wyznaczamy obwiednię drugich rzutów tworzących oraz ich widoczność.

Przedstawione na rysunkach: 6.36, 6.37, 6.38, 6.40 sposoby wyznaczania tworzących powierzchni skośnej wiązkowej wyznaczonej przez kierownice płaskie z których co najmniej jedna jest prostą, są aktualne i wtedy gdy wszystkie kierownice  $e, f$  i  $g$  są prostymi i każde dwie proste są rozłączne. Powierzchnia skośna wiązkowa wyznaczona przez trzy proste jest kwadryką prostoliniową. Jeżeli jedna z kierownic jest prostą niewłaściwą lub jeżeli istnieje płaszczyzna równoległa do wszystkich trzech prostych - kwadryka nazywa się paraboloidą (bądź paraboloidą hiperboliczną). Jeżeli taka płaszczyzna nie istnieje jest to kwadryka hiperboliczna. Cechą kwadryk prostoliniowych jest to, że istnieją w niej dwie rodziny tworzących ( $t$ ) i ( $u$ ). Trzy dowolne tworzące rodziny ( $u$ ), obrane na kierownice, ustalają powierzchnię skośną o tworzących z rodziny ( $t$ ), i na odwrót. Tworzące tego samego układu są prostymi skośnymi, należące zaś do różnych układów przecinają się.

**Ćwiczenie 173**

Dane są trzy proste skośne  $e, f$  i  $g$ , z których prosta  $g$  jest pierwszorzutuującą, zaś rzuty pierwsze  $e^1$  i  $f^1$  prostych  $e$  i  $f$  nie są równoległe. Wykreślić tworzące tej kwadryki oraz zaznaczyć jej wycinek o brzegu  $\langle 1, I, IV, 4 \rangle$  (rys. 6.50).

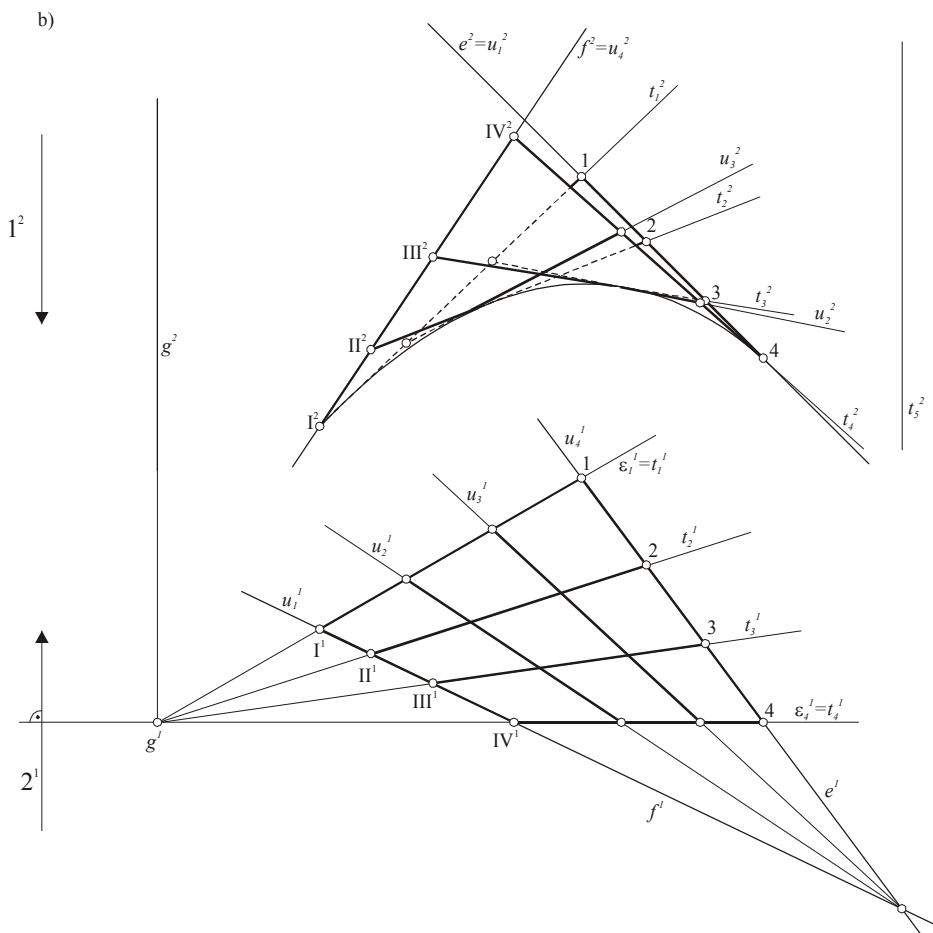


Rys. 6.50a

*Rozwiązanie*

Ponieważ nie istnieje płaszczyzna równoległa do prostych  $e, f, g$ , kwadryka jest hiperboloidą jednopowłokową. Rzuty tworzących  $t_1, t_4$  układu ( $t$ ) wyznaczone są za pomocą płaszczyzn pierwszorzutuujących  $\varepsilon_{1-4}$  zawierających prostą  $g$ . Przecinają one kierownice  $e$  i  $f$  odpo-

wiednio w punktach 1, 2, 3, 4 i I, II, III, IV wyznaczając tworzące ( $t_1 = 1$  I...). Tworzące drugiej rodziny ( $u$ ) wyznaczamy podobnie przyjmując za kierownice trójkę jej tworzących  $t_1$ ,  $t_4$  i  $t_5$ , z których tworząca  $t_5$  jest pierwszorzutową ( $t_1 = e^1 \cap f^1$ ) (rys. 6.50b). Wyznaczamy w rzucie drugim obwiednię odpowiednich tworzących oraz widoczność zaznaczonego płata kwadryki.



Rys. 6.50b

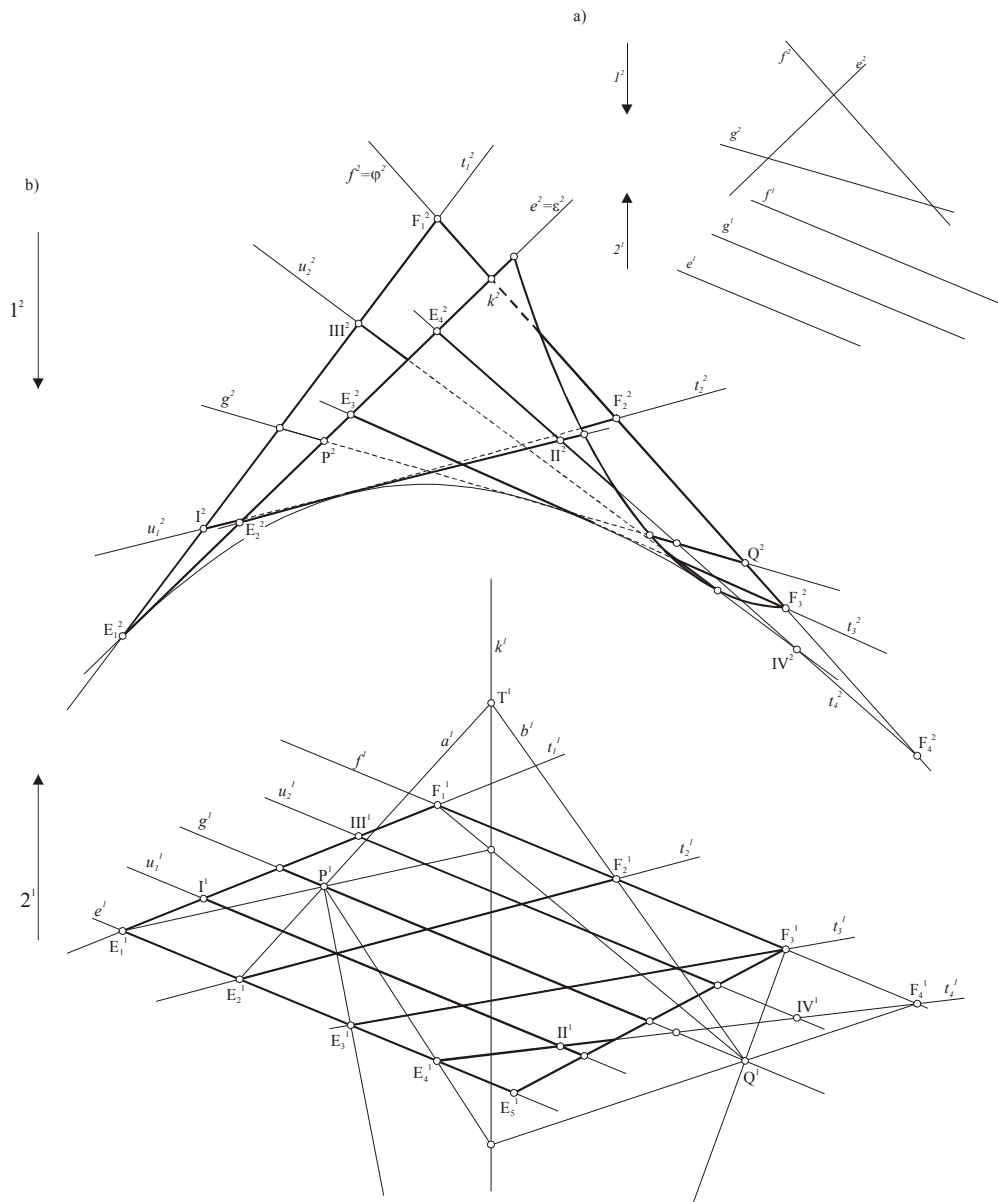
### Ćwiczenie 174

Dane są trzy kierownice kwadryki prostokrejnej  $e, f$  i  $g$ , które są prostymi parami skośnymi. Rzuty pierwsze tych kierownic  $e^1, f^1, g^1$  są do siebie równoległe. Wyznaczyć rzuty wycinka powierzchni ograniczonej odcinkiem  $\langle E_1F_1 \rangle$  tworzącej  $t_1$ ,  $\langle F_1F_3 \rangle$  prostej  $e$ , łukiem  $\langle F_3F_5 \rangle$  i odcinkiem  $\langle E_5E_1 \rangle$  prostej  $f$ . Ponadto brzegiem rzutu drugiego jest łuk paraboli będący obwiednią rzutów odpowiednich tworzących (rys. 6.51a).

### Rozwiązanie

Tworzące kwadryki wyznaczamy jak na rysunku 6.36. Przez dwie proste, tu:  $e$  i  $f$  prowadzimy płaszczyzny  $\varepsilon$  i  $\varphi$  i wyznaczamy punkty przebiecia prostej  $g$  z tymi płaszczyznami:  $P$  i  $Q$ , oraz krawędź  $k$  płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Przez prostą  $g$  prowadzimy płaszczyznę  $\gamma_1 \dots$  i wyznaczamy ich punkty  $E_1 \dots$  i  $F_1 \dots$  przecięcia prostych  $e$  i  $f$ . Płaszczyzny  $\gamma_1 \dots$  są wyznaczone za pomo-

cą krawędzi  $a$  i  $b$  z płaszczyznami  $\varepsilon$  i  $\varphi$  przecinającymi się z prostą  $k$  w punkcie  $T$ . Wyznaczamy obwiednię tworzących w rzucie drugim, (jest ona parabola) oraz widoczność połuki (rys. 6.51b).



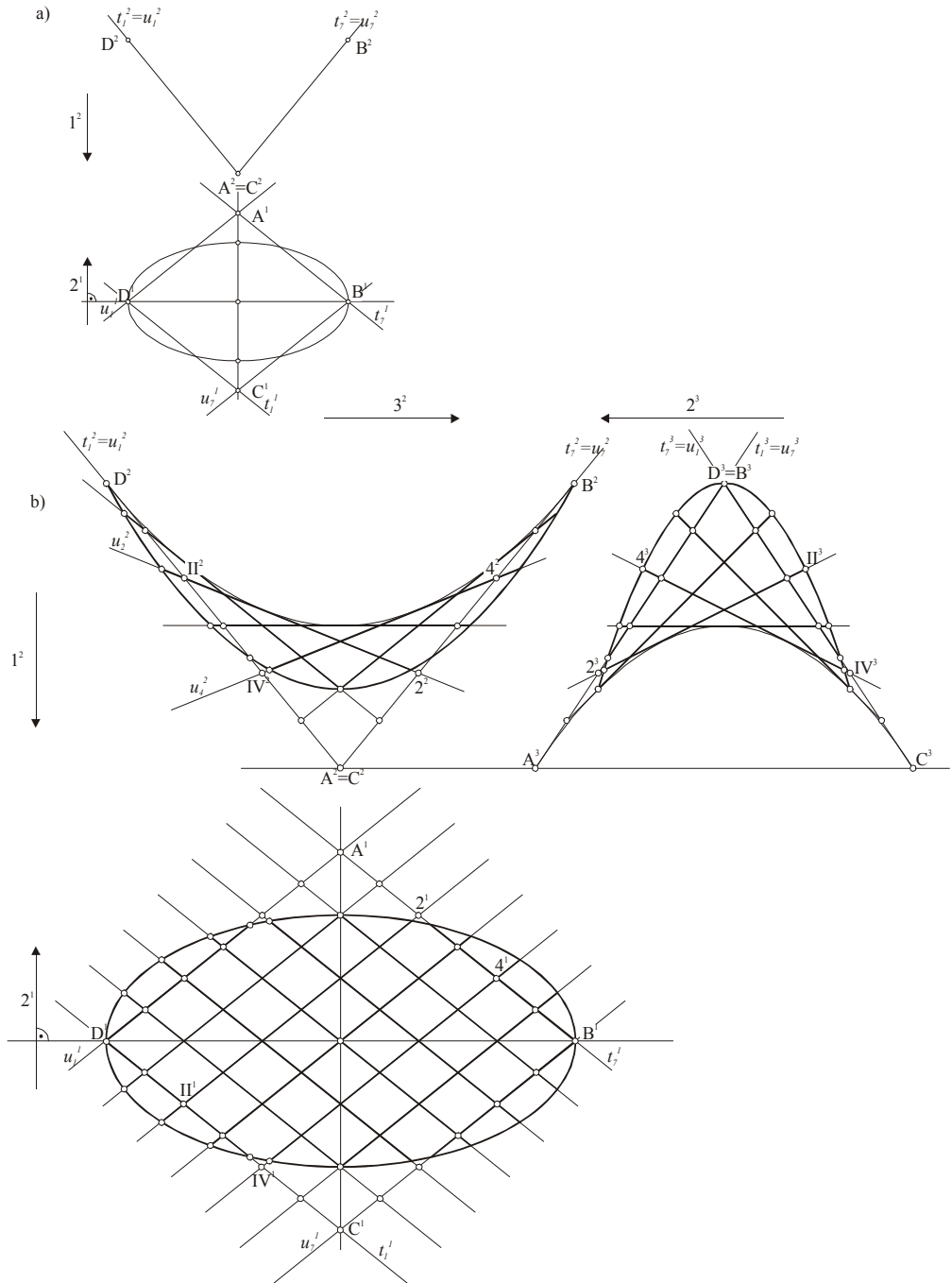
Rys.6.51

Niekiedy zdarza się, że kwadryka dana jest dwiema parami tworzących należących do dwóch rodzin, przecinających się w czworoboku przestrzennym. Pozostałe tworzące możemy wyznaczyć dzieląc boki czworoboku na taką samą ilość równych odcinków. Pary punktów odpowiadających sobie wyznaczają szukane tworzące.



### Ćwiczenie 175

Wyznaczyć trzy rzuty kwadryki danej przez dwie pary przecinających się tworzących  $t_1$  i  $u_1$ , oraz wyznaczyć powłokę o brzegu  $h$  zawartym w kwadrycy. Rzutem pierwszym linii  $h$  jest: 1) elipsa  $h^1$  - rys 6. 52a, 2) pięciokąt  $\langle A^1 E^1 F^1 C^1 D^1 \rangle$  (rys. 6.53a).

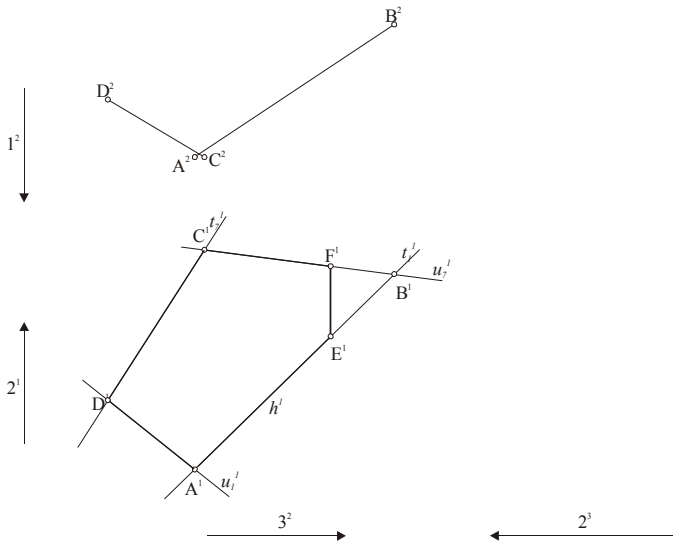


Rys. 6.52

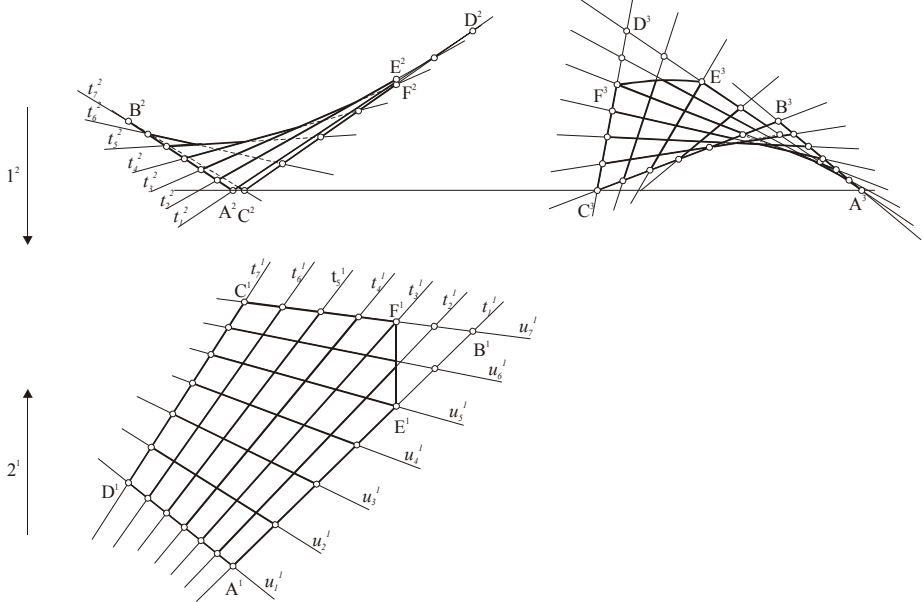
*Rozwiązanie*

Tworzące kwadryki będącej paraboloidą hiperboliczną (rys. 6.52b) lub hiperboloidą (rys. 6.53b) wyznaczamy dzieląc odcinki czworoboku  $\langle ABCD \rangle$  na 6 jednakowych części i łącząc punkty podziału. Z przecięcia tworzących linią  $h$  wyznaczamy brzeg kwadryki. Wyznaczamy również obwiednię tworzących w rzutach drugim i trzecim.

a)



b)



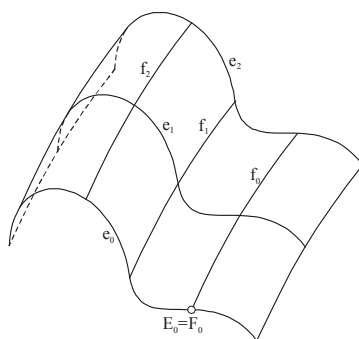
Rys. 6.53

### 5.3. Powłoki utworzone z powierzchni kinetycznych.

Do powierzchni kinetycznych zaliczamy: powierzchnie translacyjne, powierzchnie rotacyjne i powierzchnie spiralne.

#### 5.3.1. Powierzchnie translacyjne

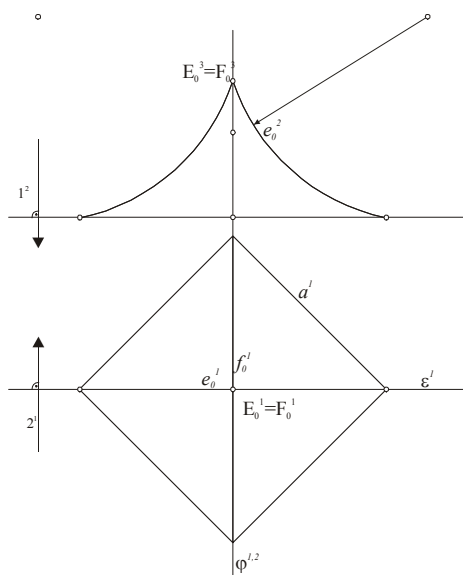
Weźmy pod uwagę dwie kierownice  $e_0$  i  $f_0$  nie zawarte w jednej płaszczyźnie i posiadające punkt wspólny  $E_0=F_0$ , przy czym jedna przesuwa się po drugiej zachowując położenia równoległe i na odwrót. Kolejne położenia krzywych wyznaczają powierzchnię (rys. 6.54).



Rys. 6.54

#### Ćwiczenie 176

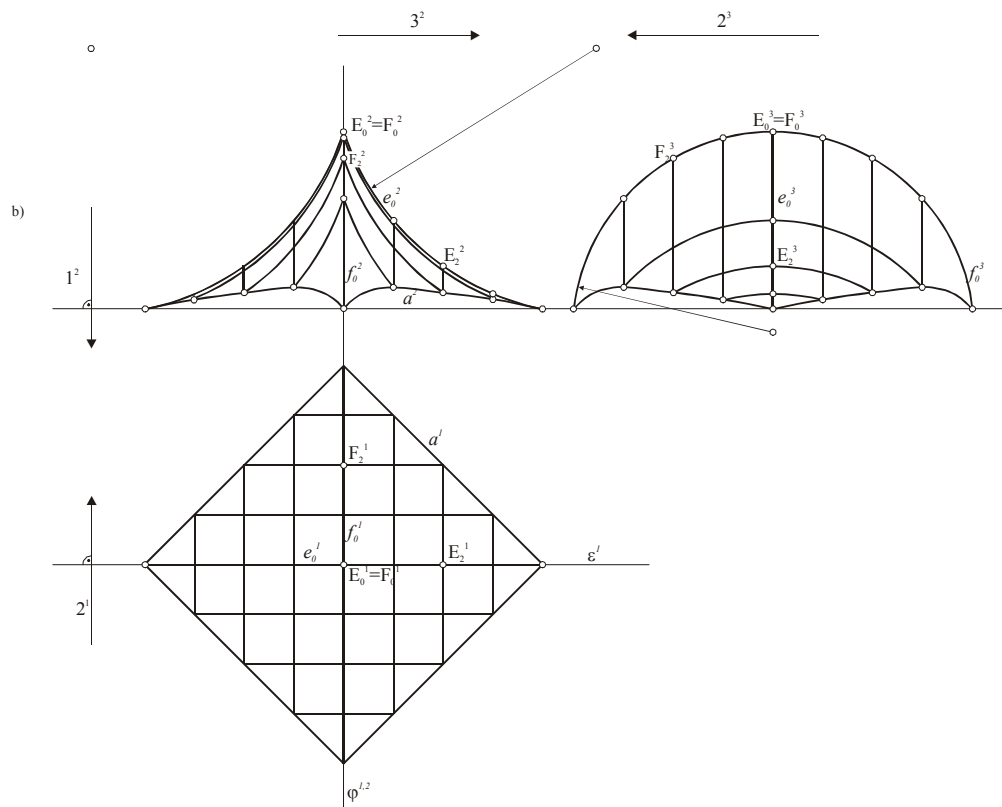
Dane są kierownice powierzchni translacyjnej:  $e_0$  i  $f_0$  przecinające się w punkcie  $E_0=F_0$ . Kierownica  $e_0$  jest złożona z dwóch wycinków okręgów danych w rzucie drugim, zawartych w płaszczyźnie drugowarstwowej  $\varepsilon$ . Kierownica  $f$  jest łukiem okręgu zawartym w płaszczyźnie  $\varphi$  dwurzutującej. Wyznaczyć trzy rzuty powłoki której brzeg wyznacza w rzucie pierwszym kwadrat  $a^1$  (rys. 6.55a).



Rys. 6.55a

**Rozwiązanie**

Na krzywej  $f$  obieramy punkty  $F_1, F_2, \dots$  i przesuwamy przez nie krzywą  $e$ . Obieramy również punkty  $E_1, E_2$  na krzywej  $f$  i przesuwamy przez nie krzywą  $e$ . Kolejne położenia przesuwających się krzywych są do siebie równoległe. Ponieważ płaszczyzna  $\varphi$  jest trzeciowarstwowa trzecie rzuty kolejnych położenia kierownicy  $f$  są okręgami. W dalszej kolejności wyznaczamy rzuty: drugi i pierwszy brzegu  $a$  (rys. 6.55b).



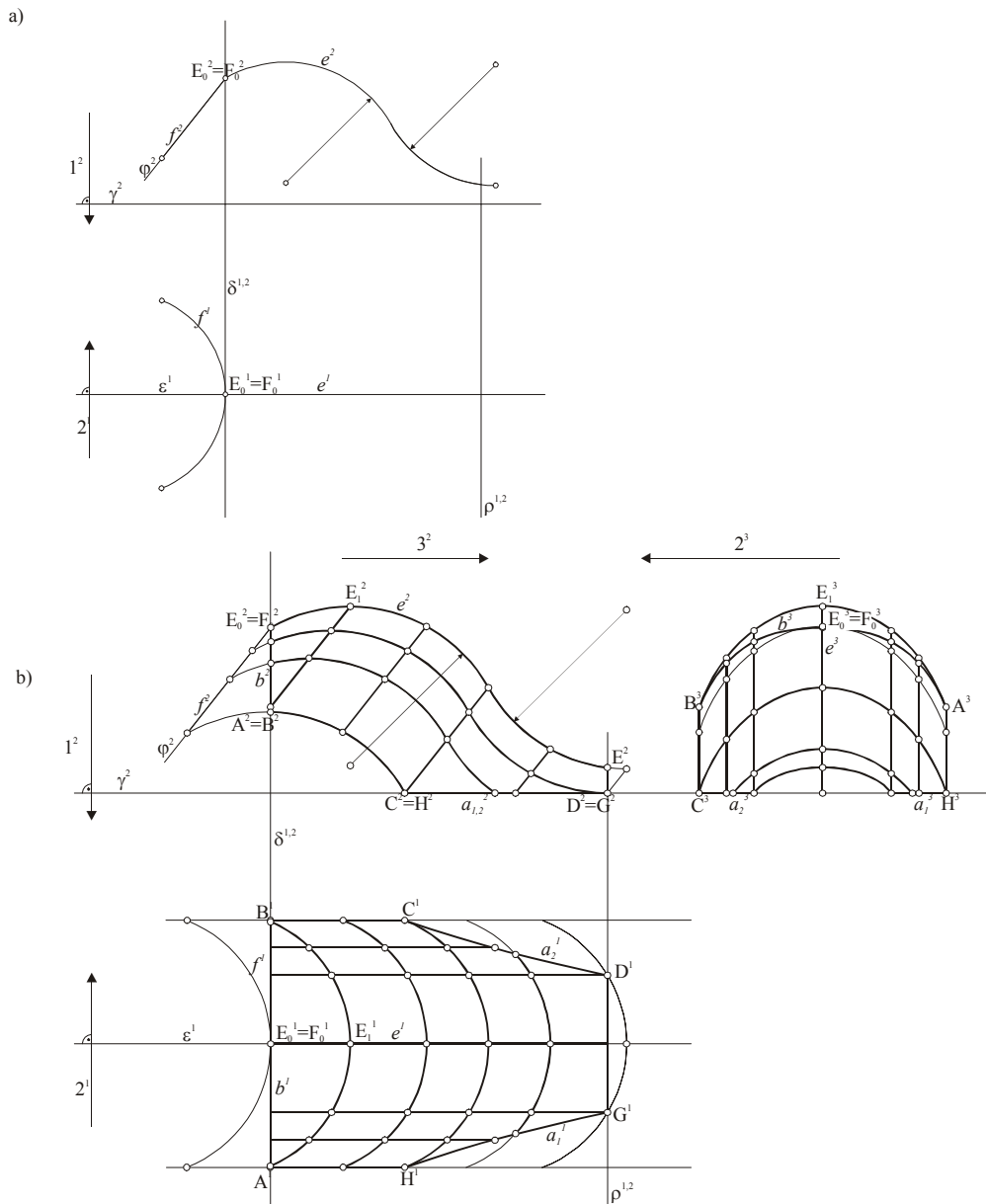
Rys. 6.55ab

**Ćwiczenie 177**

Dane są kierownice  $e \subset \varepsilon \perp 2$ , złożonej z wycinków dwóch stycznych łuków okręgów o tym samym promieniu, oraz  $f \subset \varphi \parallel 2$  będącej elipsą, której rzutem pierwszym jest wycinek łuku okręgu. Kierownice  $e$  i  $f$  przecinają się w punkcie  $E_0 = F_0$ . Wyznaczyć trzy rzuty powłoki złożonej z wycinka powłoki translacyjnej, której brzegiem jest linia  $\langle ABCDGH \rangle$ :  $\langle AB \rangle$  jest wycinkiem krzywej zawartej w płaszczyźnie dwurzutującej trzeciowarstwowej  $\delta$  do której należy punkt  $E_0 = F_0$ .  $\langle BC \rangle$  i  $\langle AH \rangle$  są to odcinki krzywej  $e_n$  (kolejnego jej położenia).  $\langle CD \rangle$  i  $\langle GH \rangle$  są to odcinki przecięcia powierzchni płaszczyzną  $\gamma \perp 1$ .  $\langle DG \rangle$  jest łukiem zawartym w płaszczyźnie  $\rho$  trzeciowarstwowej przecinającej powłokę (rys. 6.56a).

**Rozwiązanie**

Kolejne tworzące powłoki wyznaczamy jak na schemacie 6.54 i w ćwiczeniu 176 (rysunek 6.55), przesuwając równoległe kierownicę  $e$  po kierownicy  $f$  i na odwrót kierownicę  $f$  po kierownicy  $e$ . Wyznaczamy brzeg powłoki (rys. 6.56b).



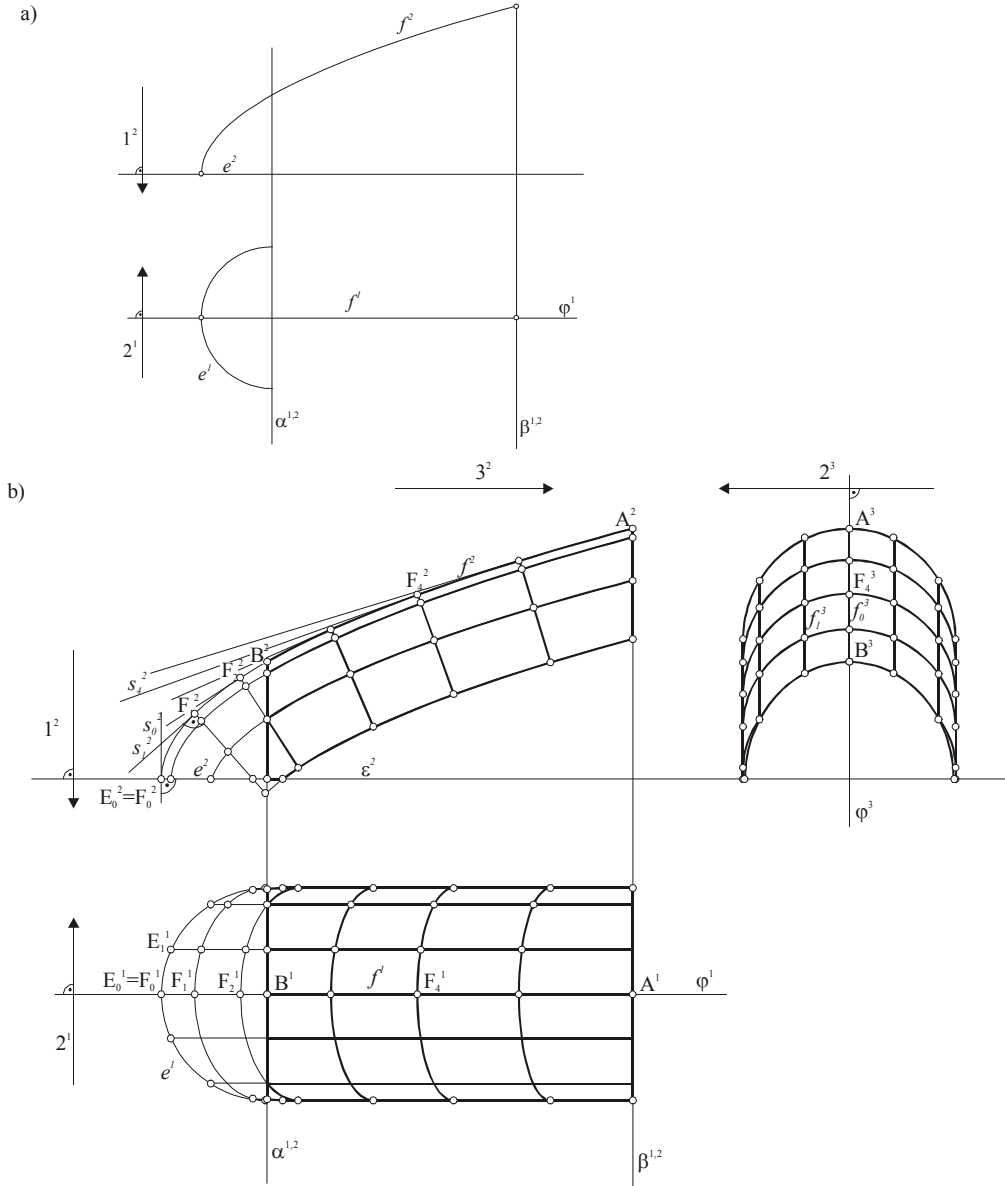
Rys. 6.56

### 5.3.2. Powierzchnie rotacyjne.

Istnieją powierzchnie rotacyjne utworzone za pomocą dwóch przecinających się kierownic  $e$  i  $f$  z których kierownica  $e$  porusza się po kierownicy  $f$  zachowując stały kąt z kierownicą  $f$ . Jest to możliwe, gdy obie kierownice zawarte są w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych. Ośmi obrotu dla kolejnych położenia kierownicy  $e$  są proste równoległe. Jako tworzące takiej powierzchni przyjmujemy kolejne położenia kierownicy  $e$  i linie przekrojów równoległych.

### Ćwiczenie 178

Dane są przecinające się kierownice  $e$  - okrąg i  $f$  - parabola, wyznaczające powierzchnię rotacyjną. Wyznaczyć powłokę będącą fragmentem powierzchni rotacyjnej ograniczonej płaszczyznami dwurzutującymi  $\alpha$  i  $\beta$ . Tworzącymi powłoki są okręgi  $e_0, e_1 \dots$  powstałe przez poruszanie się krzywej  $e$  po krzywej  $f$  z zachowaniem kąta zawartego między płaszczyzną  $\varepsilon$ , zawierającą okrąg  $e$  a styczną do kierownicy  $f$ . W tym przypadku na rysunku 6.57a jest to kąt prosty. Drugą rodziną tworzących są przekroje płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny  $\varphi$  zawierającej parabolę  $f$ .



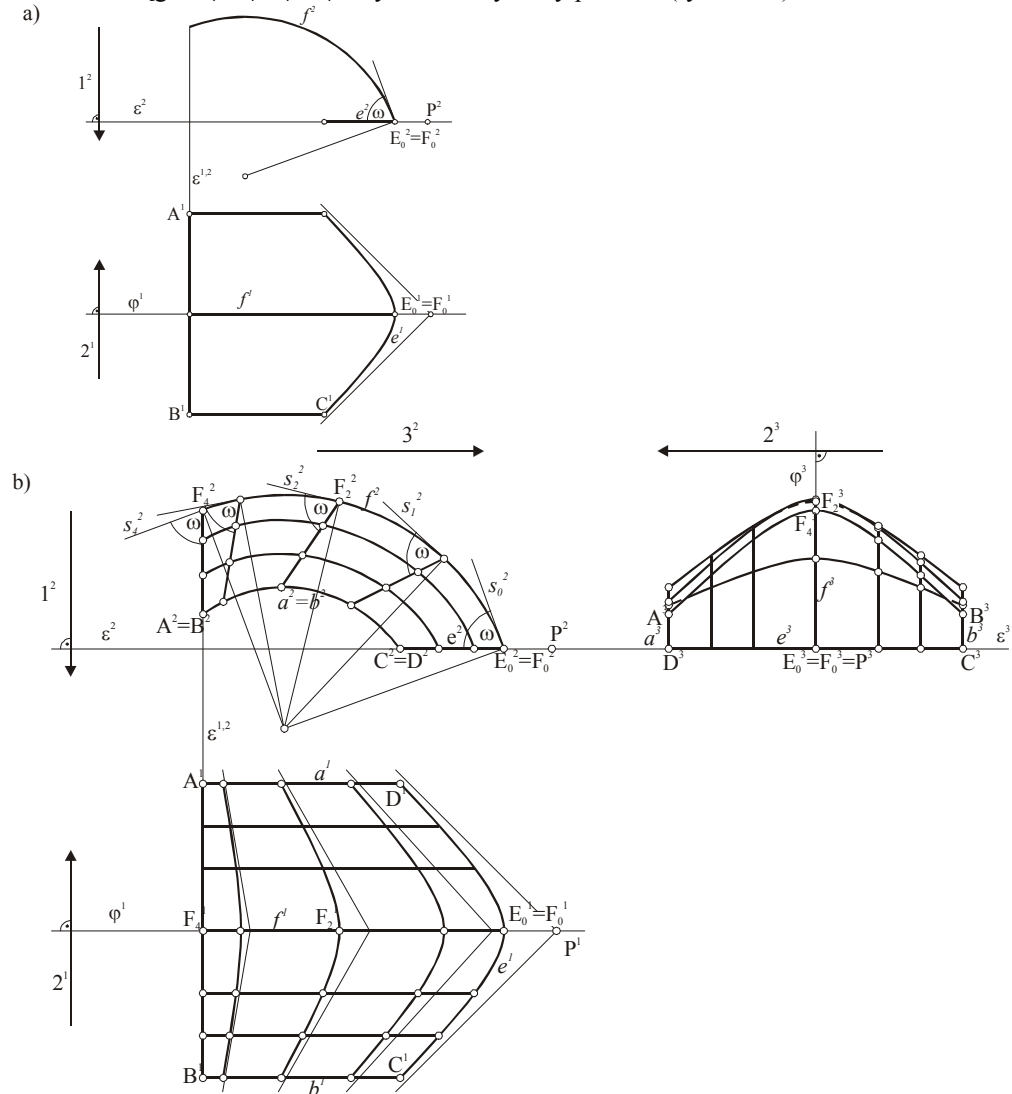
Rys. 6.57

**Rozwiązanie**

Przez obrane na paraboli  $f$  punkty, prowadzimy styczne: w tym wypadku styczne  $s$  np.  $s_2$  - styczna do  $f_2$  w punkcie  $F_2$ . Pod kątem prostym do  $s_2^2$  kreślimy drugi rzut  $e^2$  tworzącej  $e$  zawartej w płaszczyźnie drugorzutuującej. Drugą rodzinę tworzących wyznaczamy jako linie przekrojów z płaszczyznami równoległymi do  $\varphi$ . Wyznaczamy trzy rzuty powłoki oraz przekroje płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 6.57b).

**Ćwiczenie 179**

Wyznaczyć powłokę będącą wycinkiem powierzchni rotacyjnej o kierownicach:  $f$  - łuk okręgu,  $e$  - łuk hiperboli. Płaszczyzny  $\varphi$  i  $\varepsilon$  zawierające kierownice  $e$  i  $f$  są do siebie prostopadłe. Brzegiem powłoki jest  $\langle AB \rangle$  - odcinek hiperboli  $e_4$  w położeniu dwurzutuującym płaszczyzny  $\varepsilon$ ,  $\langle CD \rangle$  - odcinek hiperboli  $e_0$  w położeniu pierwszorzutuującym płaszczyzny  $\varepsilon$ , oraz dwa łuki okręgów  $\langle BC \rangle$  i  $\langle AD \rangle$ . Wykreślić trzy rzuty powłoki (rys. 6.58a).



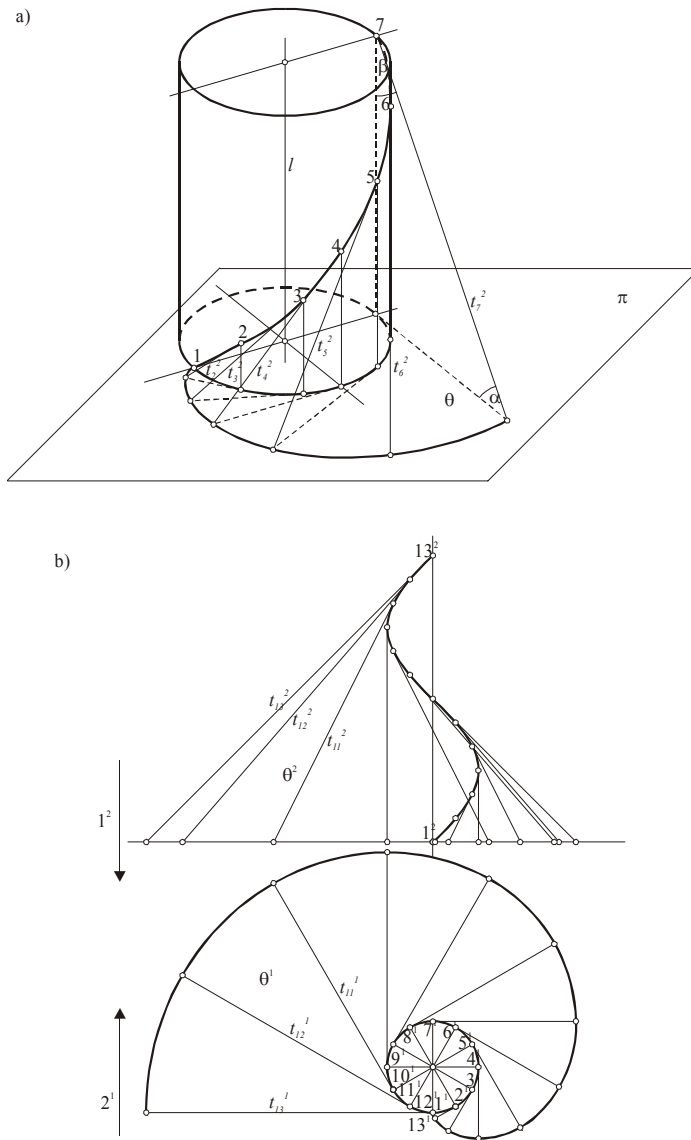
Rys. 6.58

### Rozwiązanie

Kąt między płaszczyzną  $\varepsilon$  zawierającą  $e$  i prostą  $s$  styczną do krzywej  $f$  jest stały w kolejnych położeniach tworzącej  $e$ . Wyznaczamy kolejne tworzące przesuwając hiperbolę  $e$  po okręgu  $f$  zachowując kąt  $\omega$  (rys. 6.58b).

### 5.3.3. Powierzchnie spiralne.

Podzbiorem powierzchni spiralnych są powierzchnie śrubowe. Kierownicami takiej powierzchni są: oś  $l$ , linia śrubowa  $t$ , oraz poruszająca się po niej krzywa lub prosta  $u$ . Jeżeli kierownica  $u$  jest prostą, powierzchnia taka jest powierzchnią prostoliniową rozwijalną. Sposób wyznaczania takiej powierzchni oraz jej rzuty podstawowe podają rysunki 6.59a i 6.59b. W budownictwie powierzchnie spiralne mają niewielkie zastosowanie. Stosuje się je do budowy np. schodów, oraz w kształtowaniu dróg.



Rys. 6.59

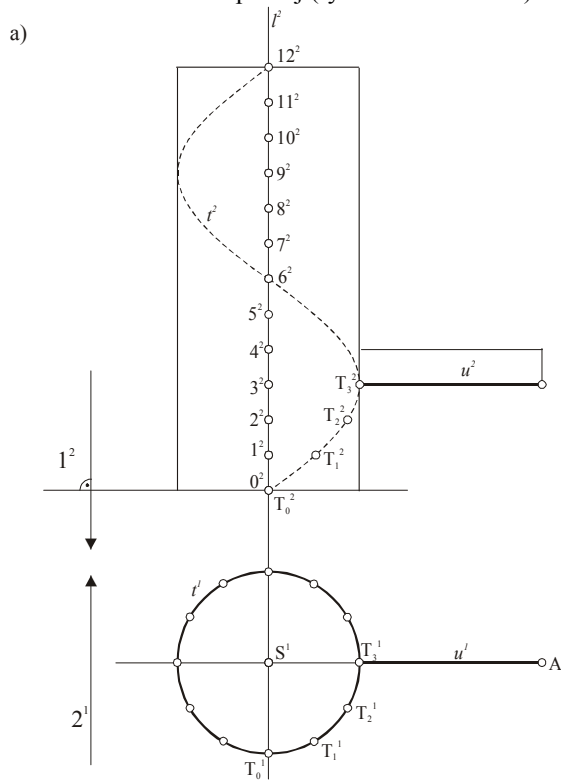


### Ćwiczenie 180

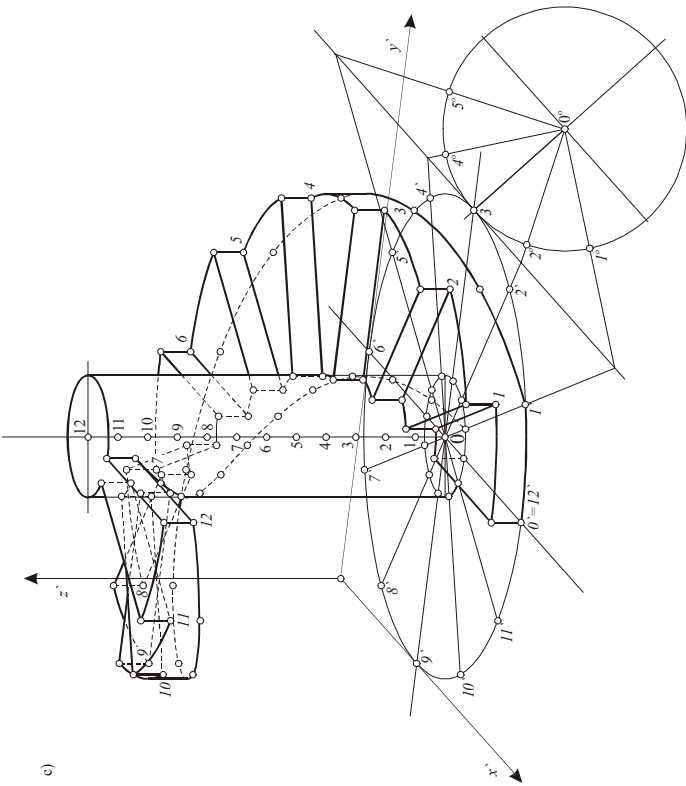
Dane są trzy kierownice:  $l$  - oś walca obrotowego,  $t$  - okrąg będący kierownicą walca i prostokąt  $u$  mający punkt wspólny z  $t:u \cap t_n = T_n$  ( $n=0, 1, \dots, 12$ ). Wyznaczyć geometryczny projekt spiralnych schodów, których stopnie ułożone są na powierzchni śrubowej prostej (rys. 6.60a).

#### Rozwiązanie

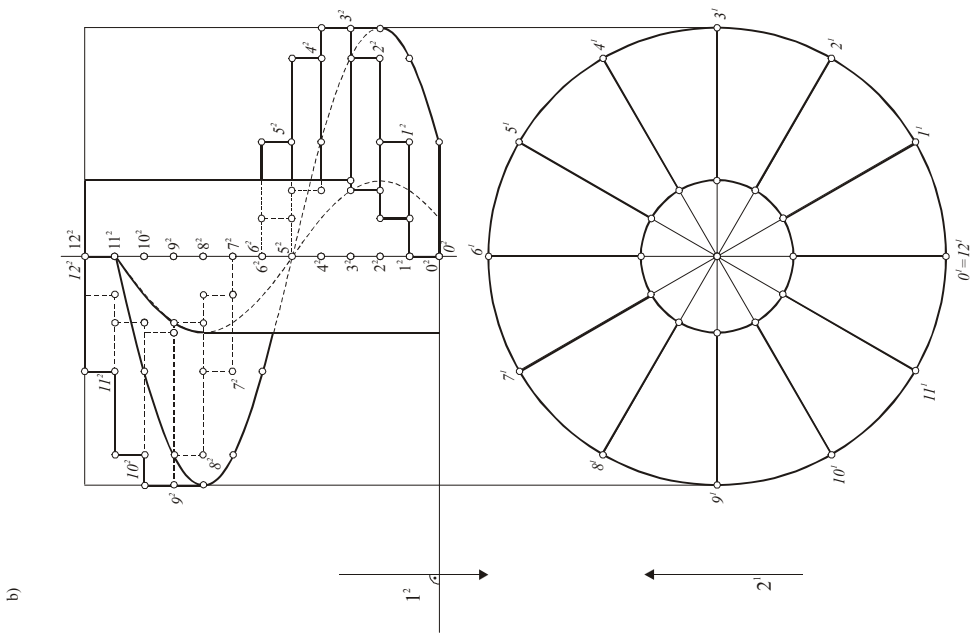
Przyjmujemy rzuty dwóch walców: pierwszy  $t_1$  i drugi  $t_2$  o promieniu  $\langle SA \rangle$ , dzielimy okręgi na 12 równych części. Figury  $\langle T_0^1 T_1^1 A_1^1 \rangle$  i następne są rzutami pierwszymi poszczególnych stopni schodów, których punkt  $T_0, 1, 2 \dots 12$  znajduje się kolejno na krzywej  $t$  (rys. 6.60b). Rysunek 6.60c przedstawia aksonometrię prostokątną: dimetrię zalecaną przez Polską Normę przedstawioną na rysunku 7.11. Na rysunku 6.60c kreślimy dwie elipsy będące rzutami współosiowych okręgów (podstaw walców). Podstawy tych walców dzielimy na 12 części (do podziału elips stosujemy powinowactwo osiowe) i na osi walców odkładamy odcinki jednostkowe numerując ich końce. Na obu walcach wyznaczamy linie śrubowe prowadząc je przez punkty leżące ponad punktami podziału podstaw na kolejnych wysokościach równych  $0, 1j, 2j, \dots$ . Punkty te łączymy z punktami podziału osi leżącymi na takich samych wysokościach, otrzymując tworzące powierzchni śrubowej prostej na której będziemy układać kolejne stopnie schodów. Łączymy punkty podziału podstaw obu walców z ich wspólnym środkiem i otrzymujemy podział na 12 równych wycinków pierścienia wyciętego z podstawy większego walca przez podstawę mniejszego. Wycinki te są rzutami poziomymi kolejnych stopni schodów. Przesuwając w górę o jedną jednostkę, wymienione wycinki otrzymujemy poszczególne stopnie. Aby otrzymać poręczę schodów należy podnieść w górę (wzdłuż linii 2) obie linie śrubowe wykreślone na obu walcach np. o  $8j$  (rysunek na okładce).



Rys. 6.60a



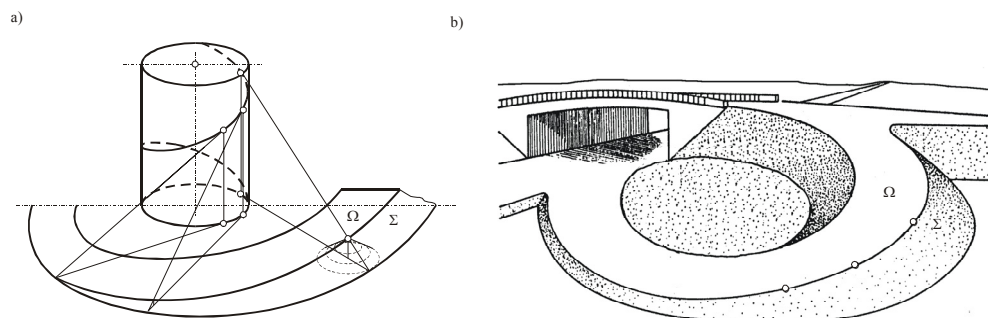
c)



b)

Rys. 6.60bc

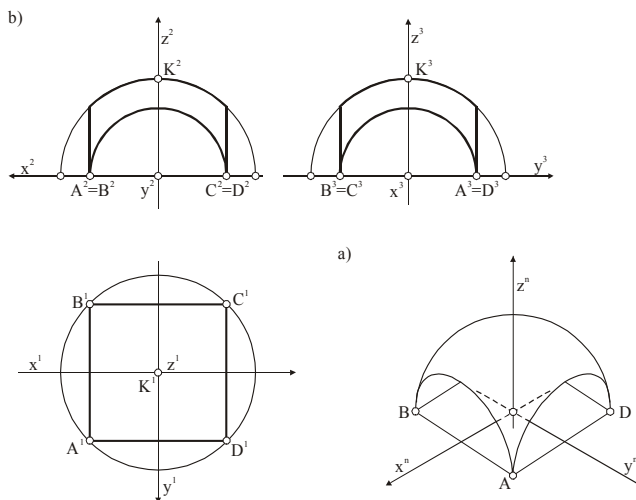
Przykład zastosowania powierzchni śrubowej do kształtowania dróg podaje rysunek 6.61ab.



Rys. 6.61

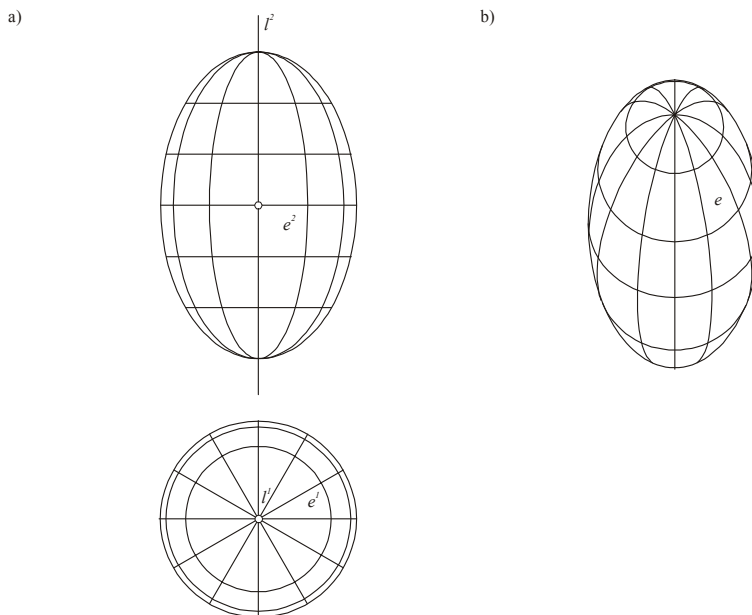
#### 5.4. Powłoki tworzone z powierzchni obrotowych.

Powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót prostej lub krzywej dookoła osi obrotu. Płaty powierzchni obciętych płaszczyznami lub innymi powierzchniami tworzą powłoki. Mogą to być również sklepienia. Powłoki utworzone z powierzchni kuli są to powłoki kuliste sferyczne zwane baniami. Znane są powłoki (nazywane inaczej przekryciami) lub sklepienia: czeskie, żaglowe i inne. Przykład przekrycia czeskiego przedstawia rysunek 6.62a,b. Powłoka utworzona jest z wycinka sfery rozpiętego nad kwadratem  $\langle ABCD \rangle$ , którego przekątna równa jest średnicy sfery. Sklepienie takie ograniczone jest płaszczyzną pierwszorzutową  $\alpha$  oraz czterema wzajemnie prostopadłymi płaszczyznami pierwszorzutującymi  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ . Rysunek 6.63a,b przedstawia tzw. przekrycie lub sklepienie żaglowe. W tym przypadku średnica sfery jest większa od przekątnej kwadratu  $\langle ABCD \rangle$ . Można również tworzyć powłoki z wycinków powierzchni powstałych przez obrót innych krzywych jak: elipsoid, paraboloid, hiperboloid i dowolnie obranych krzywych. Przykład elipsoidy spłaszczonej podaje rysunek 6.64, elipsoidy wydłużonej 6.65, paraboloidy 6.66.

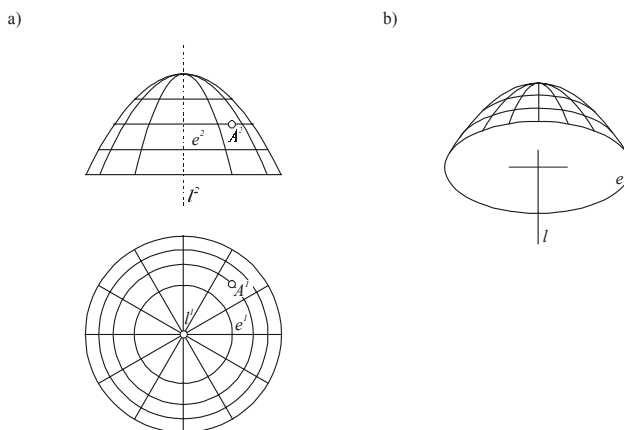


Rys. 6.62





Rys. 6.65



Rys. 6.66

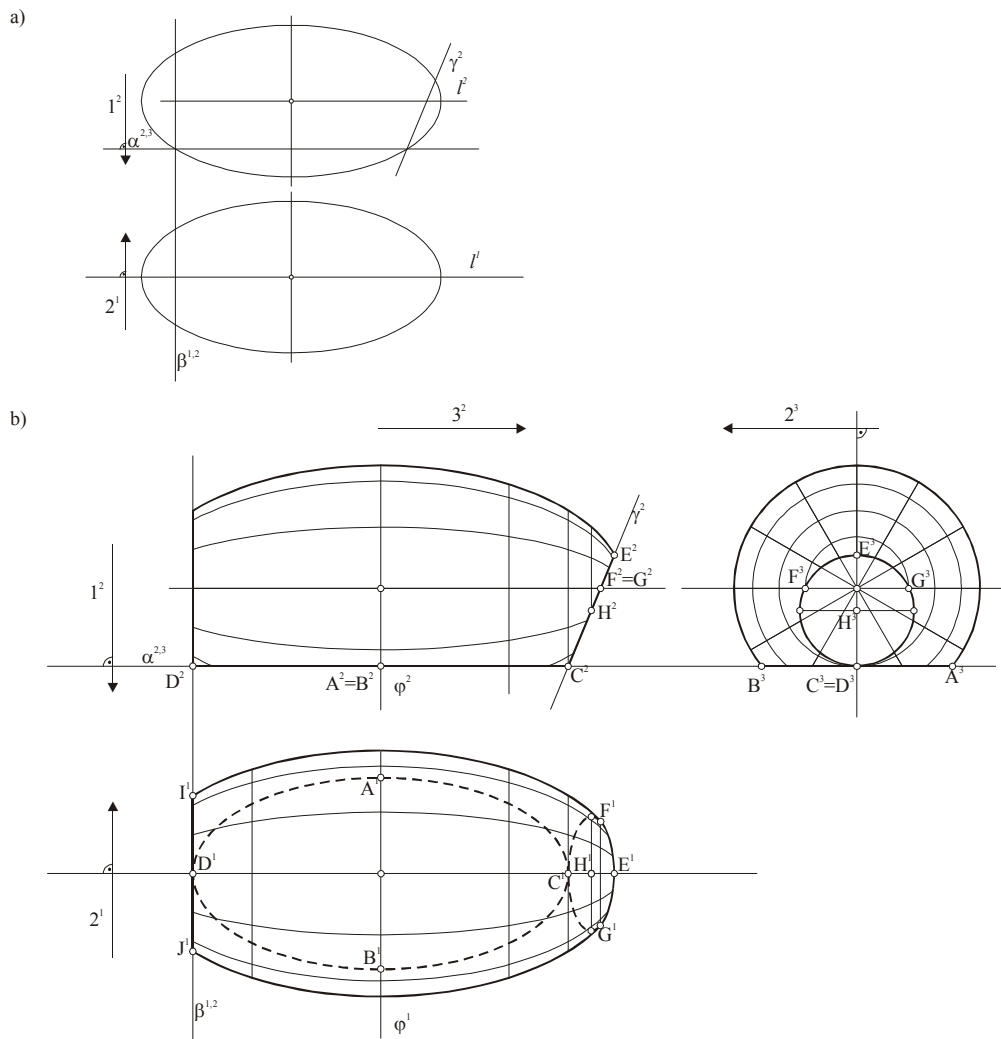
### Ćwiczenie 181

Wyznaczyć rzuty powłoki powstałej z wycinka powierzchni obrotowej utworzonej z przecięcia elipsoidy obrotowej wydłużonej płaszczyznami  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Jako tworzące powłoki przyjąć przekroje płaszczyznami zawierającymi oś obrotu  $l$  i przekroje płaszczyznami prostopadłymi do osi (rys. 6.67a).

#### Rozwiązanie

Przekrojami elipsoidy obrotowej wydłużonej płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu elipsoidy są okręgi, które na rysunku 6.67 są trzeciowarstwowe. Płaszczyzna  $\varphi$  wyznacza okrąg, który jest brzegiem rzutu trzeciego. Wyznaczamy przekroje elipsoidy płaszczyznami:  $\beta$  (okrąg),  $\alpha$  i  $\gamma$ . Rzuty przekroju płaszczyzną  $\gamma$  rysujemy szukając punktów przecięcia płasz-

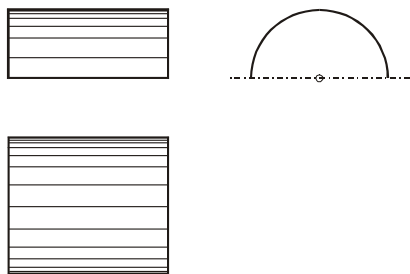
czyzny  $\gamma$  z okręgami. Rzut pierwszy przekroju płaszczyzną  $\alpha$  otrzymujemy albo podobnie jak w przypadku płaszczyzny  $\gamma$  - z przecięcia  $\alpha$  z okręgami, albo wyznaczając odcinki osiowe elipsy  $\langle CD \rangle$  i  $\langle AB \rangle$ . Wyznaczamy przekroje płaszczyznami zawierającymi oś obrotu elipsoidy, oraz widoczność powłoki (rys. 6.67b).



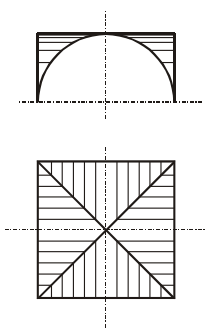
Rys. 6.67

Powłoki (przekrycia) lub sklepienia mogą być tworzone z połowy walca. Takie sklepienia nazywa się kolebką. Najprostszą kolebkę podaje rysunek 6.68. Przenikające się walce obrotowe (kolebki) o jednakowych średnicach i przecinających się osiach posiadają elipsy jako linie przenikania. Sklepienia utworzone z górnych płatów przenikających się kolebek są to sklepienia otwarte. Dwie kolebki (powierzchnie walcowe) o prostopadłych osiach przenikające się nad kwadratem nazywa się sklepieniem krzyżowym (rys. 6.69). Jest to sklepienie otwarte. Sklepienia utworzone z dolnych płatów przenikających się kolebek są to sklepienia zamknięte. Przykładem sklepienia zamkniętego jest sklepienie klasztorne (rys. 6.70). Stosuje się także sklepienia i powłoki wykreślone nad planem wielokąta foremnego innego niż kwa-

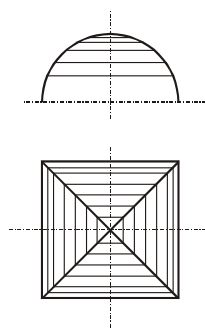
dat. Rys. 6.71 przedstawia sklepienie otwarte na planie sześciokąta utworzone z trzech przenikających się walców. Płyty tej powłoki ograniczone są półelipsami w których przenikają się sąsiednie pary kolebek i półokręgami zawartymi w rzutujących (pionowych) płaszczyznach przecinających kolebki.



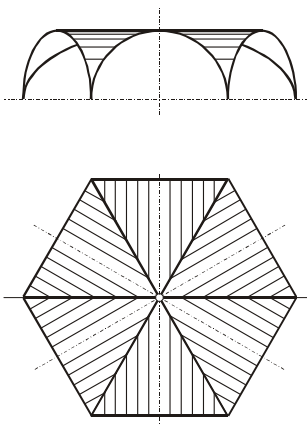
Rys. 6.68



Rys. 6.69



Rys. 6.70

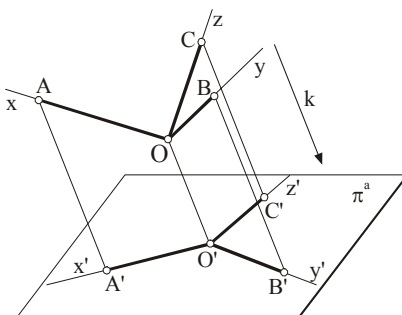


Rys. 6.71

## Rozdział VII

### RZUT AKSONOMETRYCZNY

Jedną z metod odwzorowań, służących do sporządzania poglądowych rysunków obiektów inżynierskich jest rzut aksonometryczny. Należy on do grupy rzutów równoległych, a więc aparatem rzutowania jest rzutnia  $\pi^a$  i kierunek rzutowania  $k$ . Rzutnia  $\pi^a$  nazwana rzutnią aksonometryczną, jest płaszczyzną dowolnie usytuowaną względem osi układu kartezjańskiego  $x, y, z$ . Kierunek rzutowania  $k$  jest prostą zorientowaną nierównoległą do płaszczyzn  $xy, yz, xz$ . Może być prostopadły do rzutni  $\pi^a$  i wtedy mamy rzut aksonometryczny prostokątny lub krótko: aksonometrię prostokątną; lub  $k$  nie jest prostopadły do  $\pi^a$  i mamy rzut aksonometryczny ukośny: aksonometrię ukośną. Oprócz rzutu równoległego utworu geometrycznego w aksonometrii nieodłącznie rysuje się na płaszczyźnie rysunku aksonometrię trzech osi układu kartezjańskiego  $x, y, z$  (rys. 7.1) nazwane osiami aksonometrycznymi. Punkt  $O'$  przecięcia się osi  $x', y', z'$  nazywany jest środkiem aksonometrii.



Rys. 7.1

Można tak ustawić rzutnię aksonometryczną i obrać taki kierunek rzutowania aby trzy dowolnej długości niewspółliniowe odcinki  $\langle O'A' \rangle$ ,  $\langle O'B' \rangle$  i  $\langle O'C' \rangle$  posiadające wspólny punkt  $O'$ , były rzutami trzech odcinków  $\langle OA \rangle$ ,  $\langle OB \rangle$  i  $\langle OC \rangle$  równej długości odłożonych na osiach  $x, y, z$ , układu kartezjańskiego od jego środka  $O$ .

Stosunki:  $s_x = \frac{|O'A'|}{|OA|}$ ,  $s_y = \frac{|O'B'|}{|OB|}$  i  $s_z = \frac{|O'C'|}{|OC|}$  nazywamy współczynnikami deformacji

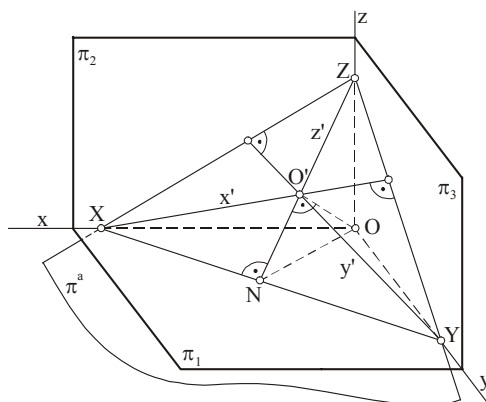
liniowej w kierunku osi  $x, y, z$ . Mogą one przybierać dowolne wartości większe od zera, równe zero lub mniejsze od zera. Gdy współczynniki deformacji są mniejsze od jedności nazywają się skróceniami. Jeżeli wszystkie współczynniki deformacji liniowej są równe, aksonometrię nazywamy izometryczną, jeżeli dwa współczynniki są równe - dimetryczną, gdy wszystkie trzy są różne: anizometryczną.

#### 1. Aksonometria prostokątna

Rzutnia aksonometryczna  $\pi^a$  jest dowolnie usytuowana względem płaszczyzn  $xy, xz, yz$ ; kierunek rzutowania  $k$  jest prostopadły do  $\pi^a$ . Osie  $x, y, z$  układu kartezjańskiego przecinają  $\pi^a$  w punktach będących wierzchołkami trójkąta, a rzutnia  $\pi^a$  przecina płaszczyzny  $xy, xz, yz$



w krawędziach, których odcinki są bokami trójkąta nazywanego się trójkątem śladów (rys. 7.2)



Rys. 7.2

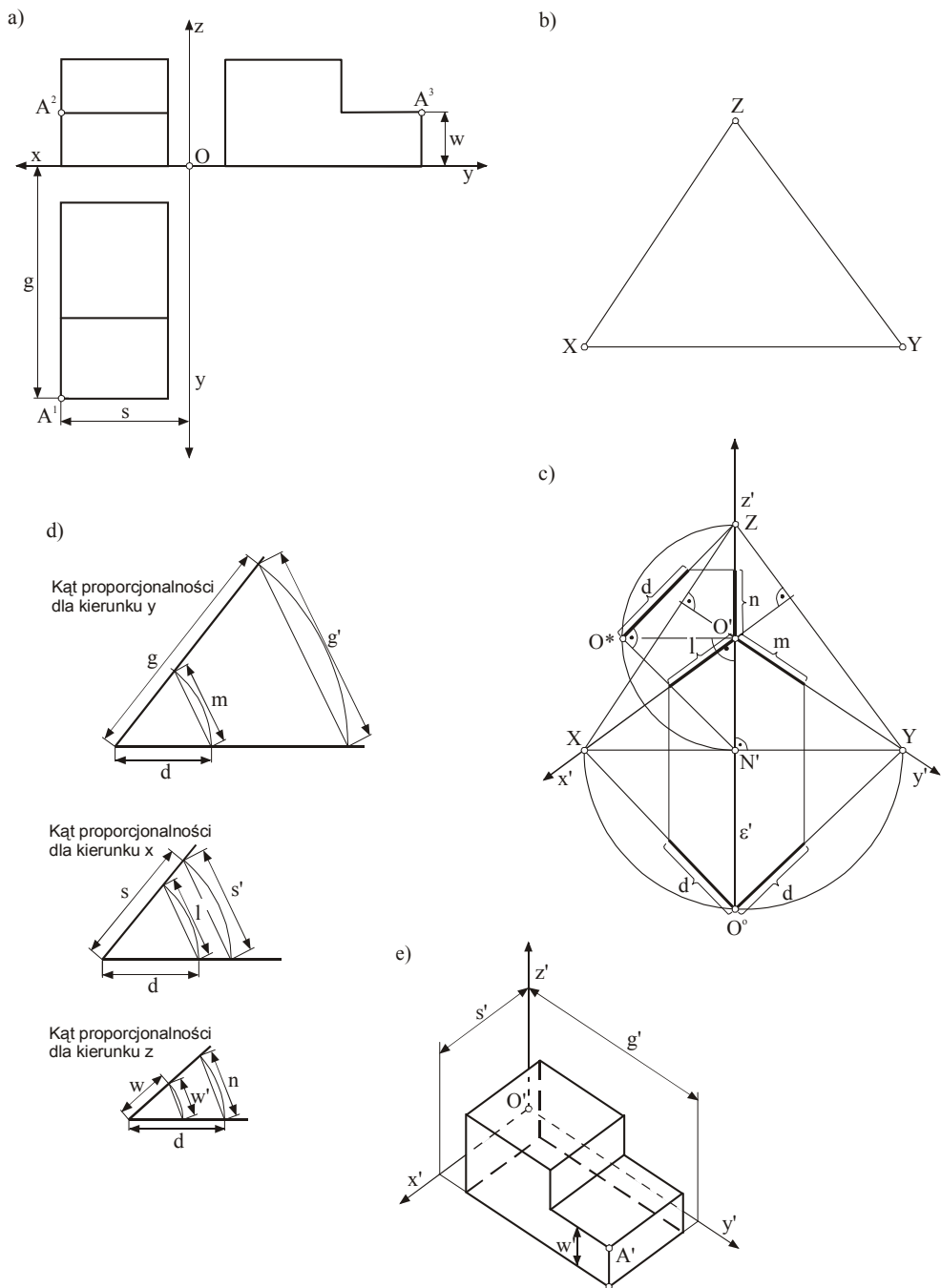
Trójkąt śladów w aksonometrii prostokątnej jest zawsze trójkątem ostrokątnym. Osie aksonometryczne  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  są prostymi zawierającymi wysokości trójkąta śladów. Współczynniki deformacji liniowej są mniejsze od 1. Aby wyznaczyć skrócenia dla poszczególnych osi i wszystkich odcinków równoległych do tych osi, wykonujemy kłady płaszczyzn, np.  $xy$  i płaszczyzny aksonometrycznie rzutującej zawierającej oś  $z$  na rzutnię  $\pi^a$  (rys. 7.3c). W przypadku kładu płaszczyzny  $xy$  osią obrotu dla punktu  $O$  jest prosta zawierająca bok trójkąta śladów  $XY$ , płaszczyzna obrotu  $\varepsilon'$  jest prostopadła do  $XY$ . Klady  $x^\circ$  i  $y^\circ$  obu osi  $x$  i  $y$  muszą przecinać się w punkcie  $O^\circ$  leżącym na prostej  $NO'$  oraz muszą być wzajemnie prostopadłe. Stąd wynika, że wierzchołek  $O^\circ$  kąta prostego będzie leżeć na okręgu zakreślonym na średnicy  $XY$ . Kład osi  $z$  wyznaczamy za pomocą kładu prostokątnego płaszczyzny  $\varepsilon$ . A więc kład  $O^*$  środka układu  $O$  będzie leżeć na prostej  $O'O^* \perp z'$  w punkcie jej przecięcia się z okręgiem o środku  $O'$ , którego średnicą jest odcinek  $\langle N'Z \rangle$ . Oś  $z^*$  jest wyznaczona punktami  $ZO^*$ , a w przypadku niedostępności punktu  $Z$   $z^*$  jest prostopadła do boku  $N'O^*$ . Na kładach osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  odmierzymy równe odcinki o długości  $d$  i wyznaczamy ich rzuty: na osi  $x$  —  $l$ , na osi  $y$  —  $m$ , na osi  $z$  —  $n$ . Następnie konstruujemy kąty proporcjonalności dla trzech skróceń  $\frac{l}{d}, \frac{m}{d}, \frac{n}{d}$ , a mianowicie: promieniem  $d$  zakreślamy łuk okręgu, na którym odmierzymy cięciwę o długości  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ; promienie okręgu przechodzące przez punkty końcowe cięciwy wyznaczają kąt proporcjonalności dla kierunku osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (rys. 7.3d).

### Ćwiczenie 182

Mając dany trójkąt śladów aksonometrii prostokątnej jak na rysunku 7.3b wykreśl aksonometrię figury przedstawioną na rysunku 7.3a w rzutach Monge'a.

#### Rozwiązanie

Po znalezieniu osi aksonometrycznych  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , które są wysokościami trójkąta, przesuwamy je równoległe w dowolne miejsce (rys 7.3e) i ustalamy zwroty osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  celem uniknięcia omyłki przy odmierzaniu współrzędnych punktów. Następnie współrzędne poszczególnych wierzchołków odpowiednio skrócone na kątach proporcjonalności, nanosimy z rzutu Monge'a na osie aksonometryczne. Dla przykładu przedstawiony tu został jeden ze sposobów wyznaczania aksonometrii punktu  $A$  za pomocą współrzędnych  $s$ ,  $g$ ,  $w$  (rys. 7.3).



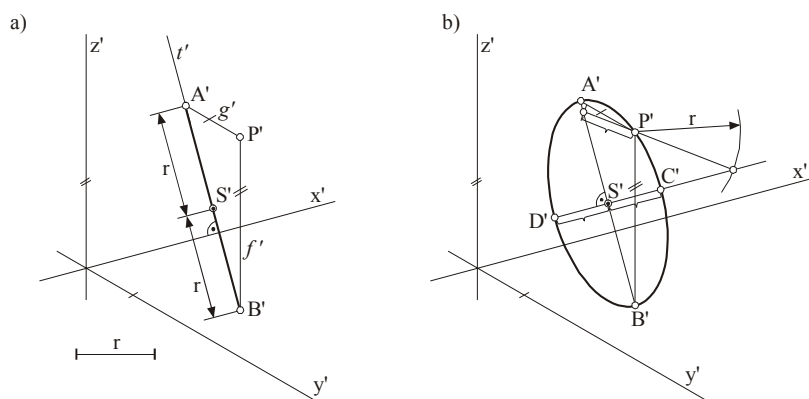
Rys. 7.3

### Ćwiczenie 183

Mając dany układ aksonometryczny i rzut  $S'$  środka okręgu  $e$  o promieniu  $r$ , zawartego w płaszczyźnie  $\varepsilon = zy$  (lub równoległej do  $e$ ) wyznaczyć rzut aksonometryczny prostokątny tego okręgu.

### Rozwiązanie

Rzut  $e'$  okręgu  $e$  jest elipsą, którą można wyznaczyć odcinkiem osiowym głównym i punktem. Średnica  $t$  okręgu zawartego w płaszczyźnie  $\varepsilon = zy$  równoległa do boku  $ZY$  trójkąta śladów jest prostą warstwową. Rzutem tej średnicy jest prosta  $t'$  prostopadła do osi  $x'$ , a rzutem odcinka średnicowego  $\langle AB \rangle \subset t$  jest odcinek  $\langle A'B' \rangle \subset t'$  o środku  $S'$  i o długości równej  $2r$ .  $\langle A'B' \rangle$  jest odcinkiem osiowym głównym elipsy  $e'$  (rys. 7.4a). Rzut dowolnego punktu okręgu  $e$  wyznaczamy następująco: przez punkty  $A$  i  $B$  prowadzimy proste  $g$  i  $f$  prostopadłe i zawarte w płaszczyźnie  $\varepsilon$ . Rzuty tych prostych są równoległe do osi aksonometrycznych:  $g' \parallel y', f' \parallel z'$ . Proste te przecinają się w punkcie  $P \in e$ ;  $P' = g' \cap f'$ . Odcinek osiowy  $\langle A'B' \rangle$  i punkt  $P'$  wyznaczają elipsę  $e'$ . Odcinek osiowy poboczny  $\langle C'D' \rangle$  może być znaleziony za pomocą konstrukcji podanej na rysunku 1.21. Gdy wyznaczona w ten sposób elipsa nie jest wydłużona, można na jej miejsce wykreślić owal (rys. 1.22). Podobnie rysuje się aksonometrie prostokątne okręgów zawartych w płaszczyznach  $\varphi = xy$  i  $\delta = xz$ , oraz do nich równoległych.



Rys. 7.4

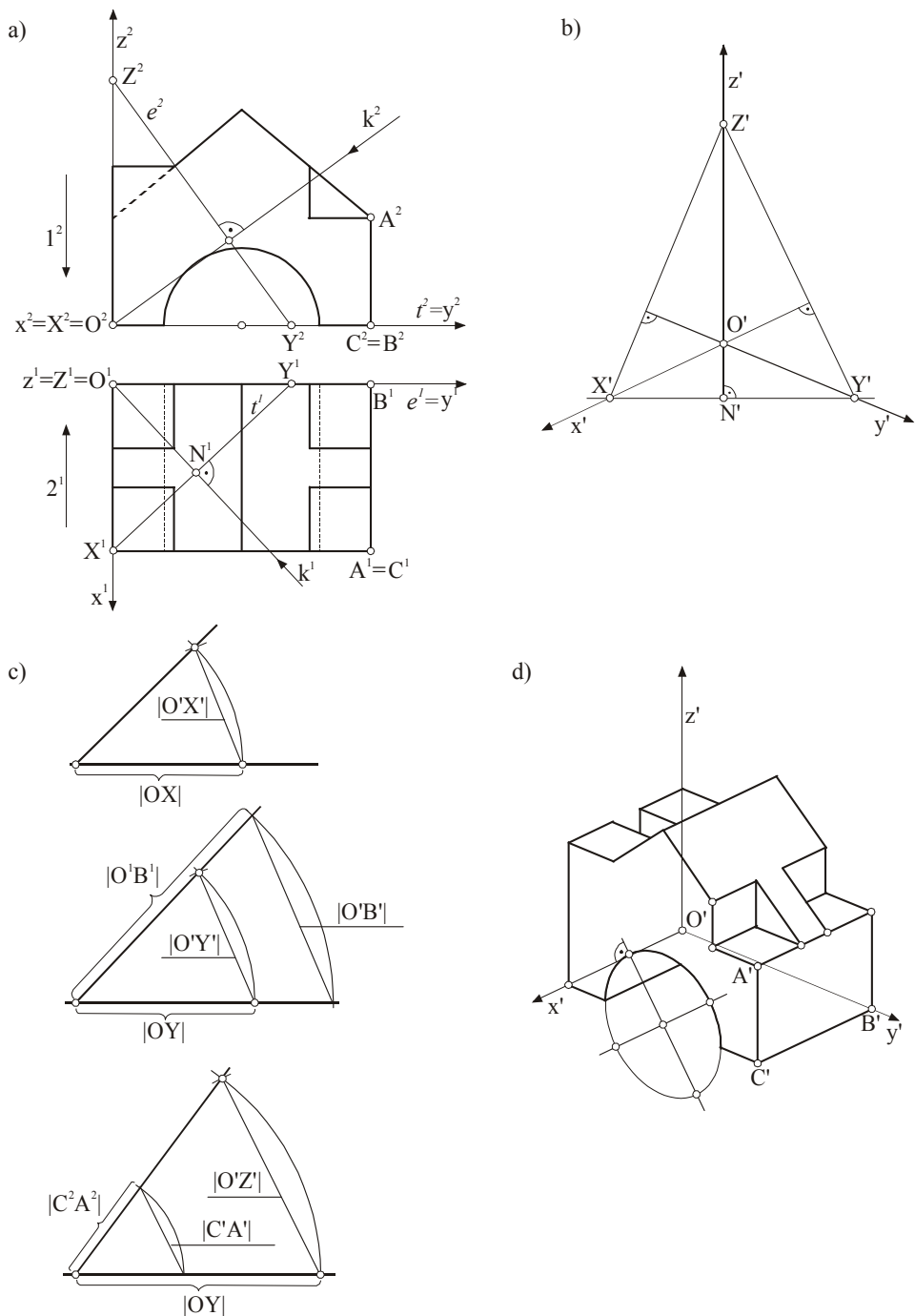
### Ćwiczenie 184

Dane są rzuty podstawowe figury oraz zorientowanej prostej  $k$  będącej kierunkiem rzutowania aksonometrycznego (rys. 7.5a). Wyznaczyć aksonometrię prostokątną figury.

### Rozwiązanie

Są dwa sposoby przyjmowania osi układu kartezjańskiego. Albo jednoczy się on z osiami  $xyz$  - krawędziami trzech prostopadłych do siebie rzutni Monge'a  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  jak na rysunku 7.3. Albo przesuujemy go do wygodnego położenia względem rysowanej figury i wyznaczamy jego rzuty Monge'a jak na rysunkach 7.5, 7.6.

Prosta kierunkowa  $k$  przechodzi przez naroże figury; punkt ten oieramy na początek  $O$  układu kartezjańskiego (rys. 7.5a). Przyjmujemy osie układu kartezjańskiego: drugorzutuującą  $x$ , dwuwarstwową  $y$  i pierwszorzutującą  $z$ . W osi  $x$  oieramy punkt  $X$  i przyjmujemy, że jest on śladem osi  $x$ , czyli punktem przecięcia się osi  $x$  z rzutnią aksonometryczną  $\pi^a \perp k$ , nie przechodzącą przez początek  $O$  układu. Płaszczyznę  $\pi^a$  wyznaczamy prostymi: pierwszowarstwową  $t \perp k$  i drugowarstwową  $e \perp k$ . Punkty  $Y = t \cap y$  i  $Z = e \cap z$  są pozostałymi śladami układu kartezjańskiego. Punkt  $N \in t$  jest punktem przecięcia prostej  $t$  płaszczyzną pierwszorzutującą wyznaczoną przez proste  $k$  i  $z$ . Ustalona w ten sposób prosta  $N'Z' \subset \pi^a$  jest rzutem prostokątnym osi  $z$  na płaszczyznę  $\pi^a$ . Sporządzający rysunek powinien przeprowadzić restytucję trójkąta śladów, np. odtwarzamy położenie trójkąta względem płaszczyzny porównawczej  $xy$ .



Rys. 7.5

Odcinek  $\langle XY \rangle$  jest pierwszorzędowy, a punkt  $Z$  znajduje się przed płaszczyzną porównawczą. W związku z tym i ze względu na zwrot prostej kierunkowej  $k$ , wierzchołki trójkąta śladów są uporządkowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara w kolejności  $XZY$ . Z kolei

znajdujemy kład trójkąta  $\langle XYZ \rangle$  i punktu  $N \in XY$ . Obieramy w rzutni odcinek  $\langle X^2Y^2 \rangle \equiv \langle X^1Y^1 \rangle$  i odkładamy na nim odcinek  $\langle X^2N^2 \rangle \equiv \langle X^1N^1 \rangle$  lub  $\langle Y^2N^2 \rangle \equiv \langle Y^1N^1 \rangle$  (rys. 7.5b). Następnie kreślimy prostą  $z' \perp X^2Y^2$  przechodzącą przez  $N^2$  i znajdujemy na niej punkt  $Z^2$  z warunku  $\langle Y^2Z^2 \rangle = \langle Y^2Z^2 \rangle$ . Osie  $x', y'$  są wysokościami trójkąta:  $x' \perp Y^2Z^2, y' \perp X^2Z^2$ .

Zwroty osi układu aksonometrycznego  $(x', z', y')$  otrzymujemy z uporządkowania par punktów  $\{O, X\}, \{O, Y\}, \{O, Z\}$  danych w rzutach podstawowych. Przy wyznaczaniu kątów proporcjonalności nie zachodzi potrzeba kreślenia kładów trójkątów wyznaczonych przez ślady  $X, Y, Z$  i początek układu, bo długości odcinków  $\langle OX \rangle, \langle OY \rangle$  i  $\langle OZ \rangle$  dane są w rzutach podstawowych. Na rysunku 7.5c wykreślono kąty proporcjonalności, zaś rysunek 7.5d przedstawia aksonometrię figury daną w rzutach podstawowych (rys. 7.5a). Dla przykładu pokazane jest postępowanie w celu wyznaczenia aksonometrii punktu  $A$ . Odcinek  $\langle O^1B^1 \rangle$  zawarty w osi  $y^1$  z rzutów podstawowych został skrócony za pomocą kąta dla osi  $y$  i na osi aksonometrycznej  $y'$  odmierzone  $\langle O'B' \rangle$ . Z punktu  $B'$  kreślimy prostą równoległą do osi  $x'$  i odmierzamy na niej odcinek  $\langle B'C' \rangle$ , który otrzymamy po skróceniu na kącie dla kierunku  $x$  odcinka  $\langle B^1C^1 \rangle \equiv \langle O^1X^1 \rangle$ . Z punktu  $C'$  na prostej równoległej do  $z'$  odmierzamy odcinek  $\langle C'A' \rangle$  otrzymany po skróceniu odcinka  $\langle C^2A^2 \rangle$  na kącie dla osi  $z$ . Rzut okręgu wykreślamy jak na rysunku 7.4.

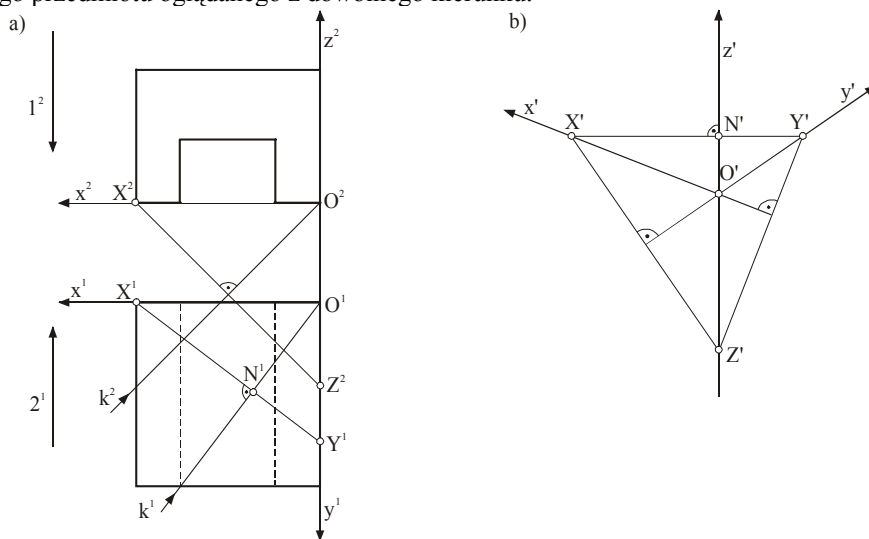
### Ćwiczenie 185

Mając dane rzuty podstawowe figury oraz prostej zorientowanej  $k$  (rys.7.6a) wykreśl rzut aksonometryczny prostokątnej figury.

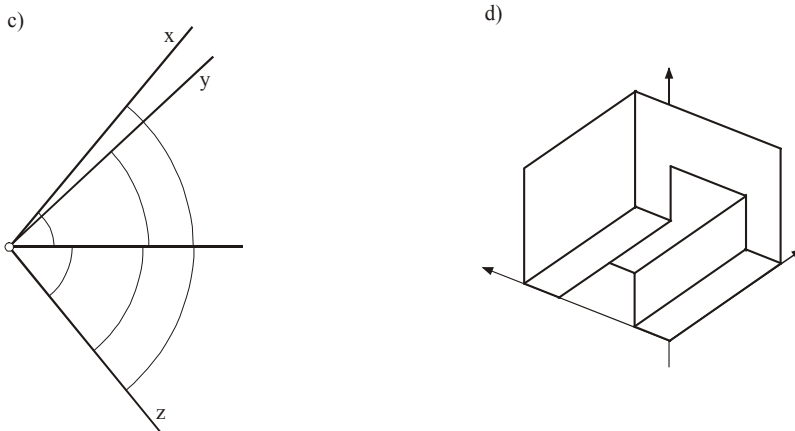
#### Rozwiązanie

Rozwiązanie jest podobne jak w ćwiczeniu 184. Przyjmujemy osie  $xyz$  w rzutach podstawowych i wyznaczamy trójkąt śladów aksonometrycznych. Ponieważ punkt  $Z$  ma cechę ujemną względem płaszczyzny porównawczej  $xy$ , wierzchołki trójkąta  $XYZ$  są uporządkowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara jak na rysunku 7.6b. Zwroty osi układu aksonometrycznego  $(x', z', y')$  otrzymujemy z uporządkowania par  $\{OX\}, \{OY\}, \{OZ\}$  danych w rzutach podstawowych. Wykreślamy kąty proporcjonalności dla kierunków osi  $x, y, z$  (rys. 7.6c) oraz rysunek aksonometryczny figury (rys.7.6d).

Przyjęcie prostej kierunkowej ma tę zaletę, że umożliwia sporządzenie rysunku pogładowego przedmiotu oglądanego z dowolnego kierunku.



Rys. 7.6ab



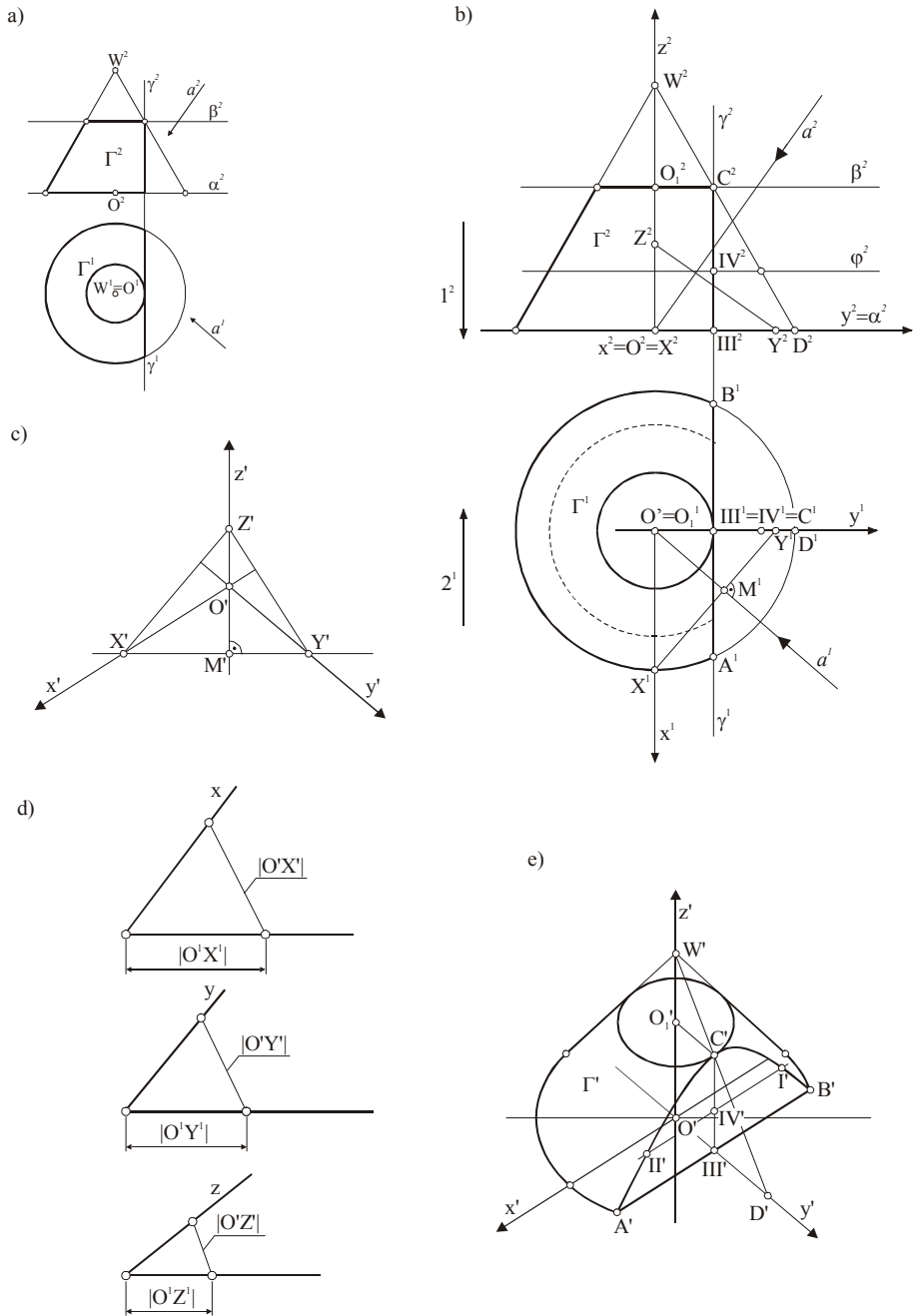
Rys. 7.6cd

### Ćwiczenie 186

Dane są rzuty stożka obrotowego przeciętego płaszczyznami  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , oraz dane są rzuty kierunku rzutowania  $a$  aksonometrii prostokątnej. Wyznaczyć aksonometrię figury  $\Gamma$  większej części stożka powstałej po obcięciu płaszczyznami  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  (rys. 7.7a).

#### Rozwiązanie

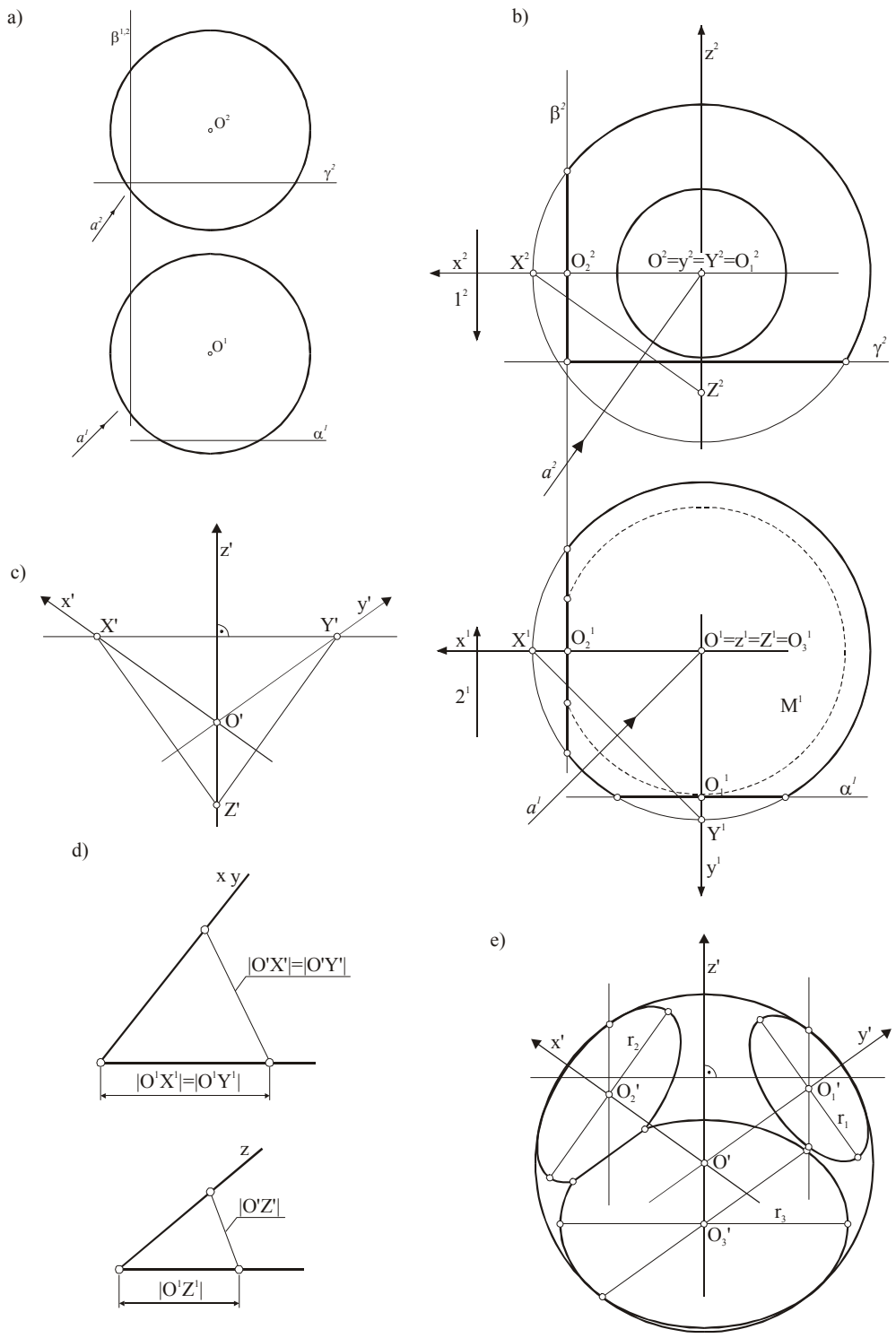
Przyjmujemy początek układu kartezjańskiego  $O$  w środku okręgu zawartego w płaszczyźnie  $\alpha$  i oś  $z$  o zwrocie od  $O$  do  $W$ , jednoczącą się z osią stożka. Przesuwamy prostą  $a$  do początku układu i orientujemy osie  $x$  i  $y$  jak na rysunku 7.7b. Obieramy odcinek  $\langle X^1 Y^1 \rangle \perp a^1$  tak aby  $X^1 \in x^1$  i  $Y^1 \in y^1$ .  $X^1 Y^1 \cap a^1 = M^1$ . Wyznaczamy  $Y^2 \in y^2$  i  $\langle Y^2 Z^2 \rangle \perp a^2$ ;  $Z^2 \in z^2$ . Na rysunku 7.7c wyznaczamy trójkąt śladów jak na rysunku 7.5b oraz kąty proporcjonalności (kąty skróceń). Na boku trójkąta  $|X'Y'| = |X^1 Y^1|$  odmierzamy  $|X'M'| = |X^1 M^1|$ . Z punktu  $M^1$  kreślimy rzut aksonometryczny osi  $z \perp X'Y'$  i z punktu  $Y'$  kreślimy łuk o promieniu równym  $|Y^2 Z^2|$  do przecięcia z osią  $z'$  i otrzymujemy punkt  $Z'$ . Przed narysowaniem trójkąta odtwarzamy jego położenie względem rzutni Monge'a, co pozwala stwierdzić, że wierzchołki trójkąta są uporządkowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara w kolejności  $XZY$ . Wyznaczamy pozostałe osie aksonometryczne, które są wysokościami trójkąta, ustalając ich zwroty zgodnie ze zwrotami w rzutach Monge'a. Następnie na rysunku 7.7d wyznaczone są kąty proporcjonalności. Dopiero teraz można przystąpić do kreślenia rzutu aksonometrycznego figury  $\Gamma$ . Przesuwamy w dowolne miejsce osie aksonometryczne. Rzut okręgu podstawy – elipsę rysujemy metodą pokazaną na rysunku 7.4. Oś główna elipsy będącej rzutem okręgu podstawy stożka zawarta jest w płaszczyźnie  $\alpha$ , a więc jest prostopadła do osi  $z$  i zachowuje swoją długość ponieważ jest prostą warstwową równoległą do boku trójkąta  $\langle XY \rangle$ . Proste równoległe do osi  $x$  i  $y$  poprowadzone z wierzchołków głównych elipsy przecinają się w punkcie elipsy. Korzystając z konstrukcji XIII rys. 1.20 wyznaczamy oś poboczną i kreślimy elipsę. Na osi  $z$  wyznaczamy punkty  $O_1'$ ,  $O_2'$  i  $W'$  korzystając z kąta skróceń dla osi  $z$ . Podobną metodą jak poprzednio kreślimy elipsę o środku  $O_1$  będącą rzutem okręgu przekroju stożka płaszczyzną  $\beta$ . Wykreślamy styczne do obu elips zawierające punkt  $W$ . Płaszczyzna  $\gamma$  równoległa do osi stożka jest równoległa do dwóch tworzących stożka, przecina stożek w hiperboli. Prosta  $AB$  jest równoległa do osi  $x$  i przecina oś  $y$  w punkcie III. Punkt  $C$  - wierzchołek hiperboli zawarty jest w płaszczyźnie  $\beta$ : na okręgu o środku  $O_1$  i tworzącej stożka  $WD$ . Na prostej III wyznaczamy punkt IV przez który przechodzi odcinek  $\langle I II \rangle$  równoległy do osi  $x$ . Punkty I i II są punktami hiperboli otrzymanymi w rzutach Monge'a za pomocą płaszczyzny  $\varphi$  (rys. 7.7e).



Rys. 7.7

### Ćwiczenie 187

Dane są rzuty prostokątne sfery przeciętej trzema płaszczyznami  $\alpha, \beta, \gamma$ , oraz dane są rzuty kierunku rzutowania  $a$  (rys. 7.8a). Wyznaczyć aksonometrię prostokątną sfery obciętej płaszczyznami  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Rys. 7.8

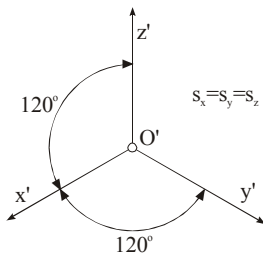


*Rozwiązanie*

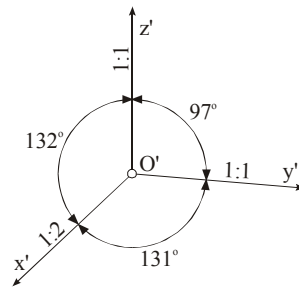
Początek układu przyjmujemy w środku sfery punkcie  $O$  i przesuwamy do niego prostą  $a$ . Prostopadłe do siebie rzuty osi  $x$  i  $y$ :  $x^1$  i  $y^1$  są usytuowane pod kątem  $45^\circ$  do  $a^1$ . Prosta  $a^2$  zawiera różne kąty z rzutami:  $x^2$  i  $z^2$ . Jest to więc aksonometria zwana dimetrią prostokątną, co pociąga za sobą równość skróceń dla osi  $x$  i  $y$ , oraz to, że trójkąt będzie równoramienny. Rysujemy w rzutach prostokątnych bok trójkąta śladów  $X^1Y^1 \perp a^1$  i z punktu  $X^2$  prostopadłe do  $a^2$  bok  $X^2Z^2$  (rys. 7.8b). Odtwarzamy położenie trójkąta patrząc zgodnie ze zwrotem prostej  $a$  i rysujemy trójkąt  $X^1Y^1Z^1$  jak na rysunku 7.8c. Zwroty osi aksonometrycznych muszą być zgodne ze zwrotami osi w rzutach Monge'a. Następnie rysujemy kąty skróceń: dla osi  $z$  i wspólny kąt dla osi  $x$  i  $y$  (rys.7.8d). Przesuwamy w dowolne miejsce początek układu  $O$  oraz osie aksonometryczne. Aksonometria prostokątna sfery jest okręgiem o tym samym promieniu co okrąg rzeczywisty i w rzutach Monge'a (rys. 7.8e). Na osiach  $x'$ ,  $y'$  i  $z'$  odmierzymy odcinki  $\langle O'O_1 \rangle$ ,  $\langle O'O_2 \rangle$  i  $\langle O'O_3 \rangle$  które są skróconymi za pomocą odpowiednich kątów odcinkami  $\langle O^1O_1^1 \rangle$ ,  $\langle O^1O_2^1 \rangle$  i  $\langle O^2O_3^2 \rangle$ . Punkty  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  są środkami okręgów powstałych w wyniku przecięcia sfery płaszczyznami  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Rzuty aksonometryczne tych okręgów są elipsami które wyznaczamy jak na rysunkach 7.4, 7.5 i 7.7.

W praktyce inżynierskiej stosuje się aksonometrię prostokątną izometryczną, gdzie trójkąt śladów jest trójkątem równobocznym, a kąty między osiami są równe i wynoszą  $120^\circ$  (rys. 7.9). Skrócenia dla kierunków osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  są równe:  $s_x = s_y = s_z \approx 0,816$ . W celu łatwiejszego rysowania można je zaokrąglić do 1. Otrzymuje się nieco większy rysunek aksonometryczny.

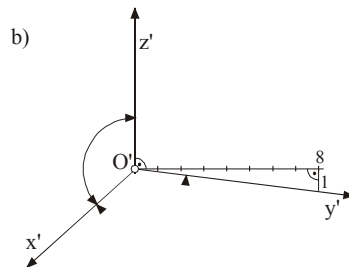
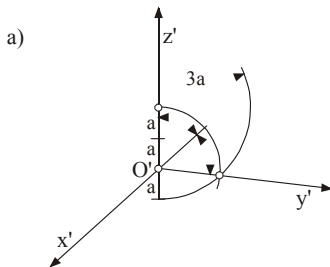
Drugim, chętnie stosowanym rodzajem aksonometrii prostokątnej jest dimetria o kątach między sąsiednimi osiami i skróceniami jak na rysunku 7.10. Sposoby wyznaczania osi aksonometrycznych przy podanych jak na rysunku 7.10 kątach między osiami podaje rysunek 7.11.



Rys. 7.9



Rys. 7.10



Rys. 7.11

## 2. Aksonometria ukośna

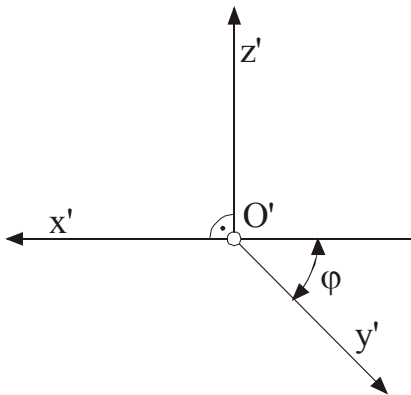
Praktycznie stosuje się dwa rodzaje aksonometrii ukośnej:

- 1° — aksonometria kawalerska,
- 2° — aksonometria wojskowa.

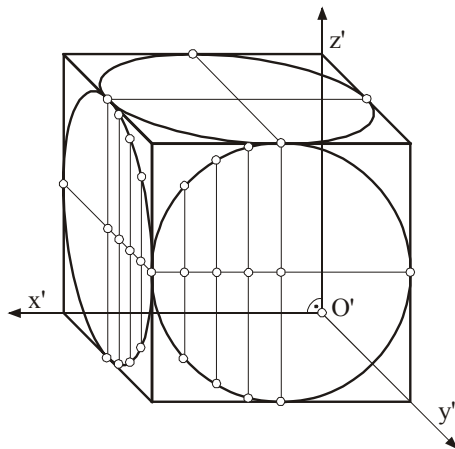
W aksonometrii kawalerskiej przyjmuje się, że osie  $x$  i  $z$  układu kartezjańskiego są równoległe do rzutni aksonometrycznej, a oś  $y$  jest do niej prostopadła. W związku z tym osie aksonometryczne  $x'$  i  $z'$  tworzą kąt prosty, a skrócenia w kierunku tych osi są równe 1. W zależności między innymi od kąta jaki kierunek rzutowania tworzy z rzutnią aksonometryczną kierunek rzutu  $y'$  oraz skrócenie mogą być dowolne. Oś  $z'$  kreślimy pionowo, a  $y'$  nachyloną do  $x'$  pod kątem  $\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  (rys. 7.12). Skrócenie w kierunku osi  $y$  przyjmuje się: 0,5 lub 1.

### Ćwiczenie 188

Wykreślić aksonometrię kawalerską sześcianu z wpisanymi w jego ściany okręgami przyjmując kąt  $\varphi = 45^\circ$  i  $s_y=0,5$ .



Rys. 7.12

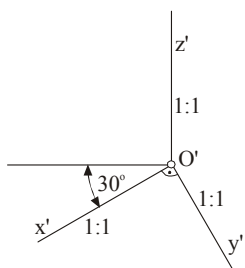


Rys. 7.13

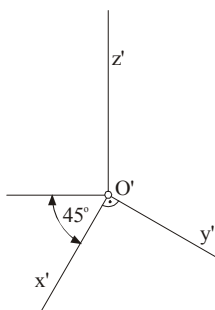
### Rozwiązanie

Rzuty aksonometryczne ścian równoległych do płaszczyzny  $xz$  i okręgów leżących na tych ścianach są kwadratami i okręgami; pozostałych zaś równoległobokami i elipsami (rys. 7.13). Rzutami średnic okręgu przyjętych równoległe do boków kwadratu widocznej ściany równoległej do płaszczyzny  $yz$  są średnice sprzężone elipsy, odpowiednio równoległe do boków równoległoboku. Rzuty dodatkowych punktów okręgu otrzymujemy następująco: dzielimy na równą ilość części promień okręgu równoległy do  $x$  i średnicę elipsy równoległą do  $y'$ . Przez punkty podziału kreślimy równoległe do  $z$  odpowiednio równe cięciwy okręgu i elipsy. Elipsa zawarta w ścianie równoległej do płaszczyzny  $xy$  jest przystająca do poprzednio wykreślonej ze względu na symetrię prostokątną względem osi aksonometrycznej  $y'$ .

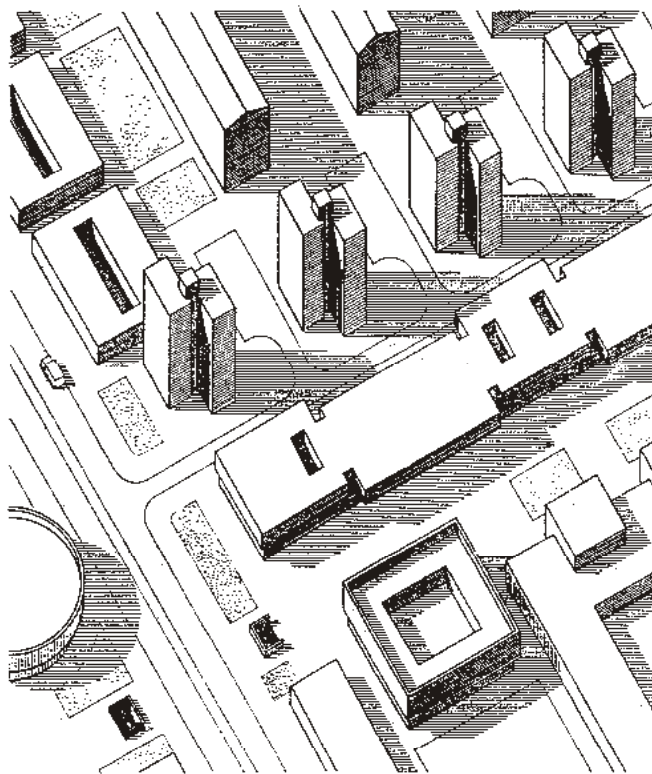
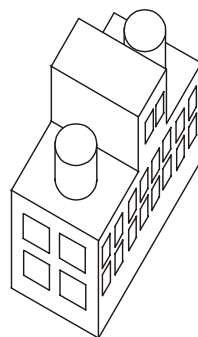
W aksonometrii wojskowej przyjmuje się, że osie  $xy$  są równoległe do rzutni aksonometrycznej, a kierunek rzutowania tworzy z rzutnią kąt  $45^\circ$ . Osie aksonometryczne  $x'$  i  $y'$  są prostopadłe, a skrócenia  $s_x=s_y=s_z=1$ . Oś  $z'$  wykreślamy pionowo, a  $x'$  nachyloną do poziomu pod kątem  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  lub  $60^\circ$  (rys. 7.14). Figury leżące w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny  $xy$  posiadają rzuty przystające do tych figur. W budownictwie ten rodzaj aksonometrii jest często stosowany do przedstawiania obiektów budowlanych (rys. 7.15) i planów osiedli (rys. 7.16).



Rys. 7.14



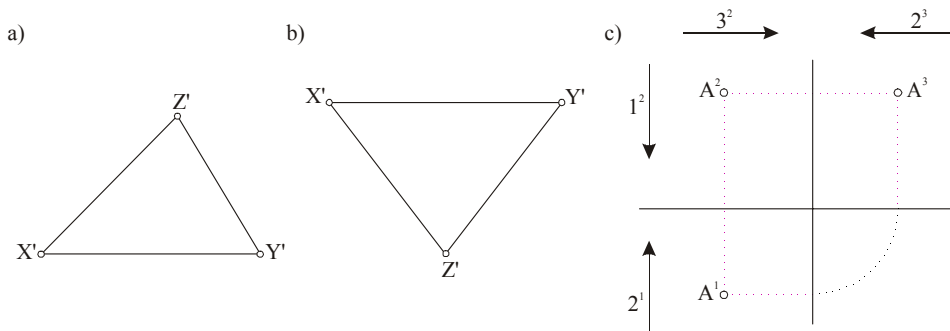
Rys. 7.15



Rys. 7.16

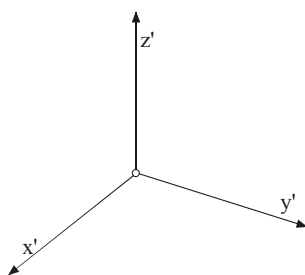
## ZADANIA

1. Dane są rzuty Monge'a punktu A oraz trójkąt śladów aksonometrycznych. Wyznacz aksonometrię punktu A (rys. 7.17a,b,c). Zadanie rozwiąż wyznaczając osie i skrócenia aksonometryczne.



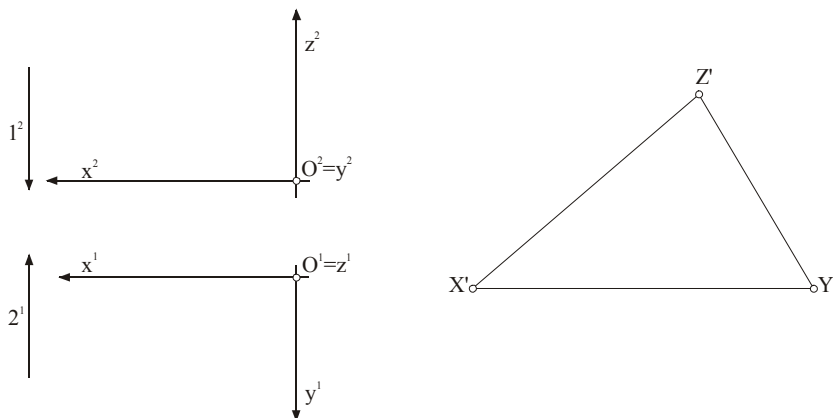
Rys. 7.17

2. Dane są osie aksonometrii prostokątnej oraz odcinek jednostkowy równy 40mm. Wyznacz dla każdego kierunku osi odcinek skrócony (rys. 7.18).



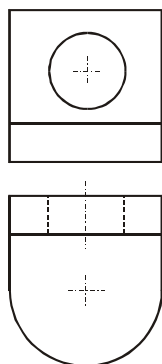
Rys. 7.18

3. Dane są rzuty prostokątne osi układu kartezjańskiego  $xyz$ , oraz rzut aksonometryczny trójkąta śladów. Odtwórz rzuty Monge'a kierunku rzutowania (rys. 7.19).

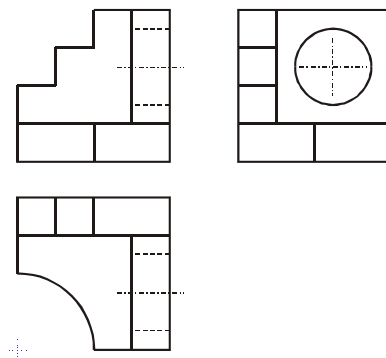


Rys. 7.19

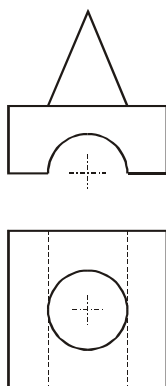
4. Wyznaczyć aksonometrię figury (rys. 7.20 - 7.25). Przyjąć rzuty Monge'a kierunku rzutowania aksonometrycznego lub trójkąt śladów.



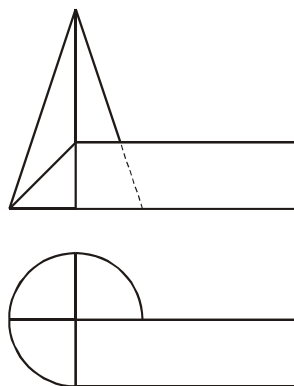
Rys. 7.20



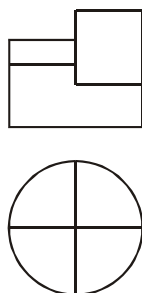
Rys. 7.21



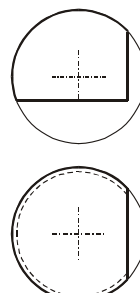
Rys. 7.22



Rys. 7.23



Rys. 7.24



Rys. 7.25

## Rozdział VIII

### WYZNACZANIE DACHÓW

Dachy przykrywające budynki lub wydzielone przestrzenie są pod względem geometrycznym zbiorem wielokątów, ewentualnie fragmentów powierzchni. Zajmiemy się dachami złożonymi z płaskich wielokątów zwanych *połaciami dachu*. Najniższe linie połaci dachu tworzą poziomy wielokąt zwany *wielokątem okapu*, jego boki nazwane są *okapami*.

Zadania związane z geometrią dachów polegają na wyznaczeniu na danym wielokącie okapu rzutów sąsiednich połaci, kątów ich wzajemnego nachylenia oraz wielkości połaci.

Przy wyznaczaniu rzutów krawędzi skorzystamy ze związku: trzy płaszczyzny przecinające się posiadają punkt wspólny, w którym przecinają się trzy krawędzie tych płaszczyzn. Jeżeli założymy, że nachylenie wszystkich połaci dachu jest jednakowe, a linia okapu zawarta jest w płaszczyźnie pierwszorzędowej, wówczas rzuty pierwsze wspólnych krawędzi sąsiednich połaci będą dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach wielokąta okapu. Krawędzie dachu poza okapami mają swoje nazwy i tak:

- krawędzie narożne wychodzą z wierzchołków kątów wypukłych wielokąta okapu,
- krawędzie koszowe wychodzą z wierzchołków kątów wklęsłych wielokąta okapu,
- krawędzie zgubne są nachylone do poziomu i nie dochodzą do krawędzi okapu,
- kalenice są to krawędzie poziome,

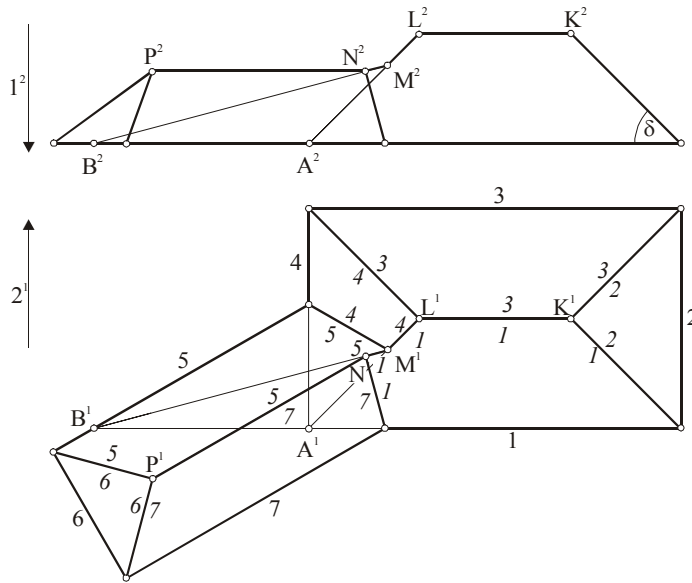
linię łamaną łączącą górne naroża (np. na rysunku 8.1 linię PNMLK) nazywamy *grzbietem dachu*.

#### *Ćwiczenie 189*

Wyznaczyć geometryczny projekt dachu nad budynkiem wolnostojącym. Na linię okapu składają się boki wielokąta od 1 do 7. Kąt nachylenia połaci dachu do płaszczyzny okapu wynosi  $\delta$  (rys. 8.1).

#### *Rozwiązanie*

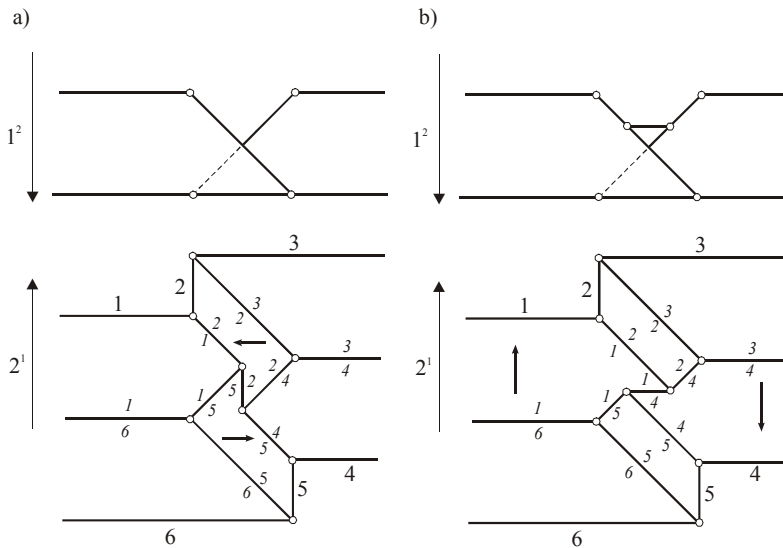
W rzucie pierwszym wyznaczamy wszystkie dwusieczne kątów wewnętrznych wielokąta. Są one rzutami krawędzi sąsiednich połaci 1|2, 2|3, 3|4, 4|5, 5|6, 6|7, 7|1. Krawędzie 1|2 i 2|3 przecinają się w punkcie K, przez który przechodzi krawędź połaci o okapach 1 i 3. Ponieważ okapy 1 i 3 są równoległe, więc szukaną krawędzią jest pozioma prosta 1|3 - kalenica. W punkcie L przecinają się krawędzie 1|3 i 3|4, a więc przez punkt przejdzie również krawędź 1|4 tych połaci, których okapy 1 i 4 przecinają się w punkcie A leżącym na ich przedłużeniach. Krawędź 1|4 jest krawędzią zgubną, nie dochodzi do przecięcia się 1 i 4, natomiast przecina krawędź 4|5 w punkcie M, przez który musi przejść trzecia krawędź 1|5. Jej rzut jest dwusieczną kąta zawartego między okapami 1 i 5. Krawędź 1|5 przecina się z krawędzią 7|1 w punkcie N, który daje początek krawędzi poziomej 5|7. Punkt P jest punktem wspólnym trzech krawędzi 5|7, 5|6, 6|7. Otrzymany w ten sposób rzut pierwszy dachu jest niezależny od kąta  $\delta$  nachylenia połaci. Wyznaczamy drugi rzut dachu. Kąt  $\delta$  jest zachowany w rzucie drugim dla połaci rzutującej o okapie 2 oraz połaci o okapie 4. Na ich rzuty odnosimy punkty K, L, M. Drugi rzut odcinka MN kreślimy za pomocą punktu B<sup>2</sup>.



Rys. 8.1

Może się zdarzyć, że przy wyznaczaniu dachu według zasady stałego nachylenia pojawią się krótkie poziome linie koszowe jak na rysunku 8.2a. Jest nią krawędź 5|2 między połaciami 2 i 5. Ponieważ linie spadku połaci są prostopadłe do linii okapu, powstała krawędź pozioma koszowa, w której będą się zbierać opady atmosferyczne. Gdy jednak linię koszową 1|2 doprowadzimy do linii narożnej 2|4 to otrzymamy krótką kalenicę 1|4 o kierunku prostopadłym do poprzednio wyznaczonej linii koszowej (rys.8.2b), co w sposób korzystny rozwiązuje zadanie.

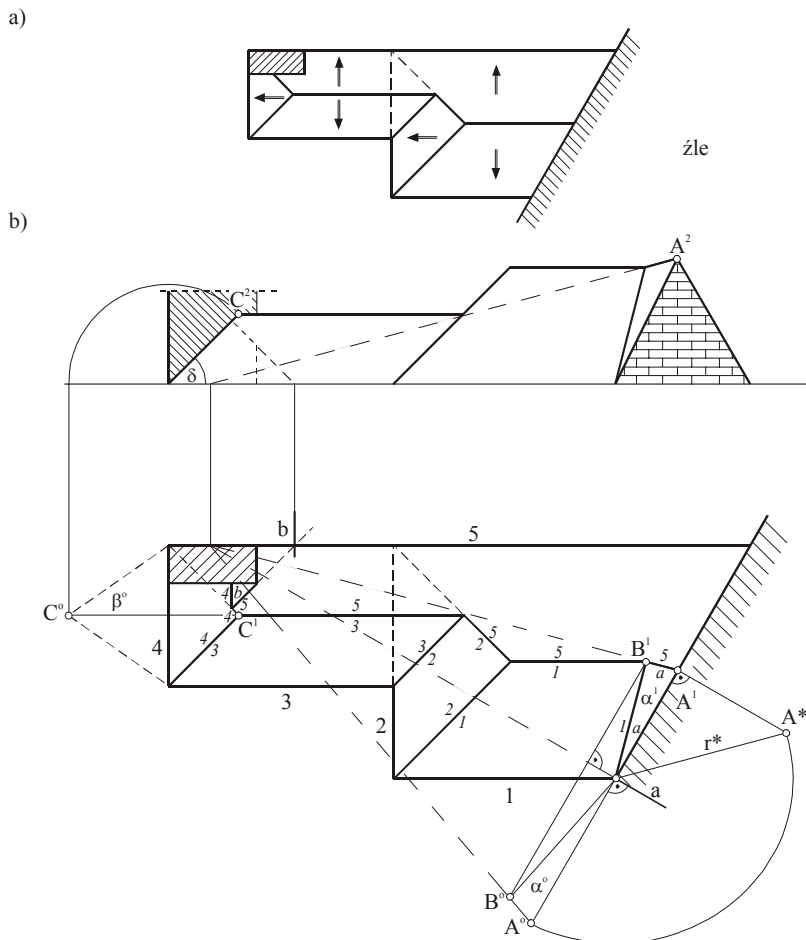
Dla budynków przyległych do innych, bądź stojących na granicy działki, przy projektowaniu dachu musimy uwzględnić przepisy budowlane, według których woda opadowa powinna być kierowana od ściany sąsiada lub co najwyżej równoległe do ściany sąsiada.



Rys. 8.2

### Ćwiczenie 190

Wykreślić rzuty dachu nad budynkiem przyległym. Kąt nachylenia. połaci dachu do poziomu równy  $\delta$ . Wyznaczyć wielkość dwu połaci dachu (rys. 8.3).



Rys. 8.3

#### Rozwiązanie

Rozwiązujemy zadanie jak w ćwiczeniu 189 wyznaczając dwusieczne kątów, które są rzutami krawędzi sąsiednich połaci bez uwzględnienia sąsiadów. Rozwiązanie przedstawione na rysunku 8.3a pokazuje linie spadku, a więc kierunki spływu wody. Z rysunku wynika, że ściany sąsiadów są zagrożone. Rozwiązanie jest więc złe. Dla ochrony tych ścian wprowadzono okapy  $a$  i  $b$  prostopadłe do zagrożonych ścian co pozwoliło uzyskać prawidłowe rozwiązanie (rys. 8.3b). W celu obliczenia zapotrzebowania materiału na pokrycie tego dachu możemy wyznaczyć prawdziwe wielkości połaci, np. przez obroty połaci na płaszczyznę okapu dookoła ich linii okapów. Otrzymujemy tu zarazem prawdziwe długości belek narożnych i koszowych. Na rysunku 8.3b wyznaczone są kądy połaci  $\alpha$  i  $\beta$ . Kąt zawarty między połaciami wyznaczmy, gdy przetniemy obie połacie płaszczyzną prostopadłą do ich krawędzi. Według tego kąta należy sciosać górną ścianę belki narożnej między tymi połaciami. Belki koszowe mają kąt wklęsły, połacie dachu są wsparte na tej belce.

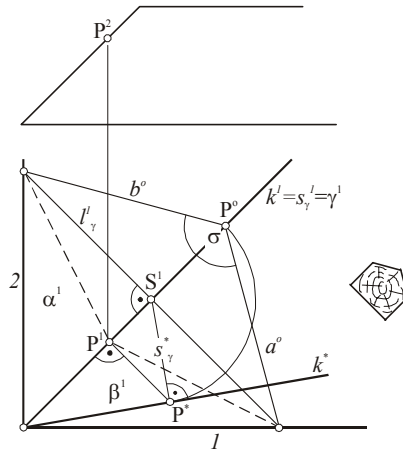


### Ćwiczenie 191

Wyznaczyć kąt zaciosu belki narożnej (rys. 8.4)

Rozwiązanie

Połącze  $\alpha$  o okapie 2 i  $\beta$  o okapie 1 przecinają się w krawędzi  $k$ . Wykonujemy kład  $k^*$  krawędzi  $k$  za pomocą dowolnie obranego punktu P na płaszczyźnie okapu. Przez punkt P prowadzimy kład prostej spadu  $s_\gamma^*$  płaszczyzny  $\gamma$  prostopadłej do  $k^*$ . Przecina ona  $k$  w punkcie S, przez który prowadzimy  $l_\gamma$  - prostą warstwową  $l' \perp k'$ . Proste  $l, s$  wyznaczają płaszczyznę  $\gamma$ , której proste  $a$  i  $b$  są krawędziami z  $\alpha$  i  $\beta$ . Poprzez obrót punktu P dookoła prostej  $l$  uzyskujemy kład  $a'$  i  $b'$  oraz wielkość kąta zaciosu  $\sigma$ .



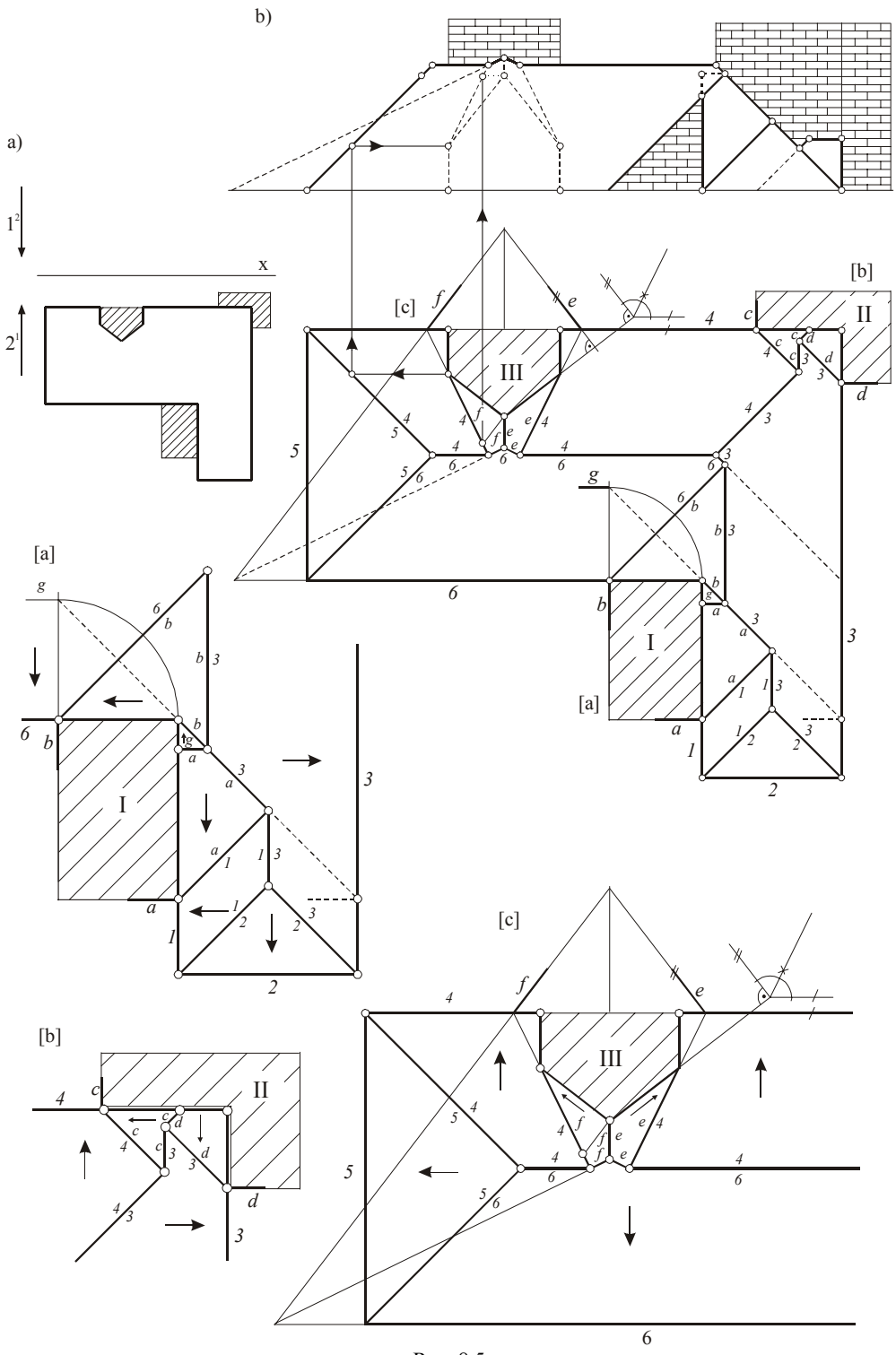
Rys. 8.4

### Ćwiczenie 192

Wyznaczyć rzuty dachu nad budynkiem przyległym do trzech sąsiadów jak na rys. 8.5, o jednakowym nachyleniu wszystkich połaci.

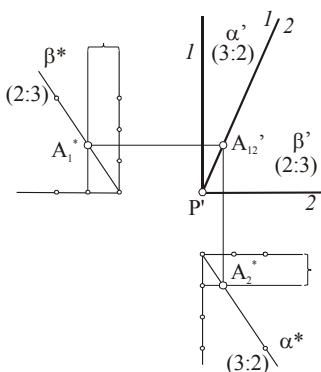
Rozwiązanie

Numerujemy okapy rzeczywiste, przyjmując taki sam numer dla połaci o danym okapie. W rzucie pierwszym wyznaczamy dwusieczne kątów które są krawędziami między połaciami. Podobnie jak w ćwiczeniach poprzednich: jeżeli dwie krawędzie przecinają się to przez punkt przecięcia przechodzi trzecia krawędź taka, aby każdy z numerów krawędzi powtórzył się dwa razy. I tak: jeżeli przetnie się krawędź 1|2 z 2|3 to przez punkt przecięcia musi przechodzić krawędź 1|3. Krawędź 1|3 jest kalenicą, woda spływająca po połaci 1 zalewałaby sąsiada I. W tym celu wprowadzamy okap „teoretyczny” prostopadły do zagrożonej ściany i wykreślamy dwusieczną kąta  $a|l$ . Jest to krawędź koszowa. Rysunek fragmentu [a] pokazuje proste spadu, a więc kierunki spływu wody. Z punktu przecięcia się 1|3 i  $a|l$  musimy wykreślić krawędź  $a|3$ . Krawędź  $a|3$  przecina  $b|3$  i powinna być krawędź  $a|b$ . Łatwo zauważyć, że wprowadzając krawędź  $a|b$  uzyskalibyśmy niekorzystne rozwiązanie gdyż woda spływając w kierunku prostopadłym do  $b$  zalewałaby sąsiada I. Aby tego uniknąć wprowadzamy „teoretyczny” okap  $g$  prostopadły do zagrożonej ściany i przecinającej  $b$  tak, aby dwusieczna  $g|b$  przeszła przez zagrożony narożnik. Ponieważ przecinają się w jednym punkcie trzy krawędzie:  $a|3$ ,  $b|3$  i  $b|g$  i aby każda połać była reprezentowana dwa razy, brakuje jeszcze krawędzi  $a|g$  (kalenicy). Pozostałą część dachu, w tym fragmenty [b] i [c], można prześledzić na rysunku 8.5b. Wyznaczona jest w podobny sposób jak rysunki poprzednie i fragment [a].

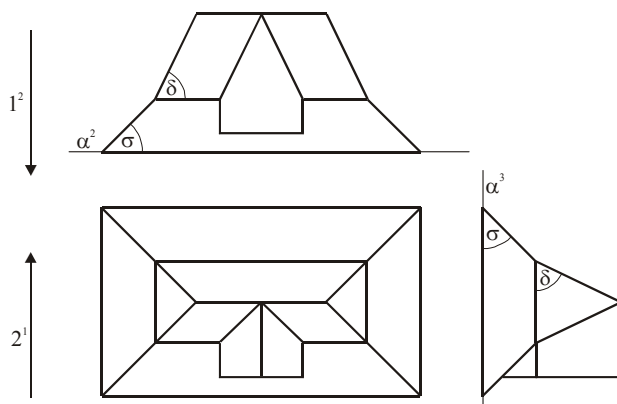


Rys. 8.5

Jeżeli sąsiednie połacie mają inne nachylenie, to rzut krawędzi tych połaci nie jest dwusieczną kąta między nimi. Na rysunku 8.6 pokazany jest sposób wyznaczenia krawędzi między połaciami o nachyleniu 3:2 - połać 1 i 2:3 - połać 2. Rysujemy takie rzuty obu połaci aby były one rzutujące (może to być rzut w kierunkach równoległych do okapów, lub kłady prostokątne przekrojów prostopadłych do okapów). Na  $\alpha^*$  i  $\beta^*$  obieramy punkty  $A_1$  i  $A_2$  o takich samych cechach i znajdujemy punkt  $A_{12}^*$  - na przecięciu się odnoszących. Punkty P i A wyznaczają krawędź 1/2. W przypadku, gdy chcemy aby dach był dwuspadowy, o jednakowym nachyleniu dolnej partii połaci i jednakowym (ale różnym od poprzedniego) nachyleniu górnych połaci dachu, w rzucie z góry z kierunku 1 krawędzie są jak poprzednio dwusiecznymi kątów. Różnice w nachyleniu połaci oraz kąty nachylenia pokazuje rzut drugi i trzeci (rys. 8.7).



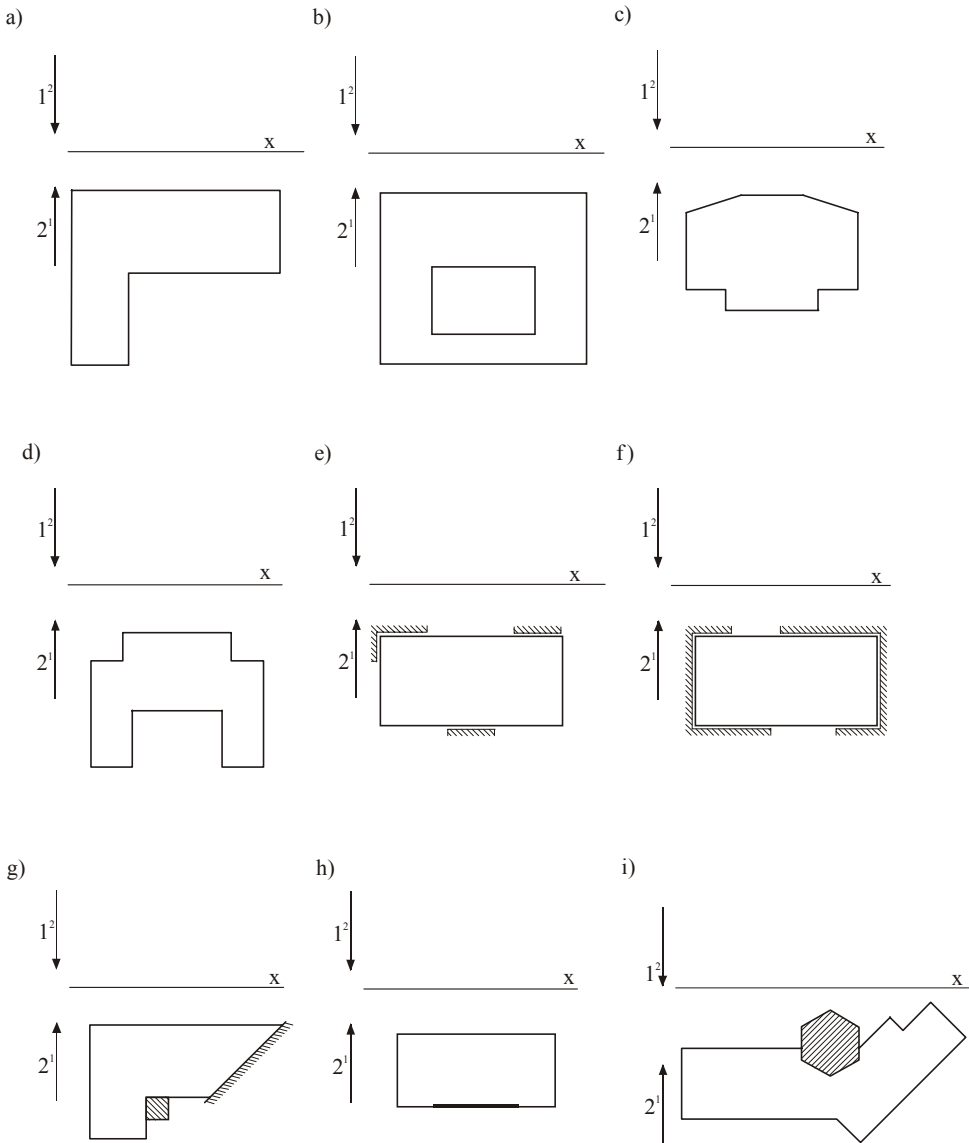
Rys. 8.6



Rys. 8.7

## ZADANIA

Dany jest wielokąt okapu zawarty w płaszczyźnie pierwszorzędowej. Wyznaczyć rzuty podstawowe dachu przyjmując jednakowe nachylenie wszystkich połaci dachu. Wyznaczyć wielkość połaci oraz kąt zaciosu belki narożnej lub koszowej. Rysunki 8.8a,b,c,d przedstawiają okapy nad budynkami wolnostojącymi. Rysunki 8.8e,f,g,h,i, przedstawiają okapy budynków przyległych do innych posiadających mury ogniowe, atyki lub wieże.



Rys. 8.8



## SPIS OZNACZEŃ

- $E_3$  - przestrzeń euklidesowa  
 $W_3$  - przestrzeń rzutowa  
 $R$  - rzutowanie  
 $A, B, \dots, I, II, \dots, 1, 2, \dots$  - punkty  
 $a, b, \dots, l, 2, \dots$  - proste  
 $x, y, z, k, s, l, 2 \dots$  - kierunki rzutowania i osie układów  
 $\alpha, \beta$  - płaszczyzny  
 $\Gamma, \Delta$  - figury  
 $A^n, \dots, a^n, \dots, \alpha^n, \dots, \Gamma^n, \dots,$  - (dla  $n=1,2,3$ ) rzuty  $n$ -te punktów, prostych, płaszczyzn, figur  
 $M^\infty$  - punkt niewłaściwy  $M$   
 $m^\infty$  - prosta niewłaściwa  $m$   
 $\alpha^\infty$  - płaszczyzna niewłaściwa  
 $\varphi^*$  - kład płaszczyzny uzyskany przez obrót o kąt  $90^\circ$   
 $\varphi^\circ$  - kład płaszczyzny uzyskany przez obrót o kąt różny od  $90^\circ$   
 $\langle AB \rangle$  - odcinek  
 $|AB|$  - długość odcinka  
 $\langle O l \rangle$  - łuk  
 $|O l|$  - długość łuku  
 $\langle AB \dots F \rangle$  - wielokąt, łamana  
 $\rangle AB \rangle$  - wektor o początku  $A$  i końcu  $B$   
 $\vec{u}$  - wektor  
 $\rho(Aa)$  - odległość punktu od prostej  
 $\rho(A\alpha)$  - odległość punktu od płaszczyzny  
 $\rho(\alpha, \beta)$  - odległość płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$

$\sigma(ab)$  – kąt między prostymi  
 $\sigma(a\alpha)$  – kąt między prostą i płaszczyzną  
 $\sigma(\alpha\beta)$  – kąt między płaszczyznami  
 $m\parallel n$  - prosta  $m$  równoległa do prostej  $n$   
 $m\parallel\alpha$  - prosta  $m$  równoległa do płaszczyzny  $\alpha$   
 $\alpha\parallel\beta$  - płaszczyzna  $\alpha$  równoległa do płaszczyzny  $\beta$   
 $a\perp b$  - prosta  $a$  prostopadła do prostej  $b$   
 $a\perp\alpha$  - prosta  $a$  prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$   
 $\alpha\perp\beta$  - płaszczyzna  $\alpha$  prostopadła do płaszczyzny  $\beta$   
 $A\in\Gamma$  - punkt należący do figury  $\Gamma$   
 $\Delta\subset\Gamma$  - figura  $\Delta$  zawarta w figurze  $\Gamma$   
 $\Delta\cap\Gamma$  - część wspólna - iloczyn – figur  $\Delta$  i  $\Gamma$   
 $\Delta\equiv\Gamma$  - figura  $\Delta$  przystająca do figury  $\Gamma$   
 $a\wedge b$  - prosta  $a$  i prosta  $b$   
 $\{\pi, k\}$  - aparat rzutowania  
 $[1, 2], [1, 3]...$  - układy wiążące  
 $(\{\pi_1, 1\}, \{\pi_2, 2\}, \{\pi_3, 3\})$  - układ odwzorowania  
 $c_x$  - cecha punktu  $X$   
 $m_a m_\alpha$  - moduł prostej  $a$  płaszczyzny  $\alpha$   
 $n_a n_\alpha$  - nachylenie prostej  $a$  płaszczyzny  $\alpha$   
 $0_\alpha, 1_\alpha, 2_\alpha, \dots$  - warstwy płaszczyzny  $\alpha$   
 $x, y, z$  - układ kartezjański  
 $x'y'z'$  - rzut układu kartezjańskiego  
 $s_x, s_y, s_z$  - współczynniki deformacji liniowej lub współczynniki skróceń  
 aksonometrycznych

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Kazimierz Bartel: *Geometria wykreślna*. Lwów 1919.
- [2] Bogusław Grochowski: *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną*. PWN Warszawa 1995.
- [3] Bogusław Januszewski: *Geometria wykreślna*. Wydawnictwa Uczelniane Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1991.
- [4] Henryk Koczyk: *Geometria wykreślna. Metoda Monge'a. Aksonometria. Teoria i zadania*. PWN Warszawa 1992.
- [5] Zbigniew Lewandowski: *Geometria wykreślna*. PWN, Warszawa 1975.
- [6] Franciszek Otto, Edward Otto: *Podręcznik geometrii wykreślnej*. PWN, Warszawa 1975.
- [7] Stanisław Polański: *Geometria powłok budowlanych*. PWN, Warszawa 1986.
- [8] Stanisław Polański: *Zastosowania rozwinięć powierzchni w technice*. PWN, Warszawa 1984.
- [9] Stanisław Polański, Jolanta Słoma: *Geometria wykreślna. Podstawy zapisu wykreślnego konstrukcji budowlanych i inżynierskich*. Wydawnictwa Uczelniane Politechniki Lubelskiej 1994.
- [10] Stefan Przewłocki: *Geometria wykreślna w budownictwie*. Arkady, Warszawa 1982
- [11] Tadeusz Rachwał, Stefania Dwurażna: *Ćwiczenia z geometrii wykreślnej*. PWN Łódź – Warszawa – Kraków 1964.
- [12] Tadeusz Rachwał: *Geometria wykreślna*. PWN Warszawa 1977.
- [13] Stanisław Szerszeń: *Nauka o rzutach*. PWN Warszawa 1994.





Biblioteka Cyfrowa  
Politechniki Lubelskiej



Działalność wydawnicza  
Politechniki Lubelskiej



**Zuzanna Karcz z d. Rozmej (1936–2007)**, absolwentka Wydziału Geologii Poszukiwawczej Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Po studiach została zatrudniona jako starszy inżynier nadzorujący wiercenia geologiczne i opracowanie dokumentacji technicznej pod budowę Rafinerii w Płocku. Następnie pracowała jako starszy asystent w Katedrze Geometrii Wykreślnej AGH kierowanej przez prof. Tadeusza Rachwałę. W roku akademickim 1965/66 pracowała na stanowisku starszego asystenta w Zakładzie Geometrii Wykreślnej

w Katedrze Części Maszyn Politechniki Łódzkiej pod kierunkiem prof. Witolda Korewy. Ze względów rodzinnych przeniosła się do Lublina i od września 1966 pracowała jako starszy asystent, wykładowca i starszy wykładowca Politechniki Lubelskiej (dawniej Wyższej Szkoły Inżynierskiej).

Autorka i współautorka wielu publikacji, m.in.:

- podręcznika „Geometria wykreślna”,
- podręcznika „Rysunek techniczny i odręczny cz. II”,
- monografii „Koncepcja wykorzystania w rolnictwie skał płonnych z Lubelskiego Zagłębia Węglowego w świetle ich cech petrograficznych i właściwości fizyko-chemicznych”,

Współautorka kilku artykułów i opracowań naukowych na temat poszukiwań surowców skalnych w regionie lubelskim.

Za osiągnięcia dydaktyczne odznaczona Złotym Krzyżem Zasługi oraz uhonorowana przez studentów tytułem „Homo Didacticus” w roku akademickim 1995/96.

ISBN 978-83-7947-001-3



9 788379 470013