

*Pragnę wyrazić podziękowanie osobom, których pomoc  
przyczyniła się do powstania niniejszej pracy, a w szczególności:  
profesorowi Andrzejowi Fladze,  
pracownikom Katedry Mechaniki Budowli  
Politechniki Lubelskiej,  
zwłaszcza  
dr hab. inż. Ewie Błazik-Borowej.*



Politechnika Lubelska  
Wydział Budownictwa i Architektury  
ul. Nadbystrzycka 40  
20-618 Lublin

Jacek Szulej

# Wyznaczenie ekwiwalentnego wiskotycznego tłumienia drgań w konstrukcjach wielomateriałowych



Politechnika Lubelska  
Lublin 2010

Recenzenci:

Dr hab. inż. Marek Łagoda, prof. Politechniki Lubelskiej

Dr hab. inż. Joanna Dulińska, prof. Politechniki Krakowskiej

Skład i łamanie: Tomasz Piech

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2010

ISBN: 978-83-62596-00-3

Wydawca: Politechnika Lubelska

ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej

Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej

ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin

tel. 81 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl

[www.biblioteka.pollub.pl](http://www.biblioteka.pollub.pl)

Druk: Wydawnictwo-Drukarnia „Liber Duo”

ul. Długa 5, 20-346 Lublin

## Spis treści

|  |     |
|--|-----|
| Symbole i oznaczenia.....  | 7   |
| 1. Wstęp.....  | 9   |
| 2. Podstawowe wiadomości o tłumieniu w konstrukcjach budowlanych .....   | 11  |
| 2.1. Definicja i rodzaje tłumienia .....   | 11  |
| 2.2. Wielkości opisujące wartości tłumienia drgań .....  | 14  |
| 2.3. Modele tłumienia drgań .....  | 15  |
| 2.4. Metody określające wartości parametrów tłumienia drgań: .....   | 20  |
| 3. Przykładowe zestawienia logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla materiałów, elementów konstrukcji i obiektów budowlanych ..... | 30  |
| 3.1. Wartości tłumienia wybranych materiałów .....   | 30  |
| 3.2. Wartości tłumienia elementów konstrukcji .....  | 31  |
| 3.3. Wartości tłumienia konstrukcji budowlanych .....  | 34  |
| 4. Układ pomiarowy (tor pomiarowy) .....   | 37  |
| 5. Obróbka wyników badań i błędy, jakie mogą się pojawić przy stosowaniu metody kolokacyjnej .....                                       | 38  |
| 5.1. Ogólna obróbka wyników badań .....  | 38  |
| 5.2. Najczęściej występujące problemy i popełniane błędy przy stosowaniu metody kolokacyjnej .....                                       | 40  |
| 6. Badania: Modele .....   | 44  |
| 6.1. Model złożony .....   | 44  |
| 6.2. Modele proste .....   | 50  |
| 7. Badania: Konstrukcje .....  | 63  |
| 7.1. Kładki .....  | 63  |
| 7.2. Mosty .....   | 86  |
| 7.3. Wiadukt .....   | 108 |
| 7.4. Maszty .....  | 111 |
| 7.5. Stropy .....  | 120 |
| 7.6. Kładka po przeprowadzeniu modernizacji .....  | 128 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>8. Zalecane wartości <math>\delta</math> dla poszczególnych klas obiektów inżynierskich i wnioski końcowe .....</b> | <b>132</b> |
| 8.1. Wprowadzenie .....  | 132        |
| 8.2. Mosty i wiadukt .....   | 132        |
| 8.3. Mosty dla pieszych (kładki) .....   | 133        |
| 8.4. Maszty z odciągami (stalowe) .....  | 134        |
| 8.5. Stropy .....  | 134        |
| 8.6. Podsumowanie .....  | 135        |
| 8.7. Wnioski końcowe .....   | 135        |
| <b>Bibliografia.....</b>   | <b>136</b> |

## Symbole i oznaczenia

### Litery łacińskie

- $A_i, B_i, A_i^p, B_i^p, A_i^e, B_i^e$  - amplitudy przemieszczeń, przyspieszeń i odkształceń drgań
- $D_i$  - dyssypowana energia  $i$ -tej postaci drgań
- $D_{ij}$  - udział energii dyssypowanej  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji) przy  $i$ -tej postaci drgań
- $f$  - częstotliwość
- $f_i$  -  $i$ -ta częstotliwość drgań własnych konstrukcji
- FFT - szybka transformata Fouriera
- $F_u^2$  - kwadrat modułu transformaty Fouriera
- $F_{umaxi}^2$  - maksymalna wartość kwadratu modułu transformaty Fouriera
- $F_y^2$  - funkcja aproksymująca (dotyczy metody kolokacyjnej)
- $\mathbf{h}(\tau)$  - macierz odpowiedzi impulsowych
- $\mathbf{h}_k(\tau)$  - wektor odpowiedzi układu na wymuszenia typu  $\mathbf{p} = [0, 0 \dots 0, \delta_k(\tau), 0 \dots 0]^T$
- $\mathbf{H}(f)$  - macierz transmitancji mechanicznej układu
- $H_{ik}(f)$  - element macierzy transmitancji mechanicznej układu
- $|H_{ik}|, \Theta_k$  - moduł i argument transmitancji mechanicznej układu
- $j$  - jednostka urojona
- $K_j$  - macierz sztywności  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji)
- $M_j$  - macierz bezwładności  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji)
- $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  - macierze odpowiednio bezwładności (mas), tłumienia i sztywności układu
- $N$  - siła nacisku
- $U_i$  - całkowita energia potencjalna  $i$ -tej postaci drgań
- $U_{ij}$  - udział energii potencjalnej  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji) przy  $i$ -tej formie drgań
- $u(t)$  - przemieszczenie konstrukcji
- $u_i(t)$  -  $i$ -ty przebieg czasowy przemieszczeń konstrukcji

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| $U_j^0$                        | - energia wynikająca ze wstępnego napięcia lub dużych przemieszczeń         |
| $\Delta W$                     | - energia rozproszona w jednym cyklu drgań                                  |
| $W$                            | - maksymalna energia dostarczona do układu w jednym cyklu drgań             |
| $\mathbf{V}$                   | - wektor prędkości wiatru   |
| $V_{ij}$                       | - energia odkształceń w zakresie małych przemieszczeń                       |
| $\mathbf{V}_i$                 | - wektor maksymalnych prędkości drgań $i$ -tej postaci                      |
| $\mathbf{x}$                   | - wektor przemieszczeń węzłów konstrukcji                                   |
| $\dot{\mathbf{x}}$             | - wektor prędkości węzłów konstrukcji                                       |
| $\ddot{\mathbf{x}}$            | - wektor przyspieszeń węzłów konstrukcji                                    |
| $\mathbf{Y}(f), \mathbf{P}(f)$ | - transformaty Fouriera odpowiedzi konstrukcji oraz przyłożonego obciążenia |

### Litery greckie

|                    |  |
|--------------------|--|
| $\alpha$           | - parametr tłumienia masowego  |
| $\beta$            | - współczynnik tłumienia drgań   |
| $\gamma$           | - bezwymiarowy współczynnik tłumienia drgań  |
| $\delta$           | - logarytmiczny dekrement tłumienia drgań  |
| $\delta_k(\tau)$   | - delta Diraca   |
| $\delta_1$         | - składowa logarytmicznego dekrementu tłumienia związana z tłumieniem materiałowym                         |
| $\delta_2$         | - składowa logarytmicznego dekrementu tłumienia związana z tłumieniem konstrukcyjnym                       |
| $\delta_3$         | - składowa logarytmicznego dekrementu tłumienia związana z przekazywaniem energii na grunt przez fundament |
| $\varepsilon(t)$   | - odkształcenie konstrukcji  |
| $\varepsilon_i(t)$ | - $i$ - ty przebieg czasowy odkształceń konstrukcji  |
| $\mu$              | - współczynnik tarcia  |
| $\xi$              | - liczba tłumienia, ułamek, procent tłumienia krytycznego, stopień tłumienia                               |
| $\varphi_i$        | - unormowany wektor własny $i$ -tej postaci drgań  |
| $\psi$             | - współczynnik pochłaniania (tłumienia właściwego)   |
| $\omega$           | - częstość kołowa drgań własnych   |
| $\omega_i$         | - częstość kołowa drgań własnych $i$ -tej postaci drgań  |
| $\omega_i^*$       | - częstość kołowe drgań tłumionych   |



## 1. Wstęp

W ostatnich kilkudziesięciu latach można zaobserwować stały wzrost liczby projektowanych i wykonywanych coraz bardziej smukłych i wiotkich konstrukcji (mosty wiszące i podwieszane, maszty, kładki). Prawidłowe projektowanie takich budowli, jak i ich bezpieczna eksploatacja wymaga wiedzy na temat dynamicznego zachowania się konstrukcji. Jednym z głównych parametrów opisujących zachowanie prawidłowo zaprojektowanych budowli jest odpowiedni poziom tłumienia przy drganiach konstrukcji.

W pracy przedstawiono analizę i weryfikację metod służących określaniu współczynników tłumienia drgań złożonych materiałów i konstrukcji wielomateriałowych oraz przeprowadzono badania dotyczące poziomu tłumienia drgań kilku różnych budowli i konstrukcji.

Praca powstała dzięki badaniom zrealizowanym w ramach grantu promotorskiego nr N50602131/1044, pt. „Wyznaczanie ekwiwalentnego wiskotycznego tłumienia drgań dla konstrukcji złożonej z różnych materiałów” i pracy doktorskiej autora.

Cel pracy realizowano przez postulowanie różnych modeli tłumienia. W modelach tłumienia wykorzystywane zostały następujące metody pozwalające na szacowanie tłumienia:

- metody energetyczne,
- metoda kolokacyjna,
- metoda filtracyjno-regresyjna.

W niniejszej pracy szczegółowo rozpatrywano metodę kolokacyjną prof. Andrzeja Flagi. Przeprowadzono dokładne wyprowadzenie wzorów metody i określono warunki stosowalności tej metody.

Sprawdzenie wyników uzyskanych ze stosowania modeli tłumienia wykonano przez ich porównanie z rezultatami uzyskanymi w badaniach na następujących modelach i konstrukcjach:

- sześciu modelach różnych konstrukcji, czterech prostych i dwóch złożonych,
- dwóch stropach: żelbetowym monolitycznym w budynku wielorodzinnym, typu Teriva w budynku jednorodzinny,
- czterech kładkach: dwóch stalowych belkowych i dwóch podwieszonych,
- wiadukcie żelbetowo-stalowym,
- dwóch masztach z odciągami zlokalizowanych w Piaskach i Giedlarowej,
- czterech mostach: łukowym w Puławach, podwieszonym w Gdańsku, łukowym i podwieszonym w Warszawie.

Na moście w Puławach przeprowadzono badania w różnych fazach budowy tego obiektu. Pozwoliło to określić wpływ poszczególnych materiałów na poziom tłumienia drgań całej konstrukcji.

Badania na modelach i obiektach polegały na wzbudzeniu drgań wymienionych układów i określeniu wielkości tłumienia drgań na podstawie analizy przebiegów czasowych drgań. Wymienione modele i konstrukcje modelowano w systemie **Algor**. Służyło to porównaniu i identyfikacji parametrów dynamicznych modeli MES i konstrukcji rzeczywistych. Wykorzystane w pracy modele określające tłumienie drgań, uwzględniają głównie ciężar własny badanych układów i zależne są od poziomu naprężeń w konstrukcji. W obliczeniach weryfikujących rozpatrywano tylko zakres małych drgań swobodnych.

Rozważania ujęto w ośmiu rozdziałach. Pierwszy rozdział opisuje ogólny zarys tematyki pracy. Drugi rozdział omawia ogólne wiadomości dotyczące tłumienia drgań. Zawarte są w nim miary opisujące tłumienie drgań, rodzaje tłumienia drgań, metody szacujące tłumienie drgań. Trzeci przedstawia zebrane z literatury wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla materiałów, elementów konstrukcji i konstrukcji. Układ pomiarowy, wykorzystany do badań omówiony jest w następnym rozdziale. W piątym rozdziale omówiono obróbkę wyników badań i błędy, jakie mogą się pojawić przy stosowaniu metody kolokacyjnej. Rozdział szósty i siódmy przedstawia badane modele i konstrukcje oraz otrzymane wyniki, stosując różne metody ich wyznaczania. Zalecane wartości  $\delta$  dla poszczególnych klas obiektów inżynierskich i wnioski końcowe przedstawia rozdział ósmy.

## 2. Podstawowe wiadomości o tłumieniu w konstrukcjach budowlanych

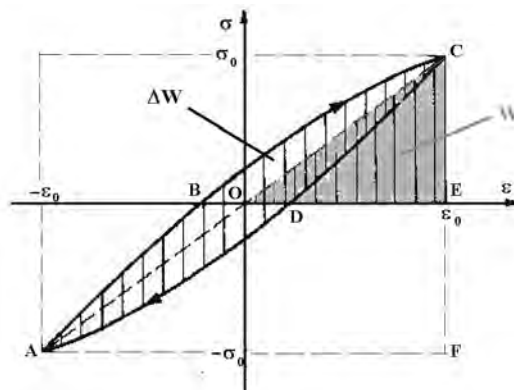
### 2.1. Definicja i rodzaje tłumienia

Tłumienie drgań jest to zdolność rozpraszania (pochłaniania) przez ciało części pracy sił zewnętrznych, która zmienia się w energię ciepłą i ulega rozproszeniu. Zjawisko to zachodzi podczas drgań budowli, czyli przy cyklicznie zmieniających się odkształceniach (naprężeniach). Zdolność tłumienia drgań można zdefiniować jako stosunek energii rozproszonej w jednym cyklu drgań  $\Delta W$  do maksymalnej energii dostarczonej do układu w tym samym cyklu  $W$ .

Zdolność tłumienia drgań opisuje poniższy wzór:

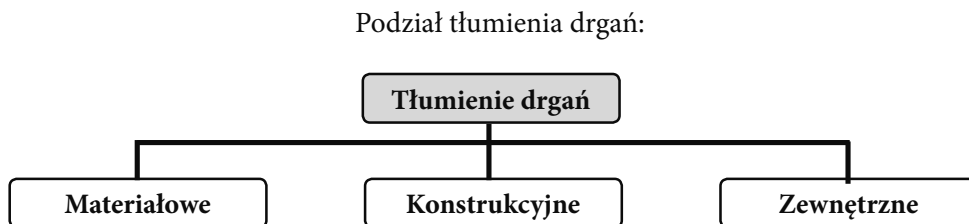
$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \quad (2.1)$$

Wielkość tłumienia drgań w ośrodkach sprężystych można przedstawić za pomocą tak zwanej pętli histerezy. Otrzymuje się ją badając doświadczalnie zależność pomiędzy odkształceniem i naprężeniem, lub też na wykresie zależności pomiędzy siłą i wywołanym przez nią przemieszczeniem, w ciągu trwania jednego, pełnego cyklu obciążenie-odciążenie. Przykład pętli histerezy pokazano na poniższym rysunku (energię potencjalną maksymalną  $W$  przedstawia pole trójkąta OEC, zaś energię rozproszoną  $\Delta W$  przedstawić można jako pole pętli histerezy ABCD).



Rys. 2.1. Pętla histerezy przy drganiach tłumionych wymuszonych periodycznie.

Zjawisko tłumienia drgań jest bardzo złożone. Wyróżnia się trzy główne jego rodzaje. Pierwszym, mającym zwykle najmniejszy udział jest tłumienie materiałowe. Dotyczy ono zjawisk zachodzących w samym materiale. Drugim jest tłumienie konstrukcyjne zależne głównie od obecności tzw. elementów niekonstrukcyjnych w obiekcie i rodzaju połączeń w konstrukcji. Ostatni rodzaj to tłumienie zewnętrzne, na które wpływ ma otoczenie konstrukcji. Rodzaje tłumienia drgań przedstawione zostały na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Rodzaje tłumienia drgań.

**2.1.1. Tłumienie materiałowe drgań** związane jest tylko z wewnętrzną strukturą ciała drgającego i świadczy o niesprężystym charakterze zachowania się materiałów

**Tłumienie materiałowe drgań** spowodowane jest między innymi:

- Rozproszeniem energii uwarunkowanym lokalnymi odkształceniami plastycznymi mikroobjętości materiału, które powstają na skutek działania naprężeń wewnętrznych równoważących się na granicy sąsiednich ziaren;
- Termosprężystym rozproszeniem energii uwarunkowanym nieodwracalnymi przepływami powstającymi pomiędzy różnymi objętościami ciała drgającego pod wpływem gradientu temperatur;
- Rozproszeniem energii w metalach wywołanym dyfuzją;
- Wewnętrznym rozproszeniem energii uwarunkowanym poślizgiem na granicy ziaren, które występuje w materiałach polikrystalicznych i czystych metalach;
- Rozproszeniem energii uwarunkowanym rozprzestrzenianiem się sprężystych fal drgań siatki krystalicznej;
- Sprężystolepkim rozproszeniem energii, które występuje w tworzywach sztucznych;
- Wewnętrznym rozproszeniem energii związanym z ferromagnetycznym stanem materiału.

Tłumienie materiałowe drgań jest najmniejsze w metalach, większe w takich materiałach jak drewno, beton. Ogólnie większe wartości tłumienia drgań odpowiadają materiałom o bardziej złożonej budowie. Średnie wartości tłumienia materiałowego drgań, wyrażonego za pomocą logarytmicznego dekrementu tłumienia  $\delta$ , przedstawia tab. 2.1.

**Tab. 2.1.** Wartości tłumienia materiałowego drgań (Bachmann i inni, 1991)

| Materiał                               | Wartość średnia $\delta$ |
|--|--------------------------|
| Żelbet słabo wyteżony (nie zarysowany) | 0,054                    |
| Żelbet średnio wyteżony (zarysowany)   | 0,157                    |
| Żelbet mocno wyteżony (zarysowany)     | 0,141                    |
| Beton sprężony                         | 0,035                    |
| Beton częściowo sprężony               | 0,063                    |
| Konstrukcja zespolona                  | 0,017                    |
| Drewno                                 | 0,079                    |
| Stal                                   | 0,010                    |

### 2.1.2. Tłumienie konstrukcyjne drgań

Tłumienie konstrukcyjne drgań można podzielić na cztery grupy:

- Tarcie na styku elementów połączonych różnego rodzaju łącznikami;
- Tarcie w połączeniach ruchomych;
- Tarcie w luzach, pęknięciach, szczelinach, rysach itp.;
- Dyssypacja energii w tzw. elementach niekonstrukcyjnych, kontaktujących się z elementami konstrukcyjnymi i deformującymi się wraz z nimi podczas drgań.

W przypadku elementów połączonych różnymi łącznikami, w wyniku sprężystych odkształceń dochodzi do poślizgu na stykających się powierzchniach. Opis tego zjawiska opiera się na dość prostych modelach, jak tłumienie wiskotyczne lub model tarcia Coulomba.

Na styku połączeń ruchomych mamy do czynienia ze zjawiskiem tarcia. Jeśli nie ma smarowania wówczas jest to tarcie suche, jeśli występuje duże smarowanie wówczas jest to tłumienie wiskotyczne.

Dyssypacja energii podczas drgań występuje także w wyniku tarcia powierzchni stykających się w różnego rodzaju luzach, pęknięciach, szczelinach, rysach.

Tłumienie konstrukcyjne drgań ma duży wpływ na redukcję drgań i jest znacznie większe niż tłumienie materiałowe drgań.

### 2.1.3. Tłumienie zewnętrzne drgań

Tłumienie zewnętrzne drgań to zewnętrzne opory ruchu takie jak:

- Opory aerodynamiczne;
- Przekazywanie części energii drgającego układu na podłoże gruntowe (propagacja fal w podłożu gruntowym);
- Tarcie między fundamentem a podłożem gruntowym.

Tłumienie aerodynamiczne drgań jest stosunkowo małe w porównaniu do konstrukcyjnego i zazwyczaj jest pomijalne w obliczeniach dynamicznych budowli.

Poniżej w tab. 2.2. zestawiono przykładowe wartości pokazujące poziom tłumienia całkowitego drgań z zaznaczeniem udziału poszczególnych rodzajów tłumienia, wyrażone w  $\delta$ . Wartości dotyczą sprężonego betonowego komina (wysokość 120 m, średnica 8m, fundament-płyta żelbetowej, grunt-żwir, wewnętrzna wykładzina murowana, wymuszenie drgań-wiatr).

**Tab. 2.2.** Przykładowe wielkości tłumienia drgań z podziałem na rodzaje (Bachmann i inni, 1991)

| Tłumienie              |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| Materiałowe            | Konstrukcyjne          | Zewnętrzne (od gruntu) |
| $\delta_1=0.025$ (52%) | $\delta_2=0.015$ (31%) | $\delta_3=0.008$ (17%) |

## 2.2. Wielkości opisujące wartości tłumienia drgań

W literaturze występują różne miary tłumienia drgań. Są to między innymi:

- Logarytmiczny dekrement tłumienia (wielkość bezwymiarowa):

$$\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T')} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.2)$$

gdzie:  $q(t)$  i  $q(t+T')$  – dwie kolejne maksymalne amplitudy drgań (tego samego znaku).

W obliczeniach częściej wykorzystuje się średnią wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia dla  $n$  kolejnych okresów drgań. W takim przypadku wzór przyjmuje postać:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{q(t)}{q(t+nT')} \quad (2.3)$$

- Liczba tłumienia, ułamek, procent tłumienia krytycznego, stopień tłumienia (wyrażony w procentach):

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (2.4)$$

- Bezwymiarowy współczynnik tłumienia drgań:

$$\gamma = 2\xi \quad (2.5)$$

- Współczynnik pochłaniania (tłumienia właściwego):

$$\psi = 2\delta \quad (2.6)$$

- Współczynnik tłumienia drgań (jednostka 1/s):

$$\beta = \frac{\delta}{T} \quad (2.7)$$

gdzie: T-okres drgań,

### 2.3. Modele tłumienia drgań (Flaga, 1979; Osiński, 1980; Rakowski i inni, 1992)

Ogólnie, macierzowe równanie ruchu ma postać:

$$M\ddot{X} + KX = P(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) + T(X, \dot{X}, \dot{X}^2) \quad (2.8)$$

Siły tłumienia drgań w powyższym równaniu, przedstawione mogą być na różne sposoby w zależności od rodzaju uwzględnianego tłumienia. Są to między innymi: liniowe tłumienie wiskotyczne, tłumienie Coulomba, tłumienie aerodynamiczne. Poniżej przedstawiono omawiane modele tłumienia.

#### 2.3.1. Liniowe tłumienie wiskotyczne $T(\dot{X}) = -C\dot{X}$ dzielimy na trzy rodzaje:

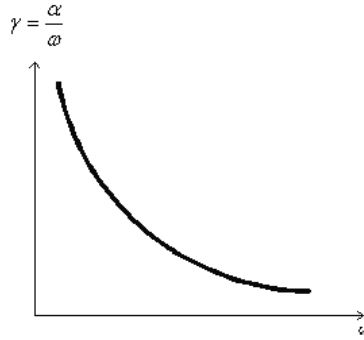
- a) Masowe (współczynniki tłumienia są proporcjonalne do pędu masy)

$$C = \alpha M \quad (2.9)$$

gdzie:  $\alpha$  - parametr tłumienia masowego, M-macierz mas

Zgodnie z tym założeniem otrzymamy bezwymiarowy współczynnik tłumienia drgań wynoszący (dla jednego stopnia swobody):

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{km}} = \frac{\alpha m}{\sqrt{km}} = \frac{\alpha}{\omega} \quad (2.10)$$



**Rys. 2.3.** Wykres współczynnika bezwymiarowego  $\gamma$  dla wiskotycznego masowego wariantu tłumienia drgań.

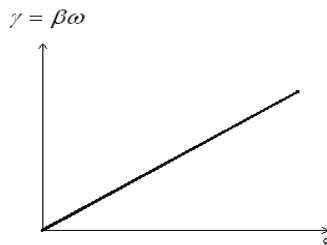
- b) Sztywnościowe (współczynniki tłumienia drgań są proporcjonalne do prędkości reakcji sprężystych)

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K} \quad (2.11)$$

gdzie:  $\beta$  -wymiarowy parametr tłumienia materiałowego drgań,  $\mathbf{K}$ -macierz sztywności.

Przy tak założonym modelu tłumienia, otrzymamy bezwymiarowy współczynnik tłumienia drgań wynoszący (dla jednego stopnia swobody):

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{km}} = \frac{\beta k}{\sqrt{km}} = \beta \omega \quad (2.12)$$



**Rys. 2.4.** Wykres współczynnika bezwymiarowego drgań  $\gamma$  dla wiskotycznego sztywnościowego wariantu tłumienia.

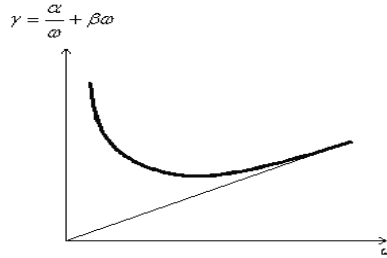
- c) Masowo-sztywnościowe (opory są proporcjonalne do pędu masy i do prędkości reakcji sprężystych)

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$



Zgodnie z tym założeniem otrzymamy bezwymiarowy współczynnik tłumienia drgań, który dla jednego stopnia swobody można wyrazić wzorem:

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{km}} = \frac{\alpha m + \beta k}{\sqrt{km}} = \frac{\alpha}{\omega} + \beta \omega \quad (2.13)$$



Rys. 2.5. Wykres współczynnika bezwymiarowego  $\gamma$  dla wiskotycznego masowo-sztywnościowego wariantu tłumienia drgań.

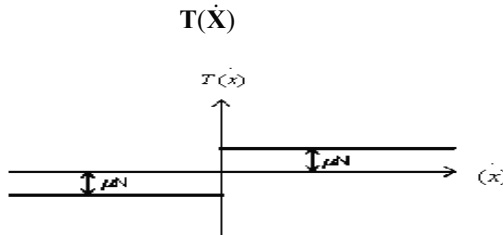
### 2.3.2. Tłumienie Coulomba (tłumienie przy tarcia suchym):

$$\mathbf{T}(\dot{\mathbf{X}}) = -\mu N \text{sign} \dot{\mathbf{X}} \quad (2.14)$$

gdzie: T jest wartością stałą dodatnią zależną od przemieszczenia, zaś

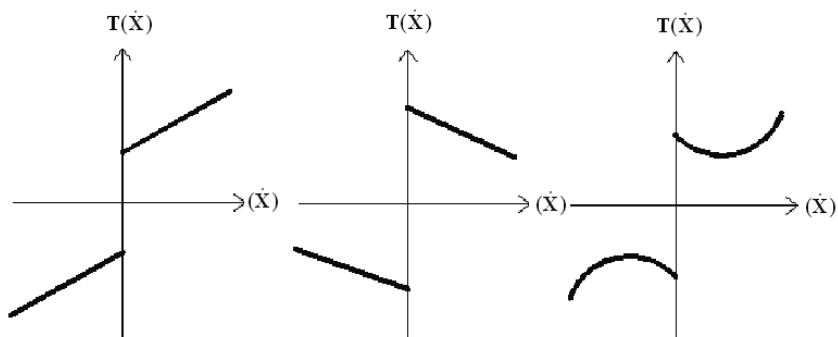
$$\text{sign} \dot{\mathbf{X}} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \dot{\mathbf{X}} > 0 \\ -1 & \text{dla } \dot{\mathbf{X}} < 0 \end{cases}$$

$\mu$  -współczynnik tarcia, N-siła nacisku



Rys. 2.6. Wykres tłumienia Coulomba.

Przy ruchu względnym ciała drgającego w środowisku cieczy lub gazu, opór może być nieliniową funkcją prędkości zależną od wyższych potęg prędkości, szczególnie przy większych prędkościach drgań.



Rys. 2.7. Spotykane charakterystyki oporów.

### 2.3.3. Tłumienie aerodynamiczne (opór aerodynamiczny):

a) Bez uwzględniania ruchu powietrza, wyraża się wzorem:

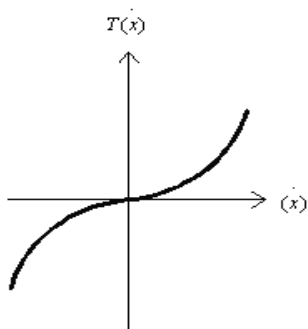
$$\mathbf{T}(\dot{\mathbf{X}}) = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{X}}^2 \text{sign } \dot{\mathbf{X}} \quad (2.15)$$

gdzie:  $\dot{\mathbf{X}}$  -wektor prędkości węzłów konstrukcji

b) Uwzględniając ruch powietrza otrzymujemy wzór określający tłumienie aerodynamiczne (opór aerodynamiczny):

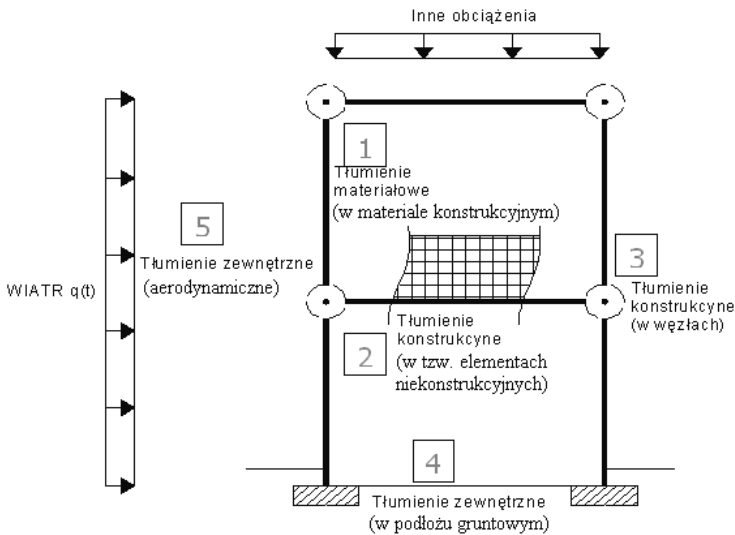
$$\mathbf{T}(\dot{\mathbf{X}}) = -\mathbf{D}(\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{V})^2 \text{sign}(\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{V}) \quad (2.16)$$

gdzie:  $\mathbf{V}$  -wektor prędkości wiatru



Rys. 2.8. Wykres tłumienia aerodynamicznego.

Poniżej pokazana jest rama (rys. 2.9), na przykładzie której przedstawiono różne rodzaje tłumienia występujące w poszczególnych punktach i fragmentach konstrukcji. Następnie w tab. 2.3 zestawiono równania ruchu i matematyczne modele tłumienia odpowiadające różnym punktom i fragmentom konstrukcji.



Rys. 2.9. Rama pokazująca modele tłumienia.

Tab. 2.3 Schemat rama z równaniami ruchu i modelami tłumienia

| Nr | Równanie ruchu  | Modele tłumienia  |
|----|---|---|
| 1  | $M\ddot{X} + KX = P(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) + T_1(\dot{X})$                                  | $T_1 = -(\alpha M + \beta K) \dot{X}$ (2.17)                                    |
| 2  | $M\ddot{X} + KX = P(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) + T_1(\dot{X}) + T_2(X, \dot{X})$                | $T_2 = -\mu_2 N_2 \text{sign} \dot{X}$ (2.18)                                   |
| 3  | $M\ddot{X} + KX = P(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) + T_1(\dot{X}) + T_3(\dot{X}, X) + T_4(\dot{X})$ | $T_4 = -\varepsilon \dot{X}$ ,<br>$T_3 = -\mu_3 N_3 \text{sign} \dot{X}$ (2.19) |
| 4  | $M\ddot{X} + KX = P(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) + T_1(\dot{X}) + T_5(X, \dot{X})$                | $T_5 = -\mu_5 N_5 \text{sign} \dot{X}$ (2.20)                                   |
| 5  | $M\ddot{X} + KX = P(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) + T_1(\dot{X}) + T_5(\dot{X}^2)$                 | $T_5 = -d \dot{X}^2 \text{sign} \dot{X}$ (2.21)                                 |

Uwzględnienie wszystkich mechanizmów tłumienia drgań, czyli zastosowanie różnych modeli, w których brano by pod uwagę różne rodzaje tłumienia w badanej konstrukcji, jest bardzo trudne, dlatego stosuje się metody, które określają jeden lub kilka ekwiwalentnych współczynników tłumienia drgań dla całej konstrukcji.

## 2.4. Metody określające wartości parametrów tłumienia drgań:

W literaturze przedstawione są różne metody określające wartości parametrów tłumienia drgań. Są wśród nich metody teoretyczne (np. metody energetyczne) oraz metody określające tłumienie drgań na podstawie analizy wyników badań (filtracyjno-regresyjna, kolokacyjna, na podstawie transmitancji odpowiedzi konstrukcji, oparta na funkcji autokorelacji odpowiedzi budowli). Poniżej zostaną omówione niektóre z tych metod.

### 2.4.1. Metoda energetyczna (Yamaguchi, Ito , 1995)

Model ten został opisany przez Yamaguchi i Ito, gdzie jest zastosowany do wyznaczania logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań budowli, składającej się z różnych elementów konstrukcyjnych (np.: pomost, słupy i cięgna w mostach). Logarytmiczny dekrement tłumienia drgań  $\delta_i$  określany jest dla  $i$ -tej postaci drgań, tak jak dla układu o jednym stopniu swobody według wzoru:

$$\delta_i = \frac{D_i}{4\pi U_i} \quad (2.22)$$

gdzie:  $D_i$  - dyssypowana energia  $i$ -tej postaci drgań (utrata energii w czasie jednego cyklu);  $U_i$  - całkowita energia potencjalna  $i$ -tej postaci (w maksymalnym wychyleniu).

W sytuacji, gdy budowla złożona jest z kilku głównych elementów konstrukcyjnych o różnych wartościach dyssypowanych energii lub jednego elementu, ale złożonego z kilku materiałów, energia dyssypowana i całkowita energia potencjalna zapisane mogą być w następujący sposób:

$$D_i = \sum_{j=1}^n D_j, \quad U_i = \sum_{j=1}^n U_j \quad (2.23)$$

gdzie:  $D_{ij}$  – udział energii dyssypowanej  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmencie konstrukcji) przy  $i$ -tej postaci drgań;  $U_{ij}$  - udział energii potencjalnej  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmencie konstrukcji) przy  $i$ -tej formie drgań.

Energia potencjalna  $U_{ij}$  składa się z energii odkształceń  $V_{ij}$  w zakresie małych przemieszczeń i energii wynikającej ze wstępnego napięcia  $U_{ij}^0$  lub dużych przemieszczeń (w zakresie mechaniki nieliniowej).

$$U_{ij} = V_{ij} + U_{ij}^0 \quad (2.24)$$

Dyssypowana energia pojedynczego materiału (lub fragmentu konstrukcji) może być przedstawiona następująco:

$$D_{ij} = 2\pi\psi_j V_{ij} \quad (2.25)$$

gdzie:  $\psi_j$  - współczynnik pochłaniania (tłumienia właściwego) dla danego materiału.

Ostatecznie wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań w odniesieniu do  $i$ -tej postaci drgań, po uwzględnieniu zależności (2.22-2.25) wynosi:

$$\delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \psi_j \frac{V_j}{U_i} \quad (2.26)$$

Energia odkształcenia  $V_{ij}$  jest wyznaczona ze wzoru:

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{K}_j \mathbf{\Phi}_i \quad (2.27)$$

gdzie:  $\mathbf{\Phi}_i$  - unormowany wektor własny  $i$ -tej postaci drgań;  $\mathbf{K}_j$  - macierz sztywności  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji).

Całkowita energia potencjalna  $U_i$  jest wyznaczana ze wzoru:

$$U_i = \sum_{j=1}^n V_j + U_j^0 \quad (2.28)$$

#### 2.4.2. Zmodyfikowana metoda energetyczna (Szulej J. (2009))

Korzystając z podstawowych założeń metody energetycznej, przedstawionej wyżej, określono wartości tłumienia, opierając się na energii kinetycznej układu. Metoda ta pozwoli na bardziej precyzyjne określenie tłumienia, ponieważ uwzględnione również zostaną inne elementy tzw. niekonstrukcyjne, których sztywność się na ogół pomija. Warstwy te mają znaczną energię kinetyczną i właściwości tłumiące (np. beton asfaltowy w nawierzchni wiaduktu).

Różnica w określeniu współczynnika tłumienia będzie polegała na uwzględnieniu maksymalnej energii kinetycznej  $E_{ij}$ , zamiast maksymalnej energii potencjalnej. Energia kinetyczna może być wyrażona w następującej formie:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_i^T \mathbf{M}_j \mathbf{V}_i \quad (2.29)$$

gdzie:  $\mathbf{M}_j$  - macierz bezwładności  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji),  $\mathbf{V}_i = \varphi_i \boldsymbol{\omega}_i$  - wektor maksymalnych prędkości drgań  $i$ -tej postaci,  $\boldsymbol{\omega}_i$  - częstość kołowe drgań własnych  $i$ -tej postaci.

Ostatecznie energię kinetyczną można przedstawić wzorem:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M}_j \boldsymbol{\Phi}_i \omega_i^2 \quad (2.30)$$

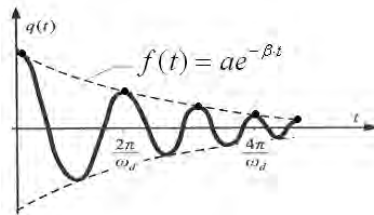
### 2.4.3. Metoda filtracyjno-regresyjna

Określanie wielkości parametru tłumienia drgań metodą filtracyjno-regresyjną wykonuje się na podstawie badań drgań własnych badanego obiektu. Następnie w celu wyodrębnienia częstości kołowych, przeprowadzamy obróbkę widmową przebiegów drgań.

Wyznaczanie parametru opisującego tłumienie polega na wykorzystaniu filtracji przebiegów czasowych, czyli wykorzystuje się filtr wąskopasmowy obejmujący pojedynczą częstotliwość. Dzięki temu uzyskuje się przebiegi czasowe związane z daną postacią drgań. Otrzymane przebiegi czasowe opisuje się odpowiednią krzywą wykładniczą (wzór 2.31). Działania tego typu łatwo przeprowadzić wykorzystując program Catman 4.0, gdzie dopasowanie krzywej określamy metodą najmniejszych kwadratów.

$$f(t) = ae^{-\beta t} \quad (2.31)$$

Na jej podstawie określamy wartość parametru tłumienia drgań (w tym przypadku  $\beta$ ). Rys. 2.10 przedstawia przykładowy przebieg przyspieszeń drgań.



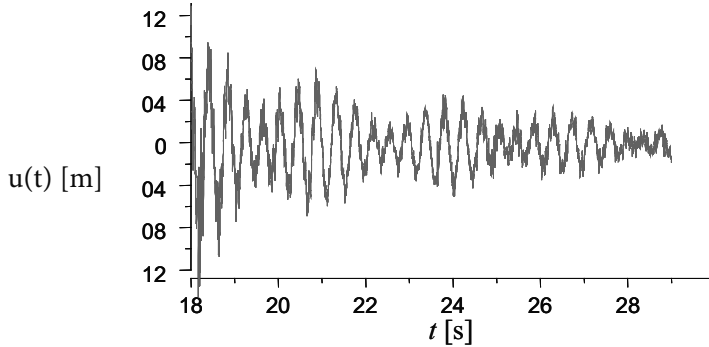
Rys. 2.10. Określanie parametrów drgań metodą wartości szczytowych.

### 2.4.4. Metoda kolokacyjna A. Flagi (Flaga, Michałowski (2000); Michałowski T. (2002); Szulej J. (2009))

#### 2.4.4.1. Stosowanie metody kolokacyjnej wykorzystując przebiegi przemieszczeń drgań

Kolejność czynności przy określaniu parametru tłumienia tą metodą:

1. Pomiary drgań swobodnych tłumionych konstrukcji, stosując czujniki przemieszczeń (również akcelerometry, tensometry, itp.), dzięki którym uzyskuje się przebiegi czasowe przemieszczeń konstrukcji ( $u_i(t)$ ). Przykładowy przebieg drgań przedstawia rys. 2.11.

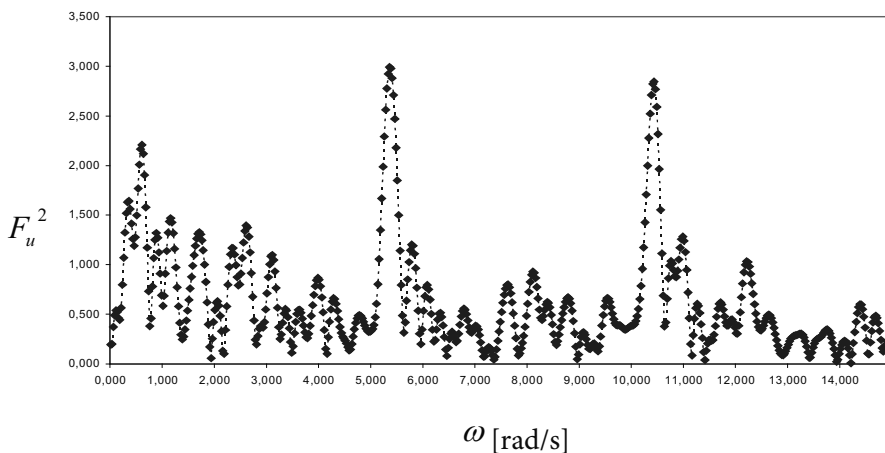


Rys. 2.11. Przykładowy przebieg drgań.

2. Przeprowadzenie analizy spektralnej przebiegów czasowych  $u(t)$  np. za pomocą FFT (szybkiej transformacji Fouriera), dzięki którym uzyskujemy częstotliwości kołowe drgań własnych odpowiadające lokalnym ekstremom tej funkcji. Tak otrzymaną funkcję sprowadzamy do postaci kwadratu modułu transformaty:

$$F_u^2 = |FFT\{u(t)\}|^2 \quad (2.32)$$

Przykładowy wykres kwadratu modułu transformaty przedstawia rys. 2.12.



Rys. 2.12. Przykładowy kwadrat modułu transformaty przebiegu drgań.

3. Przyjęcie założenia, że drgania badanej konstrukcji są sumą tłumionych drgań harmoniczných o różnych częstotliwościach (tłumienie opisano zastępczym modelem wiskotycznym).

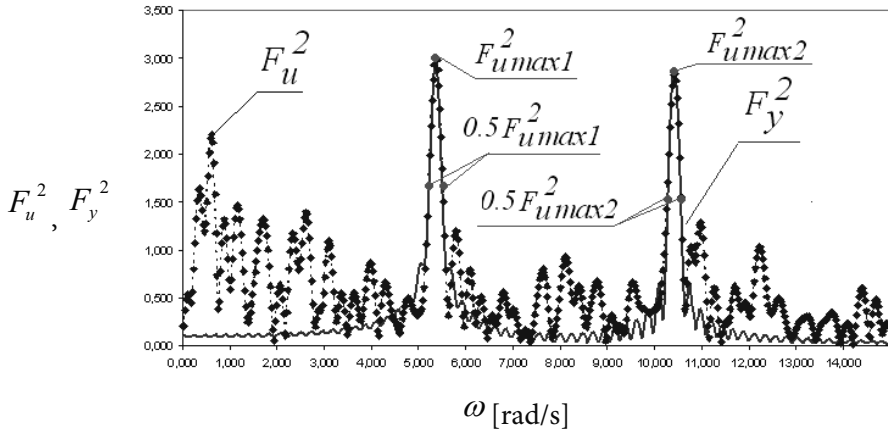
$$y(t) = \sum_i \{A_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i^* t) + B_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i^* t)\} \quad (2.33)$$

$$(\omega_i^*)^2 = (\omega_i)^2 - (\beta_i)^2 \quad (2.34)$$

4. Aproxymacja przebiegu funkcji  $F_u^2$  funkcją  $F_y^2$ , opisaną poniższą zależnością

$$F_y^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} dt \right)^2 \quad (2.35)$$

Aproxymując przyjęto założenia, że punkty charakterystyczne to ekstrema modułów  $F_u^2$  oraz punkty leżące na 0,5 wysokości tych ekstremów (rys.2.13).



Rys. 2.13 Funkcja aproxymująca  $F_y^2$  i charakterystyczne punkty metody.

5. Wyznaczenie następujących parametrów:  $A_i$ ,  $\beta_i$ ,  $B_i$

Oznaczenia:

$A_i$ ,  $B_i$  – amplitudy,  $\beta_i$  – parametr tłumienia,  $\omega_{gi}$  – częstotności kołowe drgań własnych,  $\omega_i^*$  – częstotność kołowe drgań tłumionych.



Przykładowo biorąc pod uwagę powyższe zależności otrzymuje się układ równań nieliniowych na wyznaczenie parametrów  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\beta_i$ . Rozpatrując widmo z trzema wartościami szczytowymi, uzyskuje się układ dziewięciu nieliniowych równań z dziewięcioma niewiadomymi o postaci:

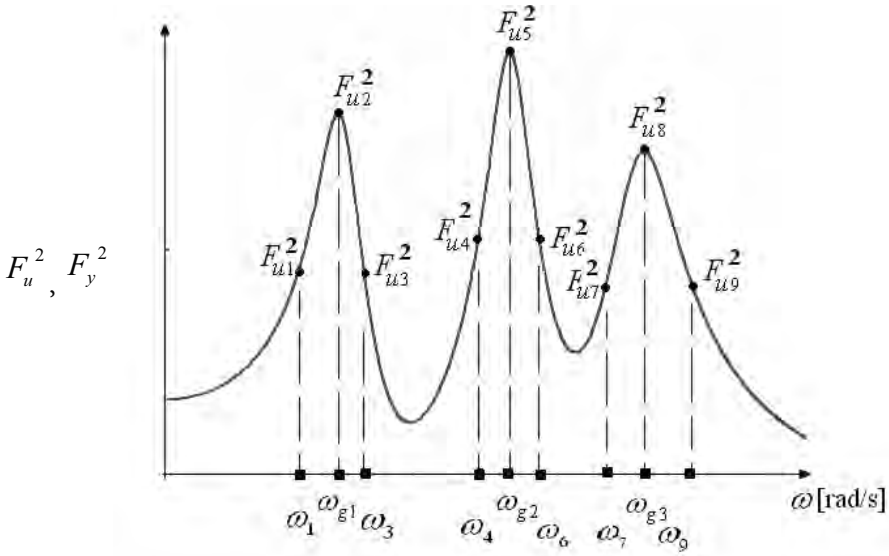
$$\left( \begin{array}{l} \left( \frac{\beta_1^2 \cdot B_1 \cdot 2 \cdot \omega_i + \omega_i \cdot B_1 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g1}^2) + 2 \cdot \beta_1 \cdot \omega_i \cdot A_1 \cdot \sqrt{\omega_{g1}^2 - \beta_1^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_1^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g1}^2 + \omega_{g1}^4)}} \right) \cdot j + \\ \frac{\beta_1 \cdot B_1 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g1}^2) + \omega_i^2 \cdot A_1 \cdot \sqrt{\omega_{g1}^2 - \beta_1^2} - \omega_{g1}^2 \cdot A_1 \cdot \sqrt{\omega_{g1}^2 - \beta_1^2} - \omega_i^2 \cdot 2 \cdot \beta_1 \cdot B_1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_1^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g1}^2 + \omega_{g1}^4)}} \end{array} \right) + \\ \left( \begin{array}{l} \left( \frac{\beta_2^2 \cdot B_2 \cdot 2 \cdot \omega_i + \omega_i \cdot B_2 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g2}^2) + 2 \cdot \beta_2 \cdot \omega_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{\omega_{g2}^2 - \beta_2^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_2^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g2}^2 + \omega_{g2}^4)}} \right) \cdot j + \\ \frac{\beta_2 \cdot B_2 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g2}^2) + \omega_i^2 \cdot A_2 \cdot \sqrt{\omega_{g2}^2 - \beta_2^2} - \omega_{g2}^2 \cdot A_2 \cdot \sqrt{\omega_{g2}^2 - \beta_2^2} - \omega_i^2 \cdot 2 \cdot \beta_2 \cdot B_2}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_2^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g2}^2 + \omega_{g2}^4)}} \end{array} \right) + \\ \left( \begin{array}{l} \left( \frac{\beta_3^2 \cdot B_3 \cdot 2 \cdot \omega_i + \omega_i \cdot B_3 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g3}^2) + 2 \cdot \beta_3 \cdot \omega_i \cdot A_3 \cdot \sqrt{\omega_{g3}^2 - \beta_3^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_3^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g3}^2 + \omega_{g3}^4)}} \right) \cdot j + \\ \frac{\beta_3 \cdot B_3 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g3}^2) + \omega_i^2 \cdot A_3 \cdot \sqrt{\omega_{g3}^2 - \beta_3^2} - \omega_{g3}^2 \cdot A_3 \cdot \sqrt{\omega_{g3}^2 - \beta_3^2} - \omega_i^2 \cdot 2 \cdot \beta_3 \cdot B_3}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_3^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g3}^2 + \omega_{g3}^4)}} \end{array} \right) \Bigg| = F_u^2 \quad (2.36)$$

gdzie:  $i = 1 \dots 9$ , zaś  $\omega_{g1} = \omega_2$ ,  $\omega_{g2} = \omega_5$ ,  $\omega_{g3} = \omega_8$  - częstotliwości rezonansowe,  $j$ -jednostka urojona liczby zespolonej.

Jak wynika z powyższych zależności w kolejnych równaniach zmienne  $\omega_i$  i  $F_u^2$  przyjmują następujące wartości zestawione w tab. 2.4. Graficzne zobrazowanie punktów charakterystycznych pokazuje rys. 2.14.

**Tab. 2.4.** Wartości zmiennych  $\omega_i$  i  $F_u^2$  w układzie składającym się z dziewięciu równań nieliniowych.

| Nr równ.   | 1                   | 2                | 3                   | 4                   | 5                | 6                   | 7                   | 8                | 9                   |
|------------|---------------------|------------------|---------------------|---------------------|------------------|---------------------|---------------------|------------------|---------------------|
| $\omega_i$ | $\omega_1$          | $\omega_2$       | $\omega_3$          | $\omega_4$          | $\omega_5$       | $\omega_6$          | $\omega_7$          | $\omega_8$       | $\omega_9$          |
| $F_u^2$    | $0.5F_{u \max 1}^2$ | $F_{u \max 1}^2$ | $0.5F_{u \max 1}^2$ | $0.5F_{u \max 2}^2$ | $F_{u \max 2}^2$ | $0.5F_{u \max 2}^2$ | $0.5F_{u \max 3}^2$ | $F_{u \max 3}^2$ | $0.5F_{u \max 3}^2$ |



Rys. 2.14 Wartości  $\omega_i$  i  $F_u^2$  w przypadku trzech ekstremów.

Układ równań nieliniowych rozwiązywano wykorzystując program Mathcad 11. Zawarte są w nim trzy metody rozwiązywania równań nieliniowych, są to: metoda gradientów sprzężonych, Levenberga-Marquardta i Quasi-Newtona.

#### 2.4.4.2 Stosowanie metody kolokacyjnej wykorzystując przebiegi przyspieszeń drgań

W tym celu dwukrotnie różniczkujemy zależność 2.33., opisującą przemieszczenia drgań. Po tym zabiegu otrzymujemy zależność na przyspieszenie drgań (2.37).

$$\frac{d(y(t))^2}{dt^2} = \sum_i^n [(A_i^p \cdot e^{-\beta_i^p \cdot t} \cdot \sin(\omega_i^* \cdot t)) + (B_i^p \cdot e^{-\beta_i^p \cdot t} \cdot \cos(\omega_i^* \cdot t))] \quad (2.37)$$

gdzie:

$$A_i^p = A_i \cdot \beta_i^2 - A_i \cdot \omega_i^2 + 2 \cdot B_i \cdot \beta_i \cdot \omega_i, \quad B_i^p = B_i \cdot \beta_i^2 - B_i \cdot \omega_i^2 + 2 \cdot A_i \cdot \beta_i \cdot \omega_i, \\ \beta_i^p = \beta_i \quad (2.38)$$

Czyli uwzględniając przyspieszenia drgań i postępując analogicznie jak w wypadku uwzględniania przemieszczeń drgań, otrzymujemy dokładnie taką samą wartość parametru tłumienia  $\beta_i$ , jedynie amplitudy  $A_i$  i  $B_i$  doznają wzmocnienia, gdy  $\omega_i > 1$  lub osłabienia, gdy  $\omega_i < 1$ .

### 2.4.4.3 Stosowanie metody kolokacyjnej wykorzystując przebiegi odkształceń konstrukcji

W podejściu tym wykorzystujemy zależności między odkształceniem  $\varepsilon(t)$  i przemieszczeniem  $y(t)$ . Wówczas odkształcenie przyjmuje postać wzoru (2.39).

$$\varepsilon(t) = k \cdot y(t) = \sum_i \{ A_i^\varepsilon e^{-\beta_i^\varepsilon t} \sin(\omega_i^* t) + B_i^\varepsilon e^{-\beta_i^\varepsilon t} \cos(\omega_i^* t) \} \quad (2.39)$$

gdzie:  $A_i^\varepsilon = k \cdot A_i$ ,  $B_i^\varepsilon = k \cdot B_i$ ,  $\beta_i^\varepsilon = \beta_i$ . (2.40)

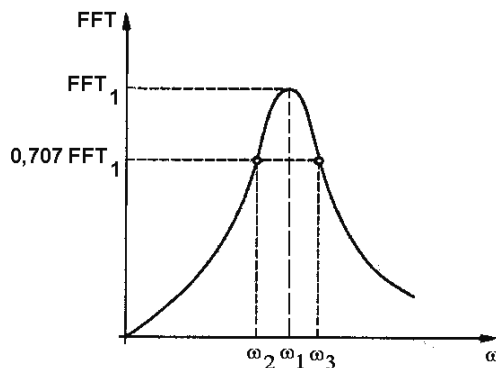
Z powyższych relacji wynika, że przeprowadzając pomiary odkształceń konstrukcji otrzymuje się w bezpośredni sposób wartości amplitud  $A_i$ ,  $B_i$  oraz parametru tłumienia  $\beta_i$ .

### 2.4.5. Metoda „half-power bandwidth” (Bachmann i inni, 1991)

Współczynnik tłumienia i-tej postaci drgań otrzymujemy wykorzystując analizę widmową przebiegu czasowego drgań. Polega to na odczytaniu wartości trzech częstości kołowych, którym odpowiadają trzy punkty charakterystyczne (ekstremum funkcji i punkty leżące na wysokości 0,707 ekstremum). Przykład transformaty Fouriera z określonymi punktami charakterystycznymi pokazuje rys. 2.15. Metoda ta może być zastosowana dla układów o jednym stopniu swobody lub układów o wyraźnie rozseparowanych częstotliwościach.

Wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia otrzymujemy na podstawie następującej zależności:

$$\delta = \pi \cdot \left( \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_1} \right) \quad (2.41)$$



Rys. 2.15 Wykres transformaty Fouriera z pokazaniem punktów charakterystycznych metody „half-power bandwidth”.

## 2.4.6. Metoda oparta na transmitancji (funkcji przejścia) odpowiedzi konstrukcji (Flaga, Kawecki, Kucwaj, 1979)

Transmitancja mechaniczna wyznaczana jest poprzez modyfikację podstawowego macierzowego równania ruchu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{p} \quad (2.42)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  – odpowiednio diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności;  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$ ,  $\ddot{\mathbf{y}}$  – wektor przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń;  $\mathbf{p}$  – wektor obciążeń.

Rozwiązanie macierzowego równania ruchu można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(\tau)\mathbf{p}(t-\tau)d\tau \quad (2.43)$$

gdzie:  $\mathbf{h}(\tau)$ -macierz odpowiedzi impulsowych;

Wektor  $h_k(\tau)$  to wektor odpowiedzi układu na wymuszenia typu  $\mathbf{p} = [0, 0 \dots 0, \delta_k(\tau), 0 \dots 0]^T$ ;

gdzie  $\delta_k(\tau)$  -delta Diraca.

Transmitancja mechaniczna jest macierzą  $H(f)$ , której element  $H_{ik}(f)$  jest transformacją Fouriera odpowiedzi impulsowej  $h_{ik}(t)$ :

$$H_{ik}(f) = \int_0^{\infty} h_{ik}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.44)$$

Po wykonaniu transformacji Fouriera na równaniu ruchu (2.42), przy wymuszeniu impulsowym w punkcie  $k$   $\delta_k(\tau)$  otrzymamy:

$$(\mathbf{K} - 4\pi^2 f^2 \mathbf{M} + j2\pi f \mathbf{C})\mathbf{H}_k = \mathbf{1}_k \quad (2.45)$$

W ogólności  $H_{ik}$  jest wielkością zespoloną i może być przedstawiona w postaci:

$$H_{ik} = |H_{ik}|e^{j\Theta_{ik}} = \text{Re } H_{ik} + j \text{Im } H_{ik} \quad (2.46)$$

$$|H_{ik}| = \sqrt{(\text{Re } H_{ik})^2 + (\text{Im } H_{ik})^2}; \arg H_{ik} = \Theta_{ik} = \arctg \frac{\text{Re } H_{ik}}{\text{Im } H_{ik}} \quad (2.47)$$

gdzie:  $|H_{ik}|$ ,  $\Theta_{ik}$  – odpowiednio moduł transmitancji i argument transmitancji.

Jeżeli przyjmiemy oznaczenie (2.47) uzyskujemy równanie:

$$\operatorname{Re} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k - \operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Im} \mathbf{H}_k + j [\operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k + \operatorname{Re} \mathbf{G} \operatorname{Im} \mathbf{H}_k] = \mathbf{1}_k \quad (2.48)$$

Realizując wymuszenia jednostkowymi impulsami kolejno we wszystkich wejściach  $k$  uzyskujemy pełną macierz transmitancji  $\mathbf{H}(f)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k &= \left\{ \operatorname{Re} \mathbf{G} + \operatorname{Im} \mathbf{G} [\operatorname{Re} \mathbf{G}]^{-1} \operatorname{Im} \mathbf{G} \right\}^{-1} \mathbf{1}_k \\ \operatorname{Im} \mathbf{H}_k &= [\operatorname{Re} \mathbf{G}]^{-1} \operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k \end{aligned} \quad (2.49)$$

Po dokonaniu transformacji Fouriera na równaniu (2.43) otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{Y}(f) = \mathbf{H}(f) \mathbf{P}(f) = F[\mathbf{y}(t)] \quad (2.50)$$

gdzie:  $\mathbf{Y}(f)$ ,  $\mathbf{P}(f)$  są transformatami Fouriera odpowiedzi konstrukcji oraz przyłożonego obciążenia, zaś  $\mathbf{H}(f)$  to transmitancja mechaniczna (wzmocnienie układu).

Znając macierz transmitancji  $\mathbf{H}(f)$  oraz transformatę  $\mathbf{P}(f)$ , w prosty sposób możemy określić odpowiedź układu poprzez wyznaczenie odwrotnej transformaty Fouriera:

$$\mathbf{y}(t) = F^{-1}[\mathbf{Y}(f)] = F^{-1} \mathbf{H}(f) \mathbf{P}(f) \quad (2.51)$$

Porównując transmitancje mechaniczne pomierzone i prognozowane jak wyżej można wyznaczać parametry tłumienia drgań stosując np. metodę kolokacyjną.

### 3. Przykładowe zestawienia logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla materiałów, elementów konstrukcji i obiektów budowlanych

Rozdział jest podzielony na trzy podpunkty i prezentuje wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań  $\delta$  dla wybranych materiałów, elementów konstrukcji i budowli.

#### 3.1. Wartości tłumienia wybranych materiałów

Orientacyjne wartości tłumienia materiałowego, wyrażone w logarytmicznym dekremencie tłumienia  $\delta$ , przedstawiono w tab. 3.1. Parametr tłumienia określano wymuszając drgania giętne.

Tab. 3.1. Wartości tłumienia materiałowego przy drganiach giętych (Dyląg i inni, 1997)

| Materiał                    | Wartość $\delta$ |            |         |
|-----------------------------|------------------|------------|---------|
|                             | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Stal                        | 0,005            | 0,015      | 0,010   |
| Żeliwo                      | -                | -          | 0,115   |
| Miedź                       | -                | -          | 0,165   |
| Aluminium                   | 0,015            | 0,02       | 0,018   |
| Sosna                       | 0,035            | 0,05       | 0,042   |
| Buk                         | 0,035            | 0,07       | 0,052   |
| Dąb                         | -                | -          | 0,110   |
| Guma                        | 0,1              | 0,6        | -       |
| Korek naturalny             | -                | -          | 0,019   |
| Szkło                       | 0,006            | 0,011      | 0,009   |
| Beton                       | -                | -          | ok. 0,3 |
| Grunt budowlany (ściskanie) | 0,35             | 0,65       | 0,500   |

Wartości tłumienia materiałowego, wyrażone w logarytmicznym dekremencie tłumienia drgań  $\delta$ , dla ośmiu głównych materiałów przedstawia tab. 3.2.

**Tab. 3.2.** Wartości tłumienia materiałowego (Bachmann, 1991)

| Materiał                              | Wartość $\delta$ |            |         |
|---------------------------------------|------------------|------------|---------|
|                                       | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Żelbet słabo wyteżony (niezarysowany) | 0,045            | 0,063      | 0,054   |
| Żelbet średnio wyteżony (zarysowany)  | 0,063            | 0,250      | 0,157   |
| Żelbet mocno wyteżony (zarysowany)    | 0,031            | 0,250      | 0,141   |
| Beton sprężony                        | 0,025            | 0,045      | 0,035   |
| Beton częściowo sprężony              | 0,050            | 0,075      | 0,063   |
| Konstrukcja zespolona                 | 0,013            | 0,020      | 0,017   |
| Drewno                                | 0,063            | 0,094      | 0,079   |
| Stal                                  | 0,006            | 0,013      | 0,010   |

### 3.2. Wartości tłumienia elementów konstrukcji

Przykładowe wartości  $\delta$  dla elementów konstrukcyjnych, przy drganiach giętych zostały przedstawione w tab. 3.3.

**Tab. 3.3.** Wartości tłumienia drgań elementów konstrukcji (Dyłał i inni, 1997)

| Elementy konstrukcji  | Wartość $\delta$ |            |         |
|---|------------------|------------|---------|
|   | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Żelbetowe stropy  | 0,16             | 0,39       | 0,27    |
| Żelbetowe stropy w budownictwie wielkopłytowym przed powiązaniem z całością konstrukcji | 0,10             | 0,12       | 0,11    |
| Żelbetowe stropy po powiązaniem z całością konstrukcji                                  | 0,22             | 0,3        | 0,26    |
| Żelbetowe sklepienia odcinkowe na belkach stalowych                                     | 0,18             | 0,5        | 0,34    |
| Ceglane sklepienia odcinkowe na belkach stalowych                                       | 0,23             | 0,45       | 0,35    |
| Żelbetowe belki podsuwnicowe przed wykonaniem (umolitycznieniem) styków                 | 0,12             | 0,2        | 0,16    |
| Żelbetowe belki podsuwnicowe po wykonaniu styków  | 0,19             | 0,28       | 0,23    |
| Żelbetowe belki   | 0,17             | 0,39       | 0,28    |
| Żelbetowe ramy  | 0,08             | 0,22       | 0,15    |
| Drewniane belki klejone   | -                | -          | 0,06    |
| Drewniane belki ze ścianką na rąb (gwoździowane)  | 0,085            | 0,205      | 0,15    |
| Drewniane stropy na belkach skrzynkowych, klejonych                                     | 0,115            | 0,215      | 0,165   |
| Drewniane stropy na belkach pełnych   | -                | -          | 0,175   |
| Ceglany mur na zaprawie cementowo-wapiennej   | -                | -          | 0,24    |
| Kamienny mur na zaprawie cementowej   | -                | -          | 0,19    |
| Kamienny mur na zaprawie cementowo-wapiennej  | -                | -          | 0,22    |
| Kamienny mur na zaprawie wapiennej  | -                | -          | 0,33    |

Wartości  $\delta$  dla stropów w różnych fazach budowy, przedstawiono w tab. 3.4, gdzie zestawiono trzy wartości parametru tłumienia ze względu na stan wykończenia stropu.

**Tab. 3.4.** Wartości tłumienia drgań stropów (Bachmann, 1991)

| Elementy konstrukcji                                    | Zalecana wartość $\delta$ |
|---|---------------------------|
| Strop niewykończony                                     | 0,19                      |
| Strop z warstwami podłogowymi, podsufitką, obc. meblami | 0,38                      |
| Strop j.w. obciążony ściankami działowymi               | 0,75                      |

Tab. 3.5 i 3.6 przedstawiają wartości tłumienia drgań stropów jako konstrukcji wsporczych pod maszyny i wartości parametrów tłumienia stropów w salach sportowych i tanecznych.

**Tab. 3.5.** Wartości  $\delta$  dla stropów jako konstrukcji wsporczych pod maszyny (Bachmann, 1991)

| Elementy konstrukcji | Wartość $\delta$ |            |         |
|----------------------|------------------|------------|---------|
|                      | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Strop żelbetowy      | 0,063            | 0,157      | 0,107   |
| Strop sprężony       | 0,044            | 0,126      | 0,082   |
| Strop wielowarstwowy | 0,025            | 0,075      | 0,044   |
| Strop stalowy        | 0,019            | 0,050      | 0,031   |

**Tab. 3.6.** Wartości  $\delta$  dla stropów sal sportowych i tanecznych (Bachmann, 1991)

| Elementy konstrukcji | Wartość $\delta$ |            |         |
|----------------------|------------------|------------|---------|
|                      | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Strop żelbetowy      | 0,088            | 0,220      | 0,160   |
| Strop sprężony       | 0,063            | 0,190      | 0,130   |
| Strop wielowarstwowy | 0,031            | 0,160      | 0,100   |
| Strop stalowy        | 0,038            | 0,130      | 0,075   |

Wartości  $\delta$  dla stropów przestawiono w tab. 3.7, belek i ram w tab. 3.8. Wartości parametrów tłumienia pochodzą z badań.



**Tab. 3.7.** Wartości tłumienia drgań stropów (Bachmann, 1991)

| Elementy konstrukcji     | Wartość $\delta$ |            |           |
|--------------------------|------------------|------------|-----------|
|                          | minimalna        | maksymalna | średnia   |
| Strop żelbetowy, żebrowy | 0,163            | 0,39       | 0,22-0,28 |
| Strop żelbetowy, płytowy | 0,101            | 0,302      | 0,11-0,26 |
| Strop drewniany          | 0,119            | 0,226      | 0,16-0,21 |
| Strop murowany           | 0,05             | 0,32       | 0,15      |

**Tab. 3.8.** Wartości tłumienia drgań belek i ram (Bachmann, 1991)

| Elementy konstrukcji                          | Wartość $\delta$ |            |             |
|---|------------------|------------|-------------|
|   | minimalna        | maksymalna | średnia     |
| Belki i ramy żelbetowe                        | 0,088            | 0,390      | 0,130-0,250 |
| Belki i ramy stalowe                          | 0,031            | 0,120      | 0,038-0,057 |
| Belki i ramy drewniane, zwykła, klejona       | 0,038            | 0,210      | 0,050-0,151 |
| Belki i ramy drewniane, złożone, gwoździowane | 0,088            | 0,210      | 0,151       |

Wartości  $\delta$  przęseł i pylonów mostów wiszących wyrażone za pomocą logarytmicznego dekrementu tłumienia, pokazano w tab. 3.9.

**Tab. 3.9.** Wartości  $\delta$  przęseł i pylonów mostów wiszących (Bachmann, 1991, Blevins, 2001)

| Elementy konstrukcji | Wartość $\delta$ |            |         |
|----------------------|------------------|------------|---------|
|                      | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Przęsło              | 0,013            | 0,528      | 0,075   |
| Pylon                | 0,013            | 0,038      | -       |

Wartości  $\delta$  dla pozostałych elementów konstrukcyjnych zostały pokazane w tab. 3.10.

**Tab. 3.10.** Wartości tłumienia drgań elementów konstrukcyjnych (Bachmann, 1991)

| Elementy konstrukcji              | Wartość $\delta$ |            |             |
|-----------------------------------|------------------|------------|-------------|
|                                   | minimalna        | maksymalna | średnia     |
| Kratownice stalowe                | 0,057            | 0,251      | 0,101-0,151 |
| Stalowe konstrukcje cienkościenne | 0,019            | 0,082      | 0,031-0,050 |
| Elementy sprężone                 | -                | 0,151      | 0,050-0,082 |
| Ściany ceglane                    | 0,101            | 0,320      | 0,201-0,251 |
| Ściany kamienne                   | 0,119            | 0,333      | 0,232       |

### 3.3. Wartości tłumienia konstrukcji budowlanych

Wartości  $\delta$  dla budynków ze względu na wysokość lub liczbę kondygnacji, przedstawia tab. 3.11.

**Tab. 3.11.** Wartości parametrów tłumienia drgań budynków (Bachmann, 1991, Blevins, 2001)

| Liczba kondygnacji lub wysokość budynku | Konstrukcja | Wartość $\delta$ |            |         |
|---|-------------|------------------|------------|---------|
|   |             | minimalna        | maksymalna | średnia |
| 1 ~ 10                                  | stalowa     | 0,025            | 0,377      | 0,163   |
|   | żelbetowa   | 0,031            | 0,779      | 0,170   |
| 10 ~ 20                                 | stalowa     | 0,025            | 1,254      | 0,157   |
|   | żelbetowa   | 0,044            | 0,660      | 0,201   |
| > 20                                    | stalowa     | 0,013            | 0,314      | 0,107   |
|   | żelbetowa   | 0,025            | 0,691      | 0,163   |
| ~ 50m                                   | stalowa     | 0,093            | 0,157      | 0,126   |
|   | żelbetowa   | 0,124            | 0,188      | 0,157   |
| > 100 m                                 | stalowa     | 0,044            | 0,082      | 0,062   |
|   | żelbetowa   | 0,062            | 0,126      | 0,093   |

Wartości  $\delta$  dla budynków, ze względu na użyty materiał i wartość siły wzbudzącej tab. 3.12.

**Tab. 3.12.** Wartości parametrów tłumienia budynków (Blevins, 2001)

| Typ konstrukcji                     | Wartość $\delta$ |            |         |
|-------------------------------------|------------------|------------|---------|
|                                     | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Budynki stalowe, słabe wzbudzenie   | 0,019            | 0,232      | 0,094   |
| Budynki stalowe, silne wzbudzenie   | 0,126            | 0,710      | 0,320   |
| Budynki żelbetowe, słabe wzbudzenie | 0,063            | 0,195      | 0,107   |
| Budynki żelbetowe, silne wzbudzenie | 0,107            | 1,040      | 0,427   |

Blevins i Bachmann zebrali również wartości  $\delta$  dla wież z podziałem ze względu na rodzaj konstrukcji (tab. 3.13).

**Tab. 3.13.** Wartości parametrów tłumienia drgań wież (Bachmann, 1991, Blevins, 2001)

| Typ konstrukcji                | Wartość $\delta$ |            |         |
|--------------------------------|------------------|------------|---------|
|                                | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Wieża żelbetowa, niezarysowana | 0,031            | 0,050      | 0,038   |
| Wieża żelbetowa, zarysowana    | 0,082            | 0,119      | 0,101   |
| Wieża żelbetowa                | 0,063            | 0,119      | 0,088   |
| Wieża stalowa                  | 0,013            | 0,182      | 0,057   |

Wartości  $\delta$  masztów i kominów ze względu na rodzaj konstrukcji, przedstawia tab. 3.14.

**Tab. 3.14.** Wartości tłumienia masztów i kominów (Bachmann, 1991)

| Typ konstrukcji                            | Wartość $\delta$ |            |         |
|--|------------------|------------|---------|
|  | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Masztys wolnostojące, stalowe, spawane     | 0,013            | -          | -       |
| Kominy stalowe, z wykładziną ceramiczną    | 0,044            | 0,628      | -       |
| Kominy stalowe, bez wykładziny ceramicznej | 0,025            | 0,094      | -       |

Zestawiono również wartości  $\delta$  dla kładek ze względu na materiał użyty do ich budowy, tab. 3.15.

**Tab. 3.15.** Wartości tłumienia kładek (Bachmann, 1991)

| Typ konstrukcji       | Wartość $\delta$ |            |         |
|-----------------------|------------------|------------|---------|
|                       | minimalna        | maksymalna | średnia |
| Kładki żelbetowe      | 0,050            | 0,126      | 0,082   |
| Kładki sprężone       | 0,031            | 0,107      | 0,063   |
| Kładki wielowarstwowe | 0,019            | -          | 0,038   |
| Kładki stalowe        | 0,013            | -          | 0,025   |

Wartości logarytmicznych dekrementów tłumienia drgań  $\delta_i$  dla smukłych budowli żelbetowych, z uwzględnieniem podziału na składowe związane z tłumieniem materiałowym ( $\delta_1$ ), składowe związane z tłumieniem konstrukcyjnym ( $\delta_2$ ) i składowe związane z przekazywaniem energii na grunt przez fundament ( $\delta_3$ ), przedstawia tab. 3.16. Całkowity parametr tłumienia  $\delta$  jest sumą trzech składowych parametrów, czyli:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

**Tab. 3.16** Wartości  $\delta_i$  dla smukłych budowli żelbetowych (Bachmann, 1991)

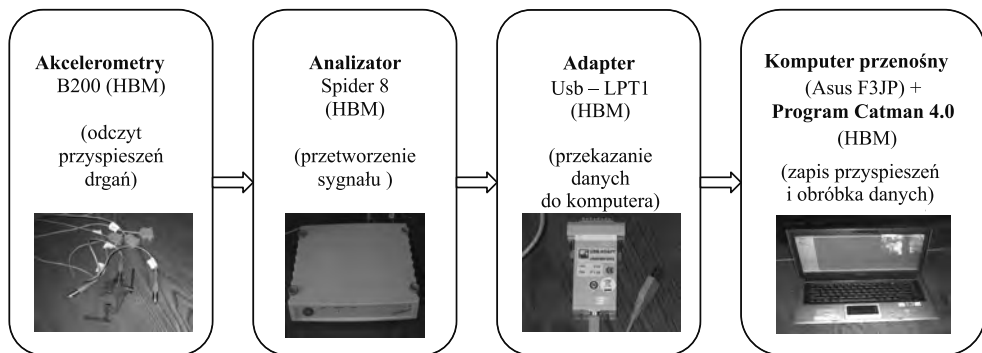
| Rodzaj materiału   |              | Składowa $\delta_1$ związana z tłumieniem materiałowym                         |
|--|--------------|--|
| Żelbet niezarysowany, beton sprężony                     |              | 0,025  |
| Żelbet zarysowany  |              | 0,045  |
| Rodzaj konstrukcji                                       |              | Składowa $\delta_2$ związana z tłumieniem konstrukcyjnym                       |
| Konstrukcja powłokowa lub skrzyniowa bez usztywnień      |              | 0,020  |
| Konstrukcja powłokowa lub skrzyniowa z usztywnieniami    |              | 0,035  |
| Konstrukcja ramowa bez elementów niekonstrukcyjnych      |              | 0,025  |
| Konstrukcja ramowa z elementami niekonstrukcyjnymi       |              | 0,040  |
| Kominy i wieże bez elementów niekonstrukcyjnych          |              | 0,010  |
| Kominy i wieże z elementami niekonstrukcyjnymi           |              | 0,015  |
| Rodzaj podparcia lub posadowienia                        |              | Składowa $\delta_3$ związana z przekazywaniem energii na grunt przez fundament |
| Podpora przegubowa rolkowa                               |              | 0,005  |
| Podpora przegubowa elastomeryczna                        |              | 0,015  |
| Utwardzona konstrukcja ramowa                            |              | 0,010  |
| Konstrukcja zamocowana wspornikowo na podporze stalowej  |              | 0,010  |
| Konstrukcja zamocowana wspornikowo na podporze betonowej |              | 0,005  |
| Konstrukcja zamocowana wspornikowo w podłożu:            | skalistym    | 0,005  |
|  | żwirowym     | 0,008  |
|  | piaszczystym | 0,010  |
|  | na palach    | 0,015  |

## 4. Układ pomiarowy (tor pomiarowy)

Układ pomiarowy zastosowany w badaniach składał się z następujących elementów:

- **Akcelerometrów B200**, firmy HBM, mierzących przyspieszenia w jednym kierunku. Akcelerometry mocowane były do elementów konstrukcji i modeli w miejscach maksymalnych amplitud przyspieszeń, służyło to wyłapaniu możliwie największej liczby postaci drgań. Czujniki mocowane były do prętów wbijanych we wcześniej wywiercone otwory na konstrukcjach przez użycie zacisków imadelkowych.
- **Analizatora analogowo-cyfrowego Spider 8**, firmy HBM. Rejestrowany na czujnikach przyspieszeń sygnał analogowy urządzenie to przetwarza na cyfrowy i przesyła przez adapter do komputera przenośnego. Rejestrator posiada układ ośmiu gniazd pozwalających na jednoczesne podłączenie ośmiu czujników.
- **Adaptera USB-LPT1**, firmy HBM. Urządzenie służy połączeniu rejestratora Spider 8 wyposażonego w gniazdo LPT1 z komputerem przenośnym posiadającym wejście USB.
- **Komputera przenośnego Asus F3JP** z oprogramowaniem **Catman 4.0**. Komputer i oprogramowanie służyło zapisywaniu sygnału z wcześniej określoną częstotliwością. Program Catman 4.0 pozwalał również na obróbkę danych (przeprowadzenie filtracji i transformat Fouriera na uzyskanych przebiegach przyspieszeń). Dane w ten sposób uzyskane były podstawą do obliczeń parametrów tłumienia drgań metodami omówionymi wcześniej.

Schemat pokazany niżej (rys.4.1), przedstawia kolejność używanych urządzeń podczas badań konstrukcji i modeli.



Rys. 4.1. Schemat blokowy toru (układu) pomiarowego.

## 5. Obróbka wyników badań i błędy, jakie mogą się pojawić przy stosowaniu metody kolokacyjnej

### 5.1. Ogólna obróbka wyników badań

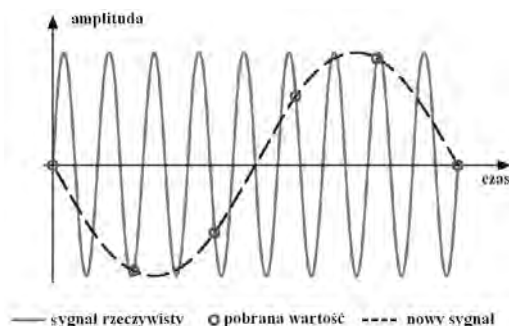
Przeprowadzając obróbkę wyników badań, czyli uzyskanych przebiegów czasowych (przemieszczeń, przyspieszeń, odkształceń) trzeba pamiętać o poniżej zestawionych zasadach.

#### 5.1.1. Miejsca pomiarów na konstrukcji

Podczas badań trzeba zwrócić uwagę na właściwe rozmieszczenie czujników na badanej konstrukcji. Wybieramy takie miejsca na konstrukcji, aby „wyłapać” jak najwięcej częstości własnych. Wiąże to się z unikaniem tzw. węzłów, czyli miejsc na konstrukcji, które po wymuszeniu drgań doznają minimalnych przemieszczeń.

#### 5.1.2. Czas i miejsce pomiaru drgań i częstotliwość próbkowania

Czas pomiarów powinien objąć jak najdłuższy fragment drgań tłumionych znikających, a częstotliwość próbkowania powinna być co najmniej równa częstotliwości Nyquista (Częstotliwość próbkowania  $1/\Delta t$  musi być co najmniej równa lub większa od podwojonej maksymalnej częstotliwości, którą chcemy uzyskać w spektrum  $f_{\max}$ ). W praktyce wystarczająca jest częstotliwość próbkowania równa 1200Hz. Przypadek źle dobranej częstości próbkowania przedstawia rys. 5.1.



Rys. 5.1. Przykład niewłaściwego próbkowania sygnału.

### 5.1.3. Wyodrębnienie miarodajnej części sygnału

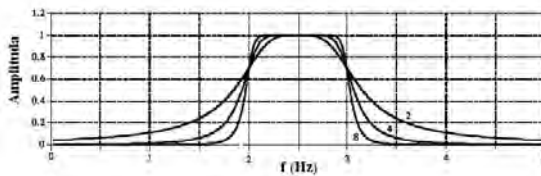
Uzyskane przebiegi czasowe trzeba pozbawić części zawierającej wymuszenie i zastosować filtr dolnoprzepustowy, aby odrzucić część sygnału zawierającą szum (jeśli po zaniku drgań nadal wykonywane były pomiary).

### 5.1.4. Pozbycie się trendu

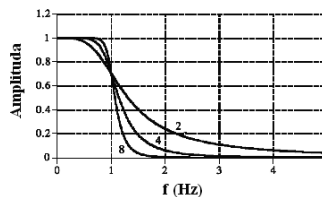
Ważnym zagadnieniem jest trend, który pozostawiony w sygnale zniekształca w dużym stopniu widmo częstotliwościowe, przez co znacząco zmienia otrzymywane wartości  $\delta$ .

### 5.1.5. Filtracja przebiegów drgań

Chcąc uzyskać przebiegi związane z daną częstotnością własną, wykorzystuje się filtrację przebiegów. Stosujemy wtedy filtry cyfrowe wąskopasmowe (np. Bessel, Butterworth, Chebyshev). Rys. 5.2 przedstawia wąskopasmowy filtr Butterworth'a; drugiego, czwartego i ósmego rzędu. Filtrację przebiegów czasowych stosujemy również w celu pozbycia się wysokich częstotliwości, które zaburzają początkowy zakres częstotliwości w widmie mocy. Stosujemy wtedy filtry pasmowe dolnoprzepustowe (rys. 5.3).



Rys. 5.2. Wąskopasmowy i pasmowy dolnoprzepustowy filtr, typ: Butterworth.



Rys. 5.3 Pasmowy dolnoprzepustowy filtr, typ: Butterworth

### 5.1.6. Szybka transformata Fouriera (FFT)

Szybka transformacja Fouriera to algorytm liczenia dyskretnej transformaty Fouriera. Postać wzoru na obliczanie FFT przedstawia zależność 5.1.

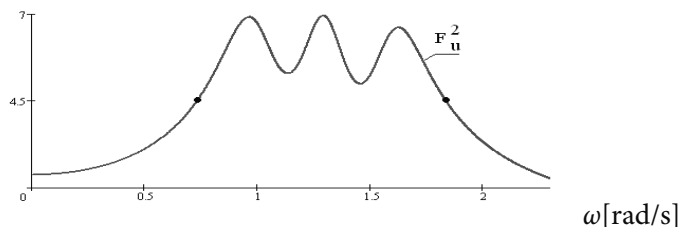
$$c_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) e^{-i \frac{2\pi \cdot k}{n} j}, \quad x_k = \frac{2\pi}{n} k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.1)$$

## 5.2. Najczęściej występujące problemy i popełniane błędy przy stosowaniu metody kolokacyjnej

Wykonując obliczenia parametrów tłumienia drgań metodą kolokacyjną, trzeba mieć na uwadze:

### 5.2.1. Problem bliskości ekstremów

Czasami przeprowadzając obróbkę widmową przebiegów czasowych, otrzymujemy widma drgań o bardzo bliskich pikach, w których nie ma możliwości odczytania wartości funkcji  $F_i^2$  ani odpowiadających im częstotliwości kołowych punktów charakterystycznych (rys. 5.4). Dotyczy to wąskiego zakresu przypadków, np. masztów, rzadziej mostów i kładek. Dla takich blisko zgrupowanych częstotliwości nie jest możliwe zastosowanie metody kolokacyjnej do określania parametrów tłumienia drgań.

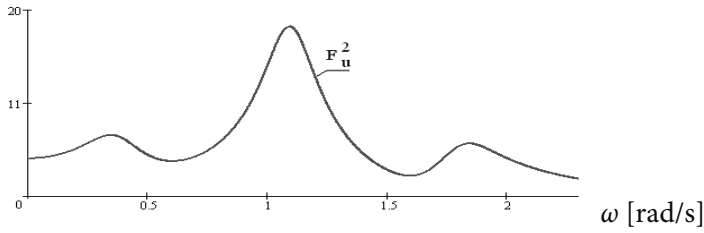


Rys. 5.4. Widmo mocy z bliskimi częstotliwościami.

### 5.2.2. Różnice rzędnych

W przypadku wystąpienia widma drgań z pikami o różnych amplitudach (rys. 5.5), w obliczeniach metodą kolokacyjną brano pod uwagę tylko piki „reprezentatywne” (o amplitudzie nie różniącej się o więcej niż o 30% od piku o największej amplitudzie w rozpatrywanym widmie). Uwzględniano jednak wpływ pików o małej amplitudzie na piki reprezentatywne. Częstotliwości kołowe o niskich amplitudach zaniebdywano, gdyż obarczone są one dużym błędem wynikającym z małego stopnia „ujawnienia” w widmie.

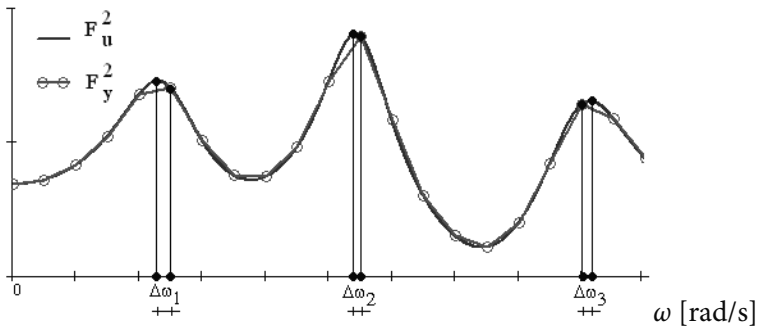




Rys. 5.5. Widmo mocy z jedną „reprezentatywną” częstotliwością kołową.

### 5.2.3. Nietrafienie w wartości szczytowe

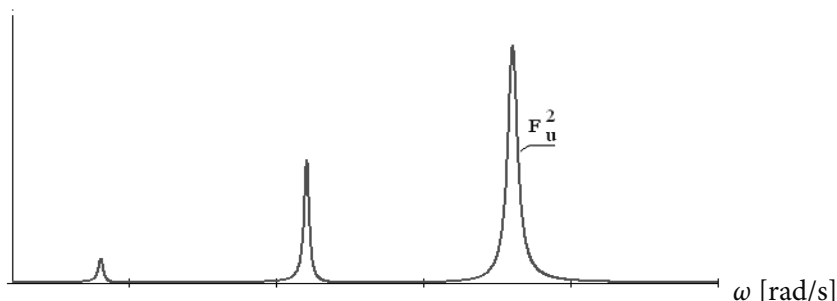
Równania nieliniowe metody kolokacyjnej wymuszają dokładne określenie wartości punktów charakterystycznych w widmie. Dotyczy to wartości częstotliwości kołowych i wartości funkcji w punktach charakterystycznych. Niedokładne ich określenie, np. przez uwzględnienie widma sygnału o niskiej częstotliwości próbkowania i krótkim czasie powoduje powstanie znacznych rozrzutów w obliczanych parametrach tłumienia. Na rys. 5.6 pokazano przykład niewłaściwego widma i różnic w odczytywanych częstotliwościach kołowych pików.



Rys. 5.6. Widmo mocy sygnału o niskiej częstotliwości próbkowania i krótkim czasie pomiaru.

### 5.2.4. Problem widm przyspieszeniowych i przemieszczeniowych

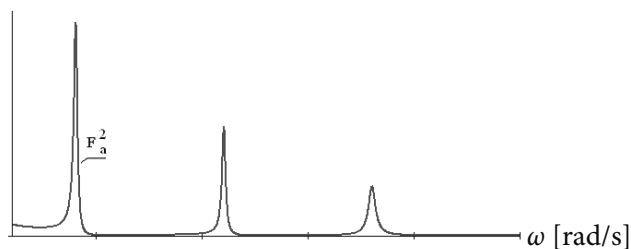
Stosując metodę kolokacyjną wymagane są widma z wyraźnymi pikami. Oczywisty jest fakt, że amplituda danej częstotliwości własnej w widmie uzależniona jest od miejsca zamocowania czujnika, rodzaju badanej konstrukcji. Na amplitudę częstotliwości własnej w widmie duży wpływ ma również transformowany sygnał, tzn. czy jest to przebieg czasowy przyspieszeń lub przemieszczeń. W niektórych przypadkach, biorąc pod uwagę przyspieszenia drgań konstrukcji, otrzymać można słabo „ujawnione” częstotliwości własne w widmie mocy, szczególnie w zakresie częstotliwości do ok. 1Hz (rys. 5.7).



Rys. 5.7. Widmo mocy przyspieszeniowe.

Właściwe są wtedy pomiary przebiegów czasowych przemieszczeń konstrukcji, ponieważ po przeprowadzeniu obróbki widmowej otrzymujemy przemieszczeniowe widma mocy, ze wzmacnionymi amplitudami częstości własnych w początkowym zakresie częstości widma (rys. 5.8).

Nasuwa się następujący wniosek: jeśli chcemy otrzymać „wyraźniejsze” częstości własne w widmie, w przedziale częstotliwości do ok. 1 Hz wygodniejsze jest przeprowadzanie pomiarów przemieszczeń konstrukcji.



Rys. 5.8 Widmo mocy przemieszczeniowe.

### 5.2.5. Metodę rozwiązania układu równań nieliniowych

W obliczeniach parametru tłumienia  $\delta$  metodą kolokacyjną przeprowadzanych z wykorzystaniem widm częstotliwościowych np.: z trzema pikami, otrzymuje się dziesięć silnie nieliniowych równań postaci (zależność 5.2).

Do rozwiązywania równań nieliniowych wykorzystano trzy metody zawarte w programie Mathcad 11. Równania rozwiązywano metodą prób, podstawiając różne wartości początkowe parametrów  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\beta_i$ . Wynik uznawano za miarodajny, kiedy z dwóch metod rozwiązywania równań nieliniowych otrzymywano ten sam wynik.

$$\left( \left( \frac{\beta_1^2 \cdot B_1 \cdot 2 \cdot \omega_i + \omega_i \cdot B_1 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g1}^2) + 2 \cdot \beta_1 \cdot \omega_i \cdot A_1 \cdot \sqrt{\omega_{g1}^2 - \beta_1^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_1^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g1}^2 + \omega_{g1}^4)}} \right) \cdot j + \right. \\
\left. \frac{\beta_1 \cdot B_1 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g1}^2) + \omega_i^2 \cdot A_1 \cdot \sqrt{\omega_{g1}^2 - \beta_1^2} - \omega_{g1}^2 \cdot A_1 \cdot \sqrt{\omega_{g1}^2 - \beta_1^2} - \omega_i^2 \cdot 2 \cdot \beta_1 \cdot B_1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_1^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g1}^2 + \omega_{g1}^4)}} \right) + \\
\left( \left( \frac{\beta_2^2 \cdot B_2 \cdot 2 \cdot \omega_i + \omega_i \cdot B_2 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g2}^2) + 2 \cdot \beta_2 \cdot \omega_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{\omega_{g2}^2 - \beta_2^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_2^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g2}^2 + \omega_{g2}^4)}} \right) \cdot j + \right. \\
\left. \frac{\beta_2 \cdot B_2 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g2}^2) + \omega_i^2 \cdot A_2 \cdot \sqrt{\omega_{g2}^2 - \beta_2^2} - \omega_{g2}^2 \cdot A_2 \cdot \sqrt{\omega_{g2}^2 - \beta_2^2} - \omega_i^2 \cdot 2 \cdot \beta_2 \cdot B_2}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_2^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g2}^2 + \omega_{g2}^4)}} \right) + \\
\left( \left( \frac{\beta_3^2 \cdot B_3 \cdot 2 \cdot \omega_i + \omega_i \cdot B_3 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g3}^2) + 2 \cdot \beta_3 \cdot \omega_i \cdot A_3 \cdot \sqrt{\omega_{g3}^2 - \beta_3^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_3^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g3}^2 + \omega_{g3}^4)}} \right) \cdot j + \right. \\
\left. \frac{\beta_3 \cdot B_3 \cdot (\omega_i^2 - \omega_{g3}^2) + \omega_i^2 \cdot A_3 \cdot \sqrt{\omega_{g3}^2 - \beta_3^2} - \omega_{g3}^2 \cdot A_3 \cdot \sqrt{\omega_{g3}^2 - \beta_3^2} - \omega_i^2 \cdot 2 \cdot \beta_3 \cdot B_3}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot \beta_3^2 \cdot \omega_i^2 + \omega_i^4 - 2 \cdot \omega_i^2 \cdot \omega_{g3}^2 + \omega_{g3}^4)}} \right) \Bigg) = F_u^2 \quad (5.2)$$

### 5.2.6. Filtrowanie przebiegów

W niektórych przypadkach, przed obróbką widmową używano filtrów pasmowych dolnoprzepustowych. Służyło to wyeliminowaniu wysokich częstotliwości zaburzających całe pasmo częstotliwościowe sygnału. Niewłaściwy rząd filtra i nieprawidłowy zakres filtrowanych częstotliwości może doprowadzić do znacznej zmiany widma mocy sygnału i doprowadzić do błędnego określenie parametru tłumienia.

## 6. Badania: Modele

### 6.1. Model złożony

#### 6.1.1. Płyta żelbetowa i płyta żelbetowa plus styropian i deski

##### 6.1.1.1. Opis konstrukcji modeli

Badania przeprowadzono na dwóch modelach płytowych. Poniżej przedstawiono opis i fotografie modeli.

- Pierwszy model; płyta żelbetowa oparta na dwóch dwuteownikach podpartych przegubowo. Wymiary i charakterystyczne dane dotyczące modelu: grubość płyty 7cm, klasa betonu B25, zbrojenie główne płyty pręty średnicy 12mm w rozstawie 17cm. Szerokość płyty 3.52m, długość 3,84m. Rozstaw dwuteowników 3.18m. Długość dwuteowników 3.84m. Model nr 1 przedstawia rys. 6.1.
- Drugi model; układ jak wyżej plus styropian grubości 4cm, klejony do płyty żelbetowej i deski grubości 1 cal oparte na belkach drewnianych o wymiarach 5cm x 10cm, rozstaw belek drewnianych ok. 100cm. Belki drewniane przykręcone śrubami do płyty żelbetowej. Model nr 2 przedstawia rys. 6.2.



**Rys. 6.1** Płyta żelbetowa oparta na dwóch dwuteownikach.

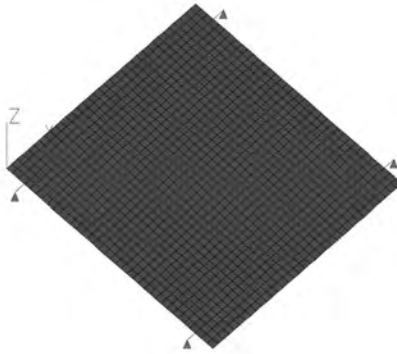


**Rys. 6.2.** Płyta żelbetowa oparta na dwóch dwuteownikach plus styropian i drewno.

### 6.1.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne stropu

W celu wyznaczenia zestawu postaci oraz częstotliwości drgań własnych posłużono się jednym pakietem MES, jakim jest program ALGOR. Stworzono model MES analizowanych układów płytowych, a następnie wykonano liniową analizę modalną za pomocą modułu o nazwie SSAP1, który posługuje się metodą iteracji podprzestrzeni przy wyznaczaniu początkowych postaci i wartości drgań własnych. Kompletność znalezionych wartości własnych sprawdzana jest za pomocą szeregów Sturm.

W obliczeniach wykorzystano pokazany na rys. 6.3 model MES płyty nr 1.



**Rys. 6.3.** Model MES płyty żelbetowej opartej na dwóch dwuteownikach.

W wyniku analizy modalnej otrzymano zestaw pięciu pierwszych postaci drgań własnych. Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań analizowanych konstrukcji przedstawiono w tablicy tab. 6.1 i tab. 6.2.

**Tab. 6.1.** Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań modelu nr 1

| Numer drgań | Częstotliwość [Hz] | Postacie drgań                         |
|-------------|--------------------|--|
| 1           | 6.826              | Pierwsza giętą pionową symetryczną     |
| 2           | 12.608             | Pierwsza giętą pionową antysymetryczną |
| 3           | 15.580             | Druga giętą pionową symetryczną        |
| 4           | 16.679             | Druga giętą pionową antysymetryczną    |
| 5           | 34.997             | Giętą pionową złożoną                  |

**Tab. 6.2.** Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań modelu nr 2

| Numer drgań | Częstotliwość [Hz] | Postacie drgań                          |
|-------------|--------------------|---|
| 1           | 7.103              | Pierwsza giętna pionowa symetryczna     |
| 2           | 12.564             | Pierwsza giętna pionowa antysymetryczna |
| 3           | 16.673             | Druga giętna pionowa symetryczna        |
| 4           | 16.988             | Druga giętna pionowa antysymetryczna    |
| 5           | 34.614             | Giętna pionowa złożona                  |

Na rysunkach poniżej przedstawiono pierwszą (rys. 6.4), drugą (rys. 6.5) i piątą (rys. 6.6) postać drgań własnych modelu nr 1, ponieważ w obliczeniach widm mocy te trzy postacie najwyraźniej się ujawniły.



**Rys. 6.4.** Pierwsza postać drgań własnych modelu nr 1 ( $f_1 = 6.826\text{Hz}$ ).



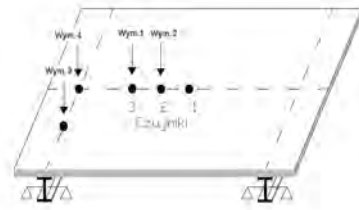
**Rys. 6.5.** Druga postać drgań własnych modelu nr 1 ( $f_1 = 12.608\text{Hz}$ ).



**Rys. 6.6** Piąta postać drgań własnych modelu nr 1 ( $f_1 = 34.997\text{Hz}$ )

#### 6.1.1.3. Rozmieszczenie czujników

Czujniki zostały rozmieszczone na osi podłużnej modeli. Pierwszy zamocowano w połowie długości, drugi w 3/8 długości, trzeci w 1/4 długości płyty. Sygnał próbkowano z częstotliwością 1200Hz, szerokość pasma 150 Hz. Schemat usytuowania czujników pokazany został na rysunku 6.7.



**Rys. 6.7.** Schemat modelu nr 1 i nr 2 pokazujący rozmieszczenie czujników i miejsc gdzie dokonywano wymuszeń drgań.

#### 6.1.1.4. Sposób wymuszenia

Drgania modelu wymuszano przez uderzenia drewnianą belką w cztery punkty pokazane na rys. 6.7. Wymuszenie nr 1 realizowane było w pobliżu czujnika nr 3, wymuszenie nr 2 nieopodal czujnika nr 2, wymuszenie nr 3 w 1/4 długości dwuteownika, wymuszenie nr 4 w połowie długości dwuteownika.

#### 6.1.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

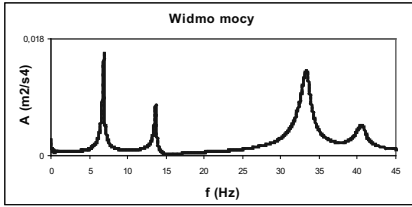
Po przeprowadzeniu obróbki widmowej otrzymanych z badań przebiegów drgań, wybrano trzy reprezentatywne częstości drgań własnych, tj, pierwszą, drugą i piątą.

Logarytmiczny dekrement tłumienia drgań dla pierwszej, drugiej i piątej postaci drgań własnych obliczano dwiema metodami:

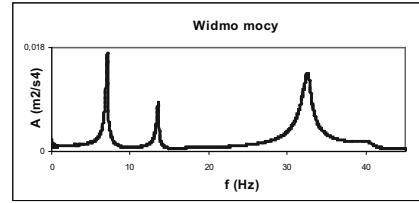
- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu), do obliczeń przyjęto:  $\delta_{\text{stali}}=0,01$ ,  $\delta_{\text{żelbet}}=0,15$   $\delta_{\text{drewno}}=0,08$ .

Obliczając parametry tłumienia drgań metodą kolokacyjną brano pod uwagę maksymalnie trzy reprezentatywne częstotliwości własne. W przypadku wystąpienia w widmie mocy czterech częstotliwości własnych (rys. 6.8), gdzie pierwsza i druga częstość jest wyraźnie odseparowana od trzeciej i czwartej obliczenia przeprowadzano oddzielnie dla dwóch pierwszych i dwóch ostatnich. Jeśli jedna z częstotliwości własnych w widmie miała małą amplitudę (np.: częstość czwarta rys. 6.8) uwzględniano ją w obliczeniach tylko ze względu na jej wpływ na częstość o większej amplitudzie (np. na częstość numer trzy z rys. 6.8).

Poniżej przedstawiono dwa przykładowe widma przyspieszeń drgań (rys. 6.8 i rys. 6.9).

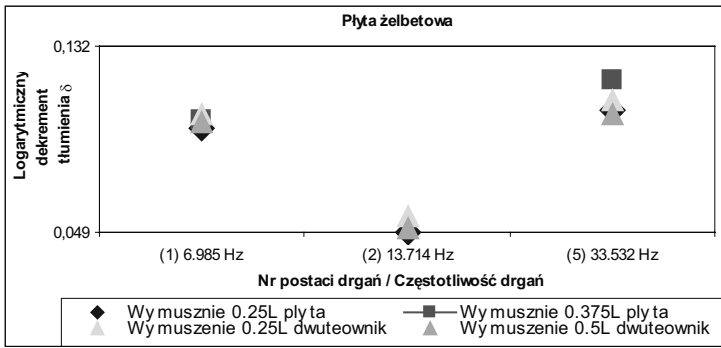


Rys. 6.8. Przykładowe przysp. widmo mocy modelu nr 1 (czuj. nr 2, wym. Nr 2).



Rys. 6.9. Przykładowe przysp. widmo mocy modelu nr 2 (czuj. nr 2, wym. nr 2).

Na rys. 6.10 przedstawiono średnie wartości  $\delta$  modelu nr 1 dla czterech różnych wymuszeń. Tab. 6.3 przedstawia średnie wartości  $\delta$  pierwszej, drugiej, piątej częstotliwości własnej drgań.



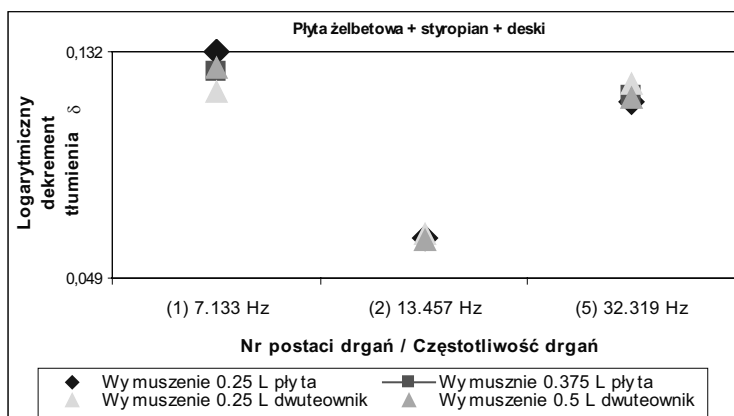
Rys. 6.10. Zestawienie  $\delta$  dla pierwszej, drugiej i piątej częstotliwości drgań własnych dla czterech wymuszeń dla modelu nr 1, stosując metodę kolokacyjną.

Tab. 6.3. Zestawienie średnich wartości  $\delta$  dla pierwszej, drugiej i piątej częstotliwości własnych drgań modelu nr 1

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f$ (Hz) (Algor) | Częstotliwość $f$ (Hz) (Badania) | $\delta$    |                    |
|------------------|--------------------------------|----------------------------------|-------------|--------------------|
|                  |                                |                                  | Kolokacyjna | Energia kinetyczna |
| 1                | 6.826                          | 6.985                            | 0.099       | 0.148              |
| 2                | 12.608                         | 13.714                           | 0.052       | 0.143              |
| 5                | 34.997                         | 33.532                           | 0.108       | 0.149              |

Na rys. 6.11 przedstawiono średnie wartości  $\delta$  modelu nr 2 dla czterech różnych wymuszeń. Tab. 6.4 przedstawia średnie wartości  $\delta$  pierwszej, drugiej, piątej częstotliwości własnej drgań.



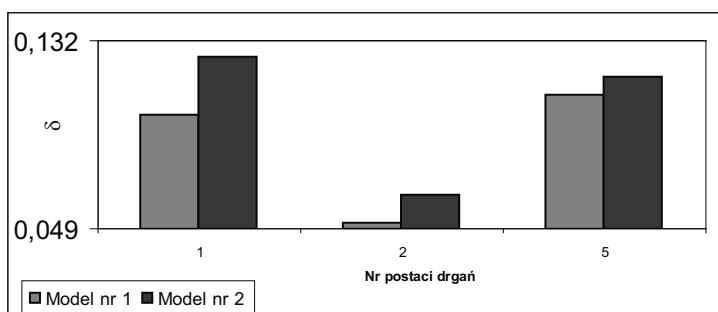


Rys. 6.11. Zestawienie  $\delta$  dla pierwszej, drugiej i piątej częstotliwości drgań własnych dla czterech wymuszeń dla modelu nr 2, stosując metodę kolokacyjną.

Tab. 6.4 Zestawienie średnich wartości  $\delta$  dla pierwszej, drugiej i piątej częstotliwości własnych drgań modelu nr 2

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f$ (Hz) (Algor) | Częstotliwość $f$ (Hz) (Badania) | $\delta$    |                    |
|------------------|--------------------------------|----------------------------------|-------------|--------------------|
|                  |                                |                                  | Kolokacyjna | Energia kinetyczna |
| 1                | 7.103                          | 7.133                            | 0.125       | 0.144              |
| 2                | 12.564                         | 13.457                           | 0.064       | 0.139              |
| 5                | 34.614                         | 32.319                           | 0.116       | 0.144              |

W odniesieniu do modelu nr 1 i nr 2, stosując metodę kolokacyjną uzyskano następujące wartości  $\delta$  rys. 6.12. Tab. 6.5 pokazuje procentowy wzrost  $\delta$  modelu płytowego, do którego dodano styropian i deski.



Rys. 6.12. Zestawienie średnich wartości  $\delta$  dla pierwszej, drugiej i piątej częstotliwości własnych drgań modelu nr 1 i 2.

**Tab. 6.5.** Wzrost średnich wartości  $\delta$  dla pierwszej, drugiej i piątej częstotliwości własnych drgań modelu nr 2 w odniesieniu do modelu nr 1

|                              |    |    |   |
|------------------------------|----|----|---|
| Numer postaci drgań          | 1  | 2  | 5 |
| Wzrost wartości $\delta$ (%) | 26 | 23 | 7 |

#### 6.1.1.6. Omówienie uzyskanych wyników

Stosując w obliczeniach  $\delta$  metodę kolokacyjną otrzymuje się wyniki o bardzo dużej dokładności. Na wynik praktycznie nie ma wpływu miejsce wymuszenia drgań (por. tab. 6.10 i tab. 6.11).

Dodanie do modelu nr 1 warstwy styropianu i desek zwiększyło wartość  $\delta$  od 7% do 26% dla trzech rozpatrywanych postaci drgań.

Wykorzystując metodę oparta na szacowaniu energii kinetycznej drgającego układu, otrzymano parametr tłumienia drgań  $\delta$  praktycznie o jednej wartości, bez względu na rodzaj postaci drgań. Ma to związek z dużą wartością energii kinetycznej płyty żelbetowej i jej proporcjonalnie dużym wpływem na wynik końcowy. Na stałą wartość  $\delta$  ma także wpływ uproszczenie modelu MES stosowanego w obliczeniach.

## 6.2. Modele proste

Parametr tłumienia drgań  $\delta$  obliczano tylko metodą kolokacyjną, stosując przebiegi drgań próbkowane z częstotliwością od 100Hz do 3200Hz. Miało to na celu określenie prawidłowej częstotliwości próbkowania, dzięki której otrzymuje się zbieżne wyniki parametru tłumienia drgań  $\delta$ .

### 6.2.1. Dwuteownik

#### 6.2.1.1. Opis dwuteownika

Badania drgań przeprowadzono na dwuteowniku 120, o długość 1.72m (rys.6.13). Model zamocowano wspornikowo.

#### 6.2.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne modelu

Modele MES, zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych otrzymano dokładnie tak samo jak w przypadku omówionych wcześniej modeli płytowych.

W obliczeniach wykorzystano pokazany na rys. 6.14 model MES dwuteownika.



**Rys. 6.13.** Dwuteownik stalowy  $h=120\text{mm}$ .



**Rys. 6.14.** Model MES dwuteownika zamocowany wspornikowo.

W wyniku analizy modalnej otrzymano dwie pierwsze postaci drgań własnych. Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań analizowanych konstrukcji przedstawiono w tab. 6.6.

**Tab. 6.6.** Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań dwuteownika

| Numer drgań | Częstotliwość Algor [Hz] | Częstotliwość Badania [Hz] | Postacie drgań                     |
|-------------|--------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| 1           | 34.2                     | 33.8                       | Pierwsza giętą pozioma symetryczną |
| 2           | 41.7                     | 41.8                       | Pierwsza skrętna                   |

Na rysunkach poniżej przedstawiono pierwszą (rys. 6.15) i drugą (rys. 6.16) postać drgań własnych dwuteownika.



**Rys. 6.15** Pierwsza postać drgań własnych dwuteownika ( $f_1=34.2\text{Hz}$ ).



**Rys. 6.16** Druga postać drgań własnych dwuteownika ( $f_1=41.7\text{Hz}$ ).

### 6.2.1.3. Rozmieszczenie czujników

Akcelerometry zamocowano w połowie (nr 1), trzech czwartych (nr 2) i na końcu modelu (nr 3), pod kątem około 30 stopni do pionu. Wynikami pomiarów były przyspieszenia drgań w czasie, próbkowane z częstotliwością 3200, 2400, 1600, 1200, 800, 600, 400, 300, 200, 100 Hz o szerokości pasma 150 Hz.

#### 6.2.1.4. Sposób wymuszenia

Wymuszano drgania pionowe, poziomie i giętne. Polegało to na wygięciu lub skręceniu końca modelu i nagłym jego zwolnieniu.

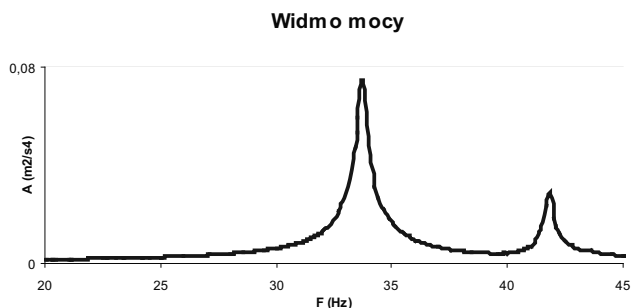
#### 6.2.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Po przeprowadzeniu obróbki otrzymanych z badań przebiegów, wybrano dwie pierwsze częstotliwości.

Logarymiczny dekrement tłumienia dla pierwszej, drugiej postaci drgań własnych obliczano jedną metodą:

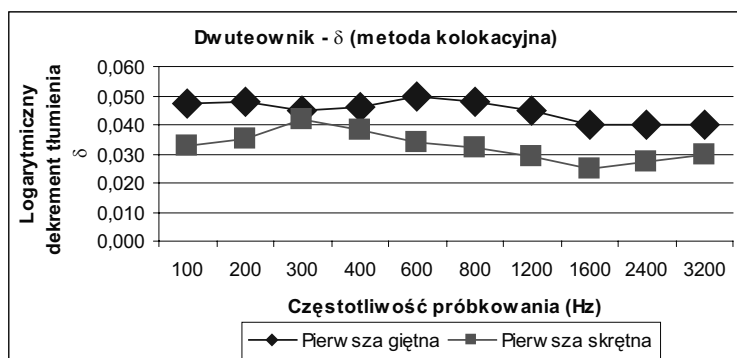
- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0).

Poniżej przedstawiono przykładowe widmo przyspieszeń drgań (rys. 6.17).



Rys. 6.17. Przykładowe widmo przyspieszeń drgań (czujnik nr 1).

Rys. 6.18 przedstawia średnie wartości  $\delta$  modelu stosując różne częstotliwości próbkowania.



Rys. 6.18. Wartości  $\delta$  dla dwuteownika, stosując metodę kolokacyjną.

#### 6.2.1.6. Omówienie uzyskanych wyników

Rysunek 6.18 pokazuje że, stosując metodę kolokacyjną i biorąc pod uwagę dość długie przebiegi drgań, uzyskuje się zbieżne wyniki, w małym stopniu zależne od częstości próbkowania sygnału. Najdokładniejsze wyniki otrzymujemy stosując częstotliwość próbkowania powyżej 1600Hz.

### 6.2.2. Dwuteownik plus drewniana nakładka

#### 6.2.2.1. Opis modelu

Badania drgań przeprowadzono na modelu składającym się z dwuteownika 120 i nakładki drewnianej o przekroju 8cm długość 5cm. Model miał długość 1.72m (rys.6.19). Model zamocowano wspornikowo.

#### 6.2.2.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne modelu

Modele MES, zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych otrzymano dokładnie tak samo jak w przypadku omówionych wcześniej modeli płytowych.

W obliczeniach wykorzystano pokazany na rys. 6.20 model MES dwuteownika z nakładką drewnianą.



**Rys. 6.19.** Dwuteownik stalowy  $h=120\text{mm}$  i nakładka drewniana.



**Rys. 6.20.** Model MES dwuteownika z nakładką drewnianą.

W wyniku analizy modalnej otrzymano dwie pierwsze postaci drgań własnych. Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań analizowanych konstrukcji przedstawiono w tab. 6.7.

**Tab. 6.7.** Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań dwuteownika z nakładką

| Numer drgań | Częstotliwość Algor [Hz] | Częstotliwość Badania [Hz] | Postacie drgań                      |
|-------------|--------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| 1           | 33.2                     | 32.5                       | Pierwsza giętna pozioma symetryczna |
| 2           | 42.2                     | 43.3                       | Pierwsza skrętna                    |

Na rysunkach poniżej przedstawiono pierwszą (rys. 6.21) i drugą (rys. 6.22) postać drgań własnych modelu złożonego.



**Rys. 6.21.** Pierwsza postać drgań własnych modelu złożonego ( $f_1 = 33.2\text{Hz}$ ).



**Rys. 6.22.** Druga postać drgań własnych modelu złożonego ( $f_2 = 42.2\text{Hz}$ ).

#### 6.2.2.3. Rozmieszczenie czujników

Akcelerometry zamocowano w połowie (nr 1), trzech czwartych (nr 2) i na końcu modelu (nr 3), pod kątem około 30 stopni do pionu. Wynikami pomiarów były przyspieszenia drgań w czasie, próbkowane z częstotliwością 3200, 2400, 1600, 1200, 800, 400, 300, 200, 100 Hz o szerokości pasma 150 Hz.

#### 6.2.2.4. Sposób wymuszenia

Wymuszano drgania pionowe, poziomie i giętne. Polegało to na wygięciu lub skręceniu końca modelu i nagłym jego zwolnieniu.

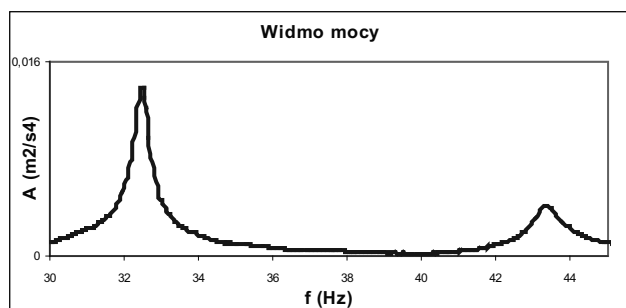
#### 6.2.2.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Po przeprowadzeniu obróbki otrzymanych z badań przebiegów, wybrano dwie pierwsze częstotliwości.

Logarytmiczny dekrement tłumienia dla pierwszej, drugiej postaci drgań własnych obliczano jedną metodą:

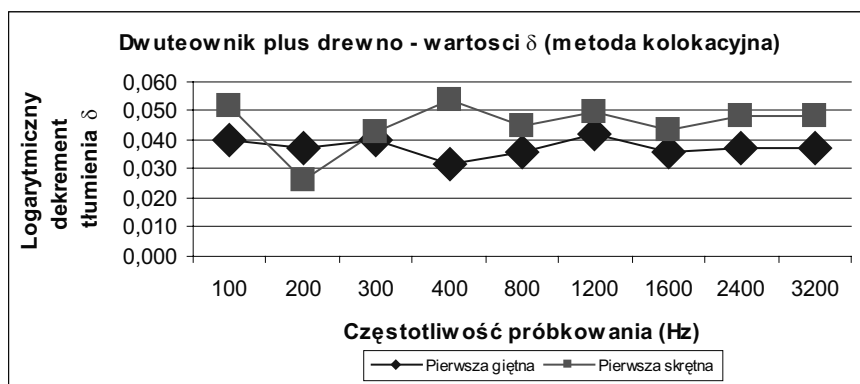
- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),

Poniżej przedstawiono przykładowe widmo przyspieszeń drgań (rys. 6.23).



Rys. 6.23. Przykładowe widmo przyspieszeń drgań (czujnik nr 3).

Rys. 6.24 przedstawia średnie wartości  $\delta$  modelu stosując różne częstotliwości próbkowania.



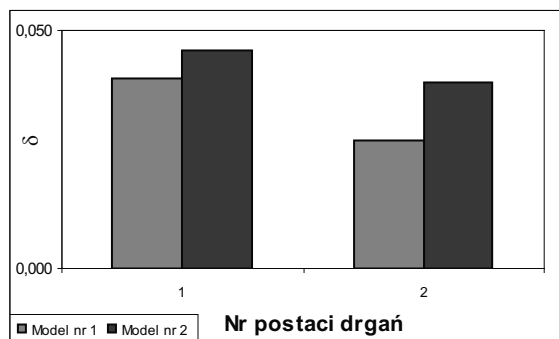
Rys. 6.24. Wartości  $\delta$  dla dwuteownika z nakładką drewnianą, stosując metodę kolokacyjną.

#### 6.2.2.6. Omówienie uzyskanych wyników

Rysunek 6.24, podobnie jak rysunek 6.18 pokazuje, że stosując metodę kolokacyjną otrzymujemy dokładne wyniki parametrów tłumienia. Najdokładniejsze wartości  $\delta$  otrzymujemy stosując częstotliwość próbkowania 1200Hz i większą.

### 6.2.3. Porównanie wartości parametru tłumienia $\delta$ dla dwuteownika i dwuteownika z nakładką z drewna

W odniesieniu do modelu nr 1 (dwuteownika) i nr 2 (dwuteownika z nakładką drewnianą), stosując metodę kolokacyjną uzyskano następujące wartości  $\delta$  rys. 6.25. Tab. 6.8 pokazuje procentowy wzrost  $\delta$  dwuteownika, do którego dodano drewnianą nakładkę.



**Rys. 6.25.** Zestawienie średnich wartości  $\delta$  dla pierwszej, drugiej częstotliwości drgań własnych modelu nr 1 i 2.

**Tab. 6.8** Wzrost średnich wartości  $\delta$  dla pierwszej, drugiej częstotliwości drgań własnych modelu nr 2 w odniesieniu do modelu nr 1

| Numer postaci drgań          | 1  | 2  |
|------------------------------|----|----|
| Wzrost wartości $\delta$ (%) | 15 | 37 |

Dodanie do dwuteownika nakładki drewnianej zwiększyło wartość  $\delta$  o 15% dla pierwszej giętej postaci drgań i o 37% dla drugiej postaci drgań.

### 6.3.1. Płaskownik

#### 6.3.1.1. Opis modelu

Badania drgań przeprowadzono na modelu płaskownika o przekroju  $80 \times 8$  mm i długości 1.12 m (rys.6.26). Model zamocowano wspornikowo.

#### 6.3.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne modelu

Modele MES, zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych otrzymano dokładnie tak samo jak w przypadku omówionych wcześniej modeli płytowych.

W obliczeniach wykorzystano pokazany na rys. 6.27 model MES płaskownika.





Rys. 6.26. Płaskownik stalowy 80 x 8 mm.



Rys. 6.27. Model MES płaskownika.

W wyniku analizy modalnej otrzymano jedną postać drgań własnych. Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań analizowanych konstrukcji przedstawiono w tablicy tab. 6.9.

Tab. 6.9 Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań dwuteownika z nakładką

| Numer drgań | Częstotliwość Algor [Hz] | Częstotliwość Badania [Hz] | Postacie drgań                      |
|-------------|--------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| 1           | 4.3                      | 4.2                        | Pierwsza giętna pozioma symetryczna |

Na rysunkach poniżej przedstawiono pierwszą postać drgań własnych płaskownika.

Rysunek 6.28 przedstawia pierwszą postać drgań własnych.



Rys. 6.28 Pierwsza postać drgań własnych ( $f_1 = 4.3\text{Hz}$ )

### 6.3.1.3. Rozmieszczenie czujników

Akcelerometry zamocowano w połowie (nr 1), trzech czwartych (nr 2) i na końcu modelu (nr 3). Wynikami pomiarów były przyspieszenia drgań w czasie, próbkowane z częstotliwością 3200, 2400, 1600, 1200, 800, 400, 300, 200, 100 Hz o szerokości pasma 150 Hz.

### 6.3.1.4. Sposób wymuszenia

Drgania wymuszano przez wygięcie i nagłe zwolnienie końca modelu.

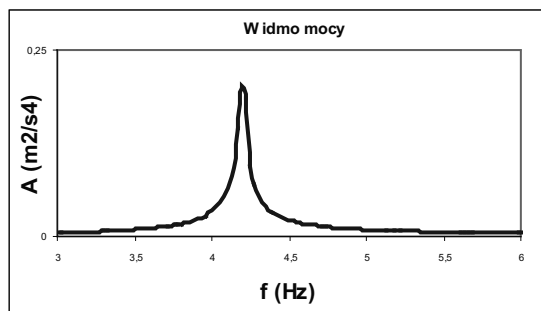
### 6.3.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Po przeprowadzeniu obróbki otrzymanych z badań przebiegów, wybrano pierwszą częstość własną.

Logarymiczny dekrement tłumienia dla pierwszej częstości własnej obliczano jedną metodą:

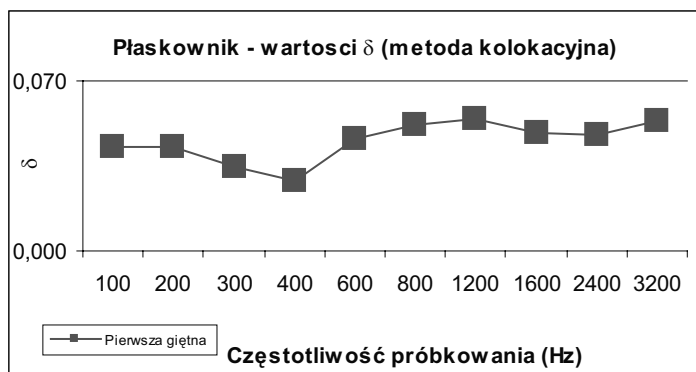
- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0).

Poniżej przedstawiono przykładowe widmo przyspieszeń drgań (rys. 6.29).



Rys. 6.29. Przykładowe widmo przyspieszeń drgań (czujnik nr 3).

Rysunek 6.30 przedstawia średnie wartości  $\delta$  płaskownika stosując różne częstotliwości próbkowania.



Rys. 6.30. Wartości  $\delta$  dla płaskownika, stosując metodę kolokacyjną.

### 6.3.1.6. Omówienie uzyskanych wyników

Rys. 6.30 pokazuje, że stosując metodę kolokacyjną otrzymujemy się dokładne wartości  $\delta$ , stosując częstotliwość próbkowania około 1200Hz i większą.

## 6.3.2. Płaskownik plus nakładka drewniana

### 6.3.2.1. Opis modelu

Badania drgań przeprowadzono na modelu składającym się z płaskownika o przekroju 80×8 mm, długości 1.12m i nakładki drewnianej o przekroju 100×25 mm (rys. 6.31). Model zamocowano wspornikowo.

### 6.3.2.2 Model komputerowy (MES) i drgania własne modelu

Modele MES, zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych otrzymano dokładnie tak samo jak w przypadku omówionych wcześniej modeli płytowych.

W obliczeniach wykorzystano pokazany na rys. 6.32 model MES płaskownika.



Rys. 6.31. Płaskownik stalowy i nakładka drewniana



Rys. 6.32. Model MES płaskownika z nakładką drewnianą

W wyniku analizy modalnej otrzymano pierwszą postać drgań własnych. Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań analizowanych konstrukcji przedstawiono w tab. 6.10.

Tab. 6.10. Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań płaskownika z nakładką

| Numer drgań | Częstotliwość Algor [Hz] | Częstotliwość Badania [Hz] | Postacie drgań                     |
|-------------|--------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| 1           | 4.3                      | 4.2                        | Pierwsza giętą pozioma symetryczna |

Na rys. 6.33. poniżej przedstawiono pierwszą postać drgań własnych modelu.



**Rys. 6.33.** Pierwsza postać drgań własnych ( $f_1 = 4.3\text{Hz}$ )

#### 6.3.2.3. Rozmieszczenie czujników

Akcelerometry zamocowano w połowie (nr 1), trzech czwartych (nr 2) i na końcu modelu (nr 3). Wynikami pomiarów były przyspieszenia drgań w czasie, próbkowane z częstotliwością 3200, 2400, 1600, 1200, 800, 400, 300, 200, 100 Hz o szerokości pasma 150 Hz.

#### 6.2.3.4. Sposób wymuszenia

Drgania wymuszano przez wygięcie i nagłe zwolnienie końca modelu.

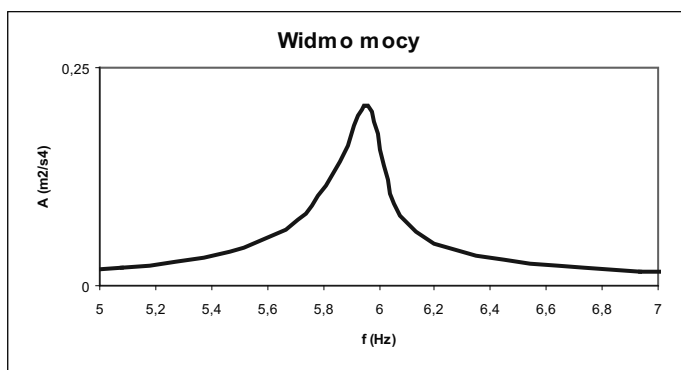
#### 6.3.2.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Po przeprowadzeniu obróbki otrzymanych z badań przebiegów, wybrano pierwszą częstość własną.

Logarytmiczny dekrement tłumienia dla pierwszej częstości własnej obliczano jedną metodą:

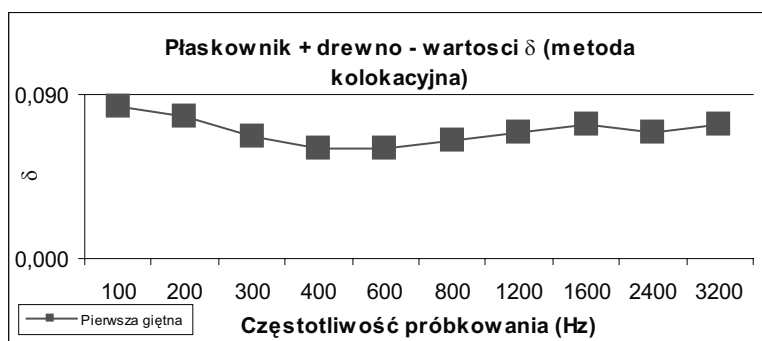
- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy „Auto-power spectrum”; program Catman 4.0).

Poniżej przedstawiono przykładowe widmo przyspieszeń drgań (rys. 6.34).



Rys. 6.34. Przykładowe widmo przyspieszeń drgań (czujnik nr 3).

Rys. 6.35 przedstawia średnie wartości  $\delta$  płaskownika stosując różne częstotliwości próbkowania.



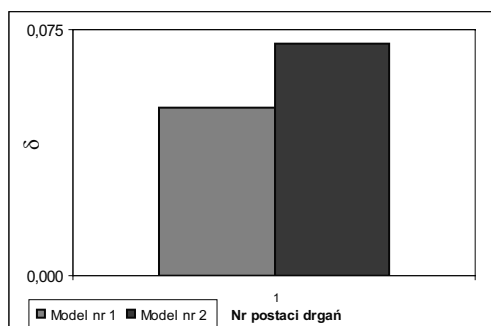
Rys. 6.35. Wartości  $\delta$  dla dwuteownika z nakładką drewnianą, stosując metodę kolokacyjną.

### 6.3.2.6 Omówienie uzyskanych wyników

Rysunek 6.35 pokazuje, że stosując częstotliwość próbkowania ok. 1200Hz i większą otrzymujemy dokładne wyniki parametru tłumienia drgań  $\delta$ .

### 6.3.3 Porównanie wartości parametru tłumienia $\delta$ dla płaskownika i płaskownika z drewnianą nakładką

W odniesieniu do modelu nr 1 (płaskownika) i nr 2 (płaskownika z drewnianą nakładką), stosując metodę kolokacyjną uzyskano następujące wartości  $\delta$  rys. 6.36



**Rys. 6.36.** Zestawienie średnich wartości  $\delta$  dla pierwszej, drugiej częstotliwości drgań własnych modelu nr 1 i 2.

Dodanie do płaskownika nakładki drewnianej zwiększyło wartość  $\delta$  o 39% dla pierwszej giętej postaci drgań własnych.

## 7. Badania: Konstrukcje

### 7.1. Kładki

#### 7.1.1. Kładka w Kielcach nad ulicą Źródłową

##### 7.1.1.1. Opis konstrukcji kładki

Kładka przeprowadza ruch pieszy nad ulicą Źródłową w Kielcach, w rejonie jej skrzyżowania z ulicą św. Stanisława Kostki.

Obiekt zaprojektowano jako niesymetryczną dwuprzęsłową stalową konstrukcję podwieszoną do ukośnego pylonu. Długość kładki mierzona w osiach podparć na końcowych podporach wynosi 41.77m. Rozpiętość przęseł mierzona w osiach podparć na podporach to odpowiednio 29.077m oraz 12.771m. Wysokość pylonu wynosi 13.805m. Ustrój nośny został swobodnie oparty na podporach skrajnych (łożyska neoprenowe, jednokierunkowo przesuwne typu ETJ  $V=300$ ,  $e=\pm 16\text{mm}$ ,  $2 \times 2\text{szt.}$ ), natomiast na pylonie zastosowano łożyska stałe (zaprojektowane jako indywidualne elementy z blach stalowych).

Konstrukcja przęseł składa się z dwóch rur stalowych  $\varnothing 323.9/20$ , z jedną wstawką w strefie pylonu  $\varnothing 323.9/28$ , tworzących z poprzecznymi stężeniami z dwuteowników I HEB 160 (w układzie prostopadłym) konstrukcję nośną. Pomost to blacha grubości 10mm z 5mm warstwą żywicy epoksydowej. Podłużne uźebrowania stanowią dwuteowniki I HEB 100. Krawędzie pomostu są ograniczone zamkniętym przekrojem stalowym.

Pomost podwieszony jest na kablach (wantach) kotwionych w rurowych wspornikach mocowanych prostopadle do rur pomostu. Wsporniki składają się z rury stalowej  $\varnothing 219.1/20$  i rury kierującej kable.

Elementy pylonu to dwugałęziowe konstrukcje z rur stalowych  $\varnothing 406.4/25$ , z przewiązkami rurowymi. W dolnej części są one zwieńczone płytą stalową służącą do mocowania pylonu w żelbetowym cokole podporowym.

Do podwieszenia zasadniczego przęsła kładki zastosowano ciągną ze stali o wytrzymałości charakterystycznej równej 1770MPa. Zakotwienie wszystkich kabli w pylonie jest bierne, natomiast ich naciąg odbywał się przy wspornikach pomostu i w blokach fundamentowych kabli odciągowych. Ciągna podwieszająca pomost wykonano z kabli 3T15, a ciągną odciągowe z kabli 2T15. Kable składają się z lin 7 $\varnothing$ 5.

Druty lin są ocynkowane i umieszczone w powłoce z twardego polietylenu PEHD, wypełnionej smarem.

Pylon posadowiony jest na żelbetowych palach średnicy 1200mm.

Opis konstrukcji powstał w oparciu o opis techniczny obiektu.

Fotografie (rys. 7.1, 7.2) pokazują omawiany obiekt.



Rys. 7.1. Widok ogólny kładki.



Rys. 7.2. Widok kładki od dołu.

#### 7.1.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne kładki

W celu wyznaczenia zestawu postaci oraz częstotliwości drgań własnych posłużono się jednym z najbardziej popularnych pakietów MES, jakim jest program ALGOR.

W systemie ALGOR brakuje jednak sprawnie działających narzędzi do analizy modalnej ustroju obciążonego i odkształconego (duże odkształcenia konstrukcji lub duże siły wewnętrzne wpływają na zmianę sztywności elementów). Dla przeprowadzenia poprawnej analizy modalnej z uwzględnieniem odkształceń i sił wewnętrznych posłużono się programem *Stelm 1.0* autorstwa mgr inż. Tomasza Nowickiego. Jest to w pełni funkcjonalny preprocesor współpracujący z modułami systemu ALGOR.

Program *Stelm 1.0* uwzględnia działanie siły osiowej na sztywność elementów prętowych poprzez zastąpienie elementów kratowych lub ramowych odpowiednio skonstruowanymi elementami typu 10 (element jest definiowany poprzez dosłowne podanie macierzy sztywności). Przy czym macierze sztywności tych elementów zostają wyznaczone z uwzględnieniem siły osiowej lub/i konfiguracji odkształconej. Uaktualnienie konfiguracji polega na dodaniu wartości przemieszczeń do współrzędnych punktów modelu.

W pierwszej kolejności stworzono model do modalnego rozwiązania liniowego, a następnie korespondujący z nim model do statycznej analizy nieliniowej. Na podstawie wyników otrzymanych ze statycznej analizy nieliniowej (obliczonych za pomocą procesora *Apak0*) otrzymamy nowe położenie równowagi statycznej pod obciążeniem stałym, które będzie położeniem równowagi w liniowej analizie modalnej.

Następnie użyty został program *Stelm 1.0*, który na podstawie plików wynikowych procesora *Apak0* oraz postprocesora *Mkns0* uaktualnił konfigurację modelu



poprzez dodanie wartości przemieszczeń (od obciążenia ciężarem własnym oraz wstępnym naciągiem lin) do współrzędnych punktów modelu oraz zastąpił elementy ramowe i kratowe elementami typu 10. Program *Stelm 1.0* zbudował elementy typu 10 z uwzględnieniem siły osiowej i konfiguracji odkształconej na sztywność elementów prętowych.

Program *Stelm 1.0* dokonał wszystkich powyższych operacji na pliku wsadowym procesora liniowego *Ssap1*, którego użyto do analizy modalnej konstrukcji.

Taki sposób obliczeń dynamicznych dotyczył każdego układu z cięgnami omawianymi w pracy.

Rysunek 7.3 pokazuje model kładki wykorzystany w obliczeniach.



**Rys. 7.3.** Model MES kładki dla pieszych w Kielcach.

W wyniku analizy modalnej otrzymano zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Wyniki analizy przedstawiono w tabelicy 7.1.

**Tab. 7.1.** Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanej kładki

| Numer drgań | Częstotliwość [Hz] | Postać drgań                                 |
|-------------|--------------------|--|
| 1           | 2.171              | Pierwsza giętna pionowa                      |
| 2           | 3.295              | Pierwsza giętna pozioma                      |
| 3           | 4.054              | Druga giętna pionowa pomostu z drganiami lin |
| 4           | 4.061              | Giętno – skrętne pomostu z drganiami lin     |
| 5           | 4.069              | Drgania lin                                  |

Niżej przedstawiono wybrane postacie drgań własnych analizowanej kładki (rys. 7.4 – 7.8).



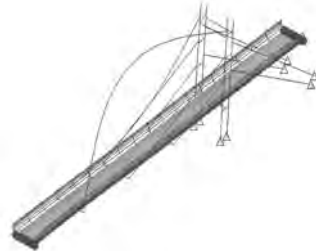
**Rys. 7.4.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 2.171\text{Hz}$ .



**Rys. 7.5.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 3.291\text{Hz}$ .



**Rys. 7.6.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 4.054\text{Hz}$ .



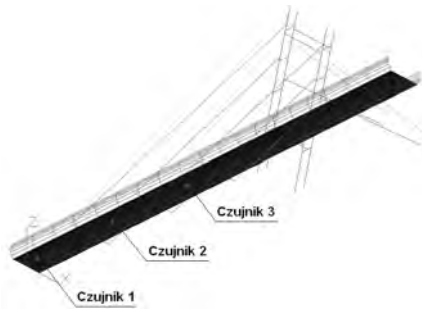
**Rys. 7.7.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 4.061\text{Hz}$ .



**Rys. 7.8.** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 4.069\text{Hz}$ .

### 7.1.1.3. Rozmieszczenie czujników

Przebiegi przyspieszeń uzyskano od dr inż. Marka Pańtaka z Politechniki Krakowskiej. Czujniki zostały przez niego rozmieszczone na głównym przęśle kładki. Pierwszy zamocowano w połowie długości, drugi w 1/4 długości, trzeci nieopodal przyczółka. Sygnał próbkowano z częstotliwością 100Hz. Schemat usytuowania czujników pokazany jest na rysunku 7.9.



Rys. 7.9. Schemat kładki z pokazanym rozmieszczeniem czujników.

#### 7.1.1.4. Sposób wymuszenia

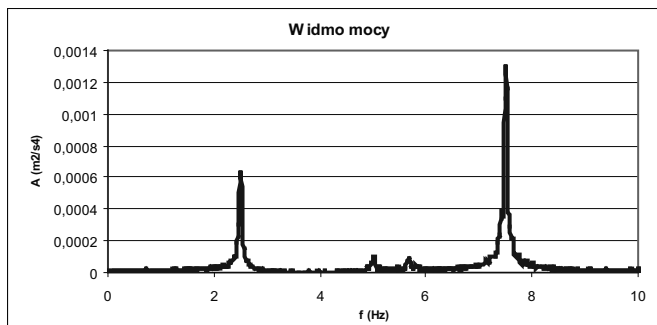
Wymuszenie realizowano przez skoki w środku przęsła głównego.

#### 7.1.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

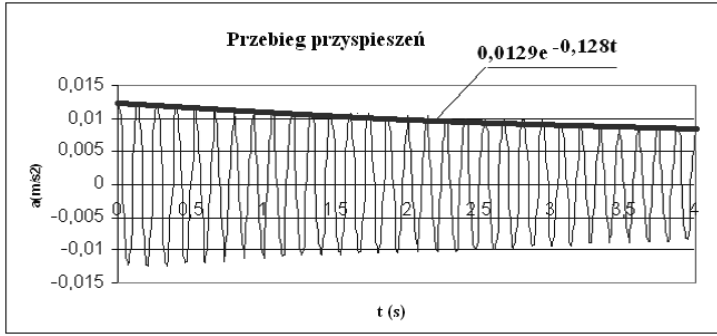
Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano trzema metodami:

- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto-power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą filtracyjno-regresyjną (filtr cyfrowy rodzaj: Butterworth band-pass, rząd: trzeci; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu).

Rysunek 7.10 przedstawia przykładowe widmo amplitudowe, rysunek 7.11 odfiltrowany przebieg przyspieszeń.

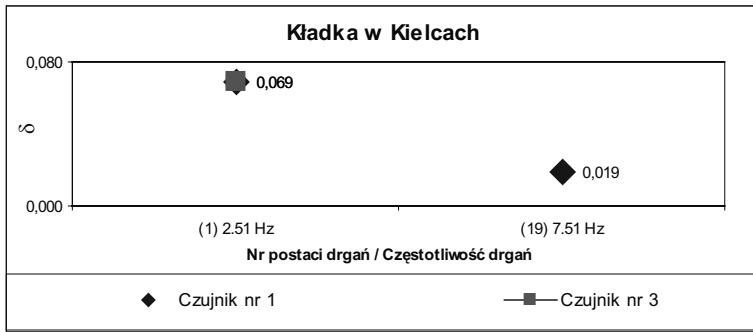


Rys. 7.10. Przykładowe widmo amplitudowe (czujnik nr 3).

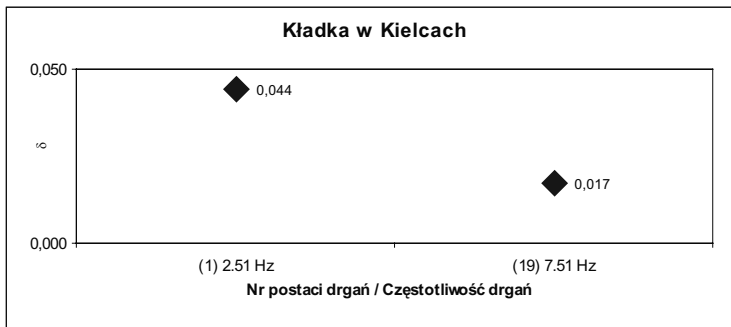


Rys. 7.11. Przykładowy przebieg przyspieszeń po filtracji (czujnik nr 1,  $f=7.51\text{Hz}$ ).

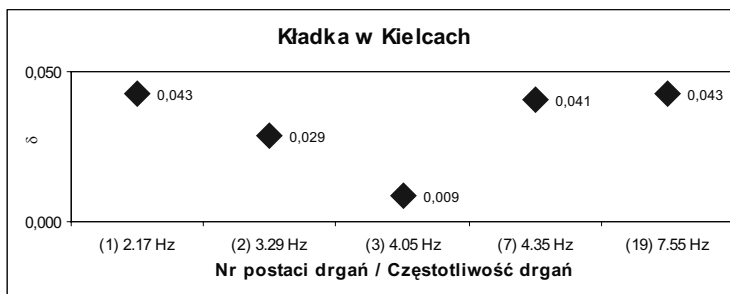
Rys. 7.12 do 7.14 przedstawiają otrzymane wyniki wyrażone w logarytmicznym dekrementu tłumienia.



Rys. 7.12. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia uzyskane dzięki zastosowaniu metody kolokacyjnej.



Rys. 7.13. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia uzyskane dzięki zastosowaniu metody filtracyjno-regresyjnej (czujnik nr 3).



Rys. 7.14. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia uzyskane dzięki zastosowaniu metody energetycznej.

#### 7.1.1.6. Omówienie uzyskanych wyników

Stosując metodę kolokacyjną i metodę filtracyjno-regresyjną opartą na filtracji przebiegów otrzymuje się zbliżone wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla kładki. Wydaje się, że nieznacznie większe wartości  $\delta$  uzyskane z metody kolokacyjnej najlepiej odzwierciedlają rzeczywisty poziom tłumienia, ponieważ uwzględniają wzajemny wpływ poszczególnych częstotliwości. Porównywalne wartości  $\delta$  stosując metodę kolokacyjną i metodę filtracyjno-regresyjną otrzymuje się tylko w przypadku rozseparowanych częstotliwości własnych w widmie mocy. Stosując metodę energetyczną otrzymano niskie wartości  $\delta$ , spowodowane to może być dominującym tłumieniem konstrukcyjnym.

### 7.1.2. Kładka nad rzeką Wartą w Osjakowie

#### 7.1.2.1. Opis konstrukcji kładki

Opisywana konstrukcja stanowi przeprawę przez rzekę Wartę. Znajduje się w ciągu drogi krajowej nr 8 w miejscowości Osjaków, województwo Łódzkie. Obiekt jest kładką przeznaczoną wyłącznie dla ruchu pieszego. W przekroju podłużnym przeszła kładki to dwie swobodnie podparte belki o rozpiętości teoretycznej  $l_t=49.675\text{m}$ . W przekroju poprzecznym składa się z dwóch dźwigarów głównych kratowych ze wspólnym pasem dolnym, lub inaczej mówiąc jest to belka kratownicowa przestrzenna o trzech pasach.

Pasy górne kratownic to rury  $\varnothing 323.9/8$  rozstawione w osiach na 2.60m. Pas dolny natomiast stanowi rura  $\varnothing 323.9/12.5$ . Pomost kładki stanowią poprzecznicę wykonane z szerokostopowych dwuteowników I HEB 140, rozstawionych co  $3.846/2=1.923\text{m}$ , czyli w węzłach kratownicy i w środku pola między węzłami. Na poprzecznicach oparte są cztery belki podłużne, rozstawione co 0.50m. Podłużnice

wykonane są z dwuteowników szerokostopowych I HEB 100, na których ułożona jest blacha pomostu o grubości 8mm, ograniczona po bokach płaskownikami  $\neq 100 \times 16 \text{mm}$ . Na blachę nałożono nawierzchnię z materiału Icosit Elastomastic TF firmy Sika o grubości 5mm. Poręcze są typu miejskiego z pochwytem z rury  $\text{Ø } 108/8$ , słupkami z płaskownika  $\neq 100 \times 10 \text{mm}$ . Wysokość poręczy wynosi 1.10m. Całkowita szerokość konstrukcji przęsła wynosi 2.924m, wysokość 3.454m, a całkowita długość obiektu 102m.

Konstrukcja ustroju nośnego oparta jest na filarze i przyczółkach za pomocą dwóch typów łożysk. Na filarze zamontowano cztery łożyska elastomerowych stałych (ETS) o nośności 600kN. Na przyczółkach zamontowano po dwa łożyska elastomerowe jednokierunkowo przesuwne (ETJ) o nośności 600kN o dopuszczalnym przesuwie w kierunku podłużnym  $\pm 50 \text{mm}$ .

Opis konstrukcji powstał w oparciu o opis techniczny projektu powyższego obiektu wykonanego przez: Zespół Badawczo Projektowy MOSTY WROCŁAW s. c. Fotografie (rys. 7.15, 7.16) pokazują omawiany obiekt.



Rys. 7.15 Widok ogólny kładki w Osjakowie.



Rys. 7.16. Widok pomostu kładki od dołu.

#### 7.1.2.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne kładki

W celu wyznaczenia zestawu postaci oraz częstotliwości drgań własnych posłużono się jednym pakietem MES jakim jest program ALGOR. Stworzono model MES analizowanej kładki, a następnie wykonano liniową analizę modalną za pomocą modułu o nazwie SSAP1, który posługuje się metodą iteracji podprzestrzeni przy wyznaczaniu początkowych postaci i wartości drgań własnych.

W obliczeniach wykorzystano pokazany na rysunku 7.17 model MES kładki w Osjakowie.



**Rys. 7.17.** Model MES analizowanej kładki.

W wyniku analizy modalnej otrzymano zestaw dziesięciu pierwszych postaci drgań własnych odkształconych wokół ich położenia równowagi statycznej. Zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań analizowanej konstrukcji przedstawiono w tabelicy 7.2.

**Tab. 7.2.** Częstotliwości oraz postacie drgań własnych analizowanej kładki

| Numer drgań | Częstotliwość [Hz] | Postacie drgań                          |
|-------------|--------------------|---|
| 1           | 2.403              | Pierwsza giętna pionowa antysymetryczna |
| 2           | 2.407              | Pierwsz giętna pionowa symetryczna      |
| 3           | 3.434              | Pierwsza giętna pozioma antysymetryczna |
| 4           | 3.448              | Pierwsza giętna pozioma symetryczna     |
| 5           | 6.097              | Druga giętna pionowa symetryczna        |

Na rys. 7.18 do 7.22 przedstawiono postacie drgań własnych analizowanej kładki.



**Rys. 7.18.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 2.403\text{Hz}$



**Rys. 7.19.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 2.407\text{Hz}$



**Rys. 7.20.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 3.343\text{Hz}$



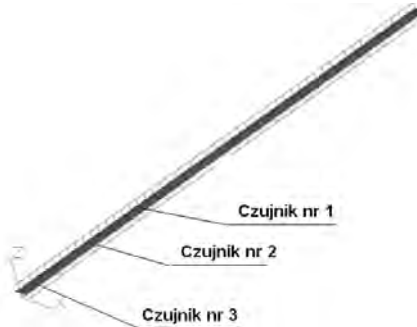
**Rys. 7.21.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 3.448\text{Hz}$



**Rys. 7.22** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 6.097\text{Hz}$

### 7.1.2.3. Rozmieszczenie czujników

Przebiegi przyspieszeń uzyskano od dr inż. Marka Pańtaka z Politechniki Krakowskiej. Czujniki zostały rozmieszczone na głównym przęśle kładki. Pierwszy zamocowano w połowie długości, drugi w 1/4 długości, trzeci nieopodal przyczółka. Sygnał próbkowano z częstotliwością 100Hz. Schemat usytuowania czujników pokazany jest na rysunku 7.23.



**Rys. 7.23.** Schemat kładki z pokazanym rozmieszczeniem czujników.



#### 7.1.2.4. Sposób wymuszenia

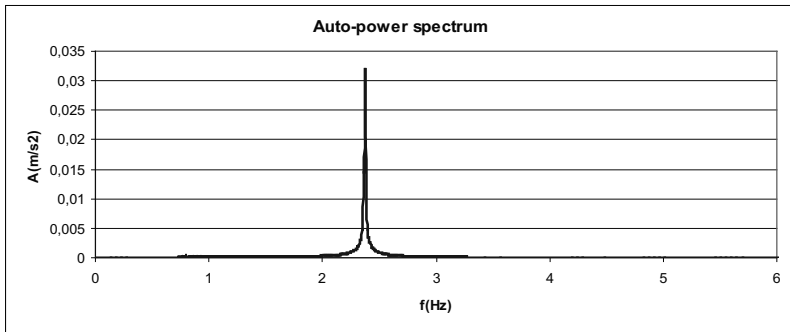
Wymuszenie realizowano przez skoki w połowie długości przęsła.

#### 7.1.2.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

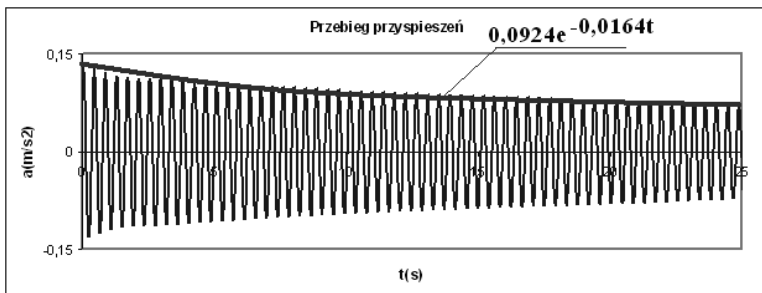
Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano trzema metodami:

- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą filtracyjno-regresyjną (filtr cyfrowy rodzaj: Butterworth band-pass, rząd: trzeci; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu).

Rysunek 7.24 przedstawia przykładowe widmo amplitudowe, rysunek 7.25 odfiltrowany przebieg przyspieszeń.

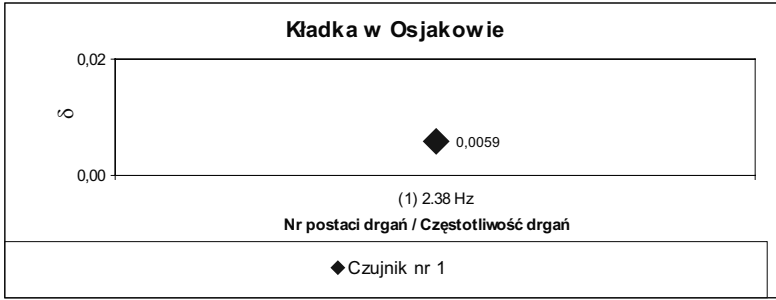


Rys. 7.24. Przykładowe widmo amplitudowe (czujnik nr 1).

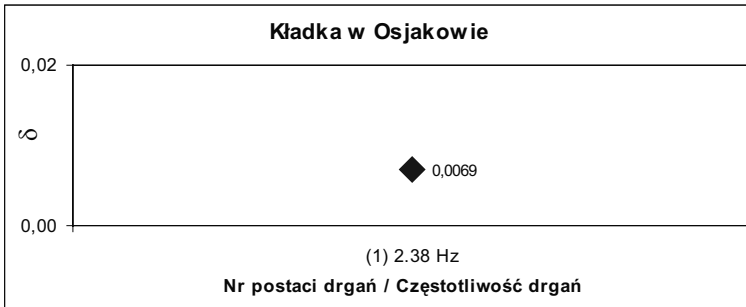


Rys. 7.25. Przykładowy przebieg przyspieszeń po filtracji (czujnik nr 1,  $f=2.38\text{Hz}$ ).

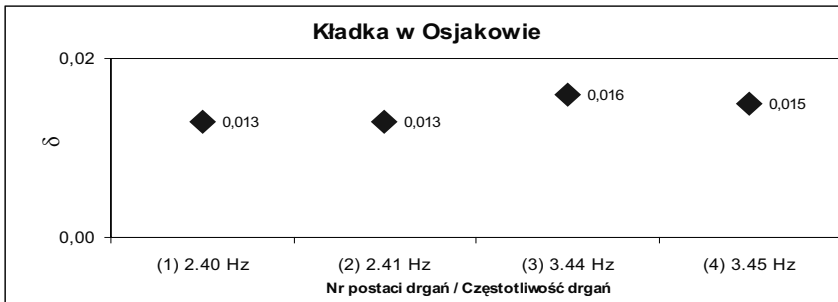
Rys 7.26 do 7.28 zestawiono otrzymane wyniki parametru tłumienia  $\delta$ .



Rys. 7.26. Wartości  $\delta$  uzyskane dzięki zastosowaniu metody kolokacyjnej.



Rys. 7.27. Wartości  $\delta$  uzyskane dzięki zastosowaniu metody filtracyjno-regresyjnej.



Rys. 7.28. Wartości  $\delta$  uzyskane dzięki zastosowaniu metody energetycznej.

#### 7.1.2.6. Omówienie uzyskanych wyników

Stosując metodę kolokacyjną i metodę filtracyjno-regresyjną opartą na filtracji przebiegów otrzymuje się prawie identyczne wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla kładki. Stosując metodę energetyczną przy określaniu parametrów tłumienia otrzymano dużo wyższe wartości  $\delta$ , spowodowane to może być dużymi rozbieżnościami w wartościach składowych logarytmicznego dekrementu

tłumienia dla poszczególnych materiałów i konstrukcji występujących w kładce. Prawidłowe wyniki  $\delta$  otrzymać można po dokładnym ustaleniu parametrów tłumienia dla poszczególnych konstrukcji wchodzących w skład badanej konstrukcji.

### 7.1.3. Kładka nad rzeką Bystrzycą w Lublinie w sąsiedztwie ulicy Janowskiej

#### 7.1.3.1. Opis konstrukcji kładki

Kładka położona jest za istniejącym mostem kolejowym linii Warszawa Dorohusk w odległości około 50m w górę rzeki, przy ul. Janowskiej. Jest to kładka pieszo – jezdna, o schemacie wolnopodpartym i konstrukcji stalowej z wypełnieniem pomostu w postaci żywicy epoksydowej o grubości 7mm. Podstawowe wymiary kładki: długość całkowita 31.4m, rozpiętość teoretyczna przęsła 25m, szerokość użytkowa 4m, wysokość dźwigarów stalowych 1.13m, wysokość bariery stalowej 1.25m. Głównym elementem kładki jest przęsło stalowe złożone z dwóch dźwigarów stalowych wykonanych z dwuteowych belek spawanych IKS 1100-11. W dźwigarach znajdują się żebra zewnętrzne w rozstawie, co 2.5m oraz wewnętrzne, co 1.25m. Połączone są one ze stalowym uźebrowanym pomostem. Pomost składa się z części dolnej złożonej z ceowników C200 mocowanych do dźwigarów stalowych w rozstawie, co 1.25m i części górnej składającej się z żeber podłużnych (ceowniki C50) w rozstawie, co 0,75m i blach wierzchnich pomostu.

Rysunki 7.27 i 7.28 pokazują fotografie badanej kładki.



Rys. 7.27. Widok ogólny kładki.



Rys. 7.28. Widok pomostu od dołu.

#### 7.1.3.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne kładki

Modele MES (rys. 7.29), zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych otrzymano dokładnie tak samo jak w modelach omówionych wcześniej.



**Rys. 7.29.** Model MES analizowanej kładki.

W wyniku analizy modalnej otrzymano zestaw postaci drgań własnych odkształconych wokół ich położenia równowagi statycznej. Dokładne zestawienie częstotliwości oraz postaci drgań analizowanej konstrukcji przedstawiono w tablicy 7.3.

**Tab. 7.3.** Częstotliwości oraz postaci drgań własnych analizowanej kładki

| Numer drgań | Częstotliwość [Hz] | Postacie drgań                             |
|-------------|--------------------|--|
| 1           | 3.995              | Drgania skrętne antysymetryczne blachownic |
| 2           | 4.019              | Drgania skrętne symetryczne blachownic     |
| 3           | 4.277              | Drgania skrętne antysymetryczne blachownic |
| 4           | 4.328              | Drgania skrętne antysymetryczne blachownic |
| 5           | 4.790              | Pierwsza giętą pionową symetryczną         |

Na rysunkach 7.30 do 7.34 przedstawiono postacie drgań własnych analizowanej kładki.



**Rys. 7.30.** Pierwsza postać drgań własnych  $f_1 = 3.995\text{Hz}$ .



**Rys. 7.31.** Druga postać drgań własnych  $f_2 = 4.019\text{Hz}$ .



**Rys. 7.32.** Trzecia postać drgań własnych  $f_3 = 4.277\text{Hz}$ .



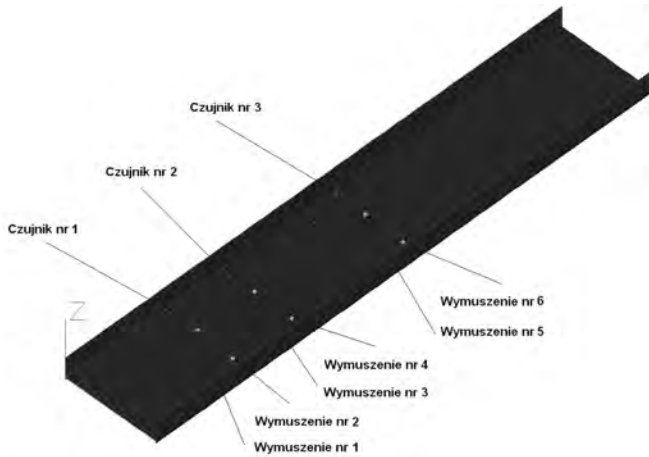
**Rys. 7.33.** Czwarta postać drgań własnych  $f_4 = 4.328\text{Hz}$ .



Rys. 7.34 Piąta postać drgań własnych  $f_5 = 4.790\text{Hz}$

### 7.1.3.3. Rozmieszczenie czujników

Czujniki zostały rozmieszczone na pomoście kładki przy poręczach. Pierwszy zamocowano w połowie długości, drugi w 1/4 długości, trzeci w 1/8 długości kładki. Sygnał próbkowano z częstotliwością 1200Hz. Schemat usytuowania czujników i miejsc, gdzie wymuszano drgania pokazano na rysunku 7.35.



Rys. 7.35 Schemat usytuowania czujników i miejsc gdzie wymuszano drgania.

### 7.1.3.4. Sposób wymuszenia

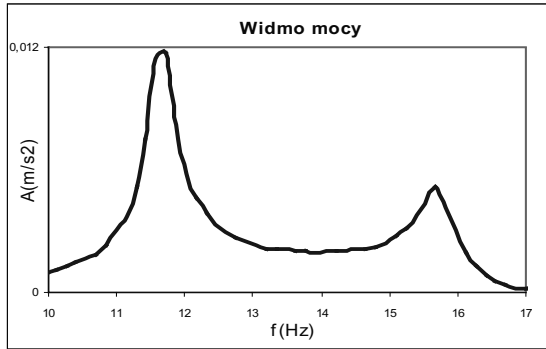
Wymuszenie realizowano przez skoki w sześciu punktach przęsła. W osi podłużnej kładki (1/2, 1/4, 1/8 długości) i w linii poręczy (1/2, 1/4, 1/8 długości)

### 7.1.3.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

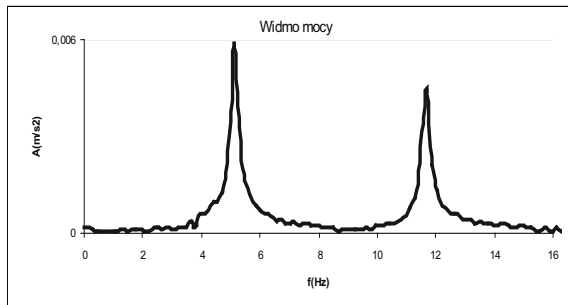
Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano trzema metodami:

- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą filtracyjno-regresyjną (filtr cyfrowy rodzaj: Butterworth band-pass, rząd: trzeci; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu).

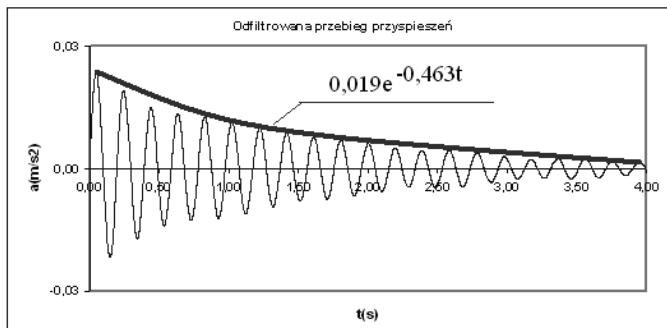
Rysunki 7.36, 7.37 przedstawiają przykładowe widma amplitudowe, rysunki 7.38, 7.39 pokazują przykładowe odfiltrowane przebiegi przyspieszeń.



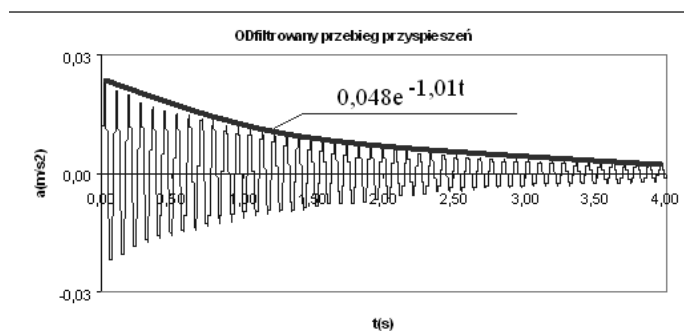
Rys. 7.36. Przykładowe widmo amplitudowe (wymuszenie; punkt 4, czujnik nr 3).



Rys. 7.37. Przykładowe widmo amplitudowe (wymuszenie; punkt 6, czujnik nr 3).

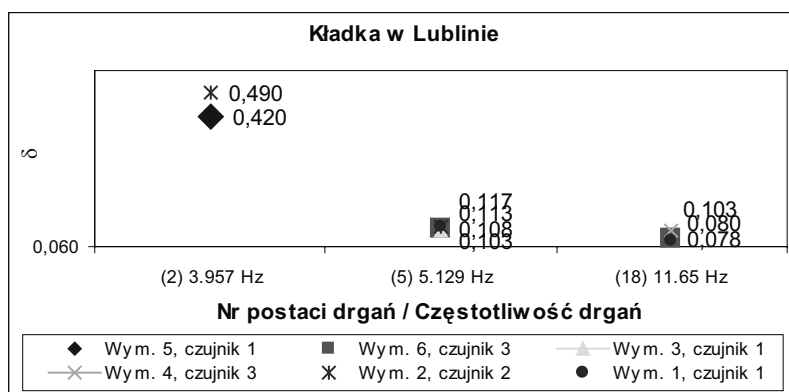


Rys. 7.38. Przykładowy przebieg przyspieszeń po filtracji (czujnik nr 3,  $f=5.129\text{Hz}$ ).

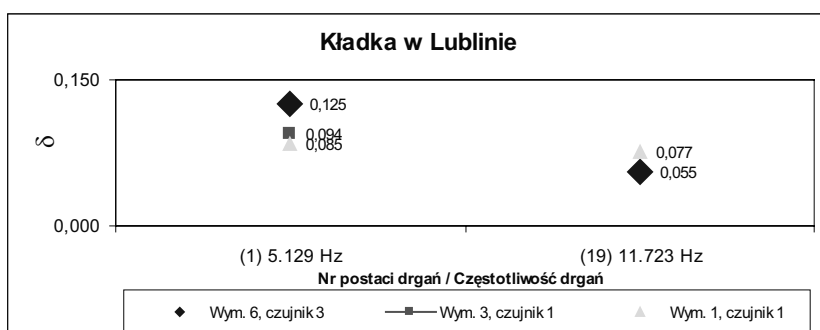


Rys. 7.39. Przykładowy przebieg przyspieszeń po filtracji (czujnik nr 3,  $f=11.723\text{Hz}$ ).

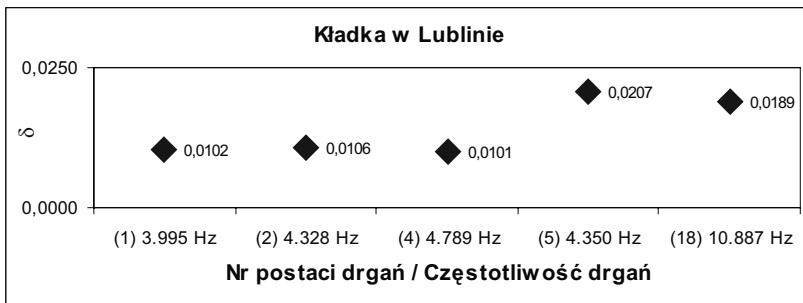
Rys. 7.40 do 7.42 przedstawiają otrzymane wyniki.



Rys. 7.40. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia uzyskane dzięki zastosowaniu metody kolokacyjnej.



Rys. 7.41. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia uzyskane dzięki zastosowaniu metody filtracyjno-regresyjnej.



**Rys. 7.42.** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia uzyskane dzięki zastosowaniu metody energetycznej.

#### 7.1.3.6. Omówienie uzyskanych wyników

Stosując metodę kolokacyjną i metodę opartą na filtracji przebiegów otrzymuje się prawie identyczne wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla kładki. Stosując metodę kolokacyjną otrzymuje się te same wartości  $\delta$  wymuszając drgania w różnych miejscach konstrukcji. Stosując metodę energetyczną przy określaniu parametrów tłumienia otrzymano dużo niższe wartości  $\delta$ , spowodowane to może być dużymi rozbieżnościami w wartościach składowych logarytmicznego dekrementu tłumienia dla poszczególnych materiałów i konstrukcji występujących w kładce.

### 7.1.4. Kładka przy hurtowni Eldorado w Lublinie

#### 7.1.4.1. Opis konstrukcji kładki

Kładka usytuowana jest przy wejściu do budynku działu logistyki firmy „Eldorado” w Lublinie od strony ul. Mełgiewskiej. Ma za zadanie przeprowadzenie ruchu pieszego ponad znajdującym się poniżej parkingiem. Jest to kładka stalowa, jednostronnie podwieszona. Podstawowe wymiary kładki: długość całkowita kładki 46.4m, rozpiętość teoretyczna przęseł: 16.8m, 13.9m, 13,3m, 2,4m, szerokość użytkowa obiektu 1.6m, wysokość słupów stalowych 4m, wysokość bariery stalowej z płaskownikami 1.2m.

Głównym elementem kładki są trzy przęsła stalowe złożone z blachownic o wysokości 70cm. Grubość półki blachownic wynosi 24mm, zaś średnica 19mm. Prostopadle do nich biegną teowniki o wy. 70mm w rozstawie 1.7m. Blachownice i teowniki skratowane są płaskownikami o przekroju 9mm x 60mm. Warstwą wierzchnią pomostu jest blacha kratowa z drobnymi oczkami. Bariereki wykonane są z płaskowników. Od strony wewnętrznej blachownice wzmocnione są żebrami w rozstawie 1.7m.



Ciążar pomostu przekazywany jest przez dwuteowniki HEB200 na stalowe słupy wykonane z rur o średnicy 275mm. W odległości 13.3m od połączenia z budynkiem, kładka została podwieszona za pomocą lin średnicy 50mm do konstrukcji budynku.

Rysunki 7.43, 7.44 przedstawiają fotografie obiektu.



Rys. 7.43. Widok ogólny kładki.

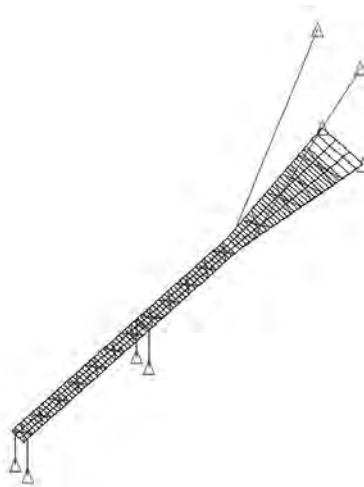


Rys. 7.44. Widok kładki z perspektywy pieszego.

#### 7.1.4.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne kładki

Modele MES, zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych otrzymano dokładnie tak samo jak w modelach omówionych wcześniej.

Rysunek 7.45 pokazuje model kładki wykorzystany w obliczeniach.



Rys. 7.45. Model MES kładki.

W wyniku analizy modalnej otrzymano zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Wyniki analizy przedstawiono w tablicy 7.4.

**Tab. 7.4.** Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanej kładki

| Numer drgań | Częstotliwość [Hz] | Postać drgań                     |
|-------------|--------------------|----------------------------------|
| 1           | 1,983              | Drgania symetryczne jednej linii |
| 2           | 1,984              | Drgania dwóch lin                |
| 3           | 1,985              | Drgania dwóch lin                |
| 4           | 1,986              | Drgania dwóch lin                |
| 5           | 2,163              | Drgania giętne poziome           |

Niżej przedstawiono postacie drgań własnych analizowanej kładki (rys. 7.46 do 7.50).



**Rys. 7.46.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 1,983\text{Hz}$ .



**Rys. 7.47.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 1.984\text{Hz}$ .



**Rys. 7.48.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 1.985\text{Hz}$ .

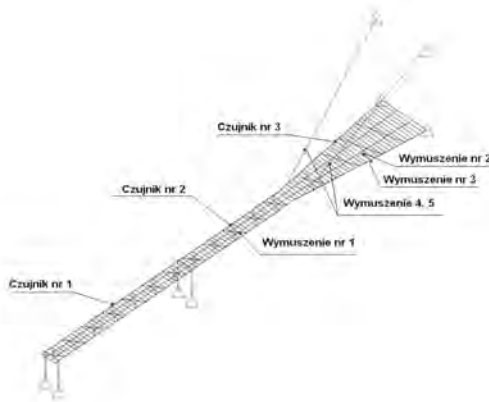


**Rys. 7.49.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 1.986\text{Hz}$ .



**Rys. 7.50.** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 2.163\text{Hz}$ .

### 7.1.4.3. Rozmieszczenie czujników



Rys. 7.51 Schemat usytuowania czujników i miejsc gdzie wymuszano drgania

### 7.1.4.4. Sposób wymuszenia

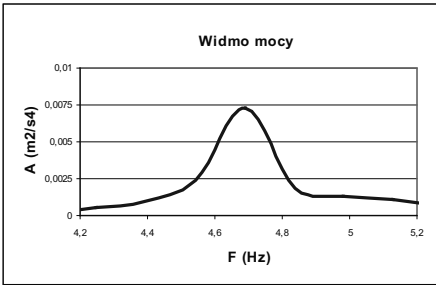
Wymuszenie realizowano przez skoki na kładce (wymuszenie numer 2 i 3), rozhuśtanie poziome kładki (wymuszenie 3), poziome ruchy i unoszenie lin (wymuszenie nr 4 i 5).

### 7.1.4.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

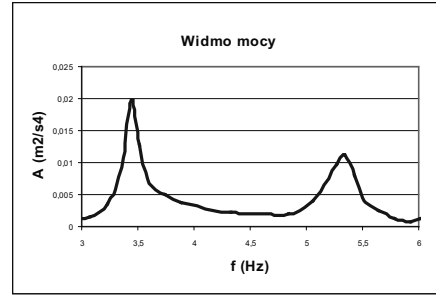
Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano trzema metodami:

- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą filtracyjno-regresyjną (filtr cyfrowy rodzaj: Butterworth band-pass, rząd: trzeci; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu).

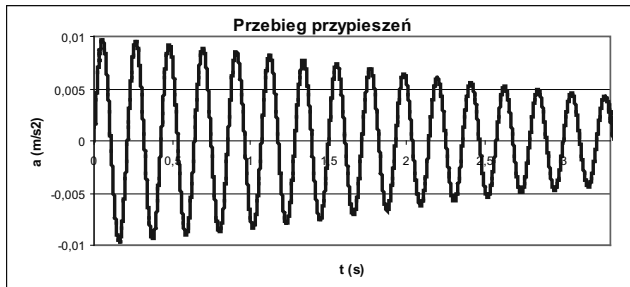
Rysunki 7.52, 7.53 przedstawiają przykładowe widma amplitudowe, rysunki 7.54, 7.55 pokazują przykładowe przebiegi przyspieszeń po zastosowaniu filtracji.



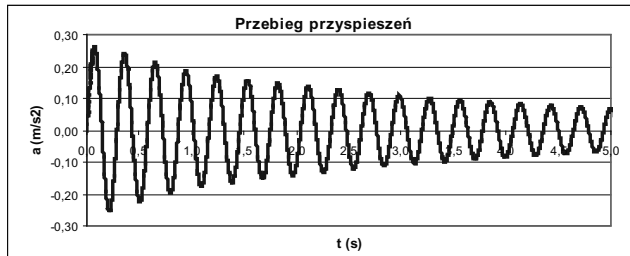
Rys. 7.52. Przykładowe widmo amplitudowe (wymuszenie nr 1, czujnik nr 1).



Rys. 7.53. Przykładowe widmo amplitudowe (wymuszenie nr 5, czujnik nr 3).

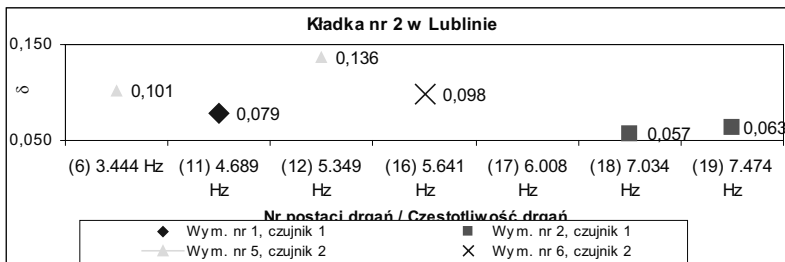


Rys. 7.54. Przykładowy przebieg przyspieszeń po filtracji (wym. nr 1, czujnik 1,  $f=4.689\text{Hz}$ ).

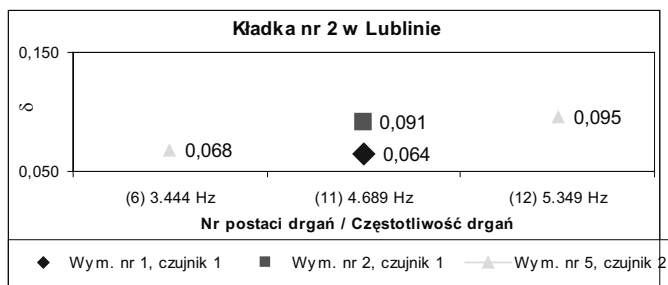


Rys. 7.55. Przykładowy przebieg przyspieszeń po filtracji (wym. nr 5, czuj. nr 2,  $f=3.443\text{Hz}$ ).

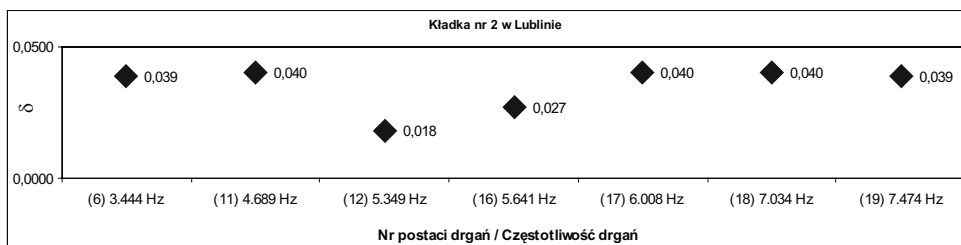
Rys. 7.56 do 7.58 przedstawiają otrzymane wartości  $\delta$ .



Rys. 7.56. Wartości  $\delta$  uzyskane dzięki zastosowaniu metody kolokacyjnej.



Rys. 7.57. Wartości  $\delta$  uzyskane dzięki zastosowaniu metody filtracyjno-regresyjnej.



Rys. 7.58. Wartości  $\delta$  uzyskane dzięki zastosowaniu metody energetycznej.

#### 7.1.4.6. Omówienie uzyskanych wyników

Stosując metodę kolokacyjną i metodę filtracyjno-regresyjną opartą na filtracji przebiegów otrzymuje się prawie identyczne wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla kładki. Stosując metodę kolokacyjną otrzymuje się te same wartości  $\delta$  wymuszając drgania w różnych miejscach konstrukcji. Stosując metodę energetyczną przy określaniu parametrów tłumienia otrzymano dużo niższe wartości  $\delta$ , spowodowane to może być dużymi rozbieżnościami w wartościach składowych logarytmicznego dekrementu tłumienia dla poszczególnych materiałów i konstrukcji występujących w kładce.

## 7.2. Mosty

### 7.2.1. Most w Puławach

#### 7.2.1.1. Opis konstrukcji mostu

Most łukowy w Puławach składa się z następujących głównych części konstrukcyjnych: dwóch łuków, pomostu, prętów podwieszających pomost do łuków mostu.

W konstrukcji mostu zastosowano dwa symetryczne łuki stalowe, każdy o rozpiętości 212 m między punktami podparcia. Rozpiętość całkowita każdego z łuków wynosi 268m. Wysokość łuków w najwyższym miejscu wynosi 36m nad poziomem podparcia. Łuki zaprojektowano jako elementy skrzynkowe, wykonane ze stalowych blach o przekrojach zmiennych. Grubość blach, z których wykonane są łuki zmienia się od 20 mm do 50 mm. Łuki zostały stężone trzema stalowymi wiatrownicami o konstrukcji skrzynkowej i dźwigarem poprzecznym, na którym opiera się pomost i dźwigarem podporowym.

Pomost został oparty w obrębie łuków na częściach konstrukcyjnych łuku; dźwigarze poprzecznym i zastrzale. Główne przęsło w obszarze łuku liczy 212 m. W przeprowadzonych analizach numerycznych uwzględniono 3 przęsła mostu poza częścią łukową w kierunku Radomia, które mają rozpiętości odpowiednio, licząc od podpory łuku, 80 m, 64 m i 64m, oraz dwa przęsła w kierunku Lublina o rozpiętościach, licząc od podpory łuku, 80 m i 44 m. Most został podparty na betonowych podporach posadowionych na betonowych palach. Pomost zaprojektowano jako wykonany ze stali i betonu. Na czterech stalowych dźwigarach podłużnych o wysokości 1,6 m, rozstawionych symetrycznie względem osi jezdni, zostały oparte w rozstawie co 4 m poprzecznice stalowe o szerokości 21,03 m. Na konstrukcji stalowej spoczywa pomost o całkowitej szerokości 21,6 m. Warstwy części jezdnej to: mieszanka grysowo-mastyksowa SMA jako warstwa ścieralna (4 cm), beton asfaltowy modyfikowany jako warstwa wiążąca (6 cm), izolacja - papa zgrzewalna ( 5 mm), płyta żelbetowa (27-36 cm).

W celu podwieszenia pomostu do łuków zastosowano 112 wieszaków. Pomost podwieszono w 28 miejscach za pomocą zestawu czterech prętów o średnicy 81 mm. Zestawy wieszaków zastosowano w odległościach od podpory: 28 m, 40 m, 52 m, 64 m, 76 m, 88 m i 100m ( dla połowy łuku). Dłuższe pręty zostały usztywnione przewiązkami. Prętom nadano odpowiedni naciąg wstępny.

Poniżej pokazano model MES (rys. 7.59) i uzyskane częstotliwości własne mostu w Puławach. Model Mes i obliczenia dynamiczne przeprowadzili pracownicy Katedry Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej (Flaga A., Szulej J. i inni, 2007). Podobnie jak wcześniej do obliczeń wykorzystano system Algor, oparty na metodzie elementów skończonych.



**Rys. 7.59.** Model MES mostu w Puławach.

Poniżej zestawiono fotografie przedstawiające most bez warstw izolacyjnych i jezdnych (rys. 7.60), „sprzęt” wymuszający drgania mostu (rys. 7.61), fotografie przedstawiające most w całości (rys. 7.62), „sprzęt” wymuszający drgania mostu (rys. 7.63).



**Rys. 7.60.** Most w Puławach (pomost bez warstw izolacyjnych i jezdnych).



**Rys. 7.61.** Sprzęt wymuszający drgania.



**Rys. 7.62.** Most w Puławach (most wykonany w całości).



**Rys. 7.63.** Sprzęt wymuszający drgania.

### 7.2.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne mostu

Poniżej pokazano model MES, uzyskane częstotliwości własne mostu w Puławach (most w fazie finalnej).

**Tab. 7.5** Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego mostu

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f_i$ [Hz] | Opis formy drgań   |
|------------------|--------------------------|--|
| 1                | 0.6760                   | Drgania giętne pionowe                                       |
| 2                | 0.7575                   | Drgania giętne poziome                                       |
| 3                | 1.1684                   | Drgania giętne poziome (przeciwległe drgania pomostu i łuku) |
| 4                | 1.2743                   | Drgania skrętne pomostu, giętne poziome łuku                 |
| 5                | 1.3377                   | Drgania giętne pionowe                                       |

Niżej przedstawiono postacie drgań własnych analizowanego mostu (rys. 7.64 – 7.68).



**Rys. 7.64.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 0.6760\text{Hz}$ .



**Rys. 7.65.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 0.7575\text{Hz}$ .



**Rys. 7.66.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 1.1684\text{Hz}$ .



**Rys. 7.67.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 1.2743\text{Hz}$ .





**Rys. 7.68.** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 1.3377\text{Hz}$ .

### 7.2.1.3. Rozmieszczenie czujników

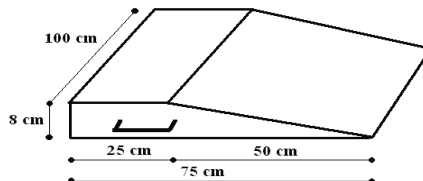
Czujniki przyspieszeń drgań rozmieszczono na przęśle głównym mostu. Trzy czujniki usytuowano w osi podłużnej przęsła (w połowie, jednej czwartej i trzech ósmych długości przęsła). Czwarty czujnik umiejscowiono na zewnątrz przęsła (w połowie jego długości). Rozmieszczenie czujników i miejsca dokonywanych wymuszeń pokazuje rysunek 7.69.



**Rys. 7.69.** Rozmieszczenie czujników przyspieszeń drgań na przęśle głównym z pokazaniem miejsc gdzie dokonywano wymuszenia (widok z góry).

### 7.2.1.4. Sposób wymuszenia

Drgania badanej konstrukcji wywoływano przez przejazd samochodu ciężarowego przez dębowy próg (rys. 7.70) w pięciu miejscach na głównym przęśle. Wymuszenia od W1 do W5 pokazano na rysunku 7.69.



**Rys. 7.70.** Charakterystyczne wymiary progu używanego w badaniach.

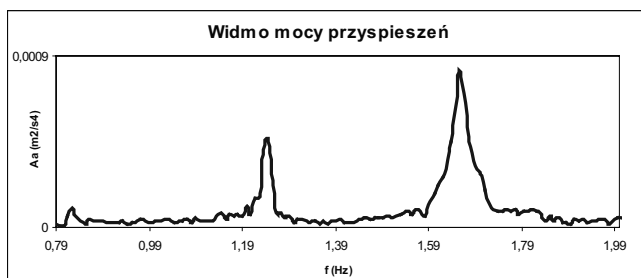
### 7.2.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano trzema metodami:

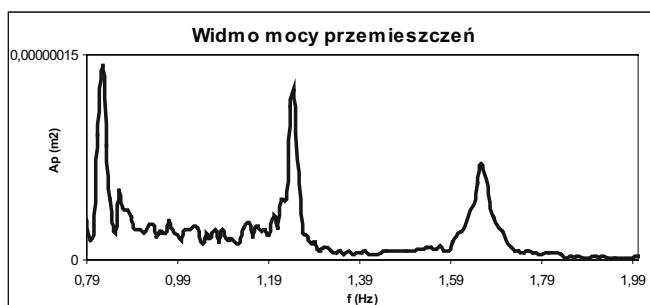
- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto-power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą filtracyjno-regresyjną (filtr cyfrowy rodzaj: Butterworth band-pass, rząd: trzeci; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu).

Obliczając parametry tłumienia drgań metodą kolokacyjną brano pod uwagę maksymalnie trzy reprezentatywne, czyli bliskie „nieodseparowane” częstotliwości własne. W przypadku wystąpienia w widmie mocy częstotliwości o małej amplitudzie (np.: częstotliwość trzecia rys. 7.72) uwzględniano ją w obliczeniach tylko ze względu na jej wpływ na częstotliwość numer jeden i dwa.

Rysunki 7.71, 7.72 przedstawiają przykładowe widma mocy przyspieszeń i przemieszczeń.



Rys. 7.71. Przykładowe widmo mocy przyspieszeń.



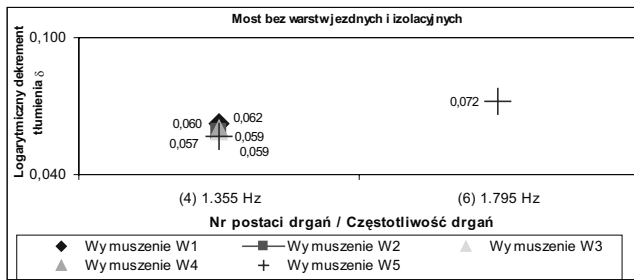
Rys. 7.72. Przykładowe widmo mocy przemieszczeń.

#### 7.2.1.5.1.1. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda kolokacyjną (rozpatrując przyspieszenia drgań)

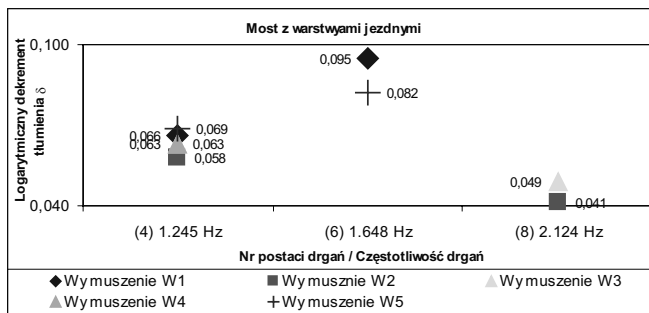
Poniżej zestawiono wartości  $\delta$  dla dwóch faz realizacji mostu (bez warstw izolacyjnych i jezdnych i w końcowej fazie realizacji).

**Tab. 7.6.** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody kolokacyjnej

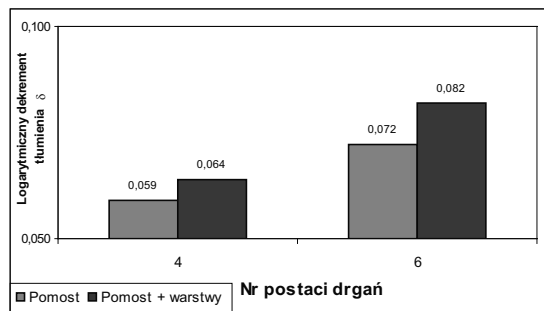
a) prześło główne bez warstw jezdnych i izolacyjnych



b) prześło główne z warstwami jezdnymi i izolacyjnymi



**Tab. 7.7.** Porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi)



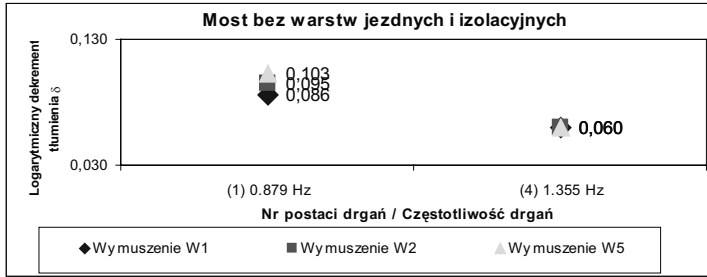
**Tab. 7.8.** Wzrost wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji mostu (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi)

|                              |     |    |
|------------------------------|-----|----|
| Numer postaci drgań          | 4   | 6  |
| Wzrost wartości $\delta$ (%) | 8,5 | 14 |

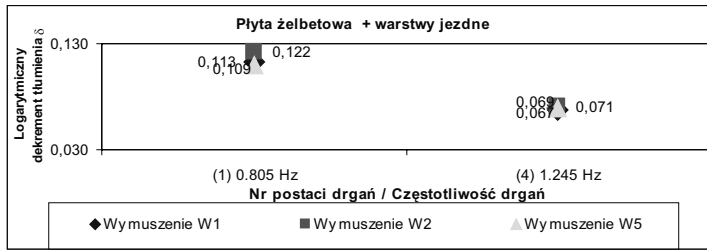
7.2.1.5.1.2 Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda kolokacyjną (rozpatrując przebiegi przemieszczeń drgań)

Tab. 7.9. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody kolokacyjnej

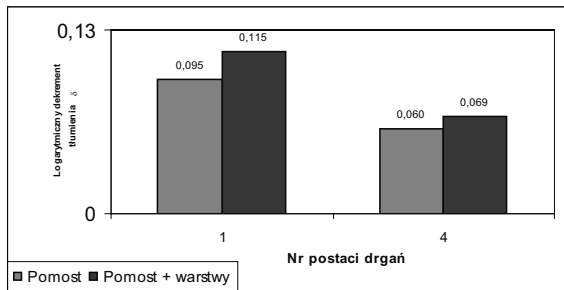
a) prześło główne bez warstw jezdnych i izolacyjnych



b) prześło główne z warstwami jezdnymi i izolacyjnymi



Tab. 7.10. Porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi)



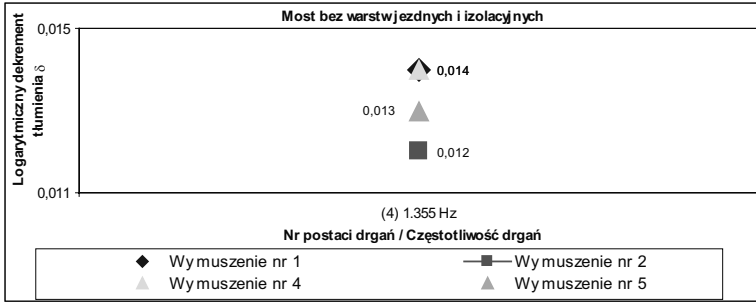
Tab. 7.11. Wzrost wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji mostu (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi)

|                              |    |    |
|------------------------------|----|----|
| Numer postaci drgań          | 1  | 4  |
| Wzrost wartości $\delta$ (%) | 21 | 15 |

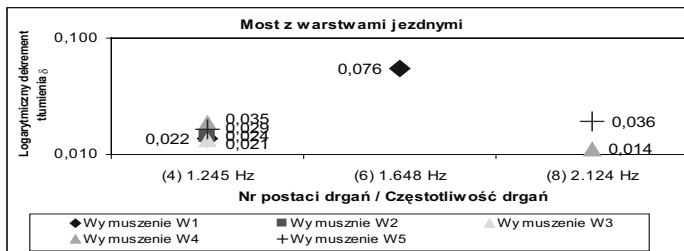
7.2.1.5.2 Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda filtracyjno-regresyjna

**Tab. 7.12** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody filtracyjno-regresyjnej.

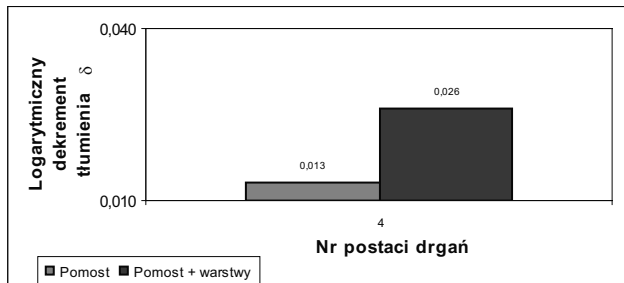
a) most bez warstw jezdnych i izolacyjnych



b) most z warstwami jezdnyymi i izolacyjnymi



**Tab. 7.13** Porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnyymi)



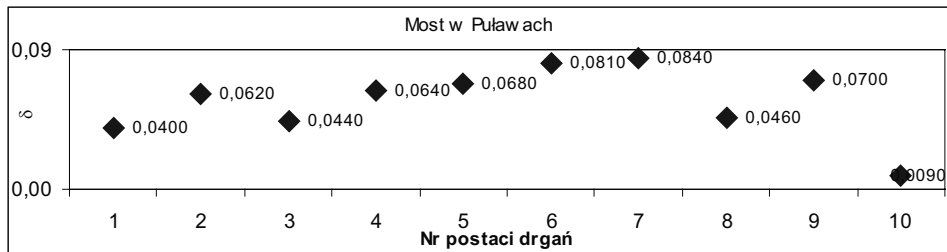
**Tab. 7.14.** Wzrost wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji mostu (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnyymi)

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| Numer postaci drgań          | 4   |
| Wzrost wartości $\delta$ (%) | 100 |

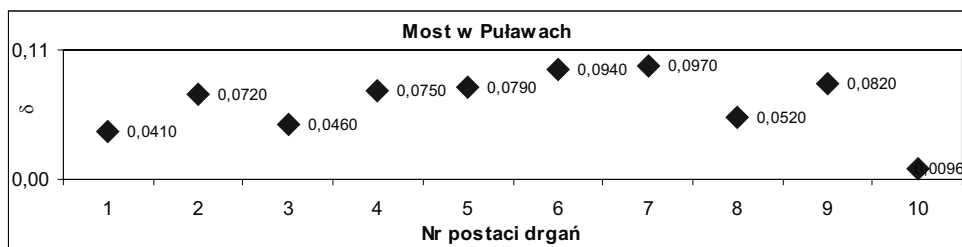
### 7.2.1.5.3. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda energetyczna

**Tab. 7.15.** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody energetycznej

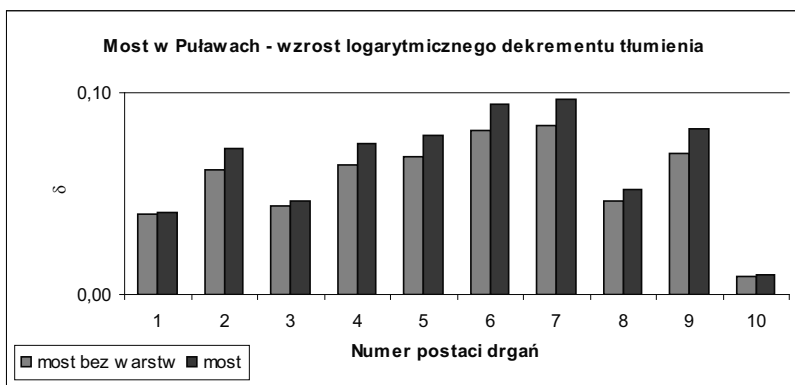
a) most bez warstw jezdnych i izolacyjnych



b) most z warstwami jezdnymi i izolacyjnymi



**Tab. 7.16.** Porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi)



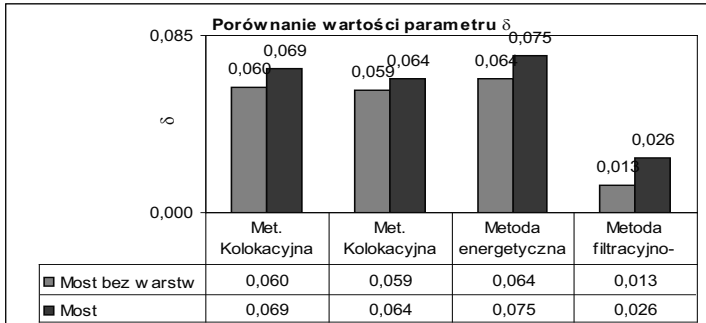
**Tab. 7.17.** Wzrost wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji mostu (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi)

| Numer postaci drgań          | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|------------------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Wzrost wartości $\delta$ (%) | 3 | 6 | 5 | 17 | 16 | 16 | 15 | 13 | 17 | 7  |

### 7.2.1.6 Omówienie uzyskanych wyników

Poniżej (tab. 7.18) zestawiono porównanie wartości parametru tłumienia  $\delta$  czwartej częstości własnej drgań w dwóch fazach realizacji mostu (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi) wykorzystując: metodę kolokacyjną (uwzględniając przebiegi przyspieszeń i przemieszczeń drgań), metodę opartą na szacowaniu energii kinetycznej drgającego układu i metodę filtracyjno-regresyjną.

**Tab. 7.18** Porównanie wartości parametru tłumienia  $\delta$



Wykorzystując metodę kolokacyjną otrzymano parametry tłumienia drgań dla kilku pierwszych częstości drgań mostu. Wyniki charakteryzują się dużą zgodnością (czwarta częstość własna), praktycznie bez większych rozrzutów wynikających z różnych miejsc gdzie dokonywano wmuszeń i miejsc pomiarów drgań. W metodzie kolokacyjnej wykorzystano przebiegi przyspieszeń i przemieszczeń, dzięki którym otrzymano większy możliwy do określenia zakres częstotliwości własnych (większą liczbę częstotliwości reprezentatywnych). Obliczenia parametru tłumienia  $\delta$  wykazały zbieżność wyników stosując widma mocy przyspieszeń i przemieszczeń.

Wykorzystując metodę kolokacyjną stwierdzono, że dodanie warstw ścieralnych i izolacyjnych na pomoście spowodowało wzrost wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia od 8 do około 20% w odniesieniu do różnych postaci drgań.

Stosując metodę filtracyjno-regresyjną otrzymano większe rozrzuty wartości  $\delta$ , dodanie warstw izolacyjnych i jezdnych spowodowało zawyżony wzrost wartości  $\delta$  sięgający 100%. Spowodowane to było filtracją częstości własnych drgań z sygnału z zaburzeniami.

Dzięki metodzie energetycznej (wykorzystującej całkowitą energię kinetyczną drgającego układu), otrzymano wartości  $\delta$  porównywalne z metodą kolokacyjną.

## 7.2.2. Most Jana Pawła II w Gdańsku

### 7.2.2.1. Opis konstrukcji mostu

Most przez Martwą Wisłę w ciągu Trasy Sucharskiego w Gdańsku jest konstrukcją podwieszoną, jednopylonową. Całkowita rozpiętość przeprawy wynosi 372 m. Długość przęsła podwieszonego wynosi 230 m. W części zalewowej od strony lewego brzegu Wisły zaprojektowano 3 kotwiące podpory pośrednie oraz stałe zamocowanie w przyczółku, natomiast od strony brzegu prawego przewidziano jedną podporę pośrednią i podparcie na przyczółku z możliwością wzdłuż osi mostu. Przęsło podwieszone mostu znajduje się na wysokości ok. 8 m ponad zwierciadłem wody Wisły.

Żelbetowy pylon ma kształt odwróconej litery Y. Całkowita wysokość pylonu wynosi 99 m. Kształt przekroju poprzecznego zbliżony jest do prostokąta o wymiarach 3,58x5 m w podstawie do 3,58x3,6 m na wysokości połączenia i od 8.18x3.6 m do 5x3.6 m w części górnej. Połączenie dwóch ukośnie zorientowanych elementów pylonu zaprojektowano na wysokości ok. 58 m. Grubość ścian pylonu zmienia się od 0,614 m do 0,5 m i od 0,8 m do 1,2 m. Wprowadzono dodatkowe usztywniające pylon pomosty o grubości 0,3 m w rozstawie ok. 5,5 m na wysokości pylonu. Wysokość punktów teoretycznego zakotwienia odciągów w pylonie wahają się od 62,83 do 97,63 m. Pylon został posadowiony na żelbetowej płycie opartej na 59 palach o długości 30 m i średnicy  $\varnothing$  1600 mm.

Pomost zaprojektowany został jako konstrukcja zespolona. Składa się on ze stalowych podłużnych belek nośnych o przekroju skrzynkowym, które połączone są z żelbetową płytą o grubości 23 cm. Konstrukcja stalowa została dodatkowo wzmocniona poprzecznikami w rozstawie 4 m w części podwieszanej, natomiast w części zalewowej 4,33 m.

Układ nośny mosty uzupełniają odciągi złożone z 1 do 3 lin składających się z 31 do 55 splotów 7-drutowych o średnicy 15,5 mm. W przęśle dłuższym (podwieszonym) przyjęto 15 podwieszeń obustronnych, natomiast 8 w przęśle krótszym. Zakotwienia odciągów rozstawione są w odległości 12 m w przęśle podwieszonym oraz 13 m w przęśle krótszym. Liny zostaną zakotwione biernie w pylonie, natomiast czynnie w pomoście. Długości lin wahają się od ok. 55 do ok. 209 m.

Opis konstrukcji sporządzono na podstawie opracowania (Flaga i inni, 2000).

Rys. 7.73 i 7.74 przedstawiają omawiany obiekt.





**Rys. 7.73.** *Ogólny widok mostu im. Jana Pawła II w Gdańsku.*



**Rys. 7.74.** *Ogólny widok mostu im. Jana Pawła II w Gdańsku.*

### 7.2.2.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne mostu

Poniżej pokazano model MES (rys. 7.75) i uzyskane częstotliwości własne mostu w Gdańsku. Model MES i obliczenia dynamiczne przeprowadzili pracownicy Katedry Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej (Flaga A. i inni, 2000). W obliczeniach wykorzystano system Algor, oparty na metodzie elementów skończonych.



**Rys. 7.75.** *Model MES mostu im. Jana Pawła II w Gdańsku.*

**Tab. 7.18.** *Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego mostu*

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f_i$ [Hz] | Opis formy drgań |
|------------------|--------------------------|------------------|
| 1                | 0,4056                   | giętna pomostu   |
| 2                | 0,6592                   | giętna pomostu   |
| 3                | 0,6600                   | skrętna pomostu  |
| 4                | 0,6663                   | drgania lin      |
| 5                | 0,6682                   | drgania lin      |

Niżej przedstawiono postacie drgań własnych analizowanego mostu (rys. 7.76 – 7.80).



**Rys. 7.76.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 0,4056\text{Hz}$ .



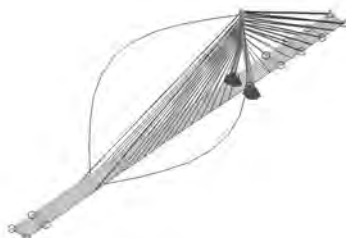
**Rys. 7.77.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 0,6592\text{Hz}$ .



**Rys. 7.78.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 0,6600\text{Hz}$ .



**Rys. 7.79.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 0,6663\text{Hz}$ .

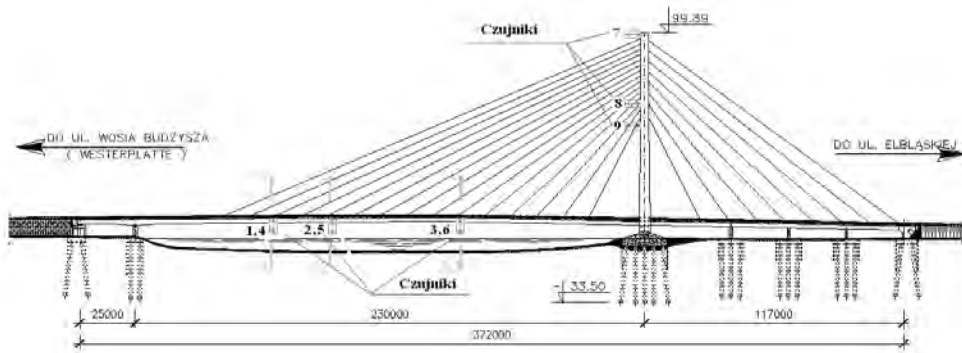


**Rys. 7.80.** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 0,6682\text{Hz}$ .

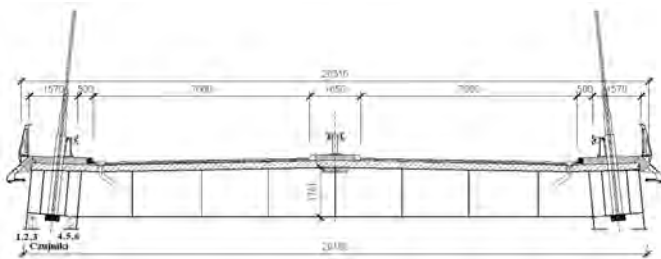
### 7.2.2.3. Rozmieszczenie czujników

Czujniki przyspieszeń drgań usytuowane były na wysokości przekrojów  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  (12 sztuk) i trzy na pylonie. Rozmieszczenie czujników pokazuje rys. 7.81 i 7.82.

Uzyskane przebiegi czasowe pochodzą z obciążeń próbnych przeprowadzonych przez zespół mgr inż. Macieja Malinowskiego z Politechniki Gdańskiej.



Rys. 7.81. Rozmieszczenie czujników przyspieszeń drgań (widok z boku).



Rys. 7.82. Rysunek pokazujący rozmieszczenie czujników przyspieszeń drgań (przekrój poprzeczny).

#### 7.2.2.4. Sposób wymuszenia

Przejazd samochodu ciężarowego przez dębowy próg (podobny do użytego w badaniach mostu w Puławach) umieszczony na wysokości przekroju  $A_2-A_2$ .

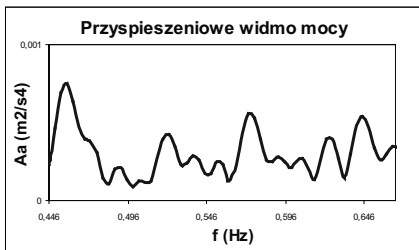
#### 7.2.2.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano trzema metodami:

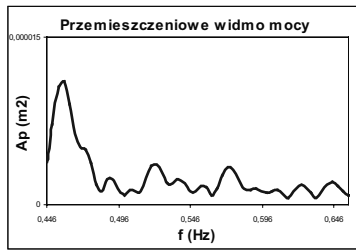
- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto-power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu).

Obliczając parametry tłumienia drgań metodą kolokacyjną brano pod uwagę maksymalnie trzy reprezentatywne, czyli bliskie „nieodseparowane” częstotliwości własne. W przypadku wystąpienia w widmie mocy częstotliwości o małej amplitudzie uwzględniano ją w obliczeniach tylko ze względu na jej wpływ na częstotliwość „reprezentatywną”.

Przykładowe widma mocy przyspieszeń pokazano na rysunku 7.83 i 7.84, natomiast uzyskane wyniki zestawiono w tablicach 7.19 do 7.21.

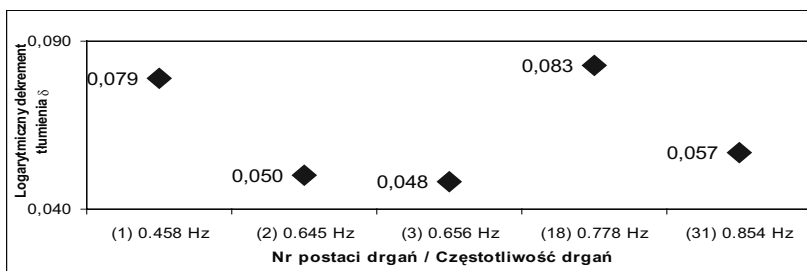


Rys. 7.83. Przykładowe widmo mocy przyspieszeń.

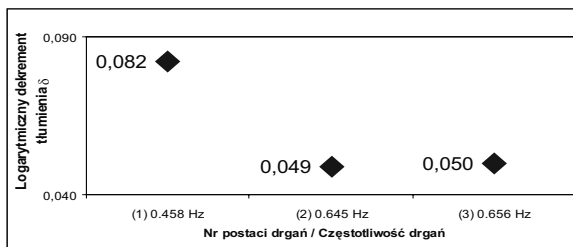


Rys. 7.84. Przykładowe widmo mocy przemieszczeń.

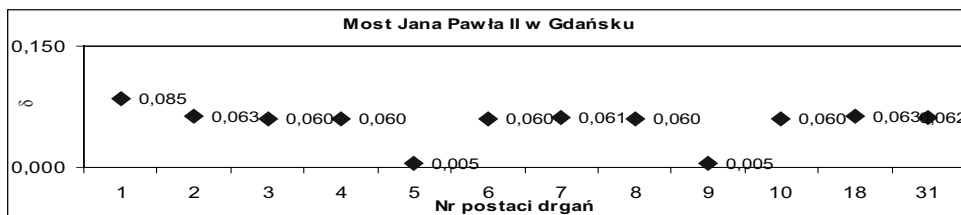
Tab. 7.19. Średnie wartości logarymicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody kolokacyjnej (rozpatrując przyspieszenia drgań)



Tab. 7.20. Średnie wartości logarymicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody kolokacyjnej (rozpatrując przemieszczenia drgań)



Tab. 7.21. Wartości logarymicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody energetycznej



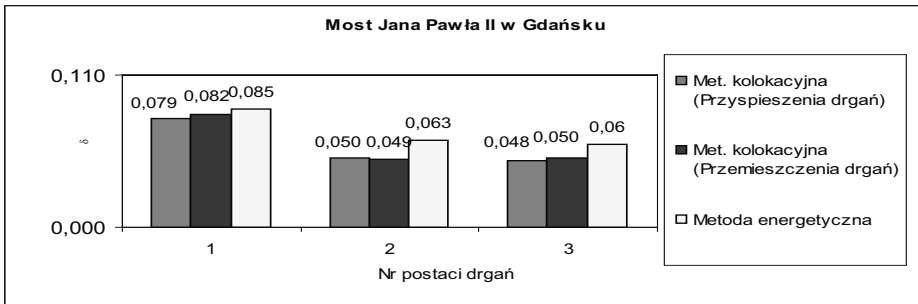
### 7.2.2.6 Omówienie uzyskanych wyników

Wykorzystując metodę kolokacyjną otrzymano parametry tłumienia drgań dla kilku pierwszych częstości drgań mostu. Wyniki charakteryzują się dużą zgodnością (dla trzech pierwszych częstości własnych).

Dzięki metodzie energetycznej (wykorzystującej całkowitą energię kinetyczną drgającego układu) otrzymujemy wartości  $\delta$  dla każdej postaci drgań, wyniki uzyskane dla trzech pierwszych postaci drgań pokazują zbliżone wyniki w porównaniu do metody kolokacyjnej.

Poniżej (tab. 7.22) zestawiono porównanie wartości parametru tłumienia  $\delta$  pierwszej, drugiej, trzeciej częstości własnej drgań mostu wykorzystując: metodę kolokacyjną (uwzględniając przebiegi przyspieszeń i przemieszczeń drgań), metodę opartą na szacowaniu energii kinetycznej drgającego układu.

**Tab. 7.22.** Porównanie wartości parametru tłumienia  $\delta$  pierwszej, drugiej, trzeciej częstości własnej mostu w Gdańsku



### 7.2.3. Most podwieszony w ciągu trasy Siekierkowskiej w Warszawie

#### 7.2.3.1. Opis konstrukcji mostu

Most Siekierkowski jest to konstrukcja podwieszona, dwupylonowa o długości przęsła podwieszonego wynosząca 250m. Rozpiętość przęseł bocznych wynosi 47m+77m.

Pylony zostały zaprojektowane jako dwie jednakowe konstrukcje o kształcie zbliżonym do litery H. Wysokość pylonów wynosi około 90m. Kształt przekroju poprzecznego nogi pylonu jest zbliżony do prostokąta ze ściętymi narożami o wymiarach 6m wzdłuż osi mostu i 3m w kierunku poprzecznym. Grubość ściany pylonu wynosi 0,87m do 1,2m w głównej części konstrukcji pylonu i 0,3m w części szczytowej. Nogi każdego z pylonów połączone są poprzecznymi ryglami umieszczonymi

w miejscach załamania osi nóg pylonu. Dolny rygiel stanowi podparcie dla konstrukcji nośnej pomostu. W górnym segmencie pylonu, powyżej górnego rygla, konstrukcja pylonu została wzmocniona blachą stalową o grubości 30mm.

Konstrukcja nośna pomostu składa się z dwóch blachownic stalowych o wysokości 2070mm usytuowanych w osiach lin oraz poprzecznic o takiej samej wysokości w rozstawie co 4m. Konstrukcja stalowa jest zespolona z żelbetową płytą. Rozstaw dźwigarów głównych wynosi 26100mm. Całkowita szerokość pomostu w przęśle głównym wynosi 33380mm. W prawobrzeżnej części mostu, w przęśle bocznym, rozstaw dźwigarów zwiększa się do 33100mm.

Kable podwieszające składają się z lin siedmiodrutowych o średnicy 15mm. Liczba lin składowych w kablu waha się od 43 do 76. Most podwieszony jest na 56 kablach – po 14 kabli podwieszających przęsło główne z każdej strony pomostu i 7 kabli podwieszających z każdej strony pomostu w każdym z przęseł bocznych. Zaprojektowano zakotwienia czynne w pylonie i bierne w pomoście.

Opis konstrukcji sporządzono na podstawie opracowania (Flaga i inni, 2001). Poniżej pokazano fotografie mostu Siekierkowskiego (rys. 7.85 7.86).



**Rys. 7.85.** Widok Mostu Siekierkowskiego w Warszawie.

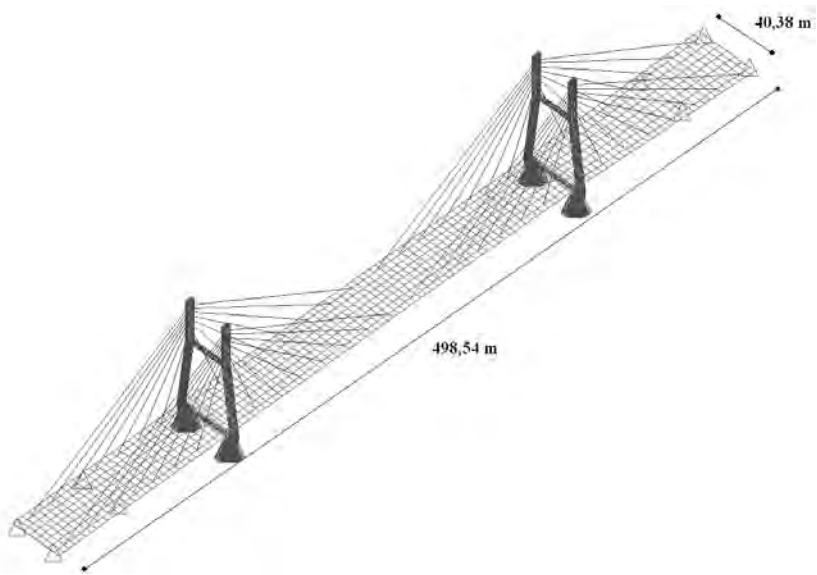


**Rys. 7.86.** Widok z boku Mostu Siekierkowskiego w Warszawie.

#### 7.2.3.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne mostu

Model Mes i obliczenia dynamiczne wykonali pracownicy Katedry Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej (Flaga A. i inni, 2001). W obliczeniach wykorzystano system Algor oparty na metodzie elementów skończonych.

Poniżej pokazano model MES (rys. 7.87), uzyskane częstości własne mostu w Siekierkowskiego w Warszawie (tab. 7.22).



Rys. 7.87. Model MES mostu Siekierkowskiego w Warszawie.

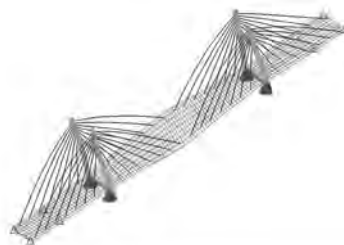
Tab. 7.22. Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego mostu

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f_i$ [Hz] | Opis formy drgań                        |
|------------------|--------------------------|---|
| 1                | 0,432                    | giętna pomostu                          |
| 2                | 0,485                    | skrętna pomostu, giętno-skrętna pylonów |
| 3                | 0,499                    | giętne pylonów, skrętna pomostu         |
| 4                | 0,548                    | giętne pomostu                          |
| 5                | 0,578                    | skrętna pylonów i pomostu               |

Niżej przedstawiono postacie drgań własnych analizowanego mostu (rys. 7.88 – 7.92).



Rys. 7.88. Pierwsza postać drgań własnych  $f_1 = 0,432$  Hz.



Rys. 7.89. Druga postać drgań własnych  $f_2 = 0,485$  Hz.



**Rys. 7.90.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 0,499\text{Hz}$ .



**Rys. 7.91.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 0,548\text{ Hz}$ .

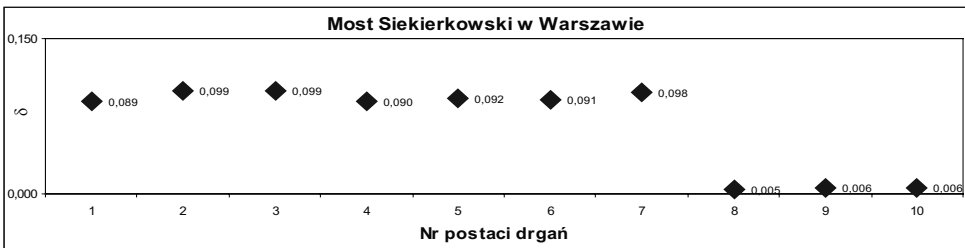


**Rys. 7.92.** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 0,578\text{ Hz}$ .

### 7.2.3.3. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Stosując metodę energetyczną uzyskano następujące wyniki (tab. 7.23).

**Tab. 7.23** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody energetycznej



### 7.2.3.4. Omówienie uzyskanych wyników

Wykorzystując metodę energetyczną (wykorzystującą całkowitą energię kinetyczną drgającego układu) otrzymujemy wartości  $\delta$  dla każdej postaci drgań. W przypadku postaci drgań, w których drgają elementy konstrukcji o dużej masie otrzymuje się współczynniki  $\delta$  o wartościach zbliżonych do współczynnika tłumienia tego elementu. Taki stan występuje w pierwszych ośmiu postaciach drgań własnych. Postać 8 – 10 to drgania lin i stąd niższe wartości  $\delta$ .



## 7.2.4 Most Krasieński (łukowy) w Warszawie – obiekt w fazie projektu

### 7.2.4.1. Opis konstrukcji mostu (obiekt w fazie projektu)

Most o rozpiętości 277m składa się ze stalowego łuku o wysokości ok. 37m połączonego cięgnami ze stalowo żelbetowym pomostem.

Łuk ma zmienny na wysokości przekrój, w górnej części stanowi jednolity skrzynkowy układ, w dolnej łączącej się z podporami rozdziela się na dwie części.

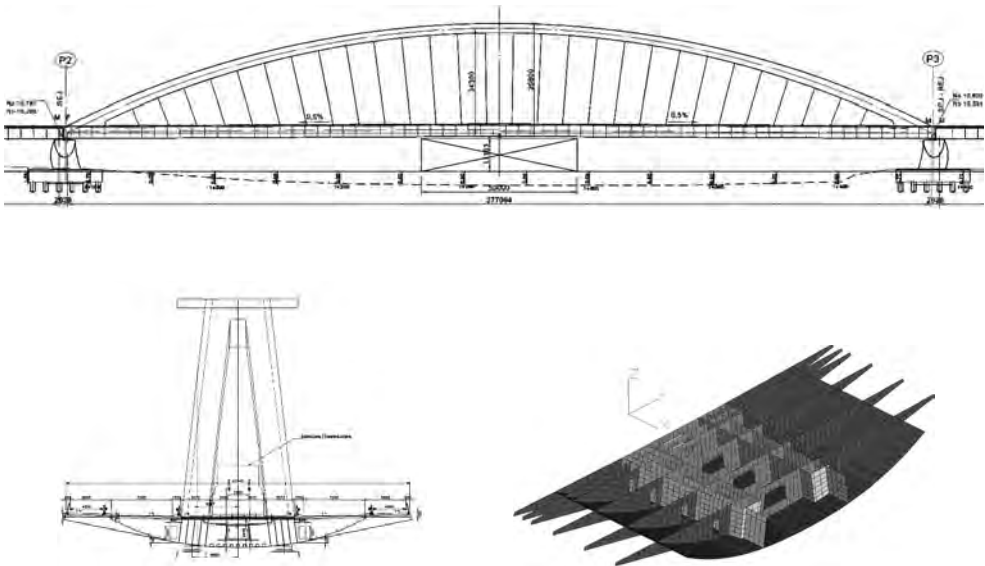
Pomost składa się z dwóch zasadniczych części: dolnej stalowej i górnej żelbetowej. Dolna część pomostu ma w przekroju poprzecznym kształt łuku i jest układem stalowym skrzynkowym. Górną część stanowi płyta żelbetowa o grubości 22cm.

Pod łukiem, pomiędzy linami przewidziano trakcje tramwajową. Na zewnętrznych, wspornikowych częściach pomostu usytuowane są pasy jezdne dla samochodów.

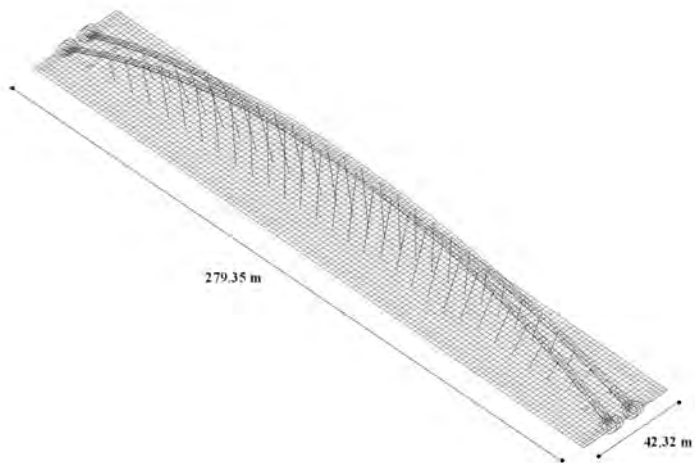
### 7.2.4.2 Model komputerowy (MES) i drgania własne mostu

Model Mes i obliczenia dynamiczne wykonali pracownicy Katedry Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej (Flaga A. i inni, 2008). Podobnie jak wcześniej do obliczeń wykorzystano system **Algor** oparty na metodzie elementów skończonych.

Poniżej pokazano fragment pomostu, przekroje (rys. 7.93) i model Mes (rys. 7.94) mostu Krasieńskiego w Warszawie.



Rys. 7.93. Fragment pomostu i przekroje mostu Krasieńskiego.



**Rys. 7.94.** Model MES mostu w Warszawie.

Wynikami analizy dynamicznej były częstotliwości własne (pierwsze pięć) zestawione w tab. 7.24.

**Tab. 7.24.** Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego mostu

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f_i$ [Hz] | Opis formy drgań               |
|------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 1                | 0,426                    | giętna pionowa pomostu i łuków |
| 2                | 0,491                    | giętna pozioma pomostu         |
| 3                | 0,801                    | skrętna pomostu                |
| 4                | 0,814                    | giętna pionowa pomostu i łuków |
| 5                | 0,934                    | skrętna pomostu i giętne łuków |

Niżej przedstawiono postacie drgań własnych analizowanego mostu (rys. 7.95 – 7.99).



**Rys. 7.95.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 0,426$  Hz.



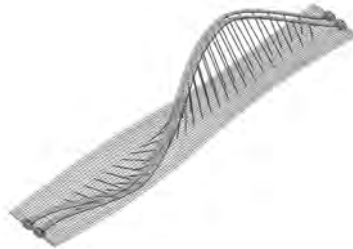
**Rys. 7.96.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 0,491$  Hz.



**Rys. 7.97.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 0,891\text{Hz}$ .



**Rys. 7.98.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 0,814\text{ Hz}$ .

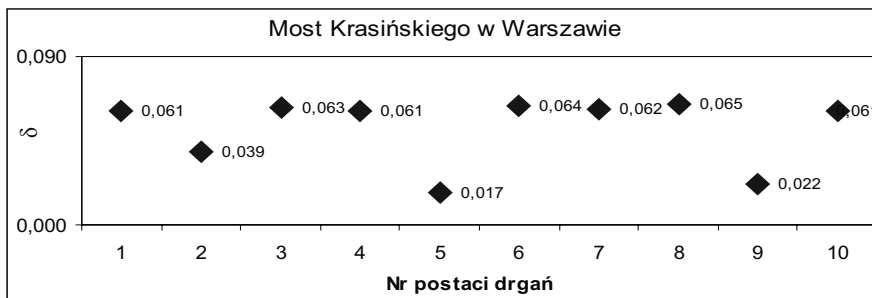


**Rys. 7.99.** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 0,934\text{ Hz}$ .

#### 7.2.4.3. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Stosując metodę energetyczną uzyskano następujące wyniki (tab. 7.25).

**Tab. 7.25.** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody energetycznej



#### 7.2.4.4. Omówienie uzyskanych wyników

Wykorzystując metodę energetyczną (wykorzystującą całkowitą energię kinetyczną drgającego układu) otrzymujemy wartości  $\delta$  dla każdej postaci drgań. Zaobserwować można dużą zmienność wartości  $\delta$  dla poszczególnych postaci drgań własnych, wynika to z drgań różnych elementów konstrukcji.

## 7.3. Wiadukt

### 7.3.1. Wiadukt na ulicy Grygowej w Lublinie

#### 7.3.1.1. Opis konstrukcji wiaduktu

Obiekt jest zlokalizowany w ciągu ul. Grygowej w Lublinie. Pomost wiaduktu złożony jest z dwóch materiałów: stali i żelbetu. Ze względu na występujące dylatacje, wiadukt ma schemat belki swobodnie podpartej. Konstrukcja wiaduktu ma rozpiętość 47.24 m. Składa się z 5 blachownic stalowych, rozstawionych co 2 m, i usztywnionych stężeniami co ok. 6 m. Na blachownicach spoczywa żelbetowa płyta o grubości 20 cm, oraz warstwa jezdni w postaci betonu asfaltowego o grubości 11 cm.

Rys. 7.100 - 7.101 pokazują omawiany obiekt.



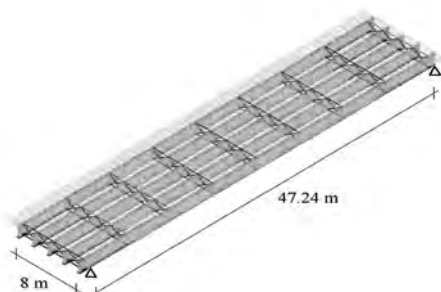
Rys. 7.100. Widok ogólny wiaduktu.



Rys. 7.101. Widok od dołu.

#### 7.3.1.2 Model komputerowy (MES) i drgania własne wiaduktu

Do obliczeń dynamicznych wiaduktu wykorzystano program Algor. Obliczenia przeprowadzono na przedstawionym na rys. 7.102 modelu wiaduktu.



Rys. 7.102. Model MES wiaduktu w Lublinie.

W wyniku analizy modalnej otrzymano zestaw postaci oraz częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Trzy częstotliwości przedstawiono w tabelicy 7.25.

**Tab. 7.25.** Częstotliwości i postaci drgań własnych analizowanej kładki

| Numer drgań | Częstotliwość [Hz] | Postać drgań                |
|-------------|--------------------|-----------------------------|
| 1           | 1,9278             | Zginanie, 1 symetryczna     |
| 2           | 2,3298             | Skręcanie                   |
| 4           | 6,7063             | Zginanie, 1 antysymetryczna |

Niżej przedstawiono postaci drgań własnych analizowanej kładki (rys. 7.103 - 7.105).



**Rys. 7.103.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 1,983\text{Hz}$ .



**Rys. 7.104.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 2,3298\text{Hz}$ .



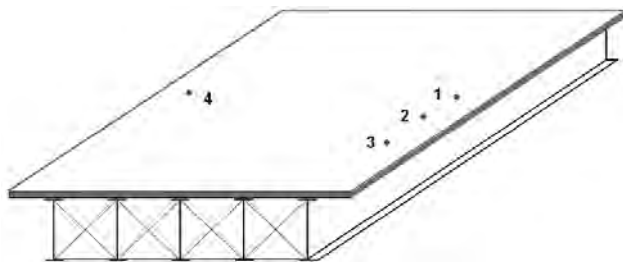
**Rys. 7.105.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 6,7063\text{Hz}$

### 7.3.1.3. Rozmieszczenie czujników

Wykonano dwie serie pomiarów:

- seria pierwsza - akcelerometry zamocowano w połowie, jednej czwartej i trzech ósmych rozpiętości przęsła wiaduktu;
- seria druga - dwa akcelerometry ustawione w połowie rozpiętości przęsła po przeciwnych stronach pomostu.

Rozmieszczenie czujników przyspieszeń pokazano na rys. 7.106.



Rys. 7.106. Rozmieszczenie czujników na wiadukcie.

#### 7.3.1.4. Sposób wymuszenia

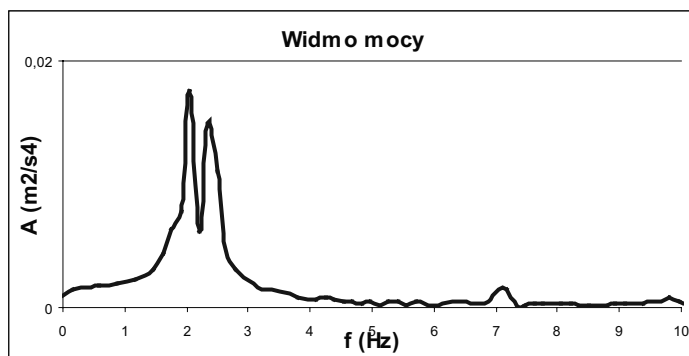
Drgania wymuszano przez przejazd samochodu ciężarowego przez próg umieszczony w odległości 1/4 długości wiaduktu (w pobliżu czujnika nr 3).

#### 7.3.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Logarytmiczny dekrement tłumienia dla pierwszej postaci drgań własnych obliczono czterema metodami:

- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą filtracyjno-regresyjną (filtr cyfrowy rodzaj: Butterworth band-pass, rząd: trzeci; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu), do obliczeń przyjęto:  $\delta_{\text{stali}}=0,04$ ,  $\delta_{\text{betonu}}=0,2$ ,  $\delta_{\text{asfaltu}}=0,15$ ,
- Metodą energetyczną (bazującą na energii potencjalnej drgającego układu), do obliczeń przyjęto:  $\delta_{\text{stali}}=0,04$ ,  $\delta_{\text{betonu}}=0,2$ .

Rys. 7.107 przedstawia przykładowe przyspieszeniowe widmo mocy.



Rys. 7.107. Przykładowe widmo amplitudowe (wymuszenie nr 1, czujnik nr 1).

Parametr tłumienia  $\delta$  obliczano trzema metodami. Wyniki zestawiono w tab. 7.26.

**Tab. 7.26.** Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego wiaduktu

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f$ (Hz) (Algor) | Częstotliwość $f$ (Hz) (Badania) | $\delta$               |             |                    |                     |
|------------------|--------------------------------|----------------------------------|------------------------|-------------|--------------------|---------------------|
|                  |                                |                                  | Filtracyjno-regresyjna | kolokacyjna | energia kinetyczna | energia potencjalna |
| 1 (giętna)       | 1,93                           | 2,05                             | -                      | 0,127       | 0,152              | 0,087               |
| 2 (skrętna)      | 2,33                           | 2,34                             | -                      | 0,089       | -                  | -                   |
| 4 (giętna)       | 6,71                           | 7.17                             | -                      | 0,126       | -                  | -                   |

#### 7.3.1.6. Omówienie uzyskanych wyników

Logarytmiczny dekrement tłumienia uzyskany z metody opartej na obliczaniu energii potencjalnej daje zaniżone wartości, natomiast wartości znacznie bardziej zbliżone do uzyskanych z badań otrzymuje się, określając współczynniki tłumienia na podstawie szacowania energii kinetycznej.

Metoda filtracyjno-regresyjna oparta na filtracji przebiegów jest dobra w przypadku bardzo odseparowanych częstości, ponieważ odfiltrować można tylko żądaną częstość własną.

Najdokładniejsze wyniki parametru  $\delta$  uzyskać można stosując metodę kolokacyjną.

## 7.4. Maszty

### 7.4.1. Maszt o wysokości 342 m z pięcioma poziomami odciągów w Piaskach koło Lublina

#### 7.4.1.1. Opis konstrukcji masztu

Podstawą do modelowania konstrukcji był projekt techniczny masztu antenowego Radiowo-Telewizyjnego Centrum Nadawczego Lublin-Piaski, wykonany przez Mostostal Zabrze w roku 1987. Maszt ten jest konstrukcją z trzema płaszczyznami odciągów, rozstawionymi równomiernie co  $120^{\circ}$ . Zaprojektowano pięć poziomów odciągów, które łączą się z trzonem masztu na wysokościach: 68 m, 135,5 m, 203 m, 270,5 m i 317,3 m n.p.t. Kąty nachylenia cięciw dwóch pierwszych odciągów do poziomu to  $45^{\circ}$ , a kolejnych to  $50^{\circ}$ ,  $54^{\circ}$  i  $55^{\circ}$ . Odciąg linowy wykonany są z lin

stalowych T1x91-Z-I-G-160 o średnicy 40 mm. Trzon masztu do wysokości 273 m n.p.t. ma przekrój trójkątny równoboczny o długości boku 3,2 m i zbudowany jest z następujących elementów:

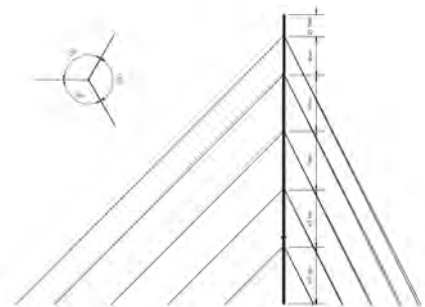
- krawężniki: rura o średnicy zewnętrznej 219 mm i grubości ściany od 12 do 22 mm;
- krzyżulce: rura o średnicy zewnętrznej 102 mm i grubości ściany od 7 do 12 mm;
- słupki: rura o średnicy zewnętrznej 76 mm i grubości ściany od 6 do 10 mm.

Powyżej tego poziomu kształt trzonu zmienia się na kwadratowy o długości boku 1,354 m, złożony z następujących elementów:

- krawężniki: rura o średnicy zewnętrznej 133 mm i grubości ściany 14 mm;
- krzyżulce: rura o średnicy zewnętrznej 57 mm i grubości ściany 6 mm;
- słupki: rura o średnicy zewnętrznej 51 mm i grubości ściany 6 mm.

Powyżej poziomu 317,3 m n.p.t. zamocowana jest antena telewizyjna o wysokości 25 m w kształcie rury o średnicy 1.915 m. Maszt stanowi konstrukcję wsporczą dla anten radiowych i telewizyjnych różnego typu. Wewnątrz trzonu masztu w części trójkątnej przewidziane jest zamocowanie drabiny i windy, natomiast w części kwadratowej – tylko drabiny.

Schemat masztu został przedstawiony na rys. 7.108, na rys. 7.109 fotografia masztu.



Rys. 7.108. Schemat geometryczny masztu.

Rys. 7.109. Widoki masztu w Piaskach.

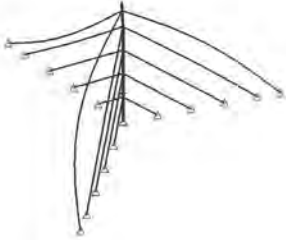
#### 7.4.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne masztu

Tab. 7.27. Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego masztu

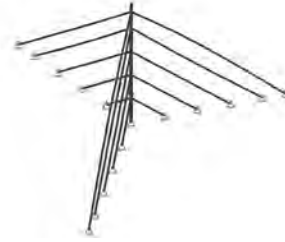
| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f_i$ [Hz] | Formy drgań |
|------------------|--------------------------|-------------|
| 1                | 0.1795                   | giętna      |
| 2                | 0.1806                   | giętna      |
| 3                | 0.1834                   | gł. liny    |
| 4                | 0.1934                   | giętna      |
| 5                | 0.1938                   | giętna      |



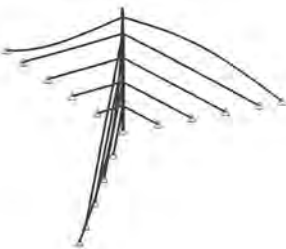
Niżej przedstawiono postacie drgań własnych analizowanego masztu (rys. 7.110 - 7.114).



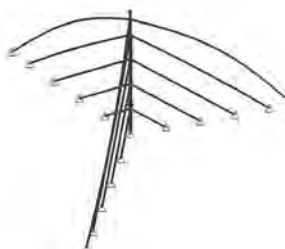
**Rys. 7.110** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 0.1795\text{Hz}$ .



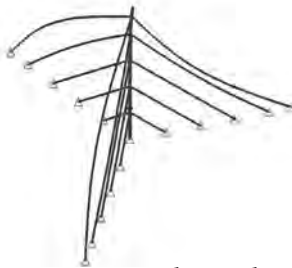
**Rys. 7.111** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 0.1806\text{Hz}$ .



**Rys. 7.112** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 0.1834\text{Hz}$ .



**Rys. 7.113** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 0.1934\text{Hz}$ .



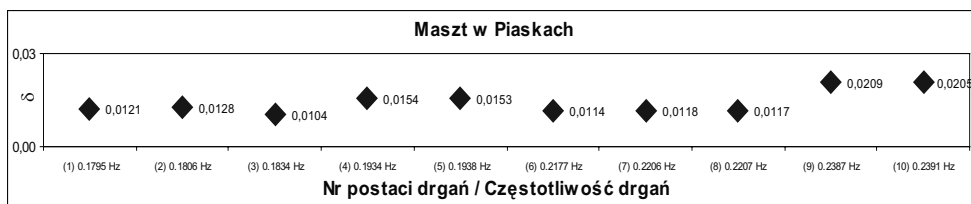
**Rys. 7.114** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 0.1938\text{Hz}$

#### 7.4.1.3 Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczono jedną metodą:

- Metodą energetyczną (bazującą na maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu). Do obliczeń przyjęto  $\delta_{\text{stal}}=0.03$ ,  $\delta_{\text{liny}}=0.01$ .

Obliczeń metodą kolokacyjną i metodą filtracyjno-regresyjną nie wykonano z powodu braku badań na obiekcie. Wartości parametru  $\delta$  zestawiono w tab. 7.28.



**Tab. 7.28.** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań masztu stosując metodę energetyczną.

#### 7.4.1.4. Omówienie uzyskanych wyników

Stosując metodę energetyczną otrzymuje się podobne wartości parametrów tłumienia  $\delta$  dla wszystkich postaci drgań. Ma to związek ze składowymi wartościami  $\delta$  dla poszczególnych materiałów. Parametr tłumienia może wahać się w granicach  $\delta_{lin}$  i  $\delta_{stali}$ , czyli logarytmicznym dekrementem tłumienia dla lin i dla stali.

### 7.4.2. Maszt o wysokości 130 m z dwoma poziomami odciągów w Giedlarowej koło Leżajska

#### 7.4.2.1. Opis konstrukcji masztu

Jest to konstrukcja stalowa o całkowitej wysokości około 130 m. Odciąg masztu znajdują się w 4 płaszczyznach równomiernie rozłożonych co  $90^\circ$ . Dwa poziomy odciągów konstrukcyjnych zaczepione są do trzonu na wysokościach 46,48 m i 86,48 m n.p.t. i tworzą one z płaszczyzną poziomą kąty  $43^\circ$  i  $60^\circ$ .

Trzon masztu ma przekrój kwadratu o boku około 2,8 m w części dolnej. Stanowi ją przeprojektowana konstrukcja dźwigu budowlanego LIEBHERR, składająca się z następujących elementów:

- krawężniki: 2 kątowniki 180x180x18,
- krzyżulce: przekrój zamknięty - 2 kątowniki 80x80x8,
- słupki: ceownik C140 lub przekrój zamknięty - 2 kątowniki 110x110x11.

Dwa pierwsze segmenty trzonu masztu o wysokości 8 m każdy są segmentami wzmocnionymi i składają się z następujących elementów:

- krawężniki: 2 kątowniki 180x180x18 + blacha o grubości 10 mm,
- krzyżulce: przekrój zamknięty - 2 kątowniki 80x80x8 lub przekrój zamknięty - 2 kątowniki 120x120x12,
- słupki: ceownik C140 lub przekrój zamknięty - 2 kątowniki 110x110x11.

Blachy w połączeniu kołnierzym segmentów zostały wzmocnione dodatkowymi żebrami. Część przejściową stanowi konstrukcja samowznosząca dźwigu. Na jej szczycie, po usunięciu kabiny operatora i żurawia montażowego, umieszczona została zbieżna część dźwigu. Na części zbieżnej umiejscowiona została nowoprojektowana szczytowa część konstrukcji trzonu masztu.

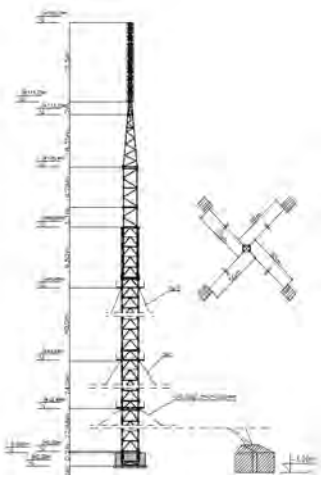
Część szczytową stanowi kratownica o boku 0,52 m, której konstrukcja składa się z następujących elementów:

- krawężniki: pręt lity  $\varnothing 40$ ;
- skratowanie: pręty  $\varnothing 20$ .

Część szczytowa masztu stanowi konstrukcję wsporczą dla systemu 48 anten telewizyjnych firmy SIRA typu UTV-01/48. Na poziomach zaczepienia odciągów konstrukcyjnych oraz odciągów montażowych (wys. 22,48 m) przewidziano galerie technologiczne (pomosty), które stanowią także konstrukcję wsporczą dla mocowania parabolicznych anten radiowych.

Na zewnątrz konstrukcji trzonu masztu znajduje się drabina. Ze względu na niezbyt wielką wysokość konstrukcji, nie przewidziano montażu windy.

Schemat masztu został przedstawiony na rys. 7.115 a na rys. 7.116 ogólny widok masztu.



Rys. 7.115. Schemat geometryczny masztu.



Rys. 7.116. Widok masztu w Giedlarowej.

#### 7.4.2.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne masztu

Tab. 7.28. Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego masztu

| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f_i$ [Hz] | Opis formy drgań    |
|------------------|--------------------------|---------------------|
| 1                | 0.7241                   | giętna, 1/2 fali    |
| 2                | 0.7259                   | giętna, 1/2 fali    |
| 3                | 0.9606                   | drgania lin górnych |
| 4                | 0.9632                   | drgania lin górnych |
| 5                | 0.9657                   | drgania lin górnych |

Niżej przedstawiono postacie drgań własnych analizowanego masztu (rys. 7.117 – 7.121).



**Rys. 7.117.** Pierwsza postać drgań własnych  
 $f_1 = 0.7241\text{Hz}$ .



**Rys. 7.118.** Druga postać drgań własnych  
 $f_2 = 0.7259\text{Hz}$ .



**Rys. 7.119.** Trzecia postać drgań własnych  
 $f_3 = 0.9606\text{Hz}$ .



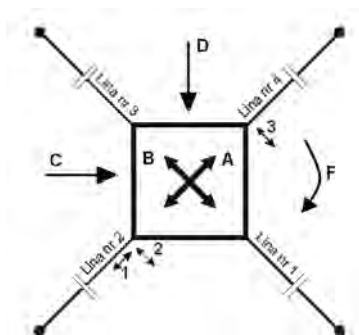
**Rys. 7.120.** Czwarta postać drgań własnych  
 $f_4 = 0.9632\text{Hz}$ .



**Rys. 7.121.** Piąta postać drgań własnych  
 $f_5 = 0.9657\text{Hz}$ .

#### 7.4.2.3 Rozmieszczenie czujników

Badania przeprowadzono na wysokości pierwszego pomostu (na wysokości 22.48 m). Rozmieszczenie czujników 1, 2, 3 i kierunki wymuszeń (A, B, C, D, E) pokazuje rys. 7.122.



Rys. 7.122. Rozmieszczenie czujników 1, 2, 3 i kierunki wymuszeń (A, B, C, D, E).

#### 7.4.2.4. Sposób wymuszenia

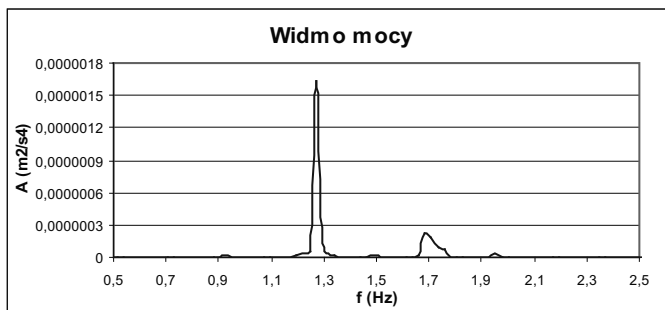
Rys. 7.122 pokazuje kierunki przeprowadzanych wymuszeń, które realizowały osoby znajdujące się na konstrukcji. Wymuszenia A i B realizowano wymuszając przemieszczenia równoległe do lin, wymuszenia C i D realizowano wywołując przemieszczenia pionowe i poziome, wymuszenie F polegało na wywołaniu drgań skrętnych trzonu.

#### 7.4.2.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

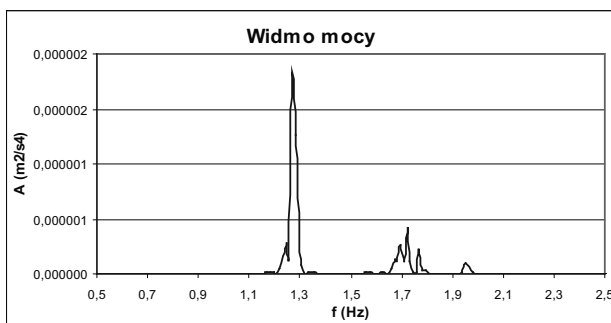
Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano trzema metodami:

- Metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),
- Metodą energetyczną (opartą na wyznaczaniu maksymalnej energii kinetycznej drgającego układu). Do obliczeń przyjęto  $\delta_{\text{stal}}=0.04$ ,  $\delta_{\text{liny}}=0.02$ .

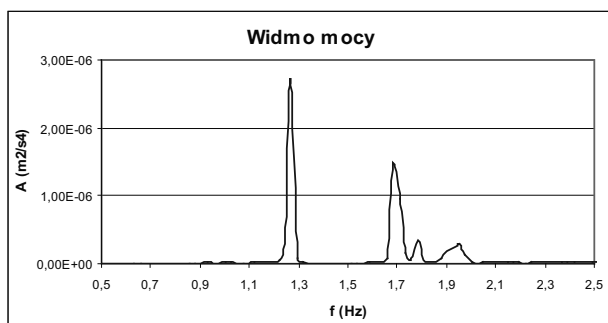
Poniżej zestawiono widma przyspieszeń drgań (Widmo mocy: „Auto power spectrum” program Catman 4.0) dla czujnika nr 1 uwzględniając wymuszenia A (rys. 7.123), B (rys. 7.124), C (rys. 7.125), D (rys. 7.126), E (rys. 7.127).



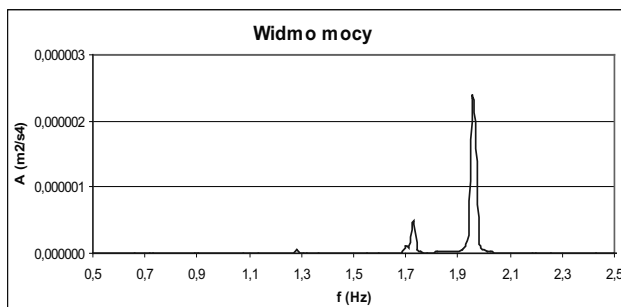
Rys. 7.123. Widmo przyspieszeń drgań czujnika nr 1, wymuszenie punkt A.



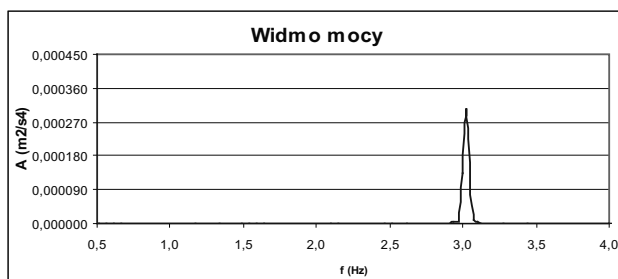
Rys. 7.124. Widmo przyspieszeń drgań czujnika nr 1, wymuszenie punkt B.



Rys. 7.125. Widmo przyspieszeń drgań czujnika nr 1, wymuszenie punkt C.



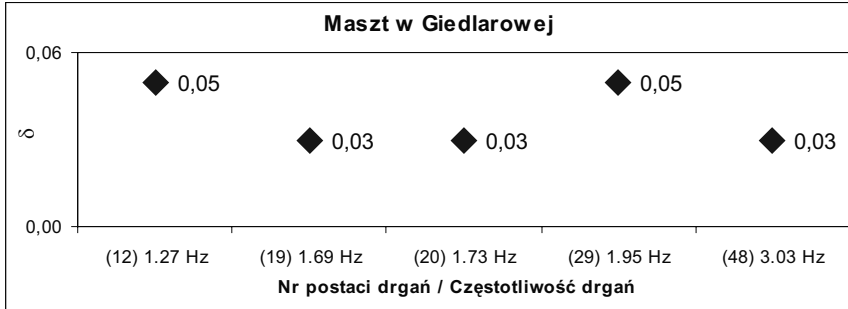
Rys. 7.126. Widmo przyspieszeń drgań czujnika nr 1, wymuszenie punkt D.



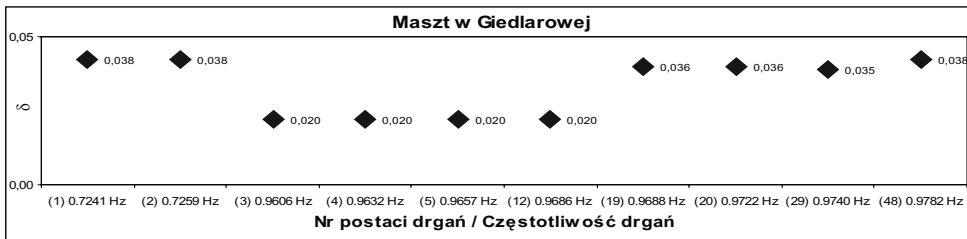
Rys. 7.127. Widmo przyspieszeń drgań czujnika nr 1, wymuszenie punkt E.

Wartości parametru  $\delta$  określano dwiema metodami. Wyniki zestawiono w tab. 7.29 i 7.30.

**Tab. 7.29.** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań masztu stosując metodę kolokacyjną



**Tab. 7.30.** Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań masztu stosując metodę energetyczną



#### 7.4.2.6. Omówienie uzyskanych wyników

W obliczeniach parametrów tłumienia wykorzystano metodę kolokacyjną i energetyczną (wykorzystującą całkowitą energię kinetyczną drgającego układu). Porównano wartości uzyskane stosując dwie metody i otrzymano zbliżone wartości  $\delta$ . Potwierdza to stwierdzenie, że wartości parametrów tłumienia drgań wyznaczone na podstawie szacowania energii kinetycznej drgającego układu, są zbliżone do tych, jakie otrzymano z metody kolokacyjnej, ale tylko w przypadku prostych konstrukcji wielomateriałowych.

## 7.5. Stropy

### 7.5.1. Strop w budynku wielorodzinnym na ulicy Fulmana w Lublinie

#### 7.5.1.1. Opis konstrukcji stropu

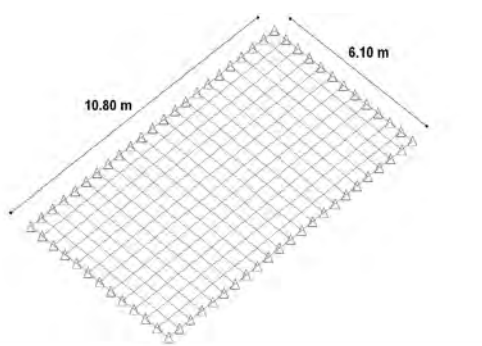
Badania przeprowadzono na monolitycznie wylewanym, żelbetowym stropie piwnic w budynku wielorodzinnym zlokalizowanym na ulicy Fulmana w Lublinie. Strop znajduje się przy ścianie zewnętrznej budynku. Wielkości opisujące strop: długość 10.80m, szerokość 6.10m, wysokość stropu 20cm. Na rysunku 7.127 przedstawiono budynek w którym zlokalizowany jest badany strop.

#### 7.5.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne stropu

Poniżej, na rys. 7.128 przedstawiono model MES stropu.



Rys. 7.127. Budynek, w którym znajduje się badany strop.



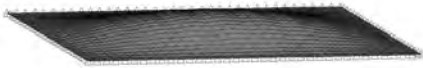
Rys. 7.128. przedstawiono model MES stropu.

Wykorzystując przedstawiony wcześniej model stropu obliczono w programie Algor częstotliwości drgań własnych i uzyskano odpowiadające im postaci drgań. W tab. 7.31 pokazano pięć pierwszych częstotliwości drgań własnych wraz opisem form drgań zaś na rysunkach od 7.129 do 7.133 zestawiono rysunki z postaciami drgań.

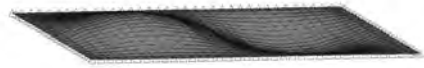


**Tab. 7.31.** Częstotliwości drgań i opis form drgań własnych

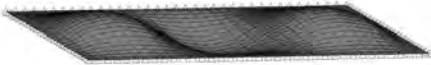
| Nr postaci drgań | Częstotliwość $f_i$ [Hz] | Opis formy drgań                              |
|------------------|--------------------------|---|
| 1                | 17.312                   | Pierwsza symetryczna (drgania wzdłużne)       |
| 2                | 24.086                   | Pierwsza antysymetryczna (drgania wzdłużne)   |
| 3                | 35.872                   | Druga symetryczna (drgania wzdłużne)          |
| 4                | 44.134                   | Pierwsza antysymetryczna (drgania poprzeczne) |
| 5                | 52.797                   | Antysymetryczna złożona                       |



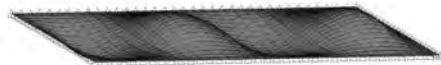
**Rys. 7.129.** Pierwsza postać drgań własnych  $f_1 = 17.312\text{Hz}$ .



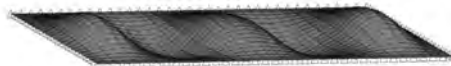
**Rys. 7.130.** Druga postać drgań własnych  $f_2 = 24.086\text{Hz}$ .



**Rys. 7.131.** Trzecia postać drgań własnych  $f_3 = 35.872\text{Hz}$ .



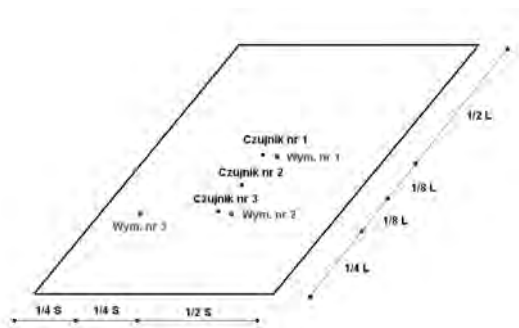
**Rys. 7.132.** Czwarta postać drgań własnych  $f_4 = 44.134\text{Hz}$ .



**Rys. 7.133.** Piąta postać drgań własnych  $f_5 = 52.797\text{Hz}$ .

### 7.5.1.3. Rozmieszczenie czujników

Czujniki rozmieszczono w połowie, trzech ósmych i jednej czwartej długości stropu w jego osi podłużnej. Umieszczenie czujników i miejsc gdzie dokonywano wymuszeń pokazuje rys. 7.134.



**Rys. 7.134.** Schemat przedstawiający rozmieszczenie czujników przyspieszeń i miejsc wymuszeń.

### 7.5.1.4. Sposób wymuszenia

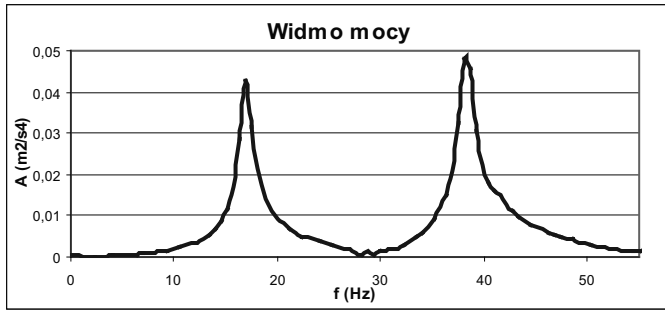
Wymuszenie realizowano uderzając belką drewnianą w trzech punktach odpowiadających oznaczeniom: wym. 1 (połowa długości w osi podłużnej), wym. 2 (jedna czwarta długości w osi podłużnej), wym. 3 (jedna czwarta długości i szerokości stropu) na rysunku 7.134.

### 7.5.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

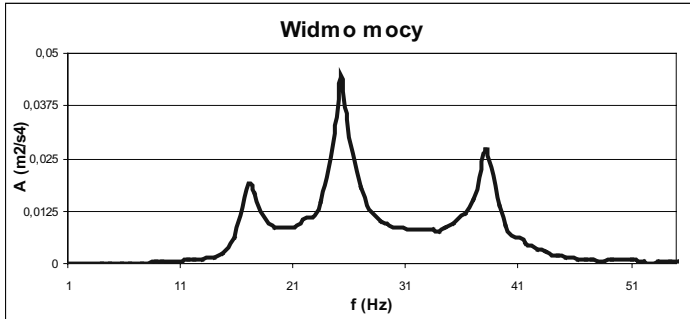
Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto power spectrum”; program Catman 4.0),

Nie przeprowadzano obliczeń  $\delta$  wykorzystując filtrację przebiegów, gdyż otrzymane widma ujawniły bliskie częstotliwości własne, co powodowałoby duże błędy w odfiltrowanych przebiegach przyspieszeń, nie stosowano również metody energetycznej z powodu rozpatrywania konstrukcji o ciągłym rozkładzie masy.

Rysunki 7.135, 7.136 przedstawiają przykładowe przyspieszeniowe widma mocy.



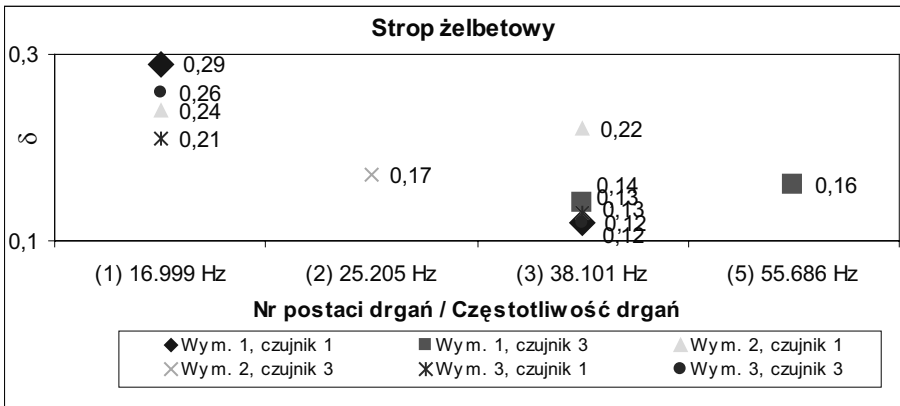
Rys. 7.135. Widmo mocy (czujnik nr 1, wymuszenie nr 1).



Rys. 7.136. Widmo mocy (czujnik nr 3, wymuszenie nr 2).

Wartości parametru  $\delta$  określano metodą kolokacyjną. Wyniki zestawiono w tab. 7.32.

Tab. 7.32. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań masztu stosując metodę kolokacyjną



### 7.5.1.6. Omówienie uzyskanych wyników

Średnie wartości  $\delta$ , obliczane metodą kolokacyjną, zestawiono w tab. 7.33.

**Tab. 7.33.** Średnie wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań masztu stosując metodę kolokacyjną

| Nr postaci drgań | f (Hz) Algor | f (Hz) Badania | $\delta$ średnie wartości |             |              |
|------------------|--------------|----------------|---------------------------|-------------|--------------|
|                  |              |                | Metoda                    |             |              |
|                  |              |                | kolokacyjna               | filtracyjna | energetyczna |
| 1                | 17.312       | 16.999         | 0,25                      | -           | -            |
| 2                | 24.086       | 25.205         | 0,17                      | -           | -            |
| 3                | 35.872       | 38.101         | 0,14                      | -           | -            |
| 4                | 44.134       | 44.549         | 0,16                      | -           | -            |

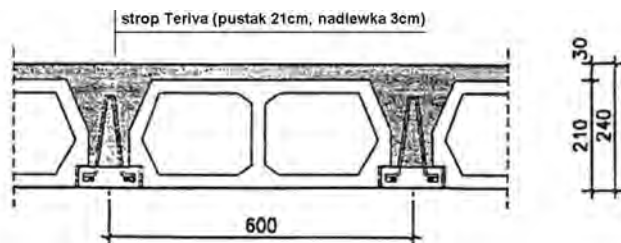
Podsumowując można stwierdzić, że postaci drgań konstrukcji wykonanej z jednego materiału posiadają nieznacznie ale jednak różne wartości parametru tłumienia  $\delta$ . Wynika to z faktu ujawniania się różnych form drgań, różnie dyssypujących energię.

## 7.5.2. Strop w budynku jednorodzinny usytuowanym pod Lublinem

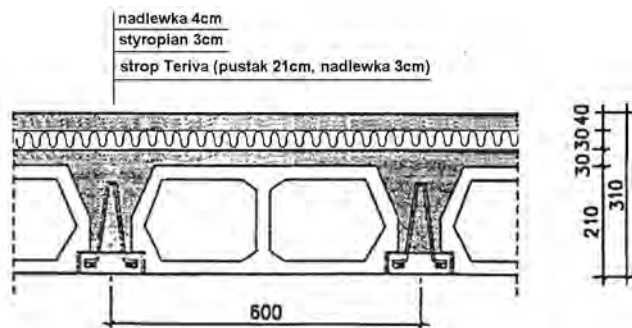
### 7.5.2.1. Opis konstrukcji stropu

Badania drgań przeprowadzono na stropie Teriva I w nowo wznoszonym budynku jednorodzinny, co umożliwiło badania stropu w różnych etapach jego budowy. Omawiany strop znajdował się nad kondygnacją parteru. Wymiary badanego stropu: szerokość 3.60m, długość 5.40m. Badania przeprowadzono w dwóch stanach budowy stropu:

1. Strop tzw. „goły”, czyli Strop Teriva składający się z pustaków wysokości 21 cm, belek stropowych i warstwy wyrównawczej wynoszącej 3cm (rys. 7.137),
2. Strop w stanie jak wyżej plus izolacja akustyczna ze styropianu o grubości 3cm i wylewki betonowej o grubości 4cm. Na stropie postawiono lekkie ścianki działowe z betonu komórkowego. (rys.7.138)



**Rys. 7.137.** Przekrój stropu Teriva I podczas pierwszego badania.



Rys. 7.138. Przekrój stropu Teriva I podczas drugiego badania.

Poniższe zdjęcia pokazują budynek (rys. 7.139), w którym przeprowadzono badania i strop (rys. 7.140) podczas drugiej fazy badań.



Rys. 7.139. Budynek, w którym przeprowadzono badania drgań stropu.



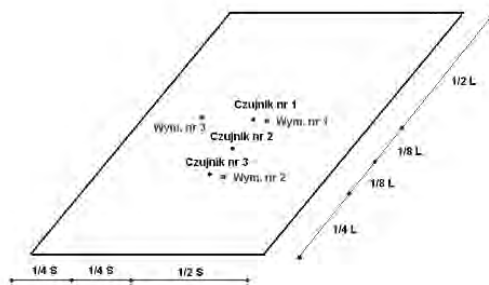
Rys. 7.140. Widok stropu (II faza badań).

#### 7.5.2.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne stropu

Nie stworzono modelu MES stropu. Numer częstości drgań własnych określano bezpośrednio z przyspieszeniowych widm mocy. Rodzaj postaci drgań ze względu na układ (prosty płytowy) nie był wymagany. Nie wykonywano obliczeń  $\delta$  metodą energetyczną ze względu na ciągły rozkład masy płyty.

#### 7.5.2.3. Rozmieszczenie czujników

Rys. 7.141 przedstawia rozmieszczenie czujników przyspieszeń i miejsc gdzie dokonywano wymuszeń drgań.



Rys. 7.141. Rozmieszczenie czujników przyspieszeń i miejsc wymuszeń drgań.

#### 7.5.2.4. Sposób wymuszenia

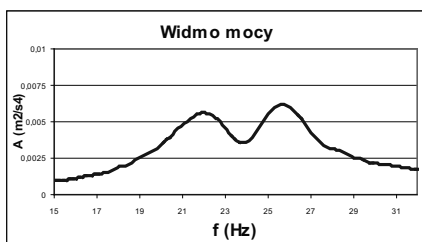
Wymuszenie realizowano uderzając drewnianą belką w trzech miejscach płyty odpowiadających oznaczeniom: wym. 1 (połowa długości w osi podłużnej), wym. 2 (jedna czwarta długości w osi podłużnej), wym. 3 (jedna czwarta długości w osi poprzecznej). Miejsca wymuszeń przedstawia rys. 7.141.

#### 7.5.2.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia drgań

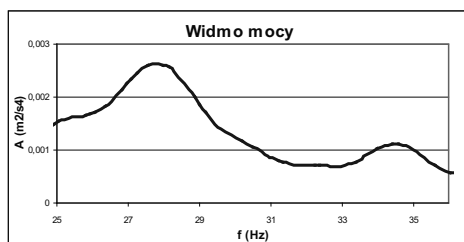
Logarytmiczny dekrement tłumienia dla poszczególnych postaci drgań własnych obliczano metodą kolokacyjną (Widmo mocy: „Auto-power spectrum”; program Catman 4.0),

Nie przeprowadzano obliczeń  $\delta$  wykorzystując filtrację przebiegów, gdyż otrzymane widma ujawniły bliskie częstotliwości własne, co powodowałoby duże błędy w odfiltrowanych przebiegach przyspieszeń i przez to duże błędy  $\delta$ , nie stosowano również metody energetycznej z powodu rozpatrywania konstrukcji o jednakowym rozkładzie poszczególnych warstw stropu.

Poniżej zestawiono przykładowe przyspieszeniowe widma mocy (rys.7.142 i 7.143).

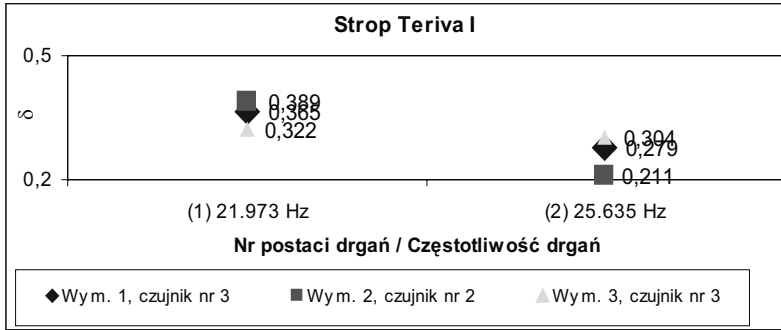


Rys. 7.142. Przyspieszeniowe widmo mocy, wym. 1, czujnik nr 1.

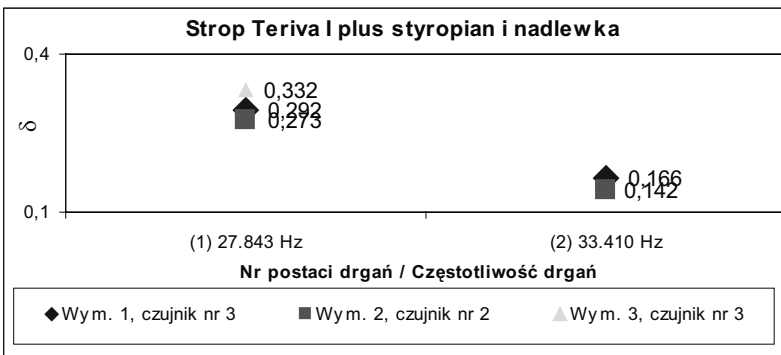


Rys. 7.143. Przyspieszeniowe widmo mocy, wym. 1, czujnik nr 3.

Stosując metodę kolokacyjną otrzymano następujące wyniki parametru tłumienia  $\delta$  dla trzech wymuszeń. Rys. 7.144 przedstawia wyniki  $\delta$  dwóch częstotliwości własnych dla „gołego stropu”, rys. 7.145 przedstawia wartości  $\delta$  dla stropu z dodatkowymi warstwami i ścianką działową.



Rys. 7.144. przedstawia wyniki  $\delta$  dwóch częstotliwości własnych dla „gołego stropu Teriva I”.



Rys. 7.145. przedstawia wartości  $\delta$  dla stropu Teriva I z dodatkowymi warstwami.

#### 7.5.2.6. Omówienie uzyskanych wyników

Przeprowadzone obliczenia wykazały spadek wartości  $\delta$  w odniesieniu do dwóch sytuacji budowy stropu. Spowodowane to może być dodaniem ścianki działowej, która zmieniła schemat konstrukcji stropu. Logarytmiczny dekrement tłumienia drgań pierwszej postaci drgań zmniejszył się z 0,36 do 0,30. Dla drugiej postaci drgań odnotowano spadek wartości  $\delta$  z 0,26 do 0,15.

**Tab. 7.34** Średnie wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań

a) „Goły strop Teriva I”

| Nr postaci drgań | f (Hz) badania | δ średnie wartości |
|------------------|----------------|--------------------|
|                  |                | Metoda kolokacyjna |
| 1                | 21.973         | 0,36               |
| 2                | 25.635         | 0,26               |

b) „Goły strop Teriva I” plus warstwa wyrównawcza i ścianka działowa

| Nr postaci drgań | f (Hz) badania | δ średnie wartości |
|------------------|----------------|--------------------|
|                  |                | Metoda kolokacyjna |
| 1                | 27.843         | 0,30               |
| 2                | 33.410         | 0,15               |

## 7.6. Kładka po przeprowadzeniu modernizacji

### 7.6.1. Kładka wstępowa w Myślenicach

#### 7.6.1.1. Ogólny opis kładki i opis wykonanej modernizacji

Omawiana kładka jest ustrojem wstęgowym, o strzałce ugięcia ok. 2.5 m, jedno-przęsłowym, o rozpiętości 75 m. Pomost wykonany jest z drewna i oparty na dwóch podwójnych linach nośnych. Kładka usztywniona jest w kierunku poziomym dwiema parami dodatkowych lin napinających.

Kładka w obecnym stanie wykazywała jednostronny przechył poprzeczny i znaczne przemieszczenia, przekraczające dopuszczalny poziom. Z tego powodu Urząd Gminy w Myślenicach zlecił wykonanie modernizacji kładki, która miała na celu korektę geometrii kładki, redukcji przechyłu pomostu i ograniczenie przemieszczeń wywołanych przez przechodzenie ludzi.

Modernizację przeprowadzili prof. dr hab. inż. Andrzej Flaga i dr inż. Marek Pańtak z Politechniki Krakowskiej. Autorzy między innymi polecili zmienić naciąg w linach głównych i dodać liny usztywniające. Przed i po modernizacji przeprowadzili pomiary przyspieszeń drgań w 1/3 i 1/2 rozpiętości kładki.

Przebiegi przyspieszeń posłużyły autorowi niniejszej pracy do oceny różnicy parametrów tłumienia kładki przed i po jej modernizacji. Wzięto pod uwagę pierwsze trzy częstotliwości własne kładki.

Szczegóły wykonanych prac modernizacyjnych przedstawione są w pracy Flagi, Pańtaka, 2008.

Na rysunkach 7.146 i 7.147 zestawiono ogólną fotografię kładki i najważniejszą czynność w trakcie jej modernizacji.





Rys. 7.146. Ogólny widok kładki.



Rys. 7.147. Czynności modernizacyjne kładki.

### 7.6.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne kładki

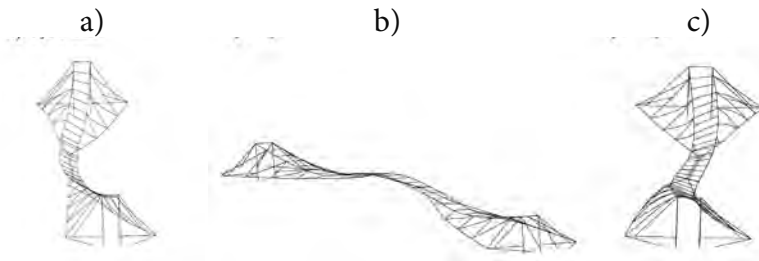
Autorzy pracy stworzyli model MES kładki, który posłużył wyliczeniu częstotliwości drgań własnych kładki przed i po modernizacji. Analiza wykazała wzrost wartości częstotliwości własnych.

Tabela poniżej zestawia wartości częstotliwości własnych przed i po modernizacji i opisuje rodzaj postaci drgań własnych.

Tab. 7.35. Trzy pierwsze postacie drgań i częstotliwości własne kładki

| Nr postaci drgań | f<br>(przed modern.)<br>Hz | f<br>(po modern.)<br>Hz | Forma drgań                     |
|------------------|----------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 1                | 0,55                       | 0,66                    | poprzeczno skrętna symetryczna  |
| 2                | 0,87                       | 0,97                    | pionowa symetryczna             |
| 3                | 0,78                       | 1,10                    | skrętno poprzeczna asymetryczna |

Rysunek 7.148 przedstawia postacie drgań uzyskane z analizy numerycznej modelu kładki.



Rys. 7.148. Trzy pierwsze postacie drgań kładki w Myślenicach po modernizacji.

### 7.6.1.3. Rozmieszczenie czujników

Wzięto pod uwagę jedynie sytuację, gdy czujniki (dwukierunkowe) przyspieszeń drgań zamocowane były w 1/2 i 1/3 rozpiętości przęsła.

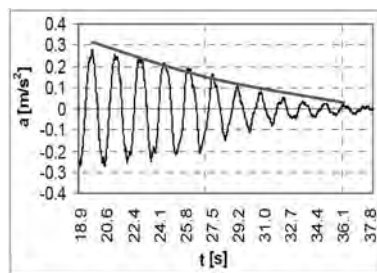
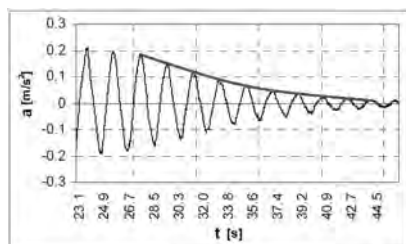
### 7.6.1.4. Sposób wymuszenia

Wymuszenia realizowano przez kołysanie się jednej osoby w 1/2 i 1/3 rozpiętości przęsła.

### 7.6.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

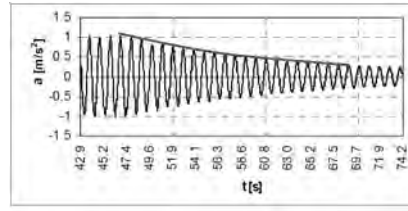
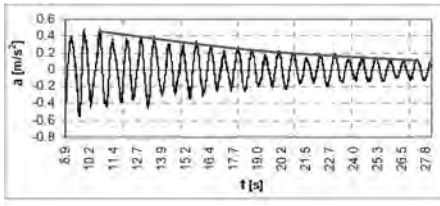
Logarytmiczny dekrement tłumienia drgań dla trzech pierwszych postaci drgań uzyskano stosując metodę filtracyjno-regresyjną wykorzystującą filtrację przebiegów przyspieszeń. Metoda ta pozwala uzyskać przebiegi przyspieszeń drgań związane z daną częstotliwością własną. Następnie określano krzywą wykładniczą na podstawie której otrzymano parametr opisujący poziom tłumienia.

Rysunki nr 7.149 i nr 7.150 pokazują przebiegi przyspieszeń związane z pierwszą postacią drgań (czujnik umieszczony w połowie rozpiętości przęsła, wymuszenie w połowie długości pomostu realizowane przez kołysanie się jednej osoby. Rys. 7.149 przedstawia przebieg przyspieszeń konstrukcji przed modernizacją, rysunek 7.150 po modernizacji.



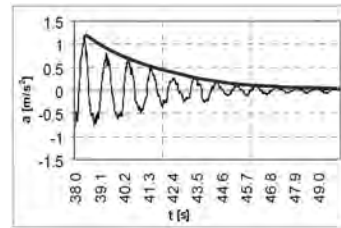
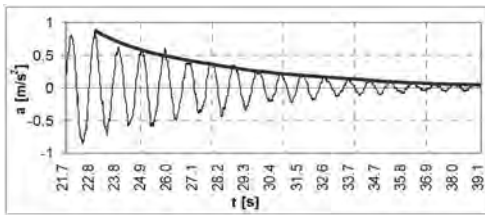
Rys. 7.149 i 7.150. Przebieg przyspieszeń drgań pierwszej częstotliwości własnej drgań.

Rysunki nr 7.151 i 7.152 pokazują przebiegi przyspieszeń związane z drugą postacią drgań własnych przed i po modernizacji (czujnik umieszczony w połowie rozpiętości przęsła, wymuszenie w połowie długości pomostu realizowane przez kołysanie się jednej osoby).



Rys. 7.151 i 7.152. Przebieg przyspieszeń drgań drugiej częstotliwości własnej drgań.

Rysunki nr 7.153 i 7.154 pokazują przebiegi przyspieszeń związane z trzecią postacią drgań własnych przed i po modernizacji (czujnik umieszczony w jednej trzeciej rozpiętości przęsła, wymuszenie w jednej trzeciej długości pomostu realizowane przez kołysanie się jednej osoby).



Rys. 7.153 i 7.154. Przebieg przyspieszeń drgań trzeciej częstotliwości własnej drgań.

Na podstawie obliczeń wykorzystujących metodę filtracyjno-regresyjną uzyskano następujące wartości  $\delta$  kładki przed modernizacją i zmodernizowanej (tab. 7.36).

Tab. 7.36. Wartości  $\delta$  dla trzech postaci drgań własnych

| Nr postaci drgań | $\delta$ (przed modern.) | $\delta$ (po modern.) | Wzrost/spadek $\delta$ |
|------------------|--------------------------|-----------------------|------------------------|
| 1                | 0,232                    | 0,176                 | Spadek                 |
| 2                | 0,065                    | 0,063                 | Minimalny spadek       |
| 3                | 0,171                    | 0,305                 | Wzrost                 |

#### 7.6.1.6. Omówienie uzyskanych wyników

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że modernizacja konstrukcji nie powoduje zwiększenia wartości parametru tłumienia dla wszystkich postaci drgań. W omawianym przykładzie kładki wstęgowej, zwiększenie naciągu lin i dodanie lin usztywniających spowodowało zmniejszenie  $\delta$  z 0,232 do 0,176 dla pierwszej postaci drgań. Logarytmiczny dekrement tłumienia drugiej postaci drgań praktycznie nie zmienił wartości. Modernizacja kładki pozytywnie wpływa na trzecią postać drgań własnych, pokazując znaczny wzrost wartości  $\delta$  (z 0,171 do 0,305).

## 8. Zalecane wartości $\delta$ dla poszczególnych klas obiektów inżynierskich i wnioski końcowe

### 8.1. Wprowadzenie

Przeprowadzone badania i obliczenia z zastosowaniem metody kolokacyjnej, metody filtracyjno-regresyjnej i metod energetycznych pozwoliły na określenie wiarygodnych wartości  $\delta$  dla mostów, masztów, kładek i stropów.

Najdokładniejsze wyniki parametru tłumienia  $\delta$  otrzymano stosując **metodę kolokacyjną** (metodę prof. Andrzeja Flagi). **Metodę filtracyjno-regresyjną** można również stosować, ale tylko w przypadku odseparowanych częstości własnych ujawnionych w widmie mocy.

**Metoda energetyczna** (oparta na szacowaniu **energii kinetycznej** drgającej konstrukcji) pozwala na właściwe określenie parametru  $\delta$ , ale tylko dla prostych konstrukcji wielomateriałowych, takich jak maszty i niektóre mosty.

Uwzględniając powyższe otrzymano wartości średnie  $\delta$  dla kilku reprezentatywnych, mających największe znaczenie częstotliwości drgań własnych typowych konstrukcji budowlanych.

### 8.2. Mosty i wiadukt

Tab. 8.1. Most łukowy podwieszony (dwa łuki stalowe)

| Nr | Rodzaj postaci drgań                         | $\delta$         |                   |
|----|--|------------------|-------------------|
|    |  | (m. kolokacyjna) | (m. energetyczna) |
| 1  | Pierwsza giętą pionowa                       | 0,115            | 0,041             |
| 2  | Drgania skrętne pomostu, giętne poziome łuku | 0,066            | 0,075             |
| 3  | Drgania giętne pionowe                       | 0,082            | 0,094             |

Tab. 8.2. Most łukowy podwieszony (jeden łuk żelbetowy)

| Nr | Rodzaj postaci drgań          | $\delta$         |                   |
|----|-------------------------------|------------------|-------------------|
|    |                               | (m. kolokacyjna) | (m. energetyczna) |
| 1  | Giętą pionowa pomostu i łuków | -                | 0,061             |
| 2  | Giętą poziomą pomostu         | -                | 0,039             |
| 3  | Skrętą pomostu                | -                | 0,063             |

**Tab. 8.3.** *Most podwieszony (jeden pylon)*

| Nr | Rodzaj postaci drgań | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|----------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Giętna pomostu       | 0,080                        | 0,085                         |
| 2  | Druga giętna pomostu | 0,050                        | 0,063                         |
| 3  | Skrętna pomostu      | 0,049                        | 0,060                         |

**Tab. 8.4.** *Most podwieszony (dwa pylony)*

| Nr | Rodzaj postaci drgań                         | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|--|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Giętna pomostu                               | -                            | 0,089                         |
| 2  | Skrętna pomostu, giętno-<br>-skrętna pylonów | -                            | 0,099                         |
| 3  | Giętna pylonów, skrętna<br>pomostu           | -                            | 0,099                         |
| 4  | Giętna pomostu                               | -                            | 0,098                         |

**Tab. 8.5.** *Wiadukt (stalowo-żelbetowy)*

| Nr | Rodzaj postaci drgań | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|----------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Pierwsza giętna      | 0,127                        | -                             |
| 2  | Skrętna              | 0,089                        | -                             |
| 3  | Druga giętna         | 0,126                        | -                             |

### 8.3. Mosty dla pieszych (kładki)

**Tab. 8.6.** *Kładki o schemacie belki wolnopodpartej (stalowe)*

| Nr | Rodzaj postaci drgań | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|----------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Pierwsza giętna      | 0,006-0,011                  | -                             |

**Tab. 8.7.** *Kładki podwieszane (stalowe)*

| Nr | Rodzaj postaci drgań | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|----------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Pierwsza giętna      | 0,069-0,101                  | -                             |
| 2  | Druga giętna         | 0,079                        | -                             |

**Tab. 8.8.** *Kładka wstęgowa (stalowa z drewnianym pomostem)*

| Nr | Rodzaj postaci drgań               | $\delta$<br>(m. wartości<br>szczytowych) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|------------------------------------|--|-------------------------------|
| 1  | poprzeczno skrętna<br>symetryczna  | 0,176                                    | -                             |
| 2  | pionowa symetryczna                | 0,063                                    | -                             |
| 3  | skrętno poprzeczna<br>asymetryczna | 0,305                                    | -                             |

#### 8.4. Maszty z odciągami (stalowe)

**Tab. 8.9** *Maszty z odciągami (stalowe)*

| Nr | Rodzaj postaci drgań | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|----------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Giętna               | 0,030                        | 0,027                         |
| 2  | Skrętna              | 0,050                        | 0,035                         |

#### 8.5. Stropy

**Tab. 8.10.** *Strop żelbetowy*

| Nr | Rodzaj postaci drgań     | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|--------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Giętna (symetryczna)     | 0,200                        | -                             |
| 2  | Giętna (antysymetryczna) | 0,170                        | -                             |

**Tab. 8.11.** *Strop Teriva*

| Nr | Rodzaj postaci drgań     | $\delta$<br>(m. kolokacyjna) | $\delta$<br>(m. energetyczna) |
|----|--------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1  | Giętna (symetryczna)     | 0,300                        | -                             |
| 2  | Giętna (antysymetryczna) | 0,150                        | -                             |

## 8.6. Podsumowanie

W literaturze zebrane są wartości  $\delta$  konstrukcji i obiektów budowlanych (np. Bachmann H. i inni, 1991), autorzy podają przedziały wartości  $\delta$  mostów, kładek i innych konstrukcji budowlanych.

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia  $\delta$  otrzymane z badań i obliczeń wchodzących w zakres tej pracy, pozwoliły na dokładniejsze określenie poziomu tłumienia z uwzględnieniem rodzajów i typów konstrukcji oraz postaci drgań własnych. Pozwoliło to na uzupełnienie i zawężenie wartości parametru tłumienia drgań  $\delta$  dla konstrukcji i obiektów budowlanych.

## 8.7. Wnioski końcowe

Na podstawie przeprowadzonych badań i analiz można sformułować następujące wnioski ogólne:

Podsumowując otrzymane wyniki można stwierdzić, że ze wszystkich metod wyznaczania parametrów tłumienia drgań stosowanych w pracy najdokładniejsza jest metoda kolokacyjna.

Nasuwa się również ważny wniosek, że wartości parametrów tłumienia drgań wyznaczone na podstawie szacowania energii kinetycznej drgającego układu, są zbliżone do tych, jakie otrzymano z metody kolokacyjnej, ale tylko w przypadku prostych konstrukcji wielomateriałowych, tj. bez dodatkowych tzw. elementów niekonstrukcyjnych w postaci warstw, płyt, wkładek spełniających role użytkowe, izolacji termicznej, wilgotnościowej, akustycznej, przeciwdrganiowej itp. a także bez wielu złożonych węzłów konstrukcyjnych.

Rozpatrując wyniki otrzymane stosując metody energetyczne można dojść do wniosku, że wartości parametrów tłumienia drgań wyznaczone na podstawie szacowania energii potencjalnej układu drgającego są obarczone większym błędem niż na podstawie szacowania energii kinetycznej układu i mogą znacząco odbiegać od wartości otrzymanych na podstawie metody kolokacyjnej.

Badania przeprowadzone w różnych fazach budowy np. mostu w Puławach potwierdzają fakt, że dodawanie kolejnych tzw. elementów niekonstrukcyjnych powoduje istotny wzrost tłumienia drgań w złożonych obiektach wielomateriałowych, jakimi są np. budynki i mosty.

Obliczenia parametrów tłumienia drgań przeprowadzone przed i po modernizacji kładki pozwalają na stwierdzenie, że przeprowadzając modernizację konstrukcji, np. w postaci dodania dodatkowych elementów ciągnowych wstępnie naprężonych, należy mieć na uwadze, że mimo zwiększania sztywności globalnej ustroju, tłumienie drgań może w niektórych przypadkach wzrosnąć, w innych zmaleć.

## Bibliografia

- ALGOR. ViziCad Plus, *Algor Classic Modeling Tools, Linear Stress Analysis Release Notes*, Algor, Inc. Pittsburgh, PA, USA. Copyright 1992 Algor Inc.
- ALGOR. ViziCad Plus, *Linear Stress and Vibration Analysis Release Notes*, Algor, Inc. Pittsburgh, PA, USA. Copyright 1994 Algor Inc.
- ALGOR. *The Accupak Reference Manual*, Algor, Inc. Pittsburgh, PA, USA. Copyright 1993 Algor Inc.
- Bachmann H. i inni (1991): *Vibration prob. in structures. Practlcal Guidelines*. Wien, Bulletin D'Information, No 209, Lausanne, 1991.
- Bendat J. S. i inni (1976): *Metody analizy i pomiarów sygnałów losowych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1976.
- Bęc J. (2004): *Aerodynamika masztów z odciągami*, rozprawa doktorska, Lublin, luty 2004.
- Bęc J., Flaga A. (2000): *Analiza wpływu działań środowiskowych na częstości drgań własnych masztu z odciągami*, Materiały 46. Konferencji Naukowo-Technicznej, Wrocław-Krynica 2000, 27-34
- Biliszczuk J. (2001): *Kładka dla pieszych o stalowej konstrukcji podwieszanej w Kielcach*, Inżynieria i Budownictwo, 9/2001, 498 – 501.
- Bishop R. E. D. i inni (1972): *Macierzowa analiza drgań*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1972.
- Blevins R. (2001): *Flow-Induced Vibration*, 2001.
- Błazik-Borowa E., Podgórski J., Sulik P. (2000): *Przykłady rozwiązywania zadań z mechaniki konstrukcji za pomocą systemu ALGOR*, Lublin, 2000.
- Chmielewski T. (1996): *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa 1996.
- Ciesielski R., Koziół K. (1999): *O drganiach własnych masztów z odciągami*, Inżynieria i Budownictwo, nr 7-8/1999, str. 425-429.
- Dyląg Z. i inni (1997): *Wytrzymałość materiałów*, tom 2, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, (1997).
- Ewins D. J. (1984): *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Pr, 1984
- Flaga A. (1979): *Praktyczne ujęcie tłumienia drgań budowli jako całości*, Zeszyt Naukowy Politechniki Krakowskiej, nr 6, 1979, 233-246.
- Flaga A., Błazik-Borowa E., Podgórski J. (2004): *Aerodynamika smukłych budowli i konstrukcji prętowo-ciężnowych*. Lublin, 2004.
- Flaga A., Flaga K., Michałowski T. (1996): *Zagadnienia aerodynamiki ciągłych w mostach podwieszonych*, Inżynieria i Budownictwo 9/1996, 508-516.
- Flaga A. i inni (2000): *Kompleksowe obliczenia aerodynamiczne mostu podwieszonoego im. H. Sucharskiego w Gdańsku*, Praca wykonana w Katedrze Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej i Laboratorium Inżynierii Wiatrowej w Krakowie, grudzień 2000.
- Flaga A. i inni (2001): *Kompleksowe obliczenia aerodynamiczne mostu podwieszonoego w ciągu trasy Siekierkowskiej w Warszawie.*, Praca wykonana w Katedrze Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej i Laboratorium Inżynierii Wiatrowej w Krakowie, lipiec 2001.



- Flaga A., Szulej J i inni (2007):** *Kompleksowe obliczenia aerodynamiczne mostu luko-  
wego w Puławach*, Praca wykonana w Katedrze Mechaniki Budowli Politechniki  
Lubelskiej i Laboratorium Inżynierii Wiatrowej w Krakowie, październik 2007.
- Flaga A. i inni (2008):** *Analiza dynamiczna konstrukcji mostu Krasieńskiego w War-  
szawie*, Praca wykonana w Katedrze Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej  
i Laboratorium Inżynierii Wiatrowej w Krakowie, styczeń 2008.
- Flaga A., Kawecki J., Kucwaj J. (1979):** *Zastosowanie charakterystyk częstotliwości-  
owych do opisu własności dynamicznych obiektów budowlanych*, Archiwum Inży-  
nierii Lądowej – tom XXV z.4, 1979,43-48.
- Flaga A., Kawecki J. (1979):** *Twierdzenie o wzajemności transmitancji i wzajemności  
odpowiedzi impulsowych*, Archiwum Inżynierii Lądowej – tom XXV z.1, 1979,  
129-138.
- Flaga A., Michałowski T. (2000):** *Charakterystyki tłumienia drgań lekkich kładek wi-  
szących i podwieszonych*, Inżynieria i Budownictwo nr 9, 2000, 495-497.
- Flaga A., Podgórski J. i inni (1999):** *Analiza dynamicznego oddziaływania wiatru  
na wybrane konstrukcje wiszące w warunkach sprzężeń dynamicznych*, Projekt  
badawczy nr 7 T07E01212, Lublin, 1999, 595-609.
- Flaga A., Szulej J. (2005):** *Metoda wyznaczania współczynników tłumienia drgań  
konstrukcji zespolonych*, Konferencja naukowa, Krynica, wrzesień 2005, 49-54.
- Flaga A., Szulej J. (2008):** *Metoda kolokacyjna wyznaczania parametrów tłumienia  
drgań w konstrukcjach budowlanych*, Konferencja naukowa Dynkon 2008, Rze-  
szów-Bystre, wrzesień 2008, 65-72.
- Flaga A., Pańtak M. (2008):** *Modernizacja kładki dla pieszych nad rzeką Rabą w My-  
ślenicach przy ulicy Parkowej*, Kraków, maj 2008.
- Grochowski I. (1982):** *Maszty radiowe i telewizyjne. Poradnik projektanta konstrukcji  
metalowych*, Arkady, Warszawa 1982
- Herr W. (1995):** *Continuous Deflection Basin Measurement and Backcalculation Un-  
der a Rolling Wheel Load Using Scanning Laser Technology*, Transportation Con-  
gress, San Diego, California, 1995; s. 600-611.
- Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W. (1985):** *Wytrzymałość Materiałów*, Ar-  
kady, Warszawa 1985.
- Jayawardena L. (1991):** *Analytical estimation of vibration damping in cable system*  
Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand, 1991.
- Langer J. (1980):** *Dynamika budowli*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej,  
Wrocław 1980
- Lyons R. (1999):** *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, WKŁ, War-  
szawa, 1999.
- Mancuso M. (2001):** *Collocation methods with controllable dissipation for linear dy-  
namics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 2001,  
3607-3621.
- Michałowski T. (2002):** *Analiza aerodynamiczna sztywności przestrzennej lekkich  
stalowych kładek dla pieszych*, rozprawa doktorska, Kraków, 2002.
- Notes R. (1978):** *Analiza numeryczna szeregów czasowych*, WNT, Warszawa, 1978.

- Osiński Z. (1980):** *Teoria Drgań*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1980.
- Otnes R., Enochson L. (1978):** *Analiza numeryczna przebiegów czasowych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczna, Warszawa, 1978. Wydawnictwo Naukowo-Techniczna, Warszawa, 1976.
- Podgórski J., Błazik-Borowa E. (2001):** *Wprowadzenie do metody elementów skończonych w statyce konstrukcji inżynierskich*, Lublin, 2001.
- Projekt techniczny masztu antenowego Radiowo-Telewizyjnego Centrum Nadawczego Lublin-Piaski**, Mostostal Zabrze 1987.
- Projekt techniczny masztu radiowo-telewizyjnego w Giedlarowej koło Leżajska**, Praca wykonana w Katedrze Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej na zlecenie Info S.C. w Zamościu, Lublin, 2000.
- Projekt techniczny kładki nad rzeką Wartą w Osjakowie**, wykonany przez: Zespół Badawczo Projektowy MOSTY WROCŁAW s. c.
- Projekt techniczny kładki nad ulicą Źródłową w Kielcach**, wykonany przez: Zespół Badawczo Projektowy MOSTY WROCŁAW s. c.
- Projekt budowlany kładki przez rzekę Bystrzycę przy ul. Janowskiej (za mostem kolejowym) w Lublinie**, wykonany przez Biuro Usług Projektowych ALGA, maj 2001.
- Projekt techniczny wiaduktu drogowego w ciągu ul. Grygowej w Lublinie**, czerwiec 1978.
- Rakowski G. (1992):** *Mechanika budowli-ujęcie komputerowe*, tom 2, Arkady, Warszawa, 1992.
- Rakowski G., Kacprzyk Z. (1993):** *Metoda Elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1993.
- Rysunki projektowe mostu łukowego w Puławach*, opracowane przez zespół mgr inż. Krzysztofa Geja z firmy projektowej POMOST.
- Salamak M. (2003):** *Rola tłumienia drgań w kładkach dla pieszych oraz metody jego identyfikacji*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Monografia, Kraków 2003, 189 – 212.
- Salamak M. (2003):** *Doświadczalne metody określania poziomu tłumienia drgań w kładkach dla pieszych*, rozprawa doktorska, Gliwice, 2003.
- Szulej J. (2005):** *Metoda wyznaczania współczynników tłumienia drgań konstrukcji cięgnowo-prętowych*, Konferencja Naukowa Doktorantów Wydziałów Budownictwa, Gliwice-Wiśła, listopad 2005, 339-346.
- Szulej J. (2006):** *Problemy wyznaczania współczynnika tłumienia metodą kolokacyjną*, Konferencja Naukowa Doktorantów Wydziałów Budownictwa, Gliwice-Wiśła, listopad 2006, 379-386.
- Szulej J. (2009):** *Wyznaczenie ekwiwalentnego wiskotycznego tłumienia drgań w konstrukcjach wielomateriałowych*, rozprawa doktorska, Lublin, 2009
- Yamaguchi H., Adhikari R. (1995):** *Energy-based evaluation of modal damping in structural cables with and without damping treatment*, Journal of Sound and Vibration 181, 1995, 71-83.

**Yamaguchi H., Ito M. (1995):** *Mode-dependency of structural damping in cable-stayed bridges*, 9<sup>th</sup> International Conference on Wind Engineering, New Delhi, India, 1995; s. 928-937.

**Zieliński T. P. (2002):** *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydział EAIiE AGH, Kraków, 2002.

**Zienkiewicz O. C. (1972):** *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.

Dodatkowo wykorzystano:

**Szymczak T. i inni (1999):** *Tablice matematyczne, fizyczne, chemiczne, astronomiczne*, Bielsko-Biała 1999.

**Bogucki W., Żybertowicz M. (1996):** *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*, Arkady, 1996.