Politechnika Lubelska Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej

BUDOWNICTWO I ARCHITEKTURA

Vol. 2 (1) 2008

Wydawnictwa Uczelniane Lublin, 2008

Rada Redakcyjna

PRZEWODNICZĄCA – Anna Halicka

CZŁONKOWIE

M. Bevz, T. Ciężak, S. Fic, A. Flaga, M. Król, Z. Krzowski, J. Kukiełka, M. Łagoda, H. V. Nguyen, T. Sadowski, A. Sobotka, B. Szmygin

Redakcja

A. Halicka, T. Lipecki

Adres redakcji

Katedra Konstrukcji Budowlanych, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej Politechnika Lubelska, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin e-mail: a.halicka@pollub.pl (Anna Halicka)

Katedra Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej Politechnika Lubelska, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin e-mail: t.lipecki@pollub.pl (Tomasz Lipecki)

Wydano za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

ISSN 1899-0665

Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej Bernardyńska 13 e-mail: wydawnictwo@pollub.pl

Druk: Drukarnia Alf-Graf, ul. Kościuszki 4, 20-006 Lublin

SPIS TREŚCI CONTENTS

Zoja Bednarek, Paweł Ogrodnik:	
Badanie spadku przyczepności stali do betonu w warunkach termicznych pożarów	
Research into steel-concrete bond in fire conditions	5
Piotr Jaśkowski:	
Metoda projektowania struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego z zastosowaniem algorytmu ewolucyjnego Designing the structure of a construction project operating system	
using evolutionary algorithm	19
Waldemar Budzyński:	
Propozycja metody obliczania szerokości rys ukośnych w elementach żelbetowych jednocześnie skręcanych i ścinanych	
Proposition of a new method for the calculation of diagonal crack widths in reinforced concrete elements subjected to combined torsion and shear	37
Marta Słowik:	
Analiza nośności i zarysowania zginanych elementów betonowych słabo zbrojonych	
The analysis of load carrying capacity and cracking of slightly reinforced concrete members in bending	65
Ivelin V. Ivanov, Tomasz Sadowski, Magdalena Filipiak, Marcin Kneć:	
Experimental and numerical investigation of plywood progressive failure in CT tests	79
Vyacheslav N. Burlayenko, Tomasz Sadowski:	
FE modeling of delamination growth in interlaminar fracture specimens	95
Liviu Marsavina, Tomasz Sadowski:	
Asymptotic stress field at the tip of an inclined crack terminating to an interface	111
Zbigniew Suchorab, Danuta Barnat-Hunek, Henryk Sobczuk:	
Pomiary wilgotności murów z kazimierskiej opoki wapnistej przy zastosowaniu metody TDR	
Moisture measurements of the chalk rock walls from Kazimierz Dolny with the application of TDR method	125
Jerzy Szerafin:	
Wpływ tarciowych oporów ruchu na zasięg tłoczenia dyspersji cementowej Influence of the friction factor on the range of cement dispersion flow	141

Badanie spadku przyczepności stali do betonu w warunkach termicznych pożarów

Zoja Bednarek¹, Paweł Ogrodnik²

¹ Szkoła Główna Służby Pożarniczej, ul. Słowackiego 52/54, Warszawa, sgsp@sgsp.edu.pl ² Szkoła Główna Służby Pożarniczej, ul. Słowackiego 52/54, Warszawa, pawel-ogrodnik@wp.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono wyniki badań wpływu temperatur występujących podczas pożaru na przyczepność stali do betonu oraz oszacowanie tego wpływu na spadek przyczepności pomiędzy stalą zbrojeniową i betonem, w warunkach pożaru oraz po przebytym pożarze. W pracy przedstawiono wyniki badań przyczepności stali gładkiej St3S oraz żebrowanej 18G2 do betonu C16/20 i C40/50 w warunkach popożarowych oraz w trakcie trwania pożaru. We wszystkich przebadanych przypadkach stwierdzono istotny spadek przyczepności betonu do stali zbrojeniowej na skutek oddziaływania temperatur pożarowych. Udowodniono, że występują istotne różnice przy badaniu przyczepności po pożarze oraz podczas trwania pożaru, które świadczą o częściowym nawrocie przyczepności.

Słowa kluczowe: przyczepność, beton, stal, temperatury pożarowe.

1. Wprowadzenie

Celem pracy badawczej, której wyniki przedstawiamy w artykule, było określenie charakteru i wielkości spadku przyczepności stali zbrojeniowej do betonu w warunkach termicznych występujących w czasie pożarów normowych opisanych krzywą "temperatura–czas":

$$T = 20 + 345 \cdot \log(8 \cdot t + 1) \tag{1}$$

gdzie: *T* – temperatura [°C], *t* – czas [min];

oraz krzywą empiryczną zbliżoną do rozkładu temperatur na powierzchni płyt żelbetowych, którą można opisać wzorem (2):

$$T_{p} = 1250 - (1250 - T_{o}) \cdot erf \frac{K}{2 \cdot \sqrt{t}}$$
⁽²⁾

gdzie: K – współczynnik materiałowy, uzależniony od gęstości materiału, t – czas trwania pożaru [h], T_o – temperatura początkowa powierzchni płyty [°C], T_p – temperatura powierzchni płyty od strony grzania [°C], *erfx* – funkcja błędów Gaussa, nie mająca skończonego rozkładu na funkcje elementarne (3):

$$erfx = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{x} e^{-x^2} dx \tag{3}$$

Badania przeprowadzono na dwóch grupach próbek w celu porównania otrzymanych wyników. Badania wykonane w trakcie grzania próbek odpowiadają warunkom występującym w czasie pożaru. W dalszej części artykułu będziemy określać ten rodzaj badań jako badania "na gorąco". Badania po wstępnej obróbce termicznej w podobnych jak w badaniach "na gorąco" warunkach termicznych przeprowadzono po ostygnięciu próbek w temperaturach pokojowych około 20°C. Badania te w dalszej części pracy będą określane jako badania "na zimno".

Celem porównania wyników badań tych dwóch grup próbek było wyjaśnienie, czy wyniki badań spadku przyczepności na skutek oddziaływania wysokich temperatur wykonane w temperaturach pokojowych są miarodajne dla oceny zachowania się konstrukcji żelbetowych w czasie pożaru, a także ujawnienie zjawiska nawrotu przyczepności po ostygnięciu konstrukcji. Jest to dość ważny czynnik związany z wytrzymałością konstrukcji żelbetowych w czasie pożaru oraz z bezpieczeństwem ratowników. Zauważono bowiem w czasie akcji ratowniczo–gaśniczych odpadanie otuliny stropów żelbetowych w czasie krótszym niż wskazywałaby na to ich odporność ogniowa.

Badanie natomiast przyczepności "na zimno" po obróbce termicznej próbek daje podstawę do oceny spadku przyczepności oraz stanu konstrukcji żelbetowych po przebytym pożarze.

Należy odnotować interesujące wyniki uzyskane przez badaczy zajmujących się zagadnieniem przyczepności w warunkach normalnej pracy konstrukcji, jak również w warunkach podwyższonych i wysokich temperatur [1], [3], [4], [7], [8], [10], [11].

Większość tych ostatnich badań przeprowadzono w temperaturach pokojowych po wstępnej obróbce termicznej [2], [5], [6], [9], [12], [13].

Podsumowując aktualny stan wiedzy na podstawie dostępnej literatury dotyczącej przyczepności stali do betonu możemy stwierdzić, że:

- Wszyscy autorzy badań wskazują na spadek przyczepności na skutek oddziaływania wysokich temperatur.
- Stwierdzają, że z powodu zastosowania różnych metod badawczych wyniki badań przyczepności nie dają się w prosty sposób porównać. Jest to również spowodowane rodzajem użytych do badań próbek oraz składem betonu, rodzajem zbrojenia i obróbką jego powierzchni.
- Niektórzy badacze wskazują na to, że na spadek przyczepności prętów żebrowanych do betonu na skutek oddziaływania wysokich temperatur wpływa wytrzymałość betonu.
- Wyniki badań wpływu temperatur na spadek przyczepności przedstawione w literaturze dotyczą głównie badań w temperaturze pokojowej (badania "na zimno").

2. Planowanie badań

2.1. Badania "na zimno"

Na rys. 1 przedstawiony został schemat przeprowadzonego eksperymentu dotyczący badań "na zimno".



Rys.1. Schemat przeprowadzonego eksperymentu.

Fig. 1. Scheme of the experiment.

X – zmienne wejściowe umożliwiające zmianę przebiegu procesu: Temperatura nagrzewania próbek T (przebieg osiągnięcia T zgodny z przyjętą krzywą "temperatura–czas");

B – zmienne stałe przyjmowane na stałym poziomie:

- klasa betonu C16/20 lub C40/50,
- gatunek stali zbrojeniowej: gładka St3S lub żebrowana 18G2;

Y – zmienne wyjściowe – zmienne mierzalne zależne od zmiennych wejściowych i stałych:

• siła przyczepności stali do betonu oraz obliczony spadek przyczepności.

Temperatura nagrzewania próbek (zmienna X) podczas badań zmieniała się w zakresie od (50°C do 800°C) z odstępami wynoszącymi 50°C.

2.2. Badania "na gorąco"

Przyjęto schemat badań podobny do badań "na zimno" rys.1, gdzie:

- X zmienne wejściowe:
 - stała siła przyłożona do pręta zbrojeniowego odpowiadająca założonej wartości maksymalnej przyczepności;

B – zmienne stałe przyjmowane na stałym poziomie:

- klasa betonu C16/20 lub C40/50.
- gatunek stali zbrojeniowej: gładka St3S lub żebrowana 18G2;

Y – zmienne wyjściowe:

• temperatura na przyjętej krzywej nagrzewania "temperatura–czas" powodująca zniszczenie założonej przyczepności.

3. Charakterystyka materiałów użytych do wykonania próbek

Do wykonania próbek wykorzystano beton klasy C16/20 i C40/50 [14]. Wytrzymałość charakterystyczną na ściskanie w 28. dniu określono zgodnie z PN-EN 12350-1 [15]. Do zbrojenia zastosowano pręty ze stali gładkiej klasy A-I oraz żebrowanej klasy A-II o średnicy ø 10 mm.

Celem zastosowania do wykonania próbek stali gładkiej oraz żebrowanej było zbadanie wpływu żeber na spadek przyczepności w temperaturach wysokich pożaru oraz wyjaśnienie mechanizmów tego zjawiska. Próbki wykonano w pracowni Instytutu Konstrukcji Budowlanych Politechniki Warszawskiej.

4. Badania wykonane "na zimno"

Próbki do badań "na zimno" wykonano w formie walca o średnicy 100 mm i wysokości 150 mm. W środkowej części próbki na styku pręta stalowego i betonu oraz na zewnętrznej powierzchni próbki rozmieszczono termopary.

Obróbkę termiczną próbek przeprowadzono w piecu z programatorem i sterownikiem temperatur w oparciu o przyjęty rozkład "temperatura-czas". Po osiągnięciu założonej temperatury na przyjętym rozkładzie utrzymywano ją na stałym poziomie przez okres 30 minut (rys. 2).

W badaniach przyjęto rozkład temperatur w płycie betonowej na głębokości 15 mm od powierzchni ogrzewanej podczas normowego pożaru opisanego wzorem (1) oraz rozkładu temperatur na powierzchni płyty opisanego wzorem (2).

W tym czasie występowało wyrównanie temperatury na powierzchni próbki oraz na styku stali i betonu (rys. 3). Po procesie wygrzewania próbki schładzano przez 24 godziny do osiągnięcia temperatury pokojowej. Badania przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej, stosując metodę wyciągania pręta z próbki (pullout bond test). W badaniu wyznaczono maksymalną siłę niezbędną do przesunięcia pręta w betonie.



- Rys. 2. Założony w badaniach "na zimno" rozkład temperatur z oznaczonym czasem osiągnięcia temperatury zadanej.
- Fig. 2. Cold tests assumed temperatures distribution, together with time in which set temperatures were achieved.



Rys. 3. Uzyskany rozkład temperatur – stal gładka St3S beton C40/50. Fig. 3. Temperature curves obtained in tests – steel St3S concrete C40/50.

5. Badania wykonane w czasie grzania - "na gorąco"

W celu porównania spadku przyczepności w badaniach "na gorąco" oraz "na zimno" w jednakowych warunkach termicznych ustalono, że podstawowym rozkładem temperatur będzie rozkład występujący na styku pręta zbrojeniowego oraz betonu.

Dążenie do ujednolicenia rozkładu temperatur na styku stali i betonu doprowadziło do zmniejszenia średnicy próbek w badaniach "na gorąco". Średnicę zmniejszono o 30 mm, zachowując wysokość próbki. Dzięki temu uzyskano bardzo zbliżone rozkłady temperatur uwidocznione na rys. 4.

Badania przyczepności "na gorąco" wykonano zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 5. W czasie badania próbki były obciążone stałą siłą utrzymywaną w czasie próby. Jednocześnie ogrzewano próbkę zgodnie z przyjętym rozkładem "temperatura-czas", mierząc temperaturę na zewnętrznej powierzchni oraz na styku pręta i betonu. Celem badania było ustalenie temperatury krytycznej T_{kr} , przy której następowała utrata siły przyczepności odpowiadająca stałej sile obciążającej próbkę. Przykładowy przebieg badania przedstawiono na rys. 6.

Za moment utraty przyczepności uznawano przesunięcie pręta w stosunku do betonu, które powodowało nagły spadek siły. Badania wykonano na stanowisku składającym się z kilku elementów: pieca do wygrzewania próbek, maszyny wytrzymałościowej, układów pomiarowych temperatury oraz przesunięcia pręta, układu rejestrującego mierzone wartości.



Rys. 4. Porównanie rzeczywistych rozkładów temperatury w obydwu rodzajach wykonanych badań.





- Rys. 5. Schemat przebiegu badania "na gorąco", gdzie: 1 rozkład temperatury w miejscu styku betonu z prętem stalowym, 2 wykres siły przyłożonej do próbki (wyciągającej pręt z betonu).
- Fig. 5. Hot test diagram.





Fig. 6. Exemplary of the hot test course.

6. Charakter zniszczenia przyczepności w czasie badań "na gorąco"

W celu dokonania analizy charakteru zniszczenia przyczepności podczas badań "na gorąco" wykonano specjalne próbki o średnicy ø 70 mm i wysokości 150 mm z betonu klasy C40/50.

Technologia wykonania była taka sama jak próbek do podstawowych badań, z tym że z każdej próbki w fazie betonowania został wycięty element o kącie rozwarcia wynoszącym 90°, co umożliwiło jego dowolne wysuwanie i wsuwanie podczas badania. W czasie badań element wsuwany szczelnie przylegał do próbki betonowej. Pozwoliło to na dokonywanie analizy stanu powierzchni styku pomiędzy stalą i betonem, zarówno dla prętów wykonanych ze stali gładkiej, jak i żebrowanej pod obciążeniem w ustalonych temperaturach.

Po osiągnięciu założonej temperatury na powierzchni próbki demontowano piec badawczy i wysuwano wycinek, fotografując powierzchnie styku stali z betonem. Uzyskane wyniki badań zostały przedstawione na rys. 7 i rys. 8.



- Rys. 7. Szczegółowy widok styku pręta gładkiego St3S z betonem górnej i dolnej (od strony obciążenia) części próbki w momencie zniszczenia przyczepności – 315°C
- Fig. 7. Detailed view of the smooth rebar-concrete contact; upper and bottom (from the force site) part of the sample moment of bond destruction 315°C.



- Rys. 8. Szczegółowy widok styku pręta żebrowanego 18G2 z betonem górnej i dolnej (od strony obciążenia) części próbki 300°C.
- Fig. 8. Detailed view of ribbed rebar-concrete contact; upper and bottom (from the force site) part of the sample 300°C.

7. Wyniki badań

Wyniki badań przyczepności "na zimno" oraz "na gorąco" opracowano statystycznie w celu ustalenia zależności temperatury krytycznej utraty przyczepności dla przyjętych w badaniu zmiennych stałych (klasa betonu, gatunek stali).

Obliczenia średniego wyniku spadku przyczepności dokonano na podstawie wyników pięciu prób w każdym punkcie pomiarowym, przyjmując różnicę siły przyczepności w danym punkcie pomiarowym i w punkcie o temperaturze 20°C (spadek zerowy). W badaniach "na zimno" temperaturę krytyczną odpowiadającą spadkowi przyczepności pomiędzy prętem ze stali gładkiej St3S a betonem C16/20 oraz prętem ze stali żebrowanej 18G2 a betonem C16/20 opisano wzorem:

$$y = ax + b \tag{4}$$

gdzie: x – spadek siły przyczepności w [%], y – temperatura na styku stali i betonu, w której występuje ten spadek przyczepności.

Współczynniki a i b przedstawiono w tabeli 1.

W przypadku temperatur krytycznych odpowiadających spadkowi przyczepności stali żebrowanej 18G2 do betonu C40/50 lepsze dopasowanie reprezentuje funkcja logarytmiczna:

 $y = a \ln x + b$

(5)

Współczynniki *a* i *b* w tym wzorze zamieszczono również w tabeli 1.

Tabe	ela 1.	Współ	lczynniki	i a i	<i>b</i> .

Table 1.Coefficients a i b.

	Wspó	łczynniki równań regr determinacji – bada	esji oraz współczynnik nia" na zimno"	i
Lp.	Gatunek stali i betonu	Nachylenie funkcji [<i>a</i>]	Przesunięcie funkcji [b]	Współczynnik determinacji [<i>R</i> ²]
1.	St3S, C16/20	5,762	21,916	0,991
2.	St3S, C40/50	6,148	22,152	0,970
3.	18G2, C16/20	8,325	19,252	0,986
4.	18G2, C40/50	203,51	-81,234	0,815

Spadek przyczepności w założonych temperaturach otoczenia w badaniach "na zimno" przedstawiono również w postaci tabelarycznej (tabela 2 oraz tabela 3).

Tabela 2. Wyniki badań spadku siły przyczepności stali gładkiej St3S do betonu C16/20 oraz C40/50.

Table 2. Results from research into decrease of bond force between smooth steel St 3S and concrete C16/20, C40/50.

	D	Wyni	ki badań spa	dku siły przyczepnoś	ci
Numer badania	Kzeczywista w środowisku pożaru	Stal St3S, beton C16/20		Stal St3S, beton C40/50	
	Ĩ	[kN]	[%]	[kN]	[%]
1T	20°C	0,00	0,00	0,00	0,00
2T	50°C	2,02	7,41	2,84	10,25
3T	100°C	1,80	6,60	2,98	10,76
4T	150°C	3,42	12,55	3,12	11,26
5T	200°C	4,84	17,75	4,28	15,45
6T	250°C	7,48	27,44	5,34	19,28
7T	300°C	9,86	36,17	8,00	28,88
8T	350°C	11,10	40,72	12,94	46,71
9T	400°C	13,44	49,30	15,10	54,51
10T	450°C	17,28	63,39	14,66	52,92
11T	500°C	20,14	73,88	17,14	61,88
12T	550°C	22,80	83,64	20,64	74,51

Tabela 3. Wyniki badań spadku siły przyczepności stali żebrowanej 18G2 do betonu C16/20 oraz C40/50.

Table. 3.	Results from research	1 into decrease	e of bond	force	between	ribbed	steel	18G2	and
	concrete C16/20, C40)/50.							

		Wynil	ki badań spac	łku siły przyczepnoś	ci
Numer	Rzeczywista w środowisku	Stal 18G2,		Stal 18G2,	
badania	pożaru	DetoII C16/20		DetoII C40/30	
	I	[kN]	[%]	[kN]	[%]
1T	20°C	0,00	0,00	0,00	0,00
2T	50°C	0,74	2,65	2,38	5,55
3T	100°C	1,94	6,95	2,00	4,66
4T	150°C	3,68	13,19	1,28	2,98
5T	200°C	3,46	12,40	2,72	6,34
6T	250°C	4,94	17,71	1,12	2,61
7T	300°C	6,66	23,87	2,32	5,41
8T	350°C	8,88	31,83	2,06	4,80
9T	400°C	9,44	33,84	2,28	5,31
10T	450°C	12,30	44,09	2,58	6,01
11T	500°C	14,10	50,54	2,42	5,64
12T	550°C	16,92	60,65	3,20	7,46

Wyniki badań w temperaturach wysokich (badania "na gorąco") opracowano statystycznie, uzyskując zależności liniowe opisujące temperaturę krytyczną, przy której następuje założony spadek przyczepności, zgodnie z wzorem (4).

W tabeli 4 przedstawiono wartości współczynników a i b we wzorze.

Tabela 4.	Współczynniki a i b.
Table 4.	Coefficients <i>a</i> i <i>b</i> .

	Wspó	łczynniki równań regr determinacji – bada	esji oraz współczynnik nia" na gorąco"	i
Lp.	Gatunek stali i betonu	Nachylenie funkcji [<i>a</i>]	Przesunięcie funkcji [b]	Współczynnik determinacji [R ²]
1.	St3S, C16/20	5,294	-19,009	0,939
2.	St3S, C40/50	5,981	5,385	0,981
3.	18G2, C16/20	6,454	36,206	0,972
4.	18G2, C40/50	9,075	23,944	0,976

Na rys. 9 przedstawiono porównanie wykresów opisujących spadek przyczepności w temperaturach wysokich w badaniach "na zimno" stali gładkiej St3S do betonów klasy C16/20 oraz C40/50. Wykres ten stanowił podstawę do wnioskowania o wpływie klasy betonu na przyczepność oraz spadek przyczepności w podwyższonych temperaturach w przypadku stali gładkiej

Na rys. 10 przedstawiono wykresy opisujące spadek przyczepności w temperaturach wysokich pożaru pomiędzy stalą żebrowaną 18G2 a betonami klasy C16/20 oraz C40/50 uzyskane na podstawie wyników badań w temperaturach pokojowych, tj. "na zimno".

14

Na rys. 11 przedstawiono wykresy opisujące spadek przyczepności stali gładkiej St3S do betonów klasy C16/20 oraz C40/50 w temperaturach wysokich uzyskane w badaniach "na gorąco". Natomiast na rys.12 przedstawiono wykresy opisujące spadek przyczepności stali żebrowanej 18G2 do betonów ww. klas.



Rys. 9. Temperatury krytyczne spadku przyczepności stali gładkiej do betonu (badania "na zimno").





Rys. 10. Temperatury krytyczne spadku przyczepności stali żebrowanej do betonu (badania "na zimno").

Fig. 10. Critical temperatures for bond reduction for ribbed rebars (cold tests).



Rys. 11. Temperatury krytyczne spadku przyczepności stali gładkiej do betonu (badania "na gorąco").





Rys. 12. Temperatury krytyczne spadku przyczepności stali żebrowanej do betonu (badania "na gorąco").

Fig. 12. Critical temperatures for bond reduction for ribbed rebars (hot tests).

8. Wnioski

1. Na podstawie wyników badań należy stwierdzić, że występujące w czasie pożarów wysokie temperatury powodują znaczny spadek przyczepności pomiędzy prętami zbrojenia a betonem. Z analizy wyników badań można wnioskować, że spadek przyczepności pręta stalowego do betonu w badaniach "na zimno" (badania stanu przyczepności po przebytym pożarze) oraz "na gorąco" (w czasie pożaru) jest zróżnicowany w całym zakresie temperatur (do 800°C) przyjętym w badaniach. Spadek przyczepności "na gorąco" jest zawsze większy niż w badaniach "na zimno". Świadczy to o częściowym nawrocie przyczepności po ostygnięciu próbki prawdopodobnie w części spowodowanej tarciem.

2. Bardzo istotny wpływ na przyczepność stali do betonu nie tylko w temperaturze normalnej, co jest faktem powszechnie znanym, ale również w temperaturach pożarowych ma rodzaj stali (żebrowana, gładka), co jest związane ze zróżnicowaniem powierzchni styku stali i betonu oraz sposobem przekazywania obciążeń z pręta na beton.

3. Wpływ wytrzymałości betonu na przyczepność stali do betonu w temperaturach pożarowych jest zróżnicowany, związany z rodzajem stali: w przypadku przyczepności stali gładkiej do betonu ma niewielki wpływ, natomiast w przypadku stali żebrowanej ma istotne znaczenie. Na podstawie badań stwierdzono, że w przypadku stali gładkiej po zniszczeniu przyczepności pręt w temperaturach podwyższonych i wysokich "wyślizguje" się z betonu, nie uszkadzając w istotny sposób otaczającego betonu. Natomiast w przypadku stali żebrowanej przed przesunięciem pręta występuje zniszczenie betonu w otoczeniu żeber oraz rysy w betonie poprzeczne lub ukośne do pręta.

4. W przypadku przyczepności prętów żebrowanych betony o wyższej wytrzymałości znacząco podwyższają temperatury niebezpieczne z punktu widzenia spadku przyczepności. W badaniach popożarowych spadek przyczepności stali żebrowanej 18G2 do betonu klasy C40/50 może być praktycznie niezauważalny w zakresie temperatur nie przekraczających 500°C.

Reasumując:

- W badaniach popożarowych, analizując przydatność konstrukcji żelbetowych do dalszej pracy, należy brać pod uwagę spadek przyczepności pomiędzy stalą a betonem.
- Przy określaniu temperatury krytycznej wpływającej na utratę odporności ogniowej elementów żelbetowych, w szczególności stropów żelbetowych, należy brać pod uwagę możliwość odpadania otulin betonowych na skutek utraty przyczepności oraz znaczny wzrost temperatury nieosłoniętego zbrojenia.
- Wyniki badań spadku przyczepności w temperaturze pokojowej uzyskane na ochłodzonych po obróbce termicznej próbkach nie są miarodajne do oceny spadku przyczepności w czasie pożaru.

Literatura:

- [1] Bomonte P., Lelliel L., *Bar concrete bond size efect and local bond slip laws*, Politecnico di Milano. Milano, 2001.
- [2] Chih-Hung C, Cho-Liang T., *Time temperature analysis of bond strength of a raber after fire exposure*, Cement and Concrete Research, 2003, Nr 33, pp.1651-1654.
- [3] Czerski Z., *Mechaniczne działanie przyczepności w strunobetonie*, Inżynieria i Budownictwo, Nr.6, 1987.
- [4] Czkwieniac A., Kozicki J., *Przyczepność zbrojenia w betonie piaskowym*, Inżynieria i Budownictwo, Nr.1, 1984.

10	Zoja Beanarek, rawer ögröanik
[5]	Dąbrowski K., Ablewicz Z., <i>Badanie przyczepności betonów osłonowych do stali zbroje-</i> niowej w temperaturach podwyższonych, Inżynieria i Budownictwo, Nr.10, 1985.
[6]	Fellinger J.H.H., Jołop A., Uijl D., <i>Bond of protensioned strands in fire exposed concrete</i> . <i>Bond in concrete – from research to standards</i> , Budapest 2002.
[7]	Lundgren K., Gustavson R., Magnusson J., <i>Finite element modelling as a tool to understand the bond mechanisms. Bond in concrete – from research to standards</i> , Budapest 2002.
[8]	Mohhamed S., Bartos P.J., <i>Bond behaviour and pull-off test of self compacting concrete. Bond in concrete – from research to standards</i> , Budapest 2002.
[9]	Morley P. D., Royles R., <i>Response of the bond in reinforcing at normal and high tempera-</i> <i>ture</i> , Magazine of Concrete Research, 1983, Nr.123, pp. 67-74.
[10]	Pędziwiatr J., Mnich M., P <i>rzyczepność stali do betonu – badania doświadczalne a zastosowanie</i> , XLVI Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej PAN i Komitetu Nauki PZiTB. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Krynica 2000.
[11]	Pędziwiatr J., Styś D., <i>Przyczepność a proces zarysowania konstrukcji żelbetowych</i> , XLVIII Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej PAN i Komitetu Nauki PZiTB. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Krynica 2002.
[12]	Reichel V., <i>How fire affect steel – to – concrete bond</i> , Building Research and Practice, 1978.
[13]	Urban W., Woprosy eksperimentalnogo issledowania ocieplenia armatury z betonom, Praha 1980.
[14]	PN-EN 206-1:2003, Beton. Część 1: Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność.
[15]	PN-EN 12350-1, Badanie mieszanki betonowej. Część 1: Pobieranie próbek.

Zoia Bednarek Paweł Ogrodnik

10

Research into steel-concrete bond in fire conditions

Zoja Bednarek¹, Paweł Ogrodnik²

¹ The Main School of Fire Service, Słowackiego 52/54, Warsaw, Poland, sgsp@sgsp.edu.pl ² The Main School of Fire Service, Słowackiego 52/54, Warsaw, Poland, pawel-ogrodnik@wp.pl

Abstract: The article presents results from the research into fire temperature influence on steel-concrete bond and on the bond reduction for both in-fire and after-fire status. Bond tests and its results for materials St3S, 18G2 reinforced steel and C16/20, C40/50 concrete, have been described in the article both for in fire and after-fire conditions. All tests have shown a significant reduction of steel-concrete bond as a result of fire temperature. It was proven, that significant bond differences exist between in-fire and after-fire tests, what demonstrate that the bond is regained partially after the exposure.

Key words: bond test, concrete, steel, fire temperature.

Metoda projektowania struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego z zastosowaniem algorytmu ewolucyjnego

Piotr Jaśkowski

Politechnika Lubelska, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Instytut Budownictwa, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: p.jaskowski@pollub.pl

Streszczenie: W artykule podjeto problem projektowania struktury systemu wykonawczego przy harmonogramowaniu realizacji przedsięwzięcia budowlanego typu "kompleks operacji". System ten złożony jest z niejednorodnych jednostek operacyjnych generalnego wykonawcy oraz kooperujących jednostek zewnętrznych - podwykonawców. Tworza oni tymczasowa organizację. Jej struktura zmienia się w czasie zgodnie z harmonogramem realizacji przedsięwziecia. Autor dokonał identyfikacji modelu i formalizacji matematycznej problemu projektowania struktury systemu wykonawczego przedsięwziecia budowlanego. Proces doboru wykonawców (elementów systemu) opisano jako problem optymalizacji trójkryterialnej harmonogramu. Ocena możliwych wariantów budowy struktury systemu wykonawczego dokonywana jest przy zastosowaniu kryteriów decydujących o efektywności przedsięwzięcia i działalności generalnego wykonawcy (minimalizacja czasu i kosztu realizacji oraz kosztu robót zleconych podwykonawcom). Do rozwiazania analizowanego problemu opracowano metode wykorzystująca podejście metaheurystyczne. W tym celu zaadaptowano algorytm ewolucyjny (wykorzystujący procesy stochastyczne) do rozwiązywania zagadnień trójkryterialnej optymalizacji harmonogramów w warunkach deterministycznych oraz opracowano heurystyczny algorytm rozdziału ograniczonej i zmiennej w czasie liczby jednostek zasobów i wykonawców. Rozwiązania generowane są z wykorzystaniem funkcji skalaryzującej osiagniecia celów optymalizacji, bazującej na metryce Czebyszewa. Wybór rozwiązania końcowego może być dokonany poprzez analizę przybliżenia całego zbioru rozwiązań niezdominowanych (na podstawie preferencji globalnych decydenta) lub z wykorzystaniem ineraktywnej metody Steuera.

Słowa kluczowe: projektowanie realizacji przedsięwzięć budowlanych, optymalizacja wielokryterialna harmonogramów, wybór wykonawców.

1. Wprowadzenie

Ostatnie lata doprowadziły do zmiany wielkości przedsiębiorstw budowlanych pod względem zatrudnienia. Ze względu na duże koszty zatrudnienia siły roboczej oraz trudności w uzyskaniu zleceń, wiele przedsiębiorstw budowlanych zmniejsza liczbę pracowników. Duże przedsiębiorstwa w większości uległy podziałowi lub likwidacji. Przynosi to efekt w postaci zmniejszenia kosztów działalności przedsiębiorstwa oraz kosztów realizacji przedsięwzięć, ale jednocześnie ogranicza zdolności produkcyjne i uniemożliwia realizację większych przedsięwzięć (wygranie przetargu). Wydłużanie czasu realizacji przedsięwzięcia obniża pozycję przetargową przedsiębiorstw wykonawczych. W związku z tym jest niezbędne stosowanie metod wspomagających projektowanie realizacji przedsięwzięć w warunkach ograniczonej dostępności zasobów oraz zazwyczaj jest konieczna współpraca z innymi przedsiębiorstwami przy podejmowaniu zleceń i ich realizacji.

Powstaje wtedy nowa organizacja na czas i do wykonania przedsięwzięcia, której efektywność działania w dużej mierze zależy od prawidłowego doboru jej elementów. Zwykle inicjatywę tworzenia takiej organizacji (i decyzję o przystąpieniu do przetargu) podejmuje generalny wykonawca, który przejmuje funkcję kierowniczą. Taką sytuację spotyka się w wielu stosowanych w praktyce budownictwa systemach realizacji przedsięwzięć inwestycyjno-budowlanych (Kasprowicz [9]).

Artykuł jest wynikiem prac dotyczących zagadnienia projektowania struktury systemu wykonawczego przy harmonogramowaniu realizacji przedsięwzięcia budowlanego typu "kompleks operacji" (Jaśkowski [6]). System ten złożony jest z niejednorodnych, samodzielnych jednostek operacyjnych generalnego wykonawcy – np. przedsiębiorstwa o strukturze sieciowej, oraz kooperujących jednostek zewnętrznych – podwykonawców. Tworzą oni rezerwę realizatorów dla generalnego wykonawcy. W rozważaniach przyjęto zdeterminowany charakter projektowanych procesów technologicznych. Dostępność wszystkich zasobów odnawialnych przedsiębiorstwa (zasobów ludzkich jak i maszyn oraz urządzeń) jest ograniczona, przy czym poziom ich dostępności może być zmienny w czasie realizacji przedsięwzięcia.

System wykonawczy (roboczy) wyodrębniony jest w ramach systemu realizacji przedsięwzięć inwestycyjno-budowlanych. Jego zadaniem jest wykonawstwo procesu budowlanego – zespołu działań technicznych, z wykorzystaniem dysponowanych zasobów: środków technicznych, siły roboczej, na realizowanych obiektach budowlanych, zgodnie z przyjętymi procedurami technologicznymi, organizacyjnymi i zasadami ekonomicznymi.

Pojęcie struktura systemu oznacza pełny zbiór składników systemu, wyodrębnionych zgodnie z ustalonym kryterium ich wyróżnienia (rodzaj, zakres wykonywanych robót i procesów, kryterium funkcji, miejsca realizacji, własności itd.) oraz ścisłą charakterystykę wzajemnych relacji (związków) między tymi składnikami (prawne, własnościowe, umowne, kanały przepływów logistycznych, tj. informacji, materiałów, pieniędzy, ludzi). Związki te jednak, ze względu na ich dynamikę, rozpatrywać należy w funkcji czasu. Struktura systemu wykonawczego, jakkolwiek z góry ustalona w procesie projektowania realizacji przedsięwzięcia, jest strukturą dynamiczną (zmienną w czasie przebiegu wykonania zadań).

Przedsięwzięcia typu "kompleks operacji" obejmują niejednorodne pod względem technologicznym procesy, które nie charakteryzują się cyklicznością i rytmicznością realizacji (Marcinkowski [11]).

Elastyczność rozwiązań legislacyjnych w Prawie budowlanym pozwala na funkcjonowanie w praktyce wielu modeli i systemów realizacji przedsięwzięć inwestycyjno-budowlanych. Analiza istniejących modeli realizacji przedsięwzięć budowlanych umożliwia klasyfikacje systemów wykonawczych na dwa główne typy:

- system złożony z niezależnych wykonawców,
- system złożony z zasobów generalnego wykonawcy i najczęściej niezależnych podwykonawców, którzy wykonują procesy o zakresie nie objętym specjalizacją generalnego wykonawcy, ale zazwyczaj także stanowią rezerwę zasobów.

Projektowanie struktury systemu wykonawczego złożonego z niezależnych wykonawców (np. w systemie construction management) były przedmiotem prac Kasprowicza [9]. Brak jest natomiast badań dotyczących projektowania struktury systemu drugiego typu. W artykule zaprezentowano metodę projektowania dynamicznej (zmiennej w czasie) struktury systemu wykonawczego, pozwalającą na uwzględnienie istniejących ograniczeń w dostępności zasobów odnawialnych generalnego wykonawcy oraz wymagań technologicznych realizacji przedsięwzięć budowlanych typu "kompleks operacji".

2. Opis metody projektowania struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego

Obecnie stosowane metody projektowania struktury systemu wykonawczego w dużym stopniu oparte są na intuicji decydenta i projektanta. W proponowanej przez autora metodzie PSSWPB (Projektowanie Struktury Systemu Wykonawczego Przedsięwzięcia Budowlanego) podejmowanie decyzji o wyborze wykonawców na etapie harmonogramowania przedsięwzięcia będzie wspomagać system komputerowy, umożliwiający ocenę wariantów podejmowanych decyzji na podstawie kryteriów decydujących o efektywności całego przedsięwzięcia z punktu widzenia inwestora i generalnego wykonawcy.

Główne etapy proponowanej metody to:

1. Przygotowanie danych do podejmowania decyzji, a w szczególności budowa grafu zależności technologicznych między procesami (pakietami robót), wybór wiarygodnych (potencjalnych) podwykonawców zapewniających odpowiednią jakość realizacji procesów oraz ustalenie czasów i kosztów realizacji procesów a także ograniczeń w dostępności zasobów i wykonawców.

2. Wybór rozwiązania – struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego, wspomagany obliczeniami przeprowadzonymi z wykorzystaniem systemu komputerowego.

3. Weryfikacja rozwiązania i ewentualnie zmiany terminów realizacji procesów w ramach istniejących realnych zapasów czasu.

4. Kontrola warunków i terminów realizacji procesów (po skierowaniu uzyskanego rozwiązania do realizacji) i ewentualnie aktualizacja modelu zagadnienia.

2.1. Identyfikacja modelu zagadnienia

Wynikiem procesu projektowania jest dynamiczna struktura systemu wykonawczego, której odpowiada harmonogram realizacji przedsięwzięcia, stanowiący podstawę jej oceny. Harmonogramowanie przedsięwzięć budowlanych typu "kompleks operacji" oparte jest na wykorzystaniu metod sieciowych. Uwarunkowania realizacyjne technologii robót przedsięwzięcia budowlanego można opisać za pomocą sieci w konwencji wierzchołkowej (Biernacki i Cyunel [1]):

$$S = \left\langle G, \left\{ T, K \right\} \right\rangle.$$

Zależności kolejnościowe między poszczególnymi procesami wchodzącymi w skład przedsięwzięcia określa unigraf $G = \langle W, U, P \rangle$, spójny, acykliczny, z jednym wierzchołkiem początkowym i jednym wierzchołkiem końcowym, w którym:

• $W = \{w_1, w_2, ..., w_i, ..., w_Y\}$ – zbiór wierzchołków grafu, odpowiadających realizowanym procesom budowlanym, Y – liczba procesów i numer wierzchołka oznaczającego koniec przedsięwzięcia,

• $U = \{u_1, u_2, ..., u_j, ..., u_N\}$ – zbiór łuków grafu, odzwierciedlających zależności kolejnościowe realizacji procesów,

• $P \subset W \times U \times W$ – relacja trójczłonowa, określająca relacje bezpośredniego poprzedzania procesów $w_i: w_i \in W$.

Podział przedsięwzięcia na składowe procesy budowlane lub pakiety robót (według kryterium złożoności) dokonywany jest w taki sposób, aby każdemu procesowi można było jednoznacznie przyporządkować niezbędne zasoby do jego realizacji, niezmienne w czasie jego realizacji.

Funkcje $T:W\to R^+$ oraz
 $K:W\to R^+$ określone na zbiorze wierzchołków grafu charakteryzują odpowiedni
o czas wykonania i koszt realizacji każdego procesu $w_i:w_i\in W$ przez wykonawców:

$$h_m \in H^i, \quad H^i \subset H, \tag{2}$$

gdzie: $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m, \dots, h_M\}$ – zbiór wszystkich dostępnych, analizowanych, ocenianych wykonawców, M – liczba wszystkich wykonawców, którzy mogą być elementami systemu wykonawczego (roboczego), $H^i = \{h_1, h_2, \dots, h_T\}$ – zbiór niejednorodnych wykonawców $h_m : h_m \in H$ zdolnych do wykonania procesu $w_i : w_i \in W$.

W zbiorze H wszystkich analizowanych i ocenianych wykonawców wyróżnić można dwa podzbiory:

1) HW – zbiór wykonawców należących do zbioru zasobów odnawialnych przedsiębiorstwa – generalnego wykonawcy,

2) HP – zbiór podwykonawców,

przy czym zachodzą między nimi następujące zależności:

$$HW \cup HP = H \text{ oraz } HW \cap HP = \emptyset$$
(3)

Wartości funkcji *T* i *K* zestawione są w formie macierzy czasów i kosztów realizacji procesów w sposób następujący:

$$T = \begin{bmatrix} t_{im} \end{bmatrix}_{Y \times M} \tag{4}$$

gdzie: t_{im} – czas realizacji procesu $w_i : w_i \in W$ przez wykonawcę $h_m : h_m \in H$ (w przypadku gdy $h_m \notin H^i \Rightarrow t_{im} = \Psi$, Ψ – dostatecznie duża liczba skończona, kara),

(1)

$$K = \left[k_{im}\right]_{Y \times M} \tag{5}$$

gdzie: k_{im} – koszt realizacji procesu $w_i : w_i \in W$ przez wykonawcę $h_m : h_m \in H$ (w przypadku gdy $h_m \notin H^i \Rightarrow k_{im} = \Psi$).

Realizacja poszczególnych procesów przedsięwzięcia budowlanego wiąże się z koniecznością zapewnienia zasobów odnawialnych innych niż wykonawcy, np. maszyny, urządzenia budowlane, będących w dyspozycji generalnego wykonawcy.

Każdemu wykonawcy $h_m:h_m\in H^i$ (lub w szczególności $h_m\in HW$) przy realizacji procesu $w_i:w_i\in W$ (a dokładniej, stosowanej przez niego technologii) można przyporządkować zbiór zasobów w liczbie: V_{imz} . Jest to niezbędna liczba jednostek zasobu z_z ze zbioru Z zasobów odnawialnych generalnego wykonawcy, innych niż jednostki operacyjne (wykonawcy), przy realizacji procesu $w_i:w_i\in W$ przez wykonawcę h_m .

W zbiorze wszystkich zasobów odnawialnych generalnego wykonawcy $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n, ..., z_n\}$, innych niż realizatorzy, określona jest liczba dysponowanych jednostek zasobu z_n w czasie. Dostępność zasobów określona jest przez macierz:

$$D = \left[d_{zt}\right]_{R \times G} \tag{6}$$

gdzie: R – liczba rodzajów zasobów; G – liczba przedziałów (okresów) czasu, na jakie podzielono horyzont czasu planowania $\langle 0, T_g \rangle$, T_g – górna granica czasu wykonania analizowanego przedsięwzięcia budowlanego; d_{zt} – liczba dostępnych jednostek zasobu z_z w przedziale czasu o numerze t.

Również dostępność wykonawców $h_m : h_m \in H$ nie jest stała w całym horyzoncie planowania realizacji przedsięwzięcia. Gotowość wykonawców do realizacji procesów analizowanego przedsięwzięcia określona jest przez macierz:

$$G = \left[g_{mt}\right]_{M \times G} \tag{7}$$

w której elementy g_{mt} przyjmują wartość 1, gdy wykonawc
a h_m w przedziale czasu o numerze tmoże wykonywać proce
s $w_i:w_i\in W$, wartość 0 w przeciwnym przypadku.

Zbiory H^i i H^j przy $i \neq j$ ze względu na niejednorodność wykonawców nie są rozłączne ($H^i \cap H^j \neq \emptyset$), czyli ten sam wykonawca może realizować różne procesy. W przypadku, gdy wielkość frontu robót jest dużo mniejsza od wielkości frontu pracy wykonawcy (np. wszystkich zespołów roboczych w brygadzie GW czy jednostek organizacyjnych przedsiębiorstwa – podwykonawcy), powierzone wykonawcom zadania nie wyczerpują posiadanych przez nich zdolności produkcyjnych (nie angażują wszystkich zasobów). Z tego względu należy dopuścić możliwość równoczesnej pracy jednostek organizacyjnych (elementarnych) tego samego wykonawcy na różnych frontach roboczych. Dla każdego procesu i wykonawcy można (fakultatywnie) wprowadzić dodatkową charakterystykę P_{im} :

$$0 < P_{im} \le 1 \tag{8}$$

określającą stopień wykorzystania zdolności produkcyjnej i zaangażowania zasobów wykonawcy $h_m : h_m \in H^i$ przy realizacji procesu $w_i : w_i \in W$. Ocena możliwych wariantów budowy struktury systemu wykonawczego (roboczego) może dokonywana być przy zastosowaniu następujących kryteriów:

- minimalizacja czasu realizacji przedsięwzięcia,
- minimalizacja łącznego kosztu realizacji wszystkich procesów,
- minimalizacji kosztu procesów zleconych do wykonania zewnętrznym jednostkom operacyjnym (podwykonawcom).

Kryteriom tym, rozpatrywanym niezależnie, mogą odpowiadać rozwiązania znacznie od siebie odległe (w przestrzeni kryteriów). Na przykład czas realizacji przedsięwzięcia odpowiadający minimalnemu kosztowi procesów zleconych podwykonawcom (równemu często zero) może być znacznie większy od minimalnego czasu (a nawet przekraczać termin dyrektywny). Dlatego celowym jest rozpatrywanie wszystkich kryteriów łącznie.

Dwa pierwsze kryteria są oczywiste, komentarza wymaga kryterium trzecie. Przyjęcie za kryterium minimalizacji kosztu procesów zleconych do wykonania podwykonawcom przynosi efekt w postaci:

- wyboru najtańszych podwykonawców spośród wszystkich analizowanych a zapewniających zbliżoną (dopuszczalną) jakość wykonania procesu;
- zapewnienie przerobu dla własnych zasobów generalnego wykonawcy, zwiększenie stopnia ich wykorzystania szczególnie dotyczy to jednostek operacyjnych wewnętrznych sprawnych, efektywnych;
- minimalizacji utraconych korzyści finansowych z tytułu zlecania procesów podwykonawcom;
- zwiększenia zysku generalnego wykonawcy (różnicy między ceną kosztorysową – umowną, a rzeczywistym kosztem poniesionym przez generalnego wykonawcę – łącznie z kosztami stałymi utrzymywania zasobów, oraz kosztami procesów zleconych podwykonawcom).

2.2. Formalizacja opisu modelu

W modelu matematycznym problemu projektowania struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego przyjęto następujące założenia:

- 1) horyzont planowania $O = \langle 0, T_g \rangle$ został podzielony na jednostkowe przedziały (okresy) czasu o_t (t = 1, 2, ..., G); funkcja $n(o_t) = t \cdot \delta$, gdzie δ – długość przedziału jednostkowego w jednostkach czasu przyjętych przy projektowaniu (np. zmiana robocza, dzień, tydzień), określa termin odpowiadający końcowi przedziału o_i ;
- 2) proces $w_i : w_i \in W$ może być zrealizowany tylko przez jednego wykonawcę $h_m : h_m \in H = HW \cup HP$;
- 3) procesy są niepodzielne w czasie;
- 4) w przedziale czasu o numerze *t* proces w_i (*i*>1) może być realizowany wówczas, gdy wszystkie procesy bezpośrednio go poprzedzające zostały wykonane i gdy dostępne są zasoby odnawialne do jego realizacji.

Struktura systemu wykonawczego jednoznacznie (ale pośrednio) określona jest poprzez:

- dobór wykonawców do realizacji wszystkich procesów, a więc poprzez wartości zmiennej binarnej x_{im} (przyjmującej wartość 1, gdy proces w_i realizowany będzie przez wykonawcę h_m, wartość 0 w przeciwnym przypadku),
- termin zakończenia realizacji każdego procesu $w_i : w_i \in W$, czyli poprzez wartości zmiennej binarnej x_{it} przyjmującej wartość 1, gdy realizacja procesu w_i zakończy się w przedziale czasu o numerze t, wartość 0 w przeciwnym przypadku.

Model matematyczny do analizowanego zagadnienia zapisano z wykorzystaniem zmiennej $x_{int} = x_{in} \cdot x_{it}$, zawierającej obie wymienione wyżej informacje.

Model matematyczny przyjmuje następującą postać:

minimalizuj (łącznie lub niezależnie):

• czas realizacji przedsięwzięcia:

$$\min TP = \sum_{m \in \{m: h_m \in H^i\}} \sum_{t=1}^G n\left(o_t\right) \cdot x_{Y_{mt}}$$
(9)

• koszt realizacji przedsięwzięcia:

$$\min KP = \sum_{i=1}^{Y} \sum_{m \in \{m: h_m \in H^i\}} \sum_{t=1}^{G} k_{im} \cdot x_{imt}$$
(10)

• koszt realizacji procesów zleconych do wykonania podwykonawcom:

$$\min KPP = \sum_{i=1}^{Y} \sum_{m \in \{m: h_m \in HP\}} \sum_{t=1}^{G} k_{im} \cdot x_{imt}$$
(11)

przy spełnieniu następujących warunków (ograniczeń modelu):

• na wykonanie każdej operacji:

$$\sum_{m \in \left\{m: h_m \in H^i\right\}} \sum_{t=1}^G x_{imt} = 1, \qquad i = 1, 2, \dots, Y$$
(12)

• na dostępność zasobów odnawialnych:

$$\sum_{i=1}^{Y} \sum_{m \in \left\{m: h_m \in H^i\right\}} \sum_{q=t}^{t+t_m/\delta - 1} V_{imz} \cdot x_{imq} \le d_{zt}, \qquad \begin{cases} z = 1, 2, \dots, R\\ t = 1, 2, \dots, G \end{cases}$$
(13)

na dostępność wykonawców:

$$\sum_{i=1}^{Y} \sum_{q=t}^{t+t_{im}/\delta-1} P_{im} \cdot x_{imq} \le g_{mt}, \qquad \begin{cases} m = 1, 2, \dots, M \\ t = 1, 2, \dots, G \end{cases}$$
(14)

• na zachowanie kolejności wykonywania procesów:

$$\sum_{m \in \{m: h_m \in H^i\}} \sum_{t=1}^G \left(n\left(o_t\right) - t_{im} \right) \cdot x_{imt} - \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^G n\left(o_t\right) \cdot x_{imt} \ge 0, \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, Y\\ l \in \{l: w_l \in \Gamma_i^1\}, \quad (15) \end{cases}$$

gdzie: Γ_i^1 – zbiór procesów bezpośrednio poprzedzających proces w_i ,

 na zapewnienie odpowiedniego poziomu jakości robót. Wymaganie to realizowane jest poprzez zastosowanie etapu wstępnej selekcji podwykonawców. Jako elementy zbioru H wybierani są tylko ci podwykonawcy, którzy są wiarygodni i zapewniają na odpowiednim poziomie spełnienie wymagań jakościowych.

Ponieważ jednym z kryteriów optymalizacji jest minimalizacja czasu realizacji przedsięwzięcia, powyższe zadanie można sformułować następująco: wyznaczyć rozwiązanie x_{im} (*i*=1,2,...,*Y*; *m*=1,2,...,*M*), czyli dokonać doboru wykonawców procesów, przy spełnieniu warunków wykonania każdego procesu (12) i zapewnienie odpowiedniej jakości robót, dla którego koszt i czas realizacji przedsięwzięcia oraz koszt robót zleconych podwykonawcom są minimalne (rozpatrywane łącznie lub niezależnie); terminy realizacji procesów (wartości zmiennych x_{it} dla *i*=1,2,...,*Y* oraz *t*=1,2,...,*G*), niezbędne do przeprowadzenia oceny rozwiązań x_{im} , obliczyć tak, aby czas realizacji przedsięwzięcia przez dany zbiór wykonawców procesów był minimalny, przy uwzględnieniu warunków na dostępność zasobów odnawialnych (13) i wykonawców (14) oraz na zachowanie kolejności realizacji procesów (15).

2.3. Metoda rozwiązania i algorytmizacja metody obliczeń

Między kryteriami oceny wariantów struktury systemu wykonawczego zachodzi konflikt, ponieważ wśród nich istnieją takie cele, że poprawa realizacji jednego z nich (ponad pewien poziom) jest możliwa jedynie kosztem pogorszenia poziomu realizacji przynajmniej jednego z pozostałych. W takim przypadku istnieje problem wyznaczenia rozwiązań kierowanych do realizacji. Wybrane rozwiązanie powinno pochodzić ze zbioru rozwiązań niezdominowanych, który można wyznaczyć za pomocą metod polioptymalizacyjnych. Wybór rozwiązania kierowanego do realizacji jest możliwy przy założeniu dysponowania dodatkowymi informacjami lub wymaganiami, uzyskiwanymi często dopiero po rozwiązaniu modelu, a których nie można było uwzględnić przy jego tworzeniu i budowie.

Rozwiązania niezdominowane można wyznaczyć stosując podejście zaczerpnięte z teorii programowania celowego (Galas i in. [3]), tworząc funkcję celu (skalaryzującą osiągnięcia – wartości wszystkich kryteriów), wyrażającą wielkość strat wynikających z występowania różnic pomiędzy realizacjami celów w generowanych rozwiązaniach a postulowanymi (czy idealnymi, ale możliwymi do osiągnięcia) przez decydenta poziomami ich realizacji.

Funkcja ta (zastępcze kryterium) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{split} \min D_{\infty,\rho} &= \max\left\{\lambda_{1} \cdot \frac{TP - TP_{\min}}{TP_{\min}}, \lambda_{2} \cdot \frac{KP - KP_{\min}}{KP_{\min}}, \left(1 - \lambda_{1} - \lambda_{2}\right) \cdot \frac{KPP - KPP_{\min}}{KPP_{\min}}\right\} + \\ &+ \rho \cdot \left(\frac{TP - TP_{\min}}{TP_{\min}} + \frac{KP - KP_{\min}}{KP_{\min}} + \frac{KPP - KPP_{\min}}{KPP_{\min}}\right) \\ \lambda_{1}, \lambda_{2} \in \left\langle 0, 1 \right\rangle \end{split}$$
(16)

gdzie: λ_1 – waga kryterium czasu realizacji przedsięwzięcia, λ_2 – waga kryterium kosztu realizacji przedsięwzięcia, *TP*, *KP*, *KPP* – określone są wzorami odpowiednio 9, 10, 11, *TP*_{min}, *KP*_{min}, *KPP*_{min} – rozwiązania zadań jednokryterialnych z ograniczeniami zadania wielokryterialnej optymalizacji, ρ – dostatecznie mała liczba.

Funkcja ta umożliwia wyznaczenie wyłącznie rozwiązań niezdominowanych (Hapke i in. [4]), ale nie zawsze wszystkich. W pracy rozwiązania niezdominowane (dla których wartość funkcji (16) jest minimalna) znajdowane będą z wykorzystaniem algorytmu ewolucyjnego oraz heurystycznego algorytmu obliczania czasu realizacji przedsięwzięcia w warunkach ograniczonej dostępności zasobów. Występujące we wzorze (16) współczynniki λ_i (wagi) wyrażają preferencje decydenta odnośnie oceny odchyleń w realizacji poszczególnych celów.

Zasadnicza trudność wyboru rozwiązań końcowych, przeznaczonych do realizacji polega na określeniu współczynników wagowych uwzględniających preferencje decydenta. W pracy proponuje się zastosowanie do wyboru rozwiązań końcowych (określania istotności kryteriów) następujących metod:

A. Jeżeli decydent potrafi określić swoje preferencje w postaci ważności poszczególnych kryteriów, generowane jest rozwiązanie optymalne zadania z funkcją celu według wzoru (16).

B. Graficzne przedstawienie zależności (aproksymowanej) pomiędzy wartościami wag kryteriów a poziomami realizacji celów (wartościami kryteriów) *TP*, *KP* i *KPP* dla rozwiązań niezdominowanych (na podstawie generowanych wartości funkcji (9), (10), (11) dla skończonej liczby punktów – par wag (λ_1 , λ_2)). Analiza przybliżenia zbioru rozwiązań niezdominowanych (w funkcji wag) umożliwi decydentowi ustalenie istotności kryteriów odpowiadających rozwiązaniu końcowemu.

C. Zastosowanie iteracyjnej metody R. E. Steuera – zaliczanej do grupy metod interaktywnych (dialogowych). W metodzie tej przyjmuje się, że jeśli zmieniając w sposób systematyczny wagi kryteriów, będziemy generować i przedstawiać do oceny decydentowi niewielkie liczebnie podzbiory zbioru rozwiązań kompromisowych, to decydent wybierając każdorazowo najwyżej przez siebie oceniane rozwiązanie, ukierunkuje poszukiwanie rozwiązania końcowego zadania zgodnie ze swoimi preferencjami. Procedura ta realizowana jest w trzech krokach:

- 1) obliczany jest początkowy zestaw siedmiu par wag; dla każdej pary wag poszukiwane jest, za pomocą algorytmu ewolucyjnego, rozwiązanie najlepsze, dla którego skalarna funkcja celu jest najmniejsza;
- uzyskane rozwiązania niezdominowane przedstawiane są decydentowi do oceny; wskazuje on każdorazowo numer rozwiązania ocenionego przez niego najwyżej; w przypadku, gdy jest to rozwiązanie satysfakcjonujące decydenta (będzie kierowane do realizacji) procedura iteracyjna jest przerywana;
- 3) w kolejnym etapie obliczany jest nowy zestaw par wag i nowe rozwiązania przedstawiane do oceny decydentowi (krok 2).

Algorytm rozwiązania problemu został oprogramowany z wykorzystaniem notacji pascalowej i kompilatora języka Delphi.

W pracy, ze względu na ograniczenia możliwości zastosowania metod dokładnych, wynikające ze złożoności analizowanego problemu, oraz ze względu na niedoskonałość metod heurystycznych, poszukiwanie optymalnych wariantów budowy systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego dokonywane jest z wykorzystaniem metod metaheurystycznych, zaadaptowanych do potrzeb rozwiązywanego problemu. Rozwiązania niezdominowane (z punktu widzenia celów optymalizacji) będą generowane z wykorzystaniem funkcji celu skalaryzującej osiągnięcia (wzór 16), pozwalającej na wyznaczenie dobrej reprezentacji całego zbioru rozwiązań niezdominowanych i umożliwiającej sprowadzenie zagadnienia do zadania optymalizacji jednokryterialnej. Rozwiązania optymalne (lub suboptymalne) przy zastosowaniu takiej funkcji celu są poszukiwane z wykorzystaniem algorytmu ewolucyjnego, o potwierdzonej przydatności do rozwiązywania zagadnień harmonogramowania i niewielkiej złożoności obliczeniowej. Algorytm ewolucyjny jest wykorzystywany również do wyznaczenia minimalnego czasu realizacji przedsięwzięcia. Wybór rozwiązania końcowego – odpowiedniego wariantu struktury systemu wykonawczego – jest dokonywany przez decydenta na podstawie analizy reprezentacji całego lub tylko analizy części zbioru rozwiązań niezdominowanych (w metodzie dialogowej).

2.3.1. Algorytm ewolucyjny

Algorytm ewolucyjny zastosowano do minimalizacji czasu realizacji przedsięwzięcia (Jaśkowski i Sobotka [7]) oraz do poszukiwania rozwiązań niezdominowanych (w metodzie A, B, C). Metody ewolucyjne rozwiązywania problemów, w szczególności zadań optymalizacyjnych, bazują na zasadach, jakie można zaobserwować w ewolucji żywych organizmów (Michalewicz [12]). Program ewolucyjny jest algorytmem probabilistycznym, w którym generuje się populacje osobników w każdej iteracji (generacji). Każdy osobnik przedstawia możliwe rozwiązanie rozpatrywanego zadania i w programie ewolucyjnym jest reprezentowany przez pewną strukturę danych (np. chromosomy w postaci wektora, macierze). Metody ewolucyjne stosowane są do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych w wielu dziedzinach nauki i różnych branżach gospodarki. Istnieje wiele przykładów ich zastosowań w budownictwie (Jaśkowski [8]), przy np.: optymalizacji konstrukcji wiązarów stalowych i ram żelbetowych, projektowaniu mostów, szacowaniu kosztów inwestycji mieszkaniowych, określaniu ryzyka niedotrzymania umowy przez wykonawcę, projektowaniu zestawów maszyn do robót ziemnych, projektowaniu zagospodarowania placu budowy. Algorytmy ewolucyjne wykorzystywane są również z powodzeniem do rozwiązywania problemów harmonogramowania przedsiewzieć budowlanych z uwzględnieniem różnych ograniczeń i warunków, m.in. maksymalizacja poziomu wykorzystania siły roboczej (Tong i in. [14]), wybór technologii realizacji procesów oraz poszukiwanie zależności między czasem i kosztem realizacji przedsięwzięć (Li i Love [10]), alokacja (Toklu [13]) i wyrównywanie zasobów (Hegazy [15]), minimalizacja kosztów finansowania przedsięwzięcia (Elazouni i Metwally [2]).

Inicjacja polega na utworzeniu populacji początkowej – ustalonej liczby osobników (chromosomów, czyli rozwiązań dopuszczalnych), reprezentowanych przez ciągi genów o określonej długości. W pracy zastosowano reprezentację osobników (rozwiązań dopuszczalnych) w postaci ciągu genów zawierających informacje o wykonawcach procesów i wartości priorytetu procesów. Populacja początkowa jest tworzona w algorytmie w sposób losowy.

Ocena osobników polega na obliczeniu wartości funkcji celu poszczególnych rozwiązań. W przypadku, gdy algorytm ewolucyjny jest wykorzystywany jako narzędzie do wyznaczenia minimalnego czasu, jest obliczany czas realizacji przedsięwzięcia. Przy poszukiwaniu rozwiązań niezdominowanych – wartość funkcji celu danej wzorem 20. Czas i koszt realizacji przedsięwzięcia oraz koszt procesów zleconych podwykonawcom obliczane są z wykorzystaniem heurystycznego algorytmu opisanego w pkt. 2.3.2 (dla ustalonego zbioru wykonawców i wartości priorytetów procesów, zakodowanych w chromosomie).

Osobnik (chromosom), dla którego ocena (wartość funkcji celu) jest najlepsza (najmniejsza) jest zapamiętywany.

Algorytmy ewolucyjne są wykorzystywane do poszukiwania osobników najlepiej przystosowanych, dla których wartość funkcji przystosowania jest najwyższa. W pracy poszukiwane są rozwiązania zadań minimalizacji funkcji celu. W takim przypadku zachodzi konieczność przekształcenia minimalizowanej funkcji oceny do postaci maksymalizowanej funkcji przystosowania (w pracy zastosowano transformację γ , pozwalającą na skalowanie wartości funkcji przystosowania – łagodzenie różnic pomiędzy osobnikami).

Działanie algorytmu może być zatrzymane w dwóch przypadkach (warunki zatrzymania):

- 1) po wykonaniu określonej liczby iteracji (gdy numer bieżącej generacji jest większy od założonej wartości maksymalnej MAXGEN);
- 2) wtedy, gdy w wyniku jego działania nie uzyskuje się już poprawy rozwiązania, czyli gdy po pewnej liczbie iteracji MAXSTOP nie uzyskano rozwiązania lepszego niż w poprzednich generacjach.

Selekcja chromosomów polega na wyborze tych osobników, które będą brały udział w tworzeniu potomków do następnego pokolenia – generacji. Największe szanse w tworzeniu nowych osobników mają chromosomy o największej wartości funkcji przystosowania. W pracy, w procesie selekcji zastosowano metodę koła ruletki o wielkości pól zgodnej z wartościami funkcji dopasowania.

Zadaniem operatora krzyżowania jest rekombinacja chromosomów poprzez wymianę łańcuchów genów pomiędzy chromosomami rodziców. W pracy zastosowano metodę krzyżowania z "jednym punktem cięcia" tzw. *one-point crossover*. Dla każdego chromosomu z populacji rodzicielskiej jest generowana liczba losowa *x* z przedziału $\langle 0,1 \rangle$. Jeżeli *x*<*PKRZYZ*, gdzie *PKRZYZ* jest to prawdopodobieństwo krzyżowania (parametr systemu), rozpatrywany chromosom jest wybierany do rekombinacji. Wybrane chromosomy są kojarzone w pary. Łańcuchy genów w chromosomach rodziców przed punktem cięcia (ustalonym w sposób losowy) są nie zmieniane, a wymieniane są, między rodzicami, geny leżące za tym punktem.

Mutacja polega na losowej zmianie jednego lub więcej genów wybranego chromosomu, z prawdopodobieństwem równym częstości mutacji.

Ochrona najlepszego osobnika (tzw. strategia elitarna) stanowi szczególną dodatkową procedurę reprodukcji. Jeżeli najlepszy osobnik z bieżącego pokolenia jest gorszy niż zapamiętany najlepszy z poprzednich pokoleń, to ten ostatni zastępuje najgorszego osobnika bieżącej populacji.

Każdy osobnik w nowej populacji (generacji) w dalszym etapie działania algorytmu podlega ocenie stopnia jego przystosowania (obliczana jest wartość funkcji celu i funkcji dopasowania rozwiązania), niezbędnej do określenia wartości prawdopodobieństwa wyboru chromosomu do reprodukcji. Procedury selekcji, krzyżowania, mutacji, ochrony najlepszych osobników, oceny i obliczania wartości funkcji przystosowania są powtarzane cyklicznie aż do spełnienia warunku zatrzymania algorytmu.

2.3.2. Algorytm obliczania czasu realizacji przedsięwzięcia

Algorytm obliczania czasu realizacji przedsięwzięcia polega na iteracyjnym przydziale zasobów odnawialnych (wykonawców, środków produkcji) do wykonywania procesów i na ustalaniu terminów ich realizacji w najwcześniejszych możliwych momentach czasu, wynikających ze spełnienia warunku dostępności zasobów i relacji kolejnościowych pomiędzy procesami. Zasoby przydzielane są w pierwszej kolejności procesom o najwyższym priorytecie. Algorytm rozdziału zasobów umożliwia wyznaczenie najkrótszego czasu realizacji przedsięwzięcia, dla którego określono jednoznacznie wykonawców i priorytety procesów (informacje te zakodowane są w chromosomie reprezentującym dane rozwiązania dopuszczalne).

W algorytmie zastosowano oryginalny sposób zmiany momentu czasu, w którym przydzielane będą zasoby, niespotykany w dotychczasowych opracowaniach. Umożliwia on skrócenie czasu realizacji przedsięwzięcia, w przypadku gdy dostępność zasobów nie jest stała w czasie.

2.4. Weryfikacja metody obliczeń

W systemie komputerowym wspomagającym projektowanie struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego wyróżnić można dwie zasadnicze fazy pracy, których działanie wpływa na jakość uzyskiwanych wyników i tym samym rzutuje na wiarygodność proponowanej metody. Są to:

- wyznaczenie minimalnych (najmniejszych) wartości czasu, kosztu realizacji przedsięwzięcia oraz kosztu procesów zleconych podwykonawcom;
- wyznaczenie rozwiązań niezdominowanych, a w szczególności rozwiązania najlepiej spełniającego preferencje decydenta.

Opisany modelem matematycznym problem projektowania struktury systemu wykonawczego należy do klasy zadań harmonogramowania przedsięwzięć przy wielowariantowości sposobów wykonania procesów i ograniczeniach w dostęp-ności zasobów odnawialnych (*multi-mode resource-constrained project scheduling problems*). Rozwiązanie tych zadań polega na określeniu optymalnych sposobów wykonania procesów, dla których przyjęte kryterium (kryteria) osiąga swoje optimum i spełnione są ograniczenia: kolejności realizacji procesów oraz dostępności zasobów i inne, np. w postaci zadanych przedziałów czasu, w których mogą być wykonywane procesy.

W przypadku, gdy kryterium optymalizacji harmonogramu jest minimalizacja czasu realizacji przedsięwzięcia, rozwiązanie tych zagadnień (w szczególności ocena rozwiązań dopuszczalnych) jest oparte na wykorzystaniu metod zbliżonych do stosowanych przy harmonogramowaniu przedsięwzięć z ograniczoną dostępnością zasobów (tzw. *single-mode resource-constrained project scheduling problems*).

Weryfikację wyników uzyskiwanych z opracowanego systemu komputerowego przeprowadzono zatem etapami, dla następujących problemów:

- harmonogramowania przedsięwzięć z ograniczoną dostępnością zasobów odnawialnych (tzw. *single-mode resource-constrained project scheduling problems*),
- harmonogramowania przedsięwzięć przy wielowariantowości sposobów wykonania procesów i ograniczeniach w dostępności zasobów odnawialnych (*multi-mode resource-constrained project scheduling problems*),

• wyznaczania rozwiązań niezdominowanych w problemach optymalizacji trójkryterialnej.

Przeprowadzone badania weryfikacyjne wyników uzyskiwanych za pomocą opracowanego systemu komputerowego z rozwiązania zadań testowych prezentowanych w literaturze przedmiotu, pozwalają na wysunięcie następujących wniosków:

- jakość uzyskiwanych wyników, w przypadku problemu minimalizacji czasu realizacji przedsięwzięcia z analizą dostępności zasobów, jest dobra a różnica w stosunku do rozwiązań optymalnych (lub suboptymalnych) wynosi 0-4,85%;
- uzyskano wszystkie rozwiązania optymalne w przykładach doboru sposobu wykonania procesów;
- jakość uzyskiwanych wyników w określonym czasie działania algorytmu ewolucyjnego, dla dużych problemów z dużą liczbą zależności kolejnościowych, zależy od doboru jego parametrów (wielkość populacji, prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji);
- czas działania algorytmu ewolucyjnego, dla małych problemów praktycznych, jest krótki, rozwiązanie uzyskiwane jest w początkowych generacjach, nie jest wymagany dobór parametrów algorytmu;
- system może być wykorzystywany do rozwiązywania zagadnień, w których procesy realizowane mogą być tylko w zadanych przedziałach czasu;
- przyjęty sposób skalaryzacji wartości funkcji celu w zagadnieniu trójkryterialnej optymalizacji harmonogramów zapewnił uzyskanie wszystkich rozwiązań niezdominowanych z wykorzystaniem wszystkich modułów systemu komputerowego.

3. Przykład zastosowania metody PSSWPB

Zastosowanie opracowanej metody projektowania struktury systemu wykonawczego przedstawiono na przykładzie doboru wykonawców procesów w ramach przedsięwzięcia realizowanego w systemie project management przez generalnego wykonawcę (Jaśkowski [6]). Przedsiębiorstwo budowlane (generalny wykonawca) opracowujące ofertę na wykonanie przedsięwzięcia, ze względu na ograniczone możliwości produkcyjne – ograniczoną liczbę i dostępność w czasie brygad roboczych oraz maszyn, przewiduje możliwość zlecania części prac podwykonawcom. Celem procesu projektowania jest opracowanie struktury systemu wykonawczego, przy której czas oraz koszt realizacji przedsięwzięcia są najmniejsze i zapewniają konkurencyjność oferty a także jednocześnie koszt procesów zleconych podwykonawcom jest najmniejszy, co zapewnia największy stopień wykorzystania zasobów generalnego wykonawcy. Dane do przykładu uzyskano z dokumentacji przetargowej oraz z ofert przedsiębiorstw przystępujących do przetargu na realizację całego przedsięwzięcia.

Przedsięwzięcie podzielono na pakiety robót, w taki sposób, aby każdemu pakietowi można było przydzielić dokładnie jednego wykonawcę. Graf zależności technologicznych pomiędzy pakietami robót oraz zakres inwestycji przedstawiono na Rys. 1.

Liczba kombinacji przydziału wykonawców pakietów w analizowanym przykładzie wynosi ok. 7,5·10¹⁵. Na podstawie wyników optymalizacji trójkryterialnej (metoda B) zbudowano wykresy przedstawiające aproksymowaną zależność pomiędzy wagami kryteriów a ich wartościami w rozwiązaniach stanowiących przybliżenie zbioru rozwiązań niezdominowanych. Analiza tych zależności umożliwia decydentowi wybór rozwiązania końcowego na podstawie dodatkowych informacji (preferencji) nie ujawnionych na etapie budowy modelu zagadnienia (np. ograniczenia w postaci dyrektywnego kosztu, czasu, kosztu procesów zleconych podwykonawcom w stosunku do wartości minimalnych; nieujawniona hierarchia celów).

W przykładzie założono dodatkowe ograniczenia, mogące pomóc w wyborze rozwiązania końcowego. Ustalono dyrektywny termin realizacji przedsięwzięcia na 340. dzień budowy. Przyjęto, że koszt realizacji nie może przekroczyć wartości 20500000 zł, oraz że koszt procesów zleconych podwykonawcom powinien być, przy tych założeniach, jak najmniejszy. Ustalenia te pozwoliły na wyznaczenie zbioru wartości wag, dla których prawdopodobne jest wyznaczenie rozwiązania satysfakcjonującego (W1=0,25-0,4; W2=0,5-0,65). W serii eksperymentów, dla pary wag W1=0,32 W2=0,63 uzyskano rozwiązanie spełniające ustalone warunki: CZAS=335 zm, KOSZT=20441530 zł, KP=8774230 zł. Rozwiązanie to uzyskano również w piątej iteracji interaktywnego algorytmu R. E. Steuera (metoda C).

Schemat struktury systemu wykonawczego przedstawiono na Rys. 2. Poziome linie (belki) obrazują plan pracy wykonawców, linie pionowe – powiązania pomiędzy zaangażowanymi, w danym momencie czasu, wykonawcami.

4. Podsumowanie

Opracowana metoda PSSWPB ma zastosowanie do projektowania przedsięwzięć budowlanych typu "kompleks operacji" (modelowanych z wykorzystaniem metod sieciowych) realizowanych w warunkach deterministycznych, obejmujących procesy niecykliczne, nierytmiczne i niejednorodne. Stopień wyodrębnienia wykonawców tych procesów, w zależności od celu analizy, może być różny (pojedynczy pracownicy, grupy lub zespoły robocze, maszyny, zestawy maszyn, brygady robocze, całe przedsiębiorstwa). Istnieje możliwość uwzględnienia i analizowania wariantowości technologii wykonania poszczególnych procesów przedsięwzięcia budowlanego. Jakkolwiek przedsięwzięcie budowlane często jest traktowane jako autonomiczny, zamknięty system, możliwość modelowania zmiennych w czasie ograniczeń zasobowych pozwala na rozpatrywanie jego jako elementu zbioru równolegle realizowanych zleceń przedsiębiorstwa.

Podstawowym obszarem zastosowań metody jest projektowanie struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia na etapie przygotowywania oferty przez przedsiębiorstwo wykonawcze. Nowością jest możliwość analizy zwiększenia zdolności produkcyjnej generalnego wykonawcy dzięki zatrudnieniu podwykonawców (zwiększeniu limitu dostępności zasobów).

Opracowany system komputerowy pozwala rozwiązywać również zagadnienia dwu- i jednokryterialnej optymalizacji struktury systemu wykonawczego i może być wykorzystany do wyboru najlepszych wariantów technologii wykonania procesów oraz jako podstawa do podjęcia decyzji o konieczności zatrudnienia podwykonawców.



ziemych	Brygady GW do robót:			
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	ziemnych 🔶			
betonowych betono	montażowych			
wykończeniowych wykończen	betonowych			
murarskich murarskich </td <td>wykończeniowych</td> <td></td> <td></td> <td></td>	wykończeniowych			
dekarskich I <thi< th=""> I</thi<>	murarskich			
elewacyjnych I <	dekarskich			
drogowych drogowych <thdrogowych< th=""> <thdrogowych< th=""> <th< td=""><td>elewacyjnych</td><td></td><td></td><td></td></th<></thdrogowych<></thdrogowych<>	elewacyjnych			
Poddwyklonawcy: I	drogowych			
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	Podwykonawcy:			
	C			
	Е			
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	IJ			
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	J			
M M N N O O R Image: Second Sec	L			
N N	Μ			
O O <tho< th=""> O O O</tho<>	Ν			
R Image: Second system	0			
Z Z L L Z <thz< th=""> <thz< th=""> <thz< th=""> <thz< th=""></thz<></thz<></thz<></thz<>	R			
Dni budowy: 0 25 32 35 41 42 52 61 67 72 76 90 100 101113 117 121 140 150 158 175 208 215 255 305 33	Ζ			
	Dni budowy: 0	25 32 35 41 42 52 61 67 72 76 90 100 101113 117 121 140 130 158 175 20	215 255 305	33.

Rys. 2. Struktura systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego (przykład). Fig. 2. Operating system structure of a construction project (example).

. . .

Literatura

- [1] Biernacki J., Cyunel B., Metody sieciowe w budownictwie, Warszawa. Arkady, 1989.
- [2] Elazouni A.M., Metwally F.G., *Finance-based scheduling: tool to maximize project profit Using Improved Genetic Algorithms*, ASCE Journal of Construction Engineering and Management, 131, 4 (2005) 400-412
- [3] Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z., Programowanie wielkokryterialne, Warszawa. PWE, 1987.
- [4] Hapke M., Jaszkiewicz A., Słowiński R., *Interactive analysis of multiple-criteria project scheduling problems*, European Journal of Operational Research, 107 (1998) 315-324.
- [5] Hegazy T., *Optimization of resource allocation and leveling using genetic algorithms*, ASCE Journal of Construction Engineering and Management, 125, 3, (1999) 167-175.
- [6] Jaśkowski P., *Metoda projektowania struktury systemu wykonawczego przedsięwzięcia budowlanego*, Praca doktorska. Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej. Politechnika Lubelska, 2003.
- [7] Jaśkowski P., Sobotka A., *Scheduling construction projects using evolutionary algorithm*, ASCE Journal of Construction Engineering and Management, 132, 8, (2006.) 861-870.
- [8] Jaśkowski P, Zastosowanie metod ewolucyjnych w harmonogramowaniu przedsięwzięć budowlanych, Rozdział w pracy zbiorowej pod. red. Kapliński O., Metody i modele badań w inżynierii przedsięwzięć budowlanych, Studia z Zakresu Inżynierii nr 57. Warszawa. Polska Akademia Nauk, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, 2007, s. 205-223.
- [9] Kasprowicz T., *Inżynieria przedsięwzięć budowlanych*, Radom Warszawa. Wydawnictwo i Zakład Poligrafii Instytutu Technologii Eksploatacji, 2002.
- [10] Li H., Love P.E.D., *Using improved genetic algorithms to facilitate time-cost optimization*, ASCE Journal of Construction Engineering and Management, 123, 3, (1997) 233-237.
- [11] Marcinkowski R., Metody rozdziału zasobów realizatora w działalności inżynieryjnobudowlanej, Warszawa. Wojskowa Akademia Techniczna, 2002.
- [12] Michalewicz Z., *Genetic algorithms* + *data structures* = *evolution program*, Berlin. Springer-Verlag, 1996.
- [13] Toklu Y.C, *Application of genetic algorithms to construction scheduling with or without resource constraints*, Canadian Journal of Civil Engineering, 29, 3, (2002) 421-429.
- [14] Tong T.K.L., Cheung S.O., Chan A.P.C., Tam C.M., *Genetic algorithm model in optimizing use of labour*, Construction Management & Economics, 19, 2, (2001) 207-215.
- [15] Węglarz J., Sterowanie w systemie kompleks operacji, Warszawa Poznań. PWN, 1981.

Designing the structure of a construction project operating system using evolutionary algorithm

Piotr Jaśkowski

Faculty of Civil and Sanitary Engineering, Lublin University of Technology, Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: p.jaskowski@pollub.pl

Abstract: The paper discusses the problem of designing a construction project's organisation structure at the operating level, where tasks and processes are of "complex of operations" type. Such a system includes heterogeneous operating units (crews, teams) of a general contractor and cooperating external ones - subcontractors, that create a temporary organisation. Its structure changes according to the project schedule as the project advances. The author identified the problem of designing a construction project operating system structure from the point of a general contractor, built the system's model and formalised it mathematically. The contractor selection process (i.e. the selection of the system's elements) is described as the problem of triple-criteria optimisation of the schedule. The assessment of possible variants of the system's structure is made according the criteria crucial for the project's efficiency and the general contractor's objectives (i.e. minimisation of project duration and cost, and keeping subcontracting to minimum - as the general contractor is assumed to be interested in making full use of their own resources). To solve the problem, a method that uses metaheuristic approach has been worked out. An evolutionary algorithm (using stochastic processes) was adapted for solving the triple-criteria schedule optimisation problem in deterministic conditions. The author developed also a heuristic algorithm to allocate limited resources of variable availability. The solutions are generated by means of an achievement scalarising function, which is based on Tchebycheff utility function. The selection of final solution can be done by analysing the approximation of whole set of non-dominated solutions on the basis of total decision maker's preferences, or by means of Steuer's interactive method.

Key words: construction project scheduling, multicriteria optimisation, contractor selection

Propozycja metody obliczania szerokości rys ukośnych w elementach żelbetowych jednocześnie skręcanych i ścinanych

Waldemar Budzyński

Politechnika Lubelska, Instytut Budownictwa, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: walbud@gazeta.pl

Streszczenie: Artykuł dotyczy zjawiska zarysowania skręcanych elementów żelbetowych, które jednocześnie poddane są działaniu siły poprzecznej. Zaprezentowano model teoretyczny Rahala i Collinsa, który jest jedynym modelem dającym możliwość szczegółowej analizy zachowania elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego w całym zakresie obciążenia. Omówiono również założenia teorii MCFT, która stanowi podstawę teoretyczną modelu Rahala i Collinsa. Przedstawiono własną propozycję metody obliczania szerokości rys w elementach żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego i siły poprzecznej. Metoda oparta jest na modelu Rahala i Collinsa.

Słowa kluczowe: żelbet; skręcanie; ścinanie; model kratownicy; odkształcenia; warunki nierozdzielności; szerokość rys.

1. Wprowadzenie

Wiele żelbetowych elementów i konstrukcji budowlanych podlega działaniu momentu skręcającego. Jako przykłady takich konstrukcji można wymienić: przestrzenne konstrukcje ramowe, schody spiralne, belki podporowe płyt balkonowych, trzony usztywniające budynki wysokie, belki podsuwnicowe czy beki skrajne obciążone jednostronnie płytą. Najczęściej skręcany element żelbetowy podlega jednocześnie działaniu V i M, czyli jest skręcany i ścinany.

Projektowanie konstrukcji żelbetowych należy przeprowadzać metodą stanów granicznych. Sprowadza się to do wykazania, że poszczególne elementy tych konstrukcji są zabezpieczone i sprawdzone w zakresie SGN i SGU. Do SGU należy m.in. stan graniczny zarysowania.

W normach wielu krajów, np. [18], nie wprowadza się nakazu obliczeniowego sprawdzania szerokości rys ukośnych wywołanych skręcaniem (lub ścinaniem). Podawane są jedynie zalecenia konstrukcyjne odnośnie średnicy i rozstawu strzemion lub zalecenia projektowe dotyczące zmienności kąta θ , których spełnienie ma zabezpieczyć element przed nadmiernym zarysowaniem. Zalecenia konstrukcyjne mogą dać zadowalający efekt tylko wówczas, gdy nośność elementu określona jest z takim zapasem, że problem nadmiernego zarysowania w ogóle się nie pojawia. Sytuacja taka występuje w wielu krajach, gdzie stosuje się znaczne współczynniki bezpieczeństwa. Taki sposób podejścia jest z konieczności do przyjęcia przy projek-
towaniu nowych konstrukcji. Nie jest jednak możliwy do zastosowania przy ocenie stanu zarysowania konstrukcji istniejących.

W normach niektórych krajów i zaleceniach, np.: [19, 22, 23], można znaleźć wzory do obliczania szerokości rys ukośnych w elementach skręcanych lub ścinanych. Jednak metody obliczeniowe oparte sa cześciowo na wnioskach z analizy elementów rozciaganych, a cześciowo na spostrzeżeniach empirycznych, które uwzglednia sie wprowadzając współczynniki i arbitralne założenia. Przy projektowaniu skręcanych (i ścinanych) elementów żelbetowych stosuje się najczęściej [21, 22] model kratownicy przestrzennej o zmiennym nachyleniu betonowych krzyżulców ściskanych opracowany przez Lamperta i Thürlimanna [9, 10]. W celu wyznaczenia wartości naprężeń i odkształceń w elemencie pod obciążeniem eksploatacyjnym (w obliczeniach stanu zarysowania) stosuje się wzory wyprowadzone na podstawie warunków równowagi kratownicy w stanie granicznym nośności. Ponieważ nie uwzględniono warunków nierozdzielności odkształceń, na podstawie tych wzorów nie można określić odkształceń w betonie i stali w skręcanym (ścinanym) elemencie żelbetowym. W konsekwencji nie jest możliwe prawidłowe prognozowanie zachowania elementu pod obciażeniem eksploatacyjnym (w SGU). Trudno oczekiwać, aby na podstawie takich metod obliczeniowych można było uzyskać prawidłowe szerokości rvs.

W literaturze i przepisach normowych nie stwierdzono metody obliczania szerokości rys ukośnych w elementach żelbetowych jednocześnie skręcanych i ścinanych.

Wydaje się, że ze względu na przepisy normowe (wymaganie sprawdzenia szerokości rys) oraz projektowanie elementów przy stosowaniu mniejszych współczynników bezpieczeństwa niż w innych krajach (dawniej i obecnie), powinna istnieć metoda pozwalająca obliczyć szerokość rys w elementach skręcanych. W artykule podjęto próbę opracowania takiej metody w przypadku elementów jednocześnie skręcanych i ścinanych.

2. Modele teoretyczne odwzorowujące stan odkształcenia elementu żelbetowego poddanego działaniu siły poprzecznej lub momentu skręcającego

2.1. Teoria MCFT

Aby dokładnie określić zachowanie elementu żelbetowego poddanego działaniu siły poprzecznej lub momentu skręcającego, tzn. ustalić nośność oraz stan odkształcenia elementu pod dowolnym obciążeniem, należy w analizie równocześnie uwzględnić równania równowagi, warunki nierozdzielności odkształceń oraz prawa konstytutywne ukośnie zarysowanego betonu i stali zbrojeniowej. Jednym z modeli teoretycznych, który umożliwia taką analizę jest zmodyfikowana teoria pola ściskań (Modified Compression Field Theory – MCFT) Vecchio i Collinsa [15,16]. Teorię opracowano na podstawie analizy prostokątnego elementu żelbetowego, zbrojonego ortogonalnie, znajdującego się w dwuosiowym stanie naprężenia. Przyjęto element o niewielkich wymiarach, wyizolowany z konstrukcji żelbetowej, co przedstawiono na rys. 1. Pod wpływem obciążeń zewnętrznych element może być poddany działaniu naprężeń stycznych i normalnych, rys. 1b. Kierunki prętów podłużnych i poprzecznych oznaczono, odpowiednio, jako osie "*l*" i "*t*", tworząc w ten sposób układ współrzędnych *l-t.* Wobec tego, naprężenia normalne działające na element oznaczono σ_l i σ_l . Ponieważ wymiary elementu są małe w porównaniu z wymiarami konstrukcji przyjęto, że naprężenia są równomiernie rozłożone na bocznych powierzchniach elementu. Po zarysowaniu element pracuje jak kratownica przestrzenna, przy czym zakłada się, że w elemencie występuje wiele wzajemnie równoległych rys. Betonowe krzyżulce ściskane są zorientowane w kierunku osi "2", która jest nachylona pod kątem θ do prętów podłużnych. Przyjmuje się, że kierunek "2" jest kierunkiem głównych naprężeń ściskających w betonie. Oznaczając kierunek prostopadły do osi "2" jako oś "1", otrzymuje się układ współrzędnych "1-2" na kierunku działania naprężeń głównych. Wobec tego, główne naprężenia ściskające i rozciągające w betonie oznaczono, odpowiednio, σ_{c2} i σ_{c1} , rys. 1b. Na rys. 1c przedstawiono superpozycję naprężeń w betonie i zbrojeniu, gdzie naprężenia w betonie, na odpowiednich kierunkach, oznaczono σ_{ch} , σ_{ct} , natomiast naprężenia w zbrojeniu σ_{sl} , σ_{st} .



- Rys. 1. Element żelbetowy w dwuosiowym stanie naprężenia [6]: a) strefa przypodporowa belki żelbetowej, b) przyjęta konwencja oznaczeń, c) superpozycja naprężeń w betonie i zbrojeniu.
- Fig. 1. Reinforced concrete element subjected to in-plane stresses [6]: a) left support of a reinforced concrete beam, b) definitions of stresses and coordinate system, c) superposition of concrete stresses and steel stresses.

Na podstawie teorii MCFT można ustalić wzajemne zależności pomiędzy naprężeniami σ_l , σ_t i τ , działającymi na element żelbetowy, a odkształceniami w elemencie (ε_l , ε_t , γ), spowodowanymi tymi naprężeniami. W teorii MCFT przyjęto następujące, dodatkowe założenia:

1) Element odkształca się w taki sposób, że jego krawędzie pozostają proste i wzajemnie równoległe; stan odkształcenia elementu można więc zdefiniować za pomocą dwóch odkształceń normalnych ε_l , ε_l i odkształcenia poprzecznego γ .

2) Określonemu stanowi odkształcenia odpowiada tylko jeden, właściwy stan naprężenia; rozważania nie obejmują przypadków, w których element poddany jest działaniu obciążeń dynamicznych, powtarzalnych i wielokrotnie zmiennych; dodatkowo nie uwzględnia się wpływu skurczu, pełzania oraz zmian temperatury.

3) Kierunek głównych odkształceń betonu ściskanego ε_2 jest zgodny z kierunkiem głównych naprężeń ściskających w betonie σ_{c2} .

4) Zbrojenie podlega działaniu jedynie sił osiowych; pomija się wpływ sił klockujących (dowel action).

5) Rysy w elemencie żelbetowym stanowią obszary nieciągłości, co powoduje istotną zmienność lokalnych naprężeń i odkształceń, i utrudnia zastosowanie warunków nierozdzielności; rozważania prowadzone są w odniesieniu do średnich wartości odkształceń i średnich wartości naprężeń; odkształcenia i naprężenia są uśrednioną wartością odkształceń i naprężeń na długości odcinka przecinającego kilka rys, wliczając w to odkształcenia i naprężenia w przekrojach zarysowanych; w konsekwencji średnie odkształcenia można rozważać jako wzajemnie powiązane wymaganiami ciągłości materiałów ciągłych.

6) Średnie odkształcenia betonu i zbrojenia są identyczne; na zewnętrznych powierzchniach elementu nie występuje poślizg (całkowity) pomiędzy betonem a zbrojeniem; założenie to nie oznacza, że pomiędzy zbrojeniem a betonem istnieje przyczepność pierwotna; występowanie lokalnych poślizgów w przekrojach zarysowanych nie stanowi naruszenia tego założenia.

7) Rozważania prowadzone są niezależnie w odniesieniu do zbrojenia i zarysowanego betonu; czynnikiem integrującym są warunki nierozdzielności odkształceń.

Równania równowagi

Siły działające na element żelbetowy są równoważone przez siły w betonie i zbrojeniu. Warunki równowagi, można wyrazić przy pomocy naprężeń:

$$\sigma_l = \sigma_{cl} + \rho_l \sigma_{sl} \tag{1}$$

$$\sigma_t = \sigma_{ct} + \rho_t \sigma_{st} \tag{2}$$

$$\tau_{lt} = \tau_{clt} = \tau \tag{3}$$

Przy pomocy warunków równowagi w modelu kratownicy można wykazać [6], że średnie naprężenia w betonie spełniają warunki koła naprężeń *Mohra*. Wobec tego, można wyrazić naprężenia w betonie w funkcji naprężeń głównych:

$$\sigma_{cl} = \sigma_{c2} \cos^2 \theta + \sigma_{c1} \sin^2 \theta \tag{4}$$

$$\sigma_{ct} = \sigma_{c2} \sin^2 \theta + \sigma_{c1} \cos^2 \theta \tag{5}$$

$$\tau = (\sigma_{c^2} + \sigma_{c1})\sin\theta\cos\theta \tag{6}$$

Ponadto korzystając z koła Mohra można wyprowadzić następujące równania:

$$\sigma_{c2} = \tau \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) - \sigma_{c1} \tag{7}$$

$$\sigma_{cl} = \frac{\tau}{\tan \theta} - \sigma_{c1} \tag{8}$$

$$\sigma_{c2} = \sigma_{cl} + \sigma_{ct} + \sigma_{c1} \tag{9}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{cl}}{\sigma_{c2} - \sigma_{ct}} \tag{10}$$

W powyższych równaniach przyjmuje się, że naprężenia σ_{cl} , σ_{cl} , σ_{cl} , są dodatnie przy rozciąganiu, natomiast naprężenie σ_{c2} jest dodatnie przy ściskaniu.

Równania nierozdzielności odkształceń

Zgodnie z założeniem teorii MCFT średnie odkształcenia elementu równe są, co do wartości, średnim odkształceniom betonu i średnim odkształceniom stali (np.: $\varepsilon_l = \varepsilon_{sl} = \varepsilon_{sl}$).

Z warunków nierozdzielności modelu kratownicy wynika [6], że średnie odkształcenia spełniają warunki koła odkształceń *Mohra*. Można więc odkształcenia wyrazić w funkcji odkształceń głównych:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta \tag{11}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \cos^2 \theta \tag{12}$$

$$\gamma = 2\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\right)\sin\theta\cos\theta \tag{13}$$

Ponadto, korzystając z koła odkształceń *Mohra* można wyprowadzić następujące zależności:

$$\gamma = \frac{2\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_l\right)}{\tan\theta} \tag{14}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\gamma}{2\tan\theta} - \varepsilon_2 \tag{15}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_t + \varepsilon_l + \varepsilon_2 \tag{16}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_2}{\varepsilon_t + \varepsilon_2} \tag{17}$$

W powyższych równaniach średnie odkształcenia ε_l , ε_t , ε_1 są traktowane jako wielkości dodatnie przy rozciąganiu, natomiast średnie odkształcenie ε_2 rozpatruje się jako wielkość dodatnią przy ściskaniu.

Prawa konstytutywne betonu i stali

Dla stali przyjęto zależność σ - ε w przekroju zarysowanym:

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s \le f_y \tag{18}$$

Zależności σ - ε ukośnie zarysowanego betonu zostały ustalone przez *Vecchio* i *Collinsa* na podstawie wyników badań [16]. Stwierdzono, że beton w krzyżulcu, ograniczonym ukośnymi rysami, wskutek działania naprężeń rozciągających w kierunku prostopadłym do osi krzyżulca, uzyskuje niższą wytrzymałość na ściskanie niż beton w standardowej próbie ściskania betonowego walca. Ponadto,

w betonie znajdującym się między rysami stwierdzono naprężenia rozciągające, nawet przy bardzo dużych wartościach średnich odkształceń ($\varepsilon_1 \approx 100\varepsilon_{sr}$). Zjawisko zmniejszenia wytrzymałości na ściskanie ukośnie zarysowanego betonu określa się w literaturze jako "zmiękczenie betonu" (softening of concrete). *Vecchio* i *Collins* [15,16] zaproponowali następującą zależność σ - ε betonu zmiękczonego:

$$\sigma_{c2} = \zeta f_{cm} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$
(19)

gdzie ε_o jest odkształceniem odpowiadającym wytrzymałości betonu na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia f_{cm} . Zazwyczaj, jeżeli nie dysponuje się wynikami badań doświadczalnych, przyjmuje się $\varepsilon_o = 0.002$. Czynnik ζ jest "współczynnikiem zmiękczenia" (jego odpowiednikiem w normach [20, 21, 22] jest współczynnik efektywności v), którego wartość wyznacza się ze wzoru:

$$\zeta = \frac{1}{0.8 + 0.34 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{0.8 + 170\varepsilon_1} \le 1.0$$
(20)

Równanie (19) zostało przedstawione w formie graficznej na rys. 2, na którym dodatkowo, dla porównania, przedstawiono zwykłą zależność σ - ε uzyskaną w standardowej próbie ściskania betonowego walca (ϕ 150x300).



Rys. 2. Zależność σ- ε przy ściskaniu betonu zmiękczonego [15]. Fig. 2. Compression σ- ε relationship for softening concrete [15].

Występujący w rów. (19) iloczyn ζf_{cm} jest wytrzymałością na ściskanie betonu zmiękczonego, a w literaturze przyjęto ją oznaczać symbolem f_{2max} .

Wzór, na podstawie którego można wyznaczyć wartość głównych odkształceń w betonie ściskanym, można uzyskać przekształcając rów. (19):

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma_{c2}}{f_{2\max}}} \right) \tag{21}$$

Znak "-", w rów. (21) stosuje się w przypadku $\sigma_{c2} < f_{2max}$.

Vecchio i *Collins* [15, 16] na podstawie wyników badań przyjęli następującą zależność pomiędzy średnimi naprężeniami, a średnimi odkształceniami betonu rozciąganego:

$$\sigma_{c1} = E_c \varepsilon_1 \qquad \qquad \text{dla} \qquad \varepsilon_1 \le \varepsilon_{sr} \tag{22}$$

$$\sigma_{c1} = \frac{f'_{ctm}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_1}} \qquad \text{dla} \qquad \varepsilon_1 > \varepsilon_{sr} \qquad (23)$$

gdzie $E_c = 5500(f_{cm})^{1/2}$ jest modułem sprężystości betonu, $f'_{ctm} = 0.33(f_{cm})^{1/2}$ oznacza średnią wytrzymałość betonu na rozciąganie w dwuosiowym stanie naprężenia ($\sigma_{c1} = -\sigma_{c2}$), natomiast ε_{sr} jest średnim odkształceniem betonu rozciąganego przy zarysowaniu betonu. Wielkość odkształcenia ε_{sr} można obliczyć ze wzoru:

$$\varepsilon_{sr} = \frac{f_{clm}'}{E_c} \tag{24}$$

Podstawiając do rów. (24) odpowiednie zależności określające E_c i f'_{ctm} , uzyskuje się wartość odkształcenia przy zarysowaniu betonu $\varepsilon_{sr} = 0.00006$.

Równania (22) i (23) zostały przedstawione w formie graficznej na rys. 3.



Rys. 3. Zależność σ-ε betonu rozciąganego w elemencie żelbetowym z rysami ukośnymi [15]. Fig. 3. Tension σ-ε relationship of concrete for cracked reinforced concrete [15].

Vecchio i *Collins* [16] zwracają uwagę, że parametry przyczepnościowe stali zbrojeniowej oraz rozmieszczenie zbrojenia w elemencie mogą mieć wpływ na zależność σ - ε betonu rozciąganego opisaną rów. (23).

2.2. Zastosowanie teorii MCFT do elementów skręcanych

Teoria MCFT została przystosowana do analizy elementów poddanych działaniu czystego skręcania przez *Collinsa* i *Mitchella* [4].

Na rys. 4 przedstawiono element żelbetowy o przekroju prostokątnym poddany działaniu momentu skręcającego T. Pod wpływem T, po zarysowaniu elementu, w zewnętrznej strefie przekroju poprzecznego o grubości t_d , zwanej strefą strumienia ścinania, powstaje strumień sił stycznych q. Aby warunek równowagi momentów zewnętrznych i wewnętrznych był spełniony, strumień sił stycznych q musi mieć stałą wartość na całej długości linii środkowej strefy strumienia ścinania. Warunek równowagi można wówczas wyrazić za pomocą równania:

$$q = \frac{T}{2A_{\nu}} \tag{25}$$

gdzie A_k oznacza pole powierzchni zawarte wewnątrz linii środkowej strefy strumienia ścinania.

Zatem, strumień sił stycznych q, przedstawiony na rys. 4a, jest wypadkową naprężeń stycznych τ_T z fragmentu strefy strumienia ścinania o grubości t_d i jednostkowej wysokości, mierzonej wzdłuż linii środkowej. Należy dodać, że w strefie strumienia ścinania występuje zmienny rozkład naprężeń stycznych, których wartość zmienia się od wartości maksymalnej występującej na powierzchni zewnętrznej, w połowie wysokości dłuższego boku przekroju, do zera na głębokości t_d .



- Rys. 4. Belka żelbetowa poddana działaniu momentu skręcającego (model kratownicy): a) widok ogólny; element strefy strumienia ścinania we współrzędnych *l*-*t* (b), współrzędnych *1*-2 (c).
- Fig. 4. Truss model for reinforced concrete torsional member: a) general view; shear flow zone element in *l*-*t* coordinate (b), *1*-2 coordinate (c).

Dzieląc strumień ścinania przez grubość strefy strumienia ścinania t_d (grubość ścianki zastępczego przekroju cienkościennego):

$$\tau_T = \frac{q}{t_d} = \frac{T}{2A_k t_d} \tag{26}$$

uzyskuje się średnie naprężenia styczne, spowodowane przez T, równomiernie rozłożone na całej grubości ścianki t_d .

Element niewielkich rozmiarów wydzielony ze strefy strumienia ścinania, przedstawiony na rys. 4 w układach współrzędnych *l-t* i *1-2*, poddany jest działaniu naprężeń stycznych τ_T w dwuosiowym stanie naprężenia. Ponieważ taki element spełnia wymagania teorii MCFT, można przy pomocy tego modelu analizować żelbetowe elementy skręcane. Równania przedstawione w p. 2.1, pozostają w mocy również w przypadku skręcania, z wyjątkiem tego, że stopnie zbrojenia ρ_l i ρ_l , w rów. (1) i (2), powinny być obliczone w odniesieniu do pola powierzchni strefy strumienia ścinania. Stopień zbrojenia poprzecznego można obliczyć wg wzoru:

$$\rho_t = \frac{a_{sw}}{s \cdot t_s} \tag{27}$$

gdzie a_{sw} jest polem przekroju jednej gałęzi strzemienia, s jest rozstawem strzemion.

W przypadku czystego skręcania, jak również "czystego" ścinania (M = 0), działające na element naprężenia normalne σ_l i σ_t są równe zero, czyli $\sigma_l = \sigma_t = 0$.

Aby opisać stan elementu skręcanego, oprócz wymienionych powyżej równań, niezbędne jest wprowadzenie dodatkowych równań równowagi, nierozdzielności oraz prawa konstytutywnego betonu ściskanego w krzyżulcach.

Warunek równowagi momentów w przekroju poprzecznym elementu skręcanego można wyrazić przy pomocy zależności *Bredta* (26).

Wskutek skręcania belki, w każdym pojedynczym elemencie strefy strumienia ścinania wywołane jest odkształcenie poprzeczne. Warunek nierozdzielności ustalający związek odkształcenia poprzecznego γ elementu ścianki zastępczego przekroju cienkościennego z kątem obrotu belki ψ , wyprowadzony przez *Bredta*, ma następującą postać:

$$\psi = \gamma \frac{u_k}{2A_k} \tag{28}$$

gdzie u_k oznacza obwód linii środkowej strefy strumienia ścinania.

Powierzchnie zewnętrzne skręcanych belek, wskutek obrotu elementu, ulegają spaczeniu (wygięciu wklęsłemu). Drugi, dodatkowy warunek nierozdzielności odkształceń, wyprowadzony przez *Lamperta* i *Thürlimanna* [10], ustala związek między krzywizną betonowych krzyżulców ϕ_{dv} , a kątem obrotu elementu ψ :

$$\phi_{dp} = \psi \sin\left(2\theta\right) \tag{29}$$

Betonowe krzyżulce w elemencie skręcanym poddane są działaniu nie tylko osiowego ściskania, ale również zginania, spowodowanego spaczeniem zewnętrznych powierzchni. Wskutek złożonego stanu naprężenia, w krzyżulcu występuje zmienny rozkład odkształceń głównych ε_2 , które przyjmują największą wartość na powierzchni zewnętrznej ε_{2max} , a ich wartość zmniejsza się w kierunku do wnętrza belki. Przyjmuje się, a potwierdziły to wyniki badań *Mitchella* i *Collinsa* [4], że w krzyżulcu o grubości t_d rozkład odkształceń ε_2 jest liniowy, co przedstawiono na rys. 5a. Można więc ustalić zależność między krzywizną krzyżulca ϕ_{dp} , maksymalnym odkształceniem ściskanego betonu ε_{2max} oraz grubością strefy strumienia ścinania (grubością krzyżulca) t_d :

$$\varepsilon_{2\max} = \phi_{dp} t \tag{30}$$

Na rys. 5b przedstawiono rozkład naprężeń ściskających w betonowym krzyżulcu skręcanej belki, pod obciążeniem bliskim nośności belki, który odpowiada liniowemu rozkładowi odkształceń. Krzywa reprezentująca rozkład naprężeń ściskających jest identyczna z krzywą σ - ε betonu zmiękczonego, opisaną rów. (19). W celu ułatwienia analizy, paraboliczny wykres naprężeń ściskających zastępuje się równoważnym, prostokątnym wykresem naprężeń, przedstawionym na rys. 5c. Równoważny wykres naprężeń jest statycznie zdefiniowany za pomocą dwóch parametrów: wysokości *a*, którą wyznacza się ze wzoru:

$$a = \beta_1 t_d \tag{31}$$

oraz średnich naprężeń ściskających, których wartość oblicza się według zależności:

$$\sigma_{c2} = \alpha_1 f_{2\max} = \alpha_1 \zeta f_{cm} \tag{32}$$



- Rys. 5. Rozkład naprężeń i odkształceń w betonowym krzyżulcu ściskanym elementu skręcanego [4].
- Fig. 5. Strain and stress distributions in concrete compression strut of a element subjected to torsion [4].

Należy szczególnie podkreślić, że rów. (19), wyrażające zależność σ - ε betonu w krzyżulcach poddanych działaniu osiowego ściskania, nie jest możliwe do zastosowania w przypadku elementów skręcanych, ponieważ w takich elementach betonowe krzyżulce poddane są jednoczesnemu działaniu osiowego ściskania i zginania. Tak więc, rów. (32) jest nowym prawem konstytutywnym, ustalającym zależność między średnimi odkształceniami ε_2 a średnimi naprężeniami σ_{c2} w betonowych krzyżulcach elementów skręcanych.

Występujące w rów. (31) i (32) zmienne α_1 i β_1 , które są funkcją odkształceń ε_2 , nazywane są współczynnikami równoważnego wykresu naprężeń. Współczynniki α_1 i β_1 wyznacza się w taki sposób, aby wartości i położenie wypadkowych wykresów naprężeń przedstawionych na rys. 5b i 5c były identyczne.

Współczynnik α_1 , który wyraża wartość stosunku naprężeń średnich do naprężeń maksymalnych w betonowych krzyżulcach ściskanych, wyznacza się z równowagi sił wypadkowych:

$$C = \alpha_1 f_{2\max} a = \frac{t_d}{\varepsilon_{2\max}} \int_0^{\varepsilon_{2\max}} \sigma_{c2} \left(\varepsilon_2\right) d\varepsilon_2$$
(33)

Współczynnik β_1 , określający wysokość równoważnego wykresu naprężeń (grubość równoważnego pola ściskanego w betonowym krzyżulcu), wyznacza się z warunku równowagi momentów względem osi obojętnej, która zlokalizowana jest w odległości t_d od powierzchni zewnętrznej:

$$C\left(1-0.5\beta_{1}\right)t_{d} = \frac{t_{d}^{2}}{\varepsilon_{2\max}^{2}} \int_{0}^{\varepsilon_{2\max}} \sigma_{c2}\left(\varepsilon_{2}\right)\varepsilon_{2}d\varepsilon_{2}$$
(34)

Po odpowiednich przekształceniach, uzyskuje się wzory do obliczania współczynników β_1 i α_1 :

$$\beta_{1} = 0.5 \frac{\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_{0}} - 4}{\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_{0}} - 3}$$

$$(35)$$

$$\alpha_{1} = \frac{1}{\beta_{1}} \left[\left(\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_{0}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_{0}} \right)^{2} \right]$$
(36)

Analizę żelbetowych elementów skręcanych, przy wykorzystaniu teorii MCFT, prowadzi się więc przy założeniu, że betonowe krzyżulce posiadają równoważną grubość $a = \beta_1 t_d$ (równoważna grubość strefy strumienia ścinania). Wypadkowa naprężeń ściskających jest więc zlokalizowana w odległości (*a* /2) od zewnętrznej powierzchni betonu, a jej położenie jest zgodne z położeniem linii środkowej równoważnej strefy strumienia ścinania. Przyjmuje się, że odkształcenia w płaszczyźnie działania wypadkowej naprężeń ściskających mają wartość średnią i mogą być używane do konstruowania koła odkształceń *Mohra*. Przy tym założeniu, średnią wartość głównych odkształceń w ściskanym betonie ε_2 , można obliczyć wg wzoru:

$$\varepsilon_2 = \left(1 - 0.5\beta_1\right)\varepsilon_{2\max} \tag{37}$$

Konsekwencją przyjęcia w analizie równoważnej grubości strefy strumienia ścinania są modyfikacje niektórych równań wykorzystywanych w teorii MCFT, polegające przede wszystkim na zastąpieniu zmiennej t_d przez zmienną a.

3. Model teoretyczny Rahala i Collinsa odwzorowujący stan odkształcenia elementu żelbetowego poddanego jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego i siły poprzecznej

Istotnym z punktu widzenia stanów granicznych nośności i stanów granicznych użytkowalności jest fakt, że przy skręcaniu ze ścinaniem występuje zróżnicowany rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym, co zilustrowano na rys. 6.



- Rys. 6. Rozkład naprężeń stycznych w zewnętrznej części przekroju poprzecznego spowodowanych: a) siłą poprzeczną *V*, b) momentem skręcającym *T*, c) jednoczesnym działaniem (*T*+*V*).
- Fig. 6. Shearing stresses distribution near the periphery of a section subjected to: a) shear V, b) torsion T, c) combined torsion and shear (T+V).

Przyjmuje się, że w elementach o przekroju pełnym naprężenia styczne spowodowane siłą poprzeczną τ_V są równomiernie rozłożone w całym przekroju, a kierunek ich działania jest zgodny z kierunkiem działania siły V. Naprężenia styczne τ_T spowodowane momentem skręcającym, o "obwodowym" kierunku działania, występują jedynie w zewnętrznej części przekroju (w ściankach zastępczego przekroju cienkościennego o grubości t_d). Naprężenia styczne τ_T i τ_V będą się więc odejmowały na jednym boku belki (przypadek *T-V*), równoległym do płaszczyzny działania momentu zginającego, a na drugim sumowały (przypadek *T+V*). W konsekwencji bok przekroju, na którym następuje sumowanie naprężeń stycznych będzie obszarem "krytycznym" ze względu na stan graniczny nośności i stan graniczny szerokości rys. Ponieważ naprężenia styczne τ_v przenoszone są przez cały przekrój poprzeczny, natomiast τ_T jedynie przez "obwodową" część przekroju, w ściance "krytycznej" nie będzie obowiązywała zasada superpozycji przy sumowaniu naprężeń stycznych. Mówiąc inaczej, przyjęcie liniowej interakcji pomiędzy *T* i *V* przy projektowaniu elementów jednocześnie skręcanych i ścinanych jest założeniem zbyt zachowawczym.

Metoda analizy elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego powinna uwzględniać rzeczywisty rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym oraz przestrzenną pracę elementu.

Jedynym dostępnym w literaturze modelem teoretycznym, na podstawie którego można szczegółowo analizować zachowanie elementów żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu skręcania i ścinania jest model *Rahala* i *Collinsa* [13]. Został on opracowany na podstawie teorii MCFT. Poprzez wprowadzenie warunku nierozdzielności krzywizn rozszerzono zakres stosowania modelu na elementy jednocześnie skręcane i ścinane.

Jeżeli element żelbetowy o przekroju pełnym jest poddany działaniu skręcania, to jego przekrój, w analizie, można zastąpić przekrojem cienkościennym. Przy czystym skręcaniu poszczególne ścianki przekroju cienkościennego: lewa, górna, prawa i dolna, które zostaną oznaczone, odpowiednio: *L*, *G*, *P* i *D*, mają jednakową grubość, ponieważ wartość średnich naprężeń stycznych wywołanych skręcaniem τ_T jest we wszystkich ściankach identyczna. Przy jednoczesnym skręcaniu i ścinaniu, naprężenia styczne od skręcania τ_T i siły poprzecznej τ_V będą się w jednej ze ścianek, np. prawej, sumowały ($\tau_T + \tau_V$), w lewej odejmowały ($\tau_T - \tau_V$), a w górnej i dolnej będą działały jedynie naprężenia τ_T , (por. rys. 6). Stan odkształcenia (naprężenia) w poszczególnych ściankach będzie więc zróżnicowany. W rezultacie, aby określić stan odkształcenia w konkretnej ściance, należy w analizie uwzględnić przestrzenną pracę elementu, która zależy od stanu odkształcenia poszczególnych ścianek. W tym celu, *Rahal* i *Collins* wprowadzają warunek nierozdzielności krzywizn, który uwzględnia wzajemną zależność pomiędzy odkształceniami ścianek.

Model *Rahala* i *Collinsa* daje możliwość analizy przekrojów żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu: momentu skręcającego *T*, siły osiowej *N*, siły poprzecznej pionowej V_y , siły poprzecznej poziomej V_z , zginania w płaszczyźnie pionowej M_y i zginania w płaszczyźnie poziomej M_z (por. rys. 7a). W artykule, przy opisie modelu, bardziej szczegółowo zostanie zaprezentowany przypadek, gdy w przekroju poprzecznym występują jedynie moment skręcający *T* i siła poprzeczna *V* działająca w kierunku pionowym.

3.1. Podstawowe założenia modelu

Na rys. 7a przedstawiono element żelbetowy o przekroju prostokątnym znajdujący się, wskutek działania obciążeń zewnętrznych, w złożonym stanie naprężenia, oraz fragment, niewielkich rozmiarów, wyizolowany z przekroju poprzecznego tego elementu, który znajduje się w trójosiowym stanie naprężenia. Określenie tego złożonego stanu naprężenia, na podstawie aktualnej wiedzy o zarysowanych elementach żelbetowych, byłoby niezwykle skomplikowane. W celu uproszczenia analizy dokonuje się idealizacji przekroju w taki sposób, aby niezależnie rozważać części składowe znajdujące się w jedno- i dwuosiowym stanie naprężenia, przy jednoczesnym zachowaniu wzajemnych zależności pomiędzy tymi dwoma układami.

Na rys. 7b przedstawiono wyidealizowany przekrój poprzeczny, zbrojony prętami podłużnymi, który przenosi część obciążeń (N, M_z , M_y oraz naprężenia normalne spowodowane przez V_y , V_z i T) za pośrednictwem naprężeń normalnych. Na rys. 7b przedstawiono również, za pomocą linii przerywanej, stan przekroju po odkształceniu, z którego wynika, że w całym przekroju przyjęto liniową zmienność odkształceń w kierunku podłużnym tzn.: przekroje płaskie pozostają płaskie, a naprężenia normalne związane są z odkształceniami poprzez zwykłe, jednoosiowe zależności σ - ε , zarówno w odniesieniu do betonu jak i stali. W dalszej części pracy, wyidealizowany przekrój przedstawiony na rys. 7b będzie określany jako "układ 1".

Na rys. 7c przedstawiono wyidealizowany przekrój znajdujący się w dwuosiowym stanie naprężenia, który przenosi siły poprzeczne V_z , V_y i moment skręcający T. Przekrój składa się z czterech poprzecznie zbrojonych ścianek, o różnych grubościach t_m , i różnym kącie nachylenia θ kierunku głównych naprężeń w ściskanym betonie. W artykule, ten wyidealizowany przekrój będzie określany jako "układ 2".



Rys. 7. Sposób idealizacji przekroju żelbetowego wg modelu *Rahala* i *Collinsa* [13]. Fig. 7. Idealization of reinforced concrete section in the model of *Rahal* and *Collins* [13].

Pomiędzy tymi dwoma wyidealizowanymi układami występują wzajemne zależności. Po pierwsze, naprężenia styczne występujące w ściankach układu 2 powodują powstawanie sił podłużnych oraz momentów zginających, jeżeli wartości sił podłużnych w przeciwległych ściankach są różne. Układ 1 będzie, wobec tego, poddany działaniu obciążeń zewnętrznych (N, M_z, M_y) oraz obciążeń spowodowanych naprężeniami stycznymi. Należy więc wyznaczyć odpowiednie siły podłużne z układu 2 i zastosować je w układzie 1. Po drugie, każda ścianka układu 2 podlega działaniu naprężeń stycznych (od V_z, V_y i T) oraz, dodatkowo, odkształcenia w kierunku podłużnym ε_l . Odkształcenie ε_l wyznacza się z układu 1 i stosuje w układzie 2. Przyjęto, że ε_l jest odkształceniem w kierunku podłużnym środka ciężkości ścianki (równoległym do osi podłużnej belki).

W związku z powyższymi założeniami, do określenia stanu naprężenia i odkształcenia w każdej ściance można wykorzystać równania teorii MCFT.

Aby uzyskać spodziewane rozwiązanie, przy pomocy omawianego modelu teoretycznego, muszą być spełnione następujące wymagania:

1) w odniesieniu do całego przekroju poprzecznego: równowaga naprężeń stycznych (układ 2) i normalnych (układ 1) oraz nierozdzielność odkształceń w kierunku podłużnym (układ 1);

2) w każdej ściance: prawa konstytutywne betonu i stali (MCFT) (układ 1 i 2), warunki nierozdzielności średnich odkształceń (MCFT) (układ 2), warunki równowagi średnich naprężeń (MCFT) (układ 2) oraz nierozdzielność krzywizn (układ 2).

Z warunku równowagi naprężeń stycznych wynika wzajemna zależność pomiędzy ściankami układu 2. Wypadkowe naprężeń stycznych w ściankach muszą być w równowadze z obciążeniami zewnętrznymi (*V*, *T*).

Przyjęto założenie, że siła poprzeczna V (pionowa) przenoszona jest wyłącznie przez ścianki pionowe. Wartość średnich, równomiernie rozłożonych naprężeń stycznych wywołanych siłą V:

$$\tau_V = \frac{V}{bz} \tag{38}$$

Z przyjętego założenia wynika, że grubość pojedynczej ścianki (krzyżulca) przenoszącej naprężenia styczne τ_v , jest równa połowie szerokości całego przekroju poprzecznego $t_v = 0.5b$.

Moment skręcający *T* wywołuje naprężenia styczne we wszystkich ściankach. Rozkład tych naprężeń jest liniowy na grubości ścianki (por. rys. 8.a). Przy czystym skręcaniu średnia wartość równomiernie rozłożonych naprężeń stycznych τ_T jest stała we wszystkich ściankach [por. rów. (26)], które mają identyczną grubość t_d , co zostało opisane w p.2.2. Ponieważ w analizie elementów skręcanych, wg teorii MCFT, grubość ścianki zastępuje się równoważną grubością krzyżulca $a = \beta_1 t_d$ (por. rys. 5), rów. (26) przyjmie postać:

$$\tau_{Ti} = \frac{q_T}{a_i} = \frac{T}{2A_k a_i} \tag{39}$$

gdzie indeks *i* zastępuje się odpowiednim indeksem: *L*, *G*, *P* lub *D*. Równanie (39) jest ogólną postacią rów. (26) i można je stosować w przypadku, gdy grubości ścianek

są różne. Przy różnych grubościach ścianek pole A_k , zawarte wewnątrz linii środkowej strefy strumienia ścinania:

$$A_{k} = \left(b - \frac{a_{L}}{2} - \frac{a_{P}}{2}\right) \left(h - \frac{a_{G}}{2} - \frac{a_{D}}{2}\right)$$
(40)

Przy jednoczesnym działaniu momentu skręcającego i pionowej siły poprzecznej naprężenia styczne τ_T i τ_V będą się w jednej ze ścianek pionowych odejmowały, a w drugiej (krytycznej) dodawały. W rezultacie rozkład naprężeń stycznych w obu ściankach będzie nierównomierny.



- Rys. 8. Rozkład naprężeń stycznych w ściance krytycznej ($\tau_T + \tau_V$) elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego [13]: a) naprężenia rzeczywiste, b) naprężenia średnie spowodowane działaniem *T* i *V*, c) naprężenia średnie spowodowane jednoczesnym działaniem *T* i *V*.
- Fig. 8. Shearing stresses distribution in the critical wall $(\tau_T + \tau_V)$ of element subjected to combined torsion and shear [13]: a) original system of stresses, b) average stresses due to *V* and *T*, c) average stress due to combined *T* and *V*.

Na rys. 8a przedstawiono rozkład naprężeń stycznych, wywołanych przez T i V, w krytycznej ściance przekroju ($\tau_T + \tau_V$). Równomiernie rozłożone naprężenia τ_V , wg rów. (38), występują na grubości t_V . Rozkład naprężeń stycznych wywołanych przez T jest zmienny na grubości t_d . Zastępując go równoważnym rozkładem średnich, równomiernie rozłożonych na grubości a, naprężeń stycznych τ_T , wg rów. (39), uzyskuje się rozkład naprężeń stycznych w ściance krytycznej jak na rys. 8b.

Zakres stosowania teorii MCFT ograniczony jest do elementów poddanych działaniu równomiernie rozłożonych naprężeń. Teorię można stosować w przypadku elementów skręcanych lub ścinanych, w których betonowe krzyżulce podlegają działaniu równomiernie rozłożonych, średnich naprężeń stycznych, odpowiednio: τ_T na grubości *a* i τ_V na grubości $t_V = 0.5b$. W przypadku jednoczesnego skręcania i ścinania rozkład naprężeń stycznych jest jednak nierównomierny, jak wynika z rys. 8b. Aby można było zastosować równania teorii MCFT, wyznacza się wartość średnich naprężeń stycznych τ_m , które działają na odpowiedniej grubości t_m , co przedstawiono na rys. 8c. Wartości zmiennych τ_m i t_m , charakteryzujących rozkład średnich naprężeń stycznych w ściance i spowodowanych jednoczesnym działaniem *T* i *V*, oblicza się w taki sposób, aby wartość i położenie wypadkowych rozkładów naprężeń przedstawionych na rys. 8b i 8c były identyczne. Znając wartość średnich naprężeń stycznych τ_m w ściance oraz wartość odkształceń w kierunku podłużnym ε_l środka ciężkości ścianki, można za pomocą teorii MCFT ustalić stan odkształcenia (naprężenia) ścianki.

Na rys. 7b przedstawiono (linią przerywaną) ogólny stan odkształcenia przekroju w kierunku podłużnym. Przekrój może się obracać dookoła osi poziomej (*z*) oraz pionowej (*y*). Do opisania stanu odkształcenia w kierunku podłużnym, a w konsekwencji stanu naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym, niezbędne są trzy niezależne zmienne. Na rys. 7b przedstawiono zmienne, które zostały wybrane w prezentowanym modelu teoretycznym, wraz z konwencją ustalania znaków tych zmiennych. Zmiennymi są: ε_{cen} – odkształcenie w kierunku podłużnym środka ciężkości przekroju; dodatnie przy rozciąganiu, ϕ_z – obrót dookoła osi *z*; dodatni jeżeli skutkiem jest ściskanie górnych włókien przekroju, ϕ_y – obrót dookoła osi *y*; dodatni

Przy danej kombinacji odkształceń: ε_{cen} , ϕ_z , ϕ_y , odkształcenie podłużne dowolnego punktu przekroju o współrzędnych (*z*,*y*) można wyznaczyć z warunku nierozdzielności odkształceń podłużnych, opisanego równaniem:

$$\varepsilon_{l} = \varepsilon_{cen} - y\phi_{z} + z\phi_{y} \tag{41}$$

W modelu przyjmuje się doskonałą przyczepność pomiędzy betonem i stalą (założenie 6, w p. 2.1). W związku z tym, rów. (41) można wykorzystać do obliczenia odkształceń zarówno w betonie jak i w prętach zbrojeniowych, w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego.

Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym (układ 1) muszą być w równowadze z zewnętrznymi obciążeniami (N, M_y , M_z). Warunki równowagi muszą również uwzględniać występowanie naprężeń normalnych, które powstają w ściankach (układ 2), wskutek działania naprężeń stycznych τ_{mi} . Naprężenia w betonie i zbrojeniu podłużnym, wyznaczone na podstawie rozkładu odkształceń ε_i w całym przekroju [wg rów. (41)] i przy wykorzystaniu praw konstytutywnych betonu (zależności niezmiękczone) i stali, po scałkowaniu względem odpowiednich powierzchni, należy zsumować z siłami przekrojowymi. W rezultacie otrzymuje się następujące równania równowagi układu 1 we współrzędnych *z-y*:

$$\int_{A_c} \sigma_{cl} dA_c + \int_{A_s} \sigma_{sl} dA_s = N + \sum_{i=1}^4 N_{vi}$$
(42)

$$\int_{A_c} \sigma_{cl} y dA_c + \int_{A_s} \sigma_{sl} y dA_s = -M_z - \sum_{i=1}^4 \left(N_{vi} y_i \right)$$
(43)

$$\int_{A_c} \sigma_{cl} z dA_c + \int_{A_s} \sigma_{sl} z dA_s = M_y + \sum_{i=1}^4 \left(N_{vi} z_i \right)$$
(44)

gdzie z_i oraz y_i są, odpowiednio, współrzędnymi z i y środka ciężkości ścianki i. Z prawych stron powyższych równań występuje całkowite obciążenie równoważne, które jest sumą obciążeń zewnętrznych i obciążeń będących wynikiem działania naprężeń stycznych τ_{mi} . $N_{\nu i}$ jest siłą podłużną spowodowaną działaniem naprężeń stycznych τ_{mi} w ściance *i*, którą wyznacza się ze wzoru [por. rów. (8)]:

$$N_{vi} = \left(\frac{\tau_{mi}}{\tan \theta_i} - \sigma_{c1i}\right) \times \text{(pole powierzchni ścianki "i")}$$
(45)

Wszystkie ścianki przekroju (układ 2), które znajdują się w dwuosiowym stanie naprężenia (τ_{mi}) i dodatkowo podlegają działaniu odkształcenia podłużnego ε_l , spełniają założenia teorii MCFT. Wobec tego równania teorii MCFT mogą być wykorzystane w prezentowanym modelu, w celu określenia stanu odkształcenia (naprężenia) poszczególnych ścianek. Dodatkowo, *Rahal* i *Collins* [13] wprowadzają warunek nierozdzielności krzywizn.

W każdej ściance występuje wzajemna zależność pomiędzy skręceniem przekroju ψ , krzywizną podłużną ϕ_l (w płaszczyźnie poziomej), krzywizną poprzeczną ϕ_l (w płaszczyźnie pionowej) oraz krzywizną maksymalną ϕ_{dp} (wzdłuż osi krzyżulca). Zależność tą, która stanowi warunek nierozdzielności krzywizn, można przedstawić za pomocą równania:

$$\phi_{dv} = \phi_t \sin^2 \theta + \phi_l \cos^2 \theta + \psi \sin \left(2\theta\right) \tag{46}$$

Krzywizna danej ścianki ma znak dodatni, zgodny ze znakiem ψ , jeżeli wartość odpowiedniego odkształcenia w tej ściance jest mniejsza od odpowiedniego odkształcenia w ściance do niej równoległej. Ponieważ wartości odkształceń w ściance zależą od wartości naprężeń stycznych, odkształcenia w ściance krytycznej, w której ($\tau_T + \tau_V$) (przyjmijmy, że jest to prawa ścianka), będą miały zawsze większe wartości od odpowiednich odkształceń w ściance do niej równoległej ($\tau_T - \tau_V$). Wobec tego, krzywizny prawej ścianki (krytycznej) muszą mieć znak ujemny i należy je wyznaczać w następujący sposób:

$$\phi_{lP} = \frac{\varepsilon_{lL}^s - \varepsilon_{lP}^s}{b} \tag{47}$$

$$\phi_{tP} = \frac{\varepsilon_{tL} - \varepsilon_{tP}}{b_{a}} \tag{48}$$

natomiast krzywizny lewej ścianki będą równe: $\phi_{lL} = -\phi_{lP}$ i $\phi_{tL} = -\phi_{tP}$. W rów. (47) i (48) ε_{ti} oznacza średnie odkształcenie w betonie w kierunku poprzecznym (równe odkształceniu w zbrojeniu poprzecznym), b_s jest odległością pomiędzy pionowymi gałęziami strzemienia, natomiast ε_{ii} oznacza średnie odkształcenie podłużne w punkcie leżącym na skrajnym włóknie przekroju, na wysokości środka ciężkości przekroju. Warto zauważyć, że w elementach poddanych czystemu skręcaniu $\phi_{li} = \phi_{ti} = 0$, a rów. (46) przyjmuje postać wyrażoną rów. (29).

W modelu teoretycznym *Rahala* i *Collinsa*, rów. (46) wykorzystuje się do obliczenia wartości zmiennej ϕ_{dp} . Znając wartość odkształcenia na zewnętrznej, ściskanej powierzchni betonu ε_{2max} , oblicza się grubość krzyżulca t_d , przenoszącego skręcanie, według zależności, która wynika z rów. (30):

$$\phi_{dp} = \frac{\varepsilon_{2\,\text{max}}}{t_d} \tag{49}$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku ścianki krytycznej ($\tau_T + \tau_V$), przy obliczaniu t_d nie można bezpośrednio skorzystać z rów. (49), ponieważ odkształcenie ε_{2max} spowodowane jest jednoczesnym działaniem *T* i *V* ($\varepsilon_{2max} = \varepsilon_{2maxT} + \varepsilon_{2maxV}$). W tym przypadku rów. (49) przyjmuje postać:

$$t_d = \frac{\varepsilon_{2\max T}}{\phi_{dp}} \tag{50}$$

3.2. Odkształcenie betonu ściskanego na zewnętrznej powierzchni krzyżulca (ε_{2max}), w ściance krytycznej ($\tau_{T} + \tau_{V}$)

Stan odkształcenia (naprężenia) w ściance krytycznej określa się, wykorzystując równania teorii MCFT, przy założeniu, że jest ona poddana działaniu średnich naprężeń stycznych τ_m (T+V), równomiernie rozłożonych na grubości t_m (por. rys. 8 oraz rys. 9.a). W wyniku przeprowadzonej procedury obliczeniowej uzyskuje się średnie wartości naprężeń i odkształceń w ściance krytycznej, która podlega jednoczesnemu działaniu skręcania i ścinania (T+V), m.in.: σ_{c2m} , f_{2maxm} , σ_{c1m} , ε_{2m} , θ_m . Indeks *m* oznacza, że odkształcenie lub naprężenie zostało spowodowane działaniem siły poprzecznej, równoważnej poczatkowemu układowi napreżeń stycznych (T+V). Na podstawie przeprowadzonej analizy nie można, wobec tego określić, w jaki sposób zmienia się wartość ε_2 na grubości ścianki. W konsekwencji, nie można ustalić wartości odkształcenia na zewnętrznej powierzchni ściskanego betonu ε_{2max} . Odkształcenie ε_{2max} jest bardzo ważne w analizie elementów skręcanych. Jest wskaźnikiem zmiażdżenia betonu (przyjmuje się, że zmiażdżenie betonu występuje, gdy $\varepsilon_{2max} = 1.5\varepsilon_0$, a ponadto stanowi podstawę obliczenia grubości ścianki t_d przenoszącej skręcanie, wg rów. (50), a w konsekwencji również A_k , wg rów. (40), oraz skręcenia przekroju ψ .

W celu określenia wartości ε_{2max} należy przeprowadzić dodatkową analizę obliczeniową, która oparta jest na założeniu, że główne odkształcenia w betonie ściskanym ε_{2T} , spowodowane skręcaniem, zmieniają się liniowo na grubości t_d . Ilustracja graficzna tej analizy została przedstawiona na rys. 9.

Główne naprężenia ściskające w ściance krytycznej σ_{c2m} , obliczone na podstawie τ_m i t_m , spowodowane są jednoczesnym działaniem T i V. Wartość wypadkowej wykresu naprężeń σ_{c2m} musi być równa sumie wartości wypadkowych rzeczywistych wykresów naprężeń ściskających spowodowanych przez T (σ_{c2T}) i V (σ_{c2V}). Udział skręcania w głównych naprężeniach ściskających będzie więc równy:

$$A_T = \sigma_{c2w} t_m - \sigma_{c2V} t_V \tag{51}$$

gdzie $\sigma_{c2V}t_V$ jest udziałem siły poprzecznej, co przedstawiono na rys. 9b i 9c. Wartość σ_{c2V} oblicza się, zgodnie z rów. (7), w następujący sposób:

$$\sigma_{c2V} = \tau_V \left(\tan \theta_m + \frac{1}{\tan \theta_m} \right) - \sigma_{c1m}$$
(52)

Znając wartość σ_{c2V} można obliczyć główne odkształcenie w betonie ściskanym spowodowane siłą poprzeczną ε_{2V} , z rów. (21). Ponieważ siła poprzeczna powoduje równomierny rozkład odkształceń na grubości krzyżulca t_V , wobec tego, $\varepsilon_{2V} = \varepsilon_{2maxV}$.



- Rys. 9. Sposób wyznaczania ε_{2max} w ściance krytycznej belki jednocześnie skręcanej i ścinanej wg modelu *Rahala* i *Collinsa* [13]: a) sposób wyznaczania równoważnych, średnich naprężeń stycznych τ_m , b) określenie udziału *T* w głównych naprężeniach ściskających, c) wyznaczenie ε_{2max} (lub ε_{2maxT}).
- Fig. 9. Method for calculating ε_{2max} in the critical wall of the beam subjected to combined torsion and shear in the model of *Rahal* and *Collins* [13]: a) computing equivalent average shear stress τ_m , b) calculating contribution of *T* to the principal compressive stresses, c) computing ε_{2max} (or ε_{2maxT}).

Znając wartość A_T oblicza się ε_{2maxT} w taki sposób, aby spełnione było założenie o liniowej zmienności odkształcenia ε_{2T} na grubości t_d , por. rys. 9c. Liniowa zmienność ε_{2T} implikuje paraboliczny wykres naprężeń σ_{c2T} na grubości t_d , wobec tego ε_{2maxT} należy wyznaczyć na podstawie równania [por. rów. (33)]:

$$A_{T} = \int_{0}^{t_{d}} f(x) dx = \frac{t_{d}}{\varepsilon_{2 \max T}} \int_{0}^{\varepsilon_{2 \max T}} \sigma_{c2T} \left(\varepsilon_{2T}\right) d\varepsilon_{2T}$$
(53)

Wartość odkształcenia na zewnętrznej powierzchni betonu ściskanego, spowodowanego jednoczesnym działaniem *T* i *V*, będzie więc równa:

$$\varepsilon_{2\max} = \varepsilon_{2\max T} + \varepsilon_{2\max V} \tag{54}$$

Wartość odkształcenia ε_{2max} można również wyznaczyć w sposób "bezpośredni", rozważając jednoczesne działanie *T* i *V* na grubości t_d . Udział naprężeń ściskających σ_{c2} , działających na grubości t_d i spowodowanych jednoczesnym działaniem *T* i *V*, w naprężeniach σ_{c2m} będzie równy, zgodnie z rys. 9c:

$$A_{T+V} = \sigma_{c2m} t_m - \sigma_{c2V} \left(t_V - t_d \right)$$
(55)

Wartość odkształcenia ε_{2max} określa się na podstawie równania:

$$A_{T+V} = \int_{t_1-t_d}^{t_1} f\left(x\right) dx = \frac{t_1}{\varepsilon_{2\max}} \int_{\varepsilon_{2\max V}}^{\varepsilon_{2\max}} \sigma_{c2}\left(\varepsilon_2\right) d\varepsilon_2$$
(56)

Do wyznaczenie wartości ε_{2maxT} , z rów. (53), oraz ε_{2max} , z rów. (56), konieczne jest zastosowanie metody iteracyjnej. Istotą procedury iteracyjnej jest uzyskanie zbieżności pomiędzy wartością całki, rów. (53) lub (56), i wartością wypadkowej równoważnego (prostokątnego) wykresu naprężeń (por. rys. 5). Należy zwrócić uwagę, że wyznaczając wartość ε_{2max} na podstawie rów. (56), nie można zastosować współczynników równoważnego wykresu naprężeń α_1 i β_1 dla przypadku czystego skręcania, tzn. przy założeniu, że ε_2 zmienia się od zera do ε_{2max} na grubości t_d . W ściance krytycznej elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego (T+V), wartość głównych odkształceń zmienia się, na grubości t_d , od ε_{2v} do ε_{2max} , por. rys. 9c. Należy więc wyznaczyć nowe wartości współczynników równoważnego bloku naprężeń, reprezentatywne dla przypadku (T+V). Wartości współczynników, które dla odróżnienia zostaną oznaczone jako α_2 i β_2 , określa się na podstawie rów. (33) i (34) z tym, że w wyrażeniach występujących po prawej stronie tych równań, należy zmienić odpowiednio granice całek oraz zmienną t_d zastąpić zmienną t_1 . Ostatecznie, po przekształceniach, wartość współczynnika α_2 oblicza się z równania:

$$\alpha_{2} = \frac{t_{1}}{t_{d}} \frac{1}{\beta_{2}} \left[\left(\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_{0}} \right) \left(1 - m^{2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_{0}} \right)^{2} \left(1 - m^{3} \right) \right]$$
(57)

gdzie:

$$m = \frac{t_1 - t_d}{t_1}$$
(58)

natomiast wartość t_1 wyznacza się wg zależności:

$$t_1 = \frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_{2\max T}} t_d \tag{59}$$

Wartość współczynnika β_2 oblicza się ze wzoru:

$$\beta_{2} = 2 \left[1 - \frac{t_{1}}{t_{d}} \frac{\frac{2}{3} \left(1 - m^{3} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{2 \max}}{\varepsilon_{0}} \right) \left(1 - m^{4} \right)}{\left(1 - m^{2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{2 \max}}{\varepsilon_{0}} \right) \left(1 - m^{3} \right)} \right]$$
(60)

Znając wartość maksymalnego odkształcenia betonu ściskanego ε_{2maxT} , spowodowanego momentem skręcającym, można określić grubość krzyżulca t_d , wg rów. (50), oraz wartości współczynników α_1 i β_1 , wg rów. (35) i (36). W konsekwencji daje to możliwość wyznaczenia wysokości równoważnego wykresu naprężeń a, wg rów. (31), oraz τ_T , wg rów. (39), i A_k , wg rów. (40).

Znając wartość maksymalnego odkształcenia betonu ściskanego ε_{2max} , spowodowanego jednoczesnym działaniem V i T, można wyznaczyć, na podstawie rów. (14), odkształcenia poprzeczne w poszczególnych ściankach:

$$\gamma_i = \frac{2\left(\varepsilon_{2\max i} + \varepsilon_{li}^s\right)}{\tan\theta_i} \tag{61}$$

a w rezultacie skręcenie (kąt obrotu) przekroju ψ :

$$\psi = \frac{h\left(\gamma_P - \gamma_L\right) + b\left(\gamma_G - \gamma_D\right)}{2bh} \tag{62}$$

Odkształcenia γ_i , w rów. (62), mają znak zgodny ze znakiem strumienia sił stycznych q_{mi} (od T+V) w każdej ściance.

3.3. Sposób rozwiązania problemu

Model teoretyczny *Rahala* i *Collinsa* został opracowany w celu określenia stanu odkształcenia skręcanego elementu żelbetowego znajdującego się w złożonym stanie naprężenia. Rozwiązanie można uzyskać jedynie przez zastosowanie metody kolejnych przybliżeń (iteracji). Proces iteracji stosuje się, aż do uzyskania zbieżności (wartości założonych i obliczonych), którą sprawdza się przy pomocy warunków równowagi [rów. (42) - (44)]. Skrócona forma algorytmu obliczeniowego, w ogólnym przypadku obciążenia ($T+V_y+V_z+M_y+M_z+N$), została przedstawiona poniżej.

Dane początkowe: charakterystyka przekroju (wymiary; ilość, rodzaj i rozmieszczenie zbrojenia), parametry wytrzymałościowe betonu i stali, obciążenia zewnętrzne.

- 1) Przyjąć wartości t_d , α_1 , β_1 w poszczególnych ściankach.
- 2) Określić równoważny stan naprężeń stycznych τ_m , t_m (*T*+*V*) w ściankach.
- 3) Przyjąć wartości ε_l w poszczególnych ściankach.
- 4) Dla danych τ_m , t_m i ε_l , określić stan odkształcenia i naprężenia w ściankach (układ 2; teoria MCFT):
 - 4.1) Przyjąć wartość ε_2 .
 - 4.2) Przyjąć wartość θ .
 - 4.3) Obliczyć: ε_1 , ε_2 , ε_t , ζ , σ_{c1} , σ_{c2} , σ_{cl} , σ_{ct} , σ_{sl} , σ_{st} , θ .
 - 4.4) Sprawdzić wartość θ ; jeżeli obliczona wartość θ jest zgodna z przyjętą wartością θ (z założoną dokładnością), to wartości zmiennych obliczone w p. 4.3 są prawidłowe; w przeciwnym wypadku należy przyjąć nową (skorygowaną) wartość θ .
 - 4.5) Sprawdzić wartość ε_2 ; jeżeli obliczona wartość ε_2 jest zgodna z przyjętą wartością ε_2 (z założoną dokładnością), to wartości zmiennych obliczone w p. 4.3 są prawidłowe; w przeciwnym wypadku należy przyjąć nową (skorygowaną) wartość ε_2 .
- 5) Obliczyć wartości σ_{c2V} i ε_{2V} (od V) w poszczególnych ściankach.
- 6) Obliczyć wartości sił podłużnych N_{ν} , w poszczególnych ściankach, spowodowanych naprężeniami stycznymi τ_m [rów. (45)].
- 7) Określić całkowite obciążenie równoważne działające w układzie 1 [suma obciążeń zewnętrznych N, M_y, M_z i obciążeń będących wynikiem działania sił N_v; prawe strony rów. (42) (44)].
- 8) Określić odkształcenia przekroju ε_{cen} , ϕ_y , ϕ_z spowodowane całkowitym obciążeniem równoważnym, czyli ustalić stan odkształcenia przekroju w kierunku podłużnym [rów. (41)].

- 9) Ustalić stan naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym, odpowiadający stanowi odkształcenia podłużnego, czyli w konsekwencji wartości sił wewnętrznych N, M_y, M_z [lewe strony rów. (42) – (44)].
- 10) Sprawdzić zbieżność, wykorzystując równania równowagi (42) (44); jeżeli uzyskano założony poziom zbieżności, to wartości wszystkich, obliczonych zmiennych są prawidłowe; w przeciwnym razie należy przyjąć nowe (skorygowane) wartości ε_i w poszczególnych ściankach (w p. 3) i powtórzyć obliczenia.
- 11) Obliczyć ϕ_l , ϕ_t oraz ϕ_{dp} w poszczególnych ściankach.
- 12) Obliczyć ε_{2max} , ε_{2maxT} , t_d , α_1 , β_1 , γ w poszczególnych ściankach oraz ψ .
- 13) Sprawdzić wartość t_d w poszczególnych ściankach; jeżeli obliczone wartości t_d są zgodne z przyjętymi wartościami t_d (z założoną dokładnością) oznacza to, że stan odkształcenia elementu został określony prawidłowo; w przeciwnym razie należy przyjąć nowe (skorygowane) wartości t_d w p.1) i powtórzyć obliczenia.

Stosując model teoretyczny *Rahala* i *Collinsa* można wyznaczyć stan odkształcenia elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego pod obciążeniem eksploatacyjnym (w SGU). Według większości metod, teoretycznych i normowych, podstawą obliczenia szerokości rys jest określenie stanu odkształcenia elementu. W związku z tym wydaje się uzasadnione, podjęcie próby opracowania zależności, służącej do obliczania szerokość rys w elementach jednocześnie skręcanych i ścinanych.

4. Propozycja własna obliczania szerokości rys ukośnych w elementach żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu T i V

Kierunek rys, które powstają w elemencie żelbetowym, jest zawsze prostopadły do kierunku głównych naprężeń rozciągających σ_{c1} . W belkach jednocześnie skręcanych i ścinanych rysy o maksymalnej szerokości powstają na boku, na którym następuje sumowanie naprężeń stycznych od T i V, co uzasadniono w p. 3. Kat nachylenia pierwszych rys, które powstają na boku (T+V) tego typu belek, pod obciążeniem rysującym, jest więc zgodny z kątem nachylenia kierunku głównych naprężeń ściskających w betonie przed zarysowaniem σ_{c2} , i wynosi 45°. Jeżeli w elemencie skręcanym lub/i ścinanym moc zbrojenia podłużnego jest różna od mocy zbrojenia poprzecznego, co wynika z przyjętej przy projektowaniu wartości $\theta \neq 45^{\circ}$, to pod obciążeniem większym od obciążenia rysującego kąt nachylenia kierunku naprężeń σ_{c2} jest różny od 45°. Wyniki zarówno analizy teoretycznej [6, 12, 14], jak i badań doświadczalnych [1, 3, 8, 16] wskazują, że kąt nachylenia kierunku naprężeń σ_{c2} może w istotny sposób różnić się od 45° (różnica większa niż ±5°), dopiero jeżeli obciążenie elementu jest bliskie obciążenia niszczącego, nawet gdy przy projektowaniu przyjęto wartość θ istotnie różną od 45°. Wobec tego, w belce jednocześnie skręcanej i ścinanej, na boku (T+V), pod obciążeniem odpowiadającym stanowi użytkowalności (eksploatacyjnym) kąt nachylenia kierunku naprężeń σ_{c2} jest równy około 45°. Można więc przyjąć, z zadowalającą dokładnością, że rysy, które powstały zarówno pod obciążeniem rysującym jak i pod większym obciążeniem, lecz nie większym od eksploatacyjnego, będą się rozwierały dokładnie w kierunku zgodnym z kierunkiem głównych naprężeń rozciągających σ_{cl}

spowodowanych obciążeniem eksploatacyjnym (szerokość rys mierzy się w kierunku prostopadłym do brzegów rys). W konsekwencji, odkształcenia w betonie rozciąganym ε_i , spowodowane naprężeniami σ_{ci} , można uznać za miarę intensywności ukośnego zarysowania elementu.

Jedynym modelem teoretycznym, na podstawie którego można określić zachowanie elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego jest model *Rahala* i *Collinsa*. Daje on możliwość ustalenia pełnej reakcji elementu na działające obciążenia. Stosując ten model można więc określić wartość odkształcenia ε_1 w ściance krytycznej (*T*+*V*) belki poddanej jednoczesnemu działaniu *T* i *V*, pod obciążeniem odpowiadającym stanowi użytkowalności (eksploatacyjnym).

Uwzględniając powyższe uwagi oraz podstawowe założenia modelu *Rahala* i *Collinsa*, na podstawie których definiuje się m.in. średnie odkształcenia w betonie zarysowanym, proponuje się, aby wartość średniej szerokości rysy w elementach poddanych jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego i siły poprzecznej obliczać według zależności:

$$w_m = \varepsilon_1 s_{rm} \tag{63}$$

gdzie ε_1 jest średnim odkształceniem w betonie rozciąganym (na kierunku σ_{c1}), którego wartość wyznacza się na podstawie modelu *Rahala* i *Collinsa*, natomiast s_{rm} jest średnim rozstawem rys ukośnych, mierzonym prostopadle do ich kierunków.

Proponuje się, aby średni rozstaw rys ukośnych wyznaczać na podstawie zależności:

$$s_{rm} = \frac{1}{\frac{\cos\theta}{s_{rmy}} + \frac{\sin\theta}{s_{rmx}}}$$
(64)

Równanie (64) jest w zasadzie zgodne z zależnością zalecaną przez normę [20]. Różnica polega na zastąpieniu kąta α przez kąt pochylenia betonowych krzyżulców ściskanych θ . W rów. (64) zmienne s_{rmx} i s_{rmy} oznaczają średnie, ostateczne, rozstawy rys w kierunku, odpowiednio, podłużnym i poprzecznym, a które proponuje się obliczać na podstawie zależności wg [19, 22]:

$$s_{rm} = 50 + 0.25k_1k_2\frac{\phi}{\rho_r} \tag{65}$$

Wartość ε_1 , zgodnie z definicją (założenie 5 w p. 2.1), jest uśrednioną wartością odkształceń w betonie rozciąganym, na długości odcinka przecinającego kilka rys, wliczając w to odkształcenia w przekrojach zarysowanych. Wobec tego, w średnim odkształceniu ε_1 uwzględnione są również odkształcenia w betonie rozciąganym na odcinkach między rysami. Z rów. (63) wynika, że ε_1 są utożsamiane ze średnią szerokością rys w_m . Podstawiając wartość ε_1 , obliczoną na podstawie modelu *Rahala* i *Collinsa*, bezpośrednio do rów. (63) uzyska się w konsekwencji zawyżoną wartość w_m , pomimo znacznie mniejszej wartości odkształceń w betonie na odcinku między rysami w porównaniu z szerokością rys. Ponadto wartość w_m obliczona z rów. (63) będzie większa od rzeczywistej, średniej szerokości rys (ustalonej na podstawie pomiarów) dlatego, że obliczeniowa wartość ε_1 uwzględnia odkształcenia we wszystkich przekrojach zarysowanych, również w tych, w których wystąpiły rysy wtórne. Ponieważ rysy wtórne nie uwidaczniają się na zewnętrznej powierzchni betonu [5], ich szerokości nie uwzględnia się przy obliczeniowym sprawdzaniu szerokości rys w stanie granicznym użytkowalności (i oczywiście nie można ich zmierzyć).

Należy jednak przypomnieć, że w modelu *Rahala* i *Collinsa* wartość ε_1 , w konkretnej ściance, wyznacza się przy założeniu, że na całej wysokości ścianki działają stałe, co do wartości, średnie naprężenia styczne τ_T [p. 2.1; rów. (39)]. Nie jest to zgodne z rzeczywistym rozkładem naprężeń τ_T , które mają największą wartość w połowie wysokości ścianki. Rzeczywista wartość τ_T w połowie wysokości ścianki krytycznej, czyli w miejscu gdzie w elemencie jednocześnie skręcanym i ścinanym rysy mają największą szerokość, jest więc większa od wartości τ_T przyjmowanej do obliczeń. Jeżeli do rów. (63) podstawi się wartość ε_1 obliczoną na podstawie modelu *Rahala* i *Collinsa*, to w rezultacie uzyska się zaniżoną wartość w_m w stosunku do rzeczywistej wartości w_m w połowie wysokości ścianki.

Przyjęto założenie, że czynniki mające wpływ na obliczeniową wartość odkształcenia ε_1 (opisane powyżej), które powodują zawyżenie i zaniżenie obliczeniowej wartości w_m [wg rów. (63)] w stosunku do rzeczywistej wartości średniej szerokości rys w połowie wysokości boków belki, na których występuje przypadek (*T*+*V*) lub (*T*-*V*), wzajemnie się znoszą. Należy dodać, że prawidłowe oszacowanie wpływu opisanych czynników na obliczeniową wartość ε_1 , a także wpływu zmian wartości ε_1 , wywołanych poszczególnymi czynnikami, na wartość w_m , jest bardzo trudne. Wydaje się, że przyjmując powyższe założenie, w przypadku znacznej wartości stosunku h/b (np. $h/b \approx 2.5$), uzyska się zaniżoną wartość w_m obliczeniową wartością τ_T i maksymalną, rzeczywistą wartością τ_T .

Zgodnie z podstawowym założeniem teorii *Rahala* i *Collinsa* (teorii MCFT), za średnią wartość odkształceń przyjmuje się wartość odkształceń w płaszczyźnie określonej położeniem linii środkowej równoważnej strefy strumienia ścinania, czyli w odległości (*a*/2) od zewnętrznej powierzchni betonu (por. p. 2.2). Średnią szerokość rys, wg rów. (63), oblicza się więc na głębokości (*a*/2), licząc od zewnętrznej powierzchni betonu.

Brzegi rys ulegają deplanacji [7, 17]. Wskutek tego zjawiska rysa ma największą szerokość na zewnętrznej powierzchni elementu. Uwzględniając: standardowe grubości otuliny betonowej, stopień wytężenia elementu w SGU oraz wyniki badań [7, 17] przyjęto założenie, że średnia szerokość rysy na powierzchni elementu jest 20% większa niż średnia szerokość rysy na głębokości (*a*/2). Przy tym założeniu rów. (63) przyjmuje postać:

$$w_m = 1.2\varepsilon_1 s_m \tag{66}$$

Przy projektowaniu za miarodajną przyjmuje się maksymalną szerokość rys. Wszystkie wartości stosunku w_{max}/w_m , podane w przepisach normowych, przy różnych przypadkach obciążenia, zostały ustalone na podstawie badań doświadczalnych. W żadnej z norm nie ma podanych zaleceń odnośnie wartości tego stosunku, jaką należy przyjmować w przypadku elementów skręcanych (i oczywiście przypadku *T*+*V*). Autorowi nie są znane wyniki badań, na podstawie których można by określić doświadczalną wartość tego stosunku w przypadku elementów jednocześnie skręcanych i ścinanych. Opierając się na wynikach badań własnych [1, 2, tab. 1] proponuje się przyjąć wartość tego stosunku równą (w_{max}/w_m) = 1.7. Ostatecznie proponuje się, aby maksymalną szerokość rys w elementach poddanych jednoczesnemu działaniu T i V, w połowie wysokości ścianki krytycznej (T+V), obliczać na podstawie równania:

$$w_{\max} = 1.7 \cdot 1.2\varepsilon_1 s_{rm} \tag{67}$$

Przeprowadzono badania własne na elementach żelbetowych w skali naturalnej poddanych jednoczesnemu skręcaniu i ścinaniu [1,2]. W tabl. 1 przedstawiono porównanie doświadczalnych szerokości rys zaobserwowanych w poszczególnych belkach pod obciążeniem eksploatacyjnym, w połowie wysokości ścianki krytycznej, z wartościami szerokości rys wyznaczonymi na podstawie proponowanej metody obliczeniowej (w obliczeniach wykorzystano program komputerowy). W tabeli 2 przedstawiono analogiczne wyniki dla boków elementów badawczych, na których strumienie sił stycznych od T i V odejmowały się.

Tabela 1. Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych wartości w_m i w_{max} w obszarach $(T\!+\!V)$ belek badawczych.

Table 1. Comparison of experimental and calculated w_m i w_{max} in the regions (T+V) of the testing beams.

Oznacz.	ε_1 wg[13]	<i>s</i> _m r.(64)	w_m r.(63)	\mathcal{W}_m^{dos}	$\mathcal{W}_{max}{}^{dos}$	w_m^{obl} r.(66)	w_{max}^{obl} r.(67)	$\frac{W_m^{obl}}{W_m^{dos}}$	$rac{W_{max}^{ obl}}{W_{max}^{ doś}}$
DUIKI	×10 ⁻³	mm	mm	mm	mm	mm	mm		
BN 3-1	0.77	159	0.122	0.057	0.15	0.146	0.25	2.56	1.67
BN 2-1	0.79	149	0.118	0.158	0.24	0.142	0.24	0.90	1.00
BN 1-1	0.63	151	0.095	0.136	0.17	0.114	0.19	0.84	1.12

Tabela 2. Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych wartości w_m i w_{max} w obszarach (*T-V*) belek badawczych.

Table 2. Comparison of experimental and calculated w_m i w_{max} in the regions (*T*-*V*) of the testing beams.

Oznacz.	ε_1 wg[13]	s _{rm} r.(64)	w_m r.(63)	$\mathcal{W}_m^{doś}$	W_{max}^{dos}	w_m^{obl} r.(66)	w_{max}^{obl} r.(67)	$\frac{w_m^{obl}}{w_m^{dos}}$	$rac{w_{max}}{w_{max}}^{obl}$
DEIKI	×10 ⁻³	mm	mm	mm	mm	mm	mm		
BN 3-1	0.55	158	0.087	0.026	0.05	0.104	0.18	4.00	3.60
BN 2-1	0.47	148	0.070	0.046	0.10	0.084	0.14	1.83	1.40
BN 1-1	0.33	155	0.051	0.054	0.10	0.061	0.10	1.13	1.00

Aby zastosować proponowaną metodę obliczania szerokości rys, należy określić wytrzymałość betonu na rozciąganie w dwuosiowym stanie naprężenia f'_{ctm} . *Vecchio* i *Collins* [15], *Hsu* [6] oraz *Rahal* i *Collins* [13] proponują, aby wartość tej wytrzymałości obliczać według zależności $f'_{ctm} = 0.33(f_{cm})^{1/2}$. W obliczeniach, których wyniki przedstawiono w tabl. 1 i tabl. 2, wartości f'_{ctm} wyznaczono na podstawie tej zależności.

W proponowanej metodzie obliczania szerokości rys w elementach jednocześnie skręcanych i ścinanych została uwzględniona większość parametrów, które mają wpływ na zarysowanie elementu (szerokość, rozstaw rys). Było to możliwe, przede wszystkim dzięki zastosowaniu modelu *Rahala* i *Collinsa*, i dodatkowo poprzez wykorzystanie rów. (65). Wyznaczając ε_1 na podstawie modelu *Rahala* i *Collinsa* uwzględnia się następujące parametry: wymiary przekroju, stopień zbrojenia, wytrzymałość betonu na ściskanie i rozciąganie w dwuosiowym stanie naprężenia, kąt pochylenia rys, rysy wtórne oraz, pośrednio, warunki przyczepności między betonem i stalą (założenie 6 w p. 2.1). Poprzez zastosowanie rów. (65) uwzględnia się dodatkowo następujące parametry: średnicę zbrojenia, rodzaj powierzchni prętów oraz rozmieszczenie zbrojenia. W metodzie obliczeniowej uwzględniono również zjawisko deplanacji brzegów rys, poprzez zastosowanie współczynnika o wartości 1.2.

Dzięki zastosowaniu teorii *Rahala* i *Collinsa*, w obliczeniach szerokości rys wg rów. (67) uwzględnia się naprężenia rozciągające w zarysowanym betonie (zjawisko "tension stiffening") oraz zjawisko zmniejszenia wytrzymałości na ściskanie ukośnie zarysowanego betonu (softening of concrete). Należy szczególnie podkreślić, że jedynie teoria *Rahala* i *Collinsa* daje możliwość poprawnego określenia stanu odkształcenia (naprężenia) elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego pod obciążeniem eksploatacyjnym. Należy zaznaczyć, że ustalenie stanu odkształcenia elementu w SGU stanowi poważny problem przy opracowywaniu metod obliczania szerokości rys w elementach skręcanych, co opisano w p. 1.

Z porównania wartości doświadczalnych i obliczeniowych szerokości rys (por. tab. 1 i tab. 2), szczególnie w zakresie w_{max} , wynika, że wartości wyznaczone na podstawie proponowanej metody obliczeniowej są w dobrej zgodności z wynikami badań. Wydaje się więc, że ogólna koncepcja równania (67) jest słuszna. Konkretne wartości współczynników liczbowych, zastosowanych w rów. (67), zostały przyjęte na podstawie wyników (nielicznych) badań, również własnych (współczynnik 1.7). Wymagane są dalsze badania doświadczalne w celu uściślenia wartości tych współczynników.

Aby wyznaczyć wartość odkształcenia ε_1 należy przeprowadzić skomplikowaną procedurę obliczeniową (p. 3.3). Wymagane są dalsze prace analityczne w celu wprowadzenia pewnych założeń wstępnych, upraszczających tą procedurę.

W proponowanej metodzie obliczeniowej, podobnie jak w modelu *Rahala* i *Collinsa* (por. założenie 2 w p. 2.1), nie został uwzględniony wpływ: czasu trwania obciążenia oraz odkształceń wymuszonych i reologicznych. Wobec tego, na podstawie rów. (67) można wyznaczyć jedynie szerokość rys w elementach poddanych działaniu obciążeń doraźnych.

Przy wykorzystaniu proponowanej metody obliczeniowej w praktyce inżynierskiej (przy projektowaniu) należałoby, zgodnie z propozycją *Lewickiego* [11], określić wartość współczynnika γ_d , uwzględniającego niepewność modelu teoretycznego przyjętego przy opracowywaniu rów. (67).

Literatura

- [1] Budzyński W., *Badania belek żelbetowych poddanych jednoczesnemu skręcaniu i ścinaniu*, Inżynieria i Budownictwo, nr 4/1999.
- [2] Budzyński W., Analiza szerokości rozwarcia rys ukośnych w elementach żelbetowych przy jednoczesnym występowaniu skręcania i ścinania, Praca doktorska. Pol. Lubelska 2000.
- [3] Ciężak T., *Rozwarcie rys w skręcanych elementach żelbetowych*, Prace Naukowe Politechniki Lubelskiej 218. Budownictwo 40. Lublin 1990.
- [4] Collins M.P., Mitchell D., Prestressed Concrete Structures, Prentice Hall 1991.

- [5] Goto Y., *Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars*, ACI Journal, No.4, Apr.1971.
- [6] Hsu T.T.C., *Unified Theory of Reinforced Concrete*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida 1993.
- [7] Husain S.I., Ferguson Ph.M., *Flexural Crack Width at the Class in Reinforced Concrete Beams*, Research Report 102-1F Center for Highway Research, the University of Texas at Austin, June 1968.
- [8] Kosińska A., Nowakowski A.B., Badania żelbetowych belek wykonanych z betonu wysokowartościowego poddanych czystemu skręcaniu, XLII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1996.
- [9] Lampert P., Thürlimann B., *Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr 6506-3, Januar 1969.
- [10] Lampert P., Thürlimann B., *Torsionsversuche an Stahlbetonbalken*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr 6506-2, Juni 1968.
- [11] Lewicki B., Związek między wynikami badań i wzorami normowymi, Inżynieria i Budownictwo, nr 4-5/1990.
- [12] Pang X.B., Hsu T.T.C., Fixed Angle Softened Truss Model for Reinforced Concrete, ACI Structural Journal, V.93, No.2, March-April 1996.
- [13] Rahal K.N., Collins M.P., Analysis of Sections Subjected to Combined Shear and Torsion
 A Theoretical Model, ACI Structural Journal, V.92, No.4, July-August 1995.
- [14] Thürlimann B., Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams under Bending and Shear, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr 63, September 1976.
- [15] Vecchio F.J., Collins M.P., *The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*, ACI Structural Journal, V.83, No.2, Mar.-Apr. 1986.
- [16] Vecchio F.J., Collins M.P., *The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses*, Publication 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto 1982.
- [17] Yang S., Chen J., Bond Slip and Crack Width Calculations of Tension Members, ACI Structural Journal, V.85, No.4, July-August 1988.
- [18] ACI 318-02, Building Code Requirements for structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02), American Concrete Institute, 2002.
- [19] *CEB-FIP. Model Code for Concrete Structures*, CEB-FIP International Recommendations, 3rd Edition 1978.
- [20] CEB-FIP Model Code MC 1990. Verification of the Ultimate Limit States. Summary and Analysis of Observations Concerning the Revision of the CEB-FIP Model Code 1978, Bulletin d'Information No.175, March 1987.
- [21] ENV 1992-1-1:1991: Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1: Reguły ogólne i reguły dla budynków, Tom 1, Wersja polska. ITB 1992.
- [22] PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie, PKN 2002.
- [23] SNiP 2.03.01-84-M. Bietonnyje i żelezobietonnyje konstrukcii, Strojizdat. Moskwa 1984.

Proposition of a new method for the calculation of diagonal crack widths in reinforced concrete elements subjected to combined torsion and shear

Waldemar Budzyński

Lublin University of Technology, Institute of Building, Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: walbud@gazeta.pl

Abstract: This paper concerns the phenomenon of cracking in reinforced concrete elements subjected to combined torsion and shear. The theoretical model developed by Rahal and Collins is described in detail. This model is the only one which is capable of predicting the full response (e.g.: steel and concrete strains, deformations, curvatures) rectangular reinforced concrete sections subjected to combined torsion and shear throughout their post - cracking loading history. The assumptions of Modified Compression Field Theory are also described because the model of Rahal and Collins is based on this theory. It also contains a concept of the new method which is capable of determining the width of cracks in reinforced concrete elements subjected to combined torque moment and shear force. The method is based on the model suggested by Rahal and Collins.

Key words: reinforced concrete; torsion; shear; truss model; strains; compatibility equations; width of cracks.

Analiza nośności i zarysowania zginanych elementów betonowych słabo zbrojonych

Marta Słowik

Politechnika Lubelska, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, e-mail: m.slowik@pollub.pl

Streszczenie: Elementy betonowe, w których zastosowano zbrojenie o przekroju mniejszym od minimalnego, obowiązującego w konstrukcjach żelbetowych, nazywane są elementami słabo zbrojonymi. Elementy te nie są przy wymiarowaniu wyodrębniane w osobnej grupie, ale traktowane są jak elementy betonowe niezbrojone. W ten sposób pomijany jest wpływ pretów zbrojeniowych na nośność i rysoodporność konstrukcji słabo zbrojonych. Praca elementów z betonu słabo zbrojonego jest stosunkowo słabo rozpoznana przez badaczy, chociaż stanowia one dosyć liczna grupe konstrukcji inżynierskich. Wykonano własne badania doświadczalne dotyczące zginanych elementów słabo zbrojonych w celu określenia ich nośności i rysoodporności. Elementami badawczymi były belki słabo zbrojone o zróżnicowanym stopniu zbrojenia podłużnego. Dodatkowo, w celu porównania, przebadano belki betonowe niezbrojone i belki żelbetowe. Przeanalizowano i porównano przebieg procesu powstawania i rozwoju rys oraz charakter zniszczenia i wielkość sił niszczacych w badanych belkach w zależności od stopnia zbrojenia. Przeprowadzona analiza wyników badań stanowi podstawe do szerszego rozpoznania zagadnienia wpływu słabego zbrojenia na charakter pracy elementu z betonu. Jako efekt końcowy przedstawiono propozycję obliczeniowego określania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych.

Słowa kluczowe: beton słabo zbrojony, minimalny stopień zbrojenia, nośność, rysoodporność.

1. Nośność elementów z betonu słabo zbrojonego

Na podstawie przeprowadzonych studiów literaturowych wynika, że brak jest aktualnych opracowań dotyczących konstrukcji słabo zbrojonych. Nieliczne prace w Polsce, dotyczące obliczania tych konstrukcji: Dąbrowski [6], norma ZN-66/HP-1 [21], są oparte na nieobowiązującej już przy wymiarowaniu metodzie obciążeń krytycznych.

Nośnością elementów słabo zbrojonych zajmował się K. Dąbrowski. Na podstawie wyników szeregu badań doświadczalnych dotyczących zginanych belek słabo zbrojonych, stwierdził on wzrost rysoodporności belek z betonu słabo zbrojonego w porównaniu do elementów bez zbrojenia. Wzrost ten zależy od stopnia zbrojenia podłużnego - ρ , przy czym w badanych belkach o ρ <0.08% wzrost rysoodporności był większy niż w belkach o ρ >0.08%. Opierając się na wynikach badań K. Dąbrowski wyprowadził zależności służące do wyznaczania rysoodporności elementów słabo zbrojonych, które stanowią również o nośności tych elementów:

0

• przy
$$\rho = 0 \div 0.08\%$$
 $M_{cr}^{SRC} = M_{ult}^{SRC} = \frac{bh^2 f_{ct,f}}{6} (1 + \beta_1 \rho)$
(1)

• przy
$$\rho > 0.08\%$$
 $M_{cr}^{SRC} = M_{ult}^{SRC} = \frac{bh^2 f_{ct,f}}{6} \left(\alpha + \beta_2 \rho \right)$ (2)

gdzie: α , β_1 , β_2 współczynniki doświadczalne wynoszące w przypadku belki o przekroju 200×200 mm odpowiednio 1.15 ; 250 ; 62.5.

We wzorach (1) i (2) występuje wytrzymałość betonu na rozciąganie przy zginaniu $f_{ct,p}$ która jest większa od wytrzymałości betonu na rozciąganie osiowe f_{ct} . Iloraz obu wielkości waha się w dość szerokich granicach i zależy od wielu czynników, przede wszystkim od wytrzymałości betonu i wysokości belki. Dąbrowski jako jeden z pierwszych badaczy, zajmujących się elementami z betonu słabo zbrojonego uwzględnił wpływ skali elementu na ich nośność.

Beton słabo zbrojony powszechnie stosowany jest w budowlach wodnych. Obliczenia statyczno wytrzymałościowe budowli wodnych w zakresie konstrukcji betonowych i żelbetowych prowadzić należy według normy zakładowej ZN-66/ HP/1 "Budowle hydrotechniczne. Konstrukcje słabo zbrojone. Obliczenia statyczne i projektowanie." Norma ta została oparta na normie żelbetowej PN-56/B-03264 z 1956 roku.

W normie ZN-66/HP/1 za konstrukcje słabo zbrojone uważa się konstrukcje, w których procentowa ilość zbrojenia rozciąganego jest mniejsza niż podwójne wielkości minimalne podane w normie PN-56/B-03264. Za podstawę wymiarowania przyjęto metodę obciążeń krytycznych. Wymiarowanie na nośność nie odbiega w zasadzie od zaleceń i wzorów podanych w PN-56/B-03264, z tą jednak różnicą, że wprowadza się w ZN-66/HP/1 pięć współczynników pewności $s=s_1$; s_2 ; s_3 ; s_4 ; s_5 , których wartości w zależności od klasy budowli i rodzaju obciążenia zawierają się w granicach od 1,1 do 3,3. Zwiększono również wartość granicznych odkształceń betonu rozciąganego do wielkości $\varepsilon_{ctu}=1.5\times0.0001=0.00015$.

Obecnie przy wymiarowaniu konstrukcji budowlanych obowiązuje powszechnie metoda stanów granicznych, toteż projektowanie budowli wodnych z betonu słabo zbrojonego powinno uwzględniać założenia tej metody. Sposób projektowania konstrukcji słabo zbrojonych według zasad podanych w normie ZN-66/HP/1 jest przestarzały i nie odpowiada obecnym wymaganiom norm polskich i zagranicznych.

W literaturze zagranicznej tematyka elementów słabo zbrojonych poruszana jest w niewielkim stopniu. We Francji nośnością belek słabo zbrojonych poddanych zginaniu zajmował się Chambaud [5]. Tym co wyróżnia elementy słabo zbrojone jest to, że w chwili zniszczenia naprężenia w stali przekraczają granicę plastyczności i mogą osiągnąć wartość $\sigma_s=1.3f_y$. Zjawisko to już wcześniej opisał Saliger [10] i określił jako samoutwardzenie stali. Według Chambaud'a belki słabo zbrojone, przy uwzględnieniu zjawiska samoutwardzenia stali, nie wykazują żadnych anomalii w porównaniu do elementów żelbetowych.

2. Minimum zbrojenia w zginanych elementach żelbetowych

Z zagadnieniem wyznaczania nośności elementów słabo zbrojonych ściśle związane jest zagadnienie szacowania minimalnego przekroju zbrojenia podłużnego w elementach żelbetowych – A_{smin} , jako dolnej granicy zbrojenia, przy której zaczynają już obowiązywać zasady wymiarowania przekrojów żelbetowych. Wielkość tego przekroju zbrojenia jest zarazem górną granicą zbrojenia w elementach słabo zbrojonych. Najczęściej przy wyznaczaniu A_{smin} nadal posługujemy się kryterium klasycznym.

Minimum zbrojenia rozciąganego w żelbetowych elementach zginanych można określić, wg kryterium klasycznego, jako przekrój stali, przy którym nośność przekroju żelbetowego obliczona w fazie II jest co najmniej równa momentowi rysującemu w fazie I. W przypadku zginanych belek o przekroju prostokątnym prowadzi to do wzoru (przy przyjęciu d=0.925h i z=0.98 d):

$$A_{s,\min} = 0.35 \frac{f_{ctm}}{f_{uk}} bd \qquad \text{czyli} \qquad \rho_{\min} = \frac{A_{s,\min}}{bd} = 0.35 \frac{f_{ctm}}{f_{uk}} \tag{3}$$

Minimalny stopień zbrojenia podłużnego, wyznaczony na podstawie kryterium klasycznego, zależy od średniej wytrzymałości betonu na rozciąganie – f_{ctm} i charakterystycznej granicy plastyczności stali – f_{yk} . Natomiast na podstawie przedstawionych w literaturze badań: Bažant i Oh [1], Bosco i Carpinteri [3], Carpinteri i Ferro [4], Dąbrowski [6], Hjorteset [8], Mianowski [9], Styś i Rejman [15] wynika, że na wielkość ρ_{min} mają wpływ również inne czynniki, przy czym badacze kładą nacisk na różne z nich np. wysokość przekroju czy też dobór średnicy prętów zbrojeniowych. Wskazuje to na złożoność zagadnienia wyznaczania minimum zbrojenia w konstrukcjach żelbetowych. Kryterium klasyczne wydaje się być niewystarczające w świetle obecnego stanu wiedzy.

W obecnie obowiązującej w Polsce normie dotyczącej wymiarowania konstrukcji z betonu PN-B-03264 (2002), podobnie jak w zaleceniach międzynarodowych CEB-FIP Model Code [17] i EN 1992-1-1 [20], wyróżniono dwie przyczyny, ze względu na które przyjmuje się minimalne zbrojenie. Są to uniknięcie kruchego zniszczenia i ograniczenie szerokości rozwarcia rys skurczowych i termicznych.

Minimalny przekrój zbrojenia ze względu na rozwarcie rys wyznaczyć można ze wzoru:

$$A_{s,\min} = k_c k f_{ct,eff} \frac{A_{ct}}{\sigma_s}$$
(4)

w którym: A_{ct} – przekrój strefy rozciąganej betonu, σ_s – dopuszczalne naprężenie w zbrojeniu rozciąganym bezpośrednio po pojawieniu się pierwszej rysy, $f_{ct,eff}$ – wytrzymałość betonu na rozciąganie osiągana w czasie, w którym oczekuje się powstania pierwszej rysy, k_c – współczynnik uwzględniający rozkład naprężeń w przekroju, w chwili poprzedzającej zarysowanie, k – współczynnik uwzględniający wpływ nierównomiernych naprężeń samozrównoważających się w ustroju.

Minimalne zbrojenie ze względu na zabezpieczenie przed kruchym zniszczeniem jest w ujęciu normowym wyznaczane podobnie jak w kryterium klasycznym, z tą różnicą, że naprężenia w betonie rozciąganym przyjmowane są w chwili zarysowania nie jako równe średniej wytrzymałości betonu na rozciąganie ale o 30% większe:

$$\sigma_{ct} = 1.3 f_{ctm} \tag{5}$$

W przypadku przekroju prostokątnego wzór na minimalny stopień zbrojenia w elementach zginanych przybiera postać:

$$\rho_{\min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{wk}} \tag{6}$$

Normowy sposób wyznaczania ρ_{min} , podobnie jak kryterium klasyczne, jest uproszczony i prowadzi do właściwego oszacowania stopnia zbrojenia w przypadku elementów o stosunkowo małych wymiarach, wykonanych z betonów o niezbyt wysokiej wytrzymałości Zagadnienie to szerzej przedstawiono w Słowik [13]. Wynika to z faktu, że przy szacowaniu momentu rysującego należy przyjmować tak zwaną wytrzymałość betonu na rozciąganie przy zginaniu $f_{ct,r}$. Stosunek tej wytrzymałości do wytrzymałości średniej betonu na rozciąganie jest określany jako współczynnik κ :

$$\kappa = \frac{f_{ct,f}}{f_{ctm}} \tag{7}$$

Moment rysujący wyznaczać należy zatem ze wzoru:

$$M_{cr} = W_c f_{ct,f} = W_c \kappa f_{ctm} \tag{8}$$

Po porównaniu tak wyznaczonego momentu rysującego z nośnością przekroju żelbetowego w fazie II-giej wzór na minimalny stopień zbrojenia będzie miał postać:

$$\rho_{\min} = 0.175\kappa \frac{f_{ctm}}{f_y} \left(\frac{h}{d}\right)^2 \tag{9}$$

gdzie: h – całkowita wysokość przekroju, d – użyteczna wysokość przekroju, f_{ctm} – średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie, f_{v} – granica plastyczności stali.

W celu określenia współczynnika κ można posłużyć się zależnością przedstawioną w: Hillerborg, Modeer i Peterson [7], wyprowadzoną na podstawie szeregu obliczeń numerycznych, wykonanych przy założeniach nieliniowej mechaniki pękania, którą pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Współczynnik κ , na podstawie Hillerborg, Modeer i Peterson [7]. Fig. 1. Coefficient κ , based on Hillerborg, Modeer and Peterson [7].

Współczynnik κ zależy od wiodącego wymiaru przekroju elementu – h i długości charakterystycznej betonu – l_{ch} . l_{ch} jest parametrem zdefiniowanym w ramach modeli betonu opracowanych na podstawie mechaniki pękania, który w kompleksowy sposób ujmuje główne cechy betonu charakteryzujące jego podatność na pękanie:

$$I_{ch} = \frac{G_F E_{ct}}{f_{ct}^2} \tag{10}$$

gdzie: G_F – energia pękania, E_{ct} – moduł sprężystości betonu rozciąganego, f_{ct} - wytrzymałość betonu na rozciąganie.

W przypadku braku wartości doświadczalnej energii pękania, może ona być wyznaczona ze wzoru (11), w którym α_F jest współczynnikiem zależnym od maksymalnego wymiaru ziaren kruszywa: $\alpha_F = 4$ gdy $D_{max} = 8$ mm, $\alpha_F = 6$ gdy $D_{max} = 16$ mm, $\alpha_F = 10$ gdy $D_{max} = 32$ mm:

$$G_F = \alpha_F \left(f_{c,\phi_{15/30}} \right)^{0.7} \tag{11}$$

W tabeli 1 zestawiono przykładowe wartości ρ_{min} wyznaczone na podstawie wzoru (9) w przypadku belek zginanych o różnych wysokościach przekroju i wykonanych z betonu i stali o różnych charakterystykach. Przyjmowane w obliczeniach wielkości współczynnika κ zamieszczono również w tab. 1.

		Wysokość przekroju <i>h</i> [mm]							
Beton	Stal		100		300		800	1	300
		к	$ ho_{\scriptscriptstyle min}$	к	$ ho_{_{min}}$	к	$ ho_{min}$	к	$ ho_{\scriptscriptstyle min}$
<i>l_{ch}</i> =823 mm	AI		0.0028		0.0019		0.0016		0.0014
(B15)		1.8		1.6		1.37		1.26	
	AII		0.0019		0.0013		0.0011		0.0009
<i>l_{ch}</i> =487 mm	AI		0.0046		0.0032		0.0026		0.0024
(B37)		1.62		1.45		1.25		1.20	
	AII		0.0031		0.0022		0.0018		0.0016

Tabela 1.Przykładowe wartości ρ_{min} obliczone ze wzoru (9).Table 1.The example of ρ_{min} calculated based on (9).

Na podstawie szerokich analiz dotyczących ρ_{min} , zamieszczonych między innymi w Słowik [14], uznano, że zaproponowany sposób szacowania minimalnego stopnia zbrojenia ze wzoru (9) jest poprawny i wybrano go jako reprezentatywny do wyznaczania minimum zbrojenia w zginanych elementach żelbetowych. Został on oparty na analizie numerycznej przeprowadzonej przy zastosowaniu nieliniowej mechaniki pękania i zweryfikowany doświadczalnie. Wyznaczając stopień zbrojenia w ten sposób uwzględnia się większość czynników mających wpływ na jego wartość, takich jak wymiary elementu, parametry wytrzymałościowe betonu i stali.

3. Badania własne dotyczące zginanych belek słabo zbrojonych

3.1. Opis badań

Elementami badawczymi były belki o przekroju prostokątnym o wymiarach: szerokość 0.14 m; wysokość 0.30 m; długość 3.00 m. Wykonano dwie serie elementów badawczych: podstawowa seria B i dodatkowa seria S. W ramach serii B wykonano 6 elementów z betonu słabo zbrojonego o zróżnicowanym stopniu zbrojenia tj.: 2 belki o ρ =0.05%, 2 belki o ρ =0.07%, 2 belki o ρ =0.09%. Do zbrojenia belek serii B użyto prętów o średnicy ϕ 3.0 mm ze stali klasy AI - f_y =161.7 MPa, f_R =278.2 MPa. Dobór prętów w belkach tak przeprowadzono, by równomiernie zapełnić obszar zbrojenia od ρ >0 do $\rho < \rho_{min}$. W ramach serii S przebadano 7 elementów: 3 belki betonowe niezbrojone, 3 belki zbrojone o ρ =0.12%, tj stopniu zbrojenia $\rho \approx \rho_{min}$ i 1 belkę żelbetową o ρ =0.20%. Do zbrojenia belek serii S użyto prętów o średnicy ϕ 4.5 mm ze stali klasy AI - f_y =274.5 MPa, f_R =398.9 MPa. Rozmieszczenie zbrojenia w elemencie pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Rozmieszczenie prętów zbrojeniowych w belce.

Fig. 2. The location of reinforcing bars in the beam.

Cechy betonu, które były wyznaczone doświadczalnie na próbkach w przypadku obu serii belek badawczych, zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2.	Zestawienie cech betonu.
Table. 2.	Properties of concrete.

Ln	Seria	f	f	E	G [Nm/m ²]
Ep.	ociiu	I_{cm}	$\int ctm$	E_{cm}	O_F [1 (11), 11]
		[MPa]	[MPa]	[GPa]	
1	В	24.5	2.4	23.3	93.6
2	S	20.5	1.5	22.1	82.9

W celu przeprowadzenia badań belek zginanych zaprojektowano stanowisko badawcze, w ten sposób by możliwa była obserwacja pracy belki w zakresie pokrytycznym. Obciążenia zadawano w postaci 2 sił skupionych za pomocą podnośników hydraulicznych od dołu do góry. Zastosowano metodę obciążania polegającą na wymuszaniu przemieszczeń. Schemat statyczny badanych elementów pokazano na rys. 3.

Podczas badań mierzono ugięcia belki, szerokość rozwarcia rys, odkształcenia betonu w strefie ściskanej (dwie bazy pomiarowe w środku belki) i rozciąganej (siedem baz pomiarowych rozmieszczonych na całym odcinku między przyłożonymi siłami). Szczegółowy program badań i zestawienie uzyskanych wyników można znaleźć w Słowik [11].



Rys. 3. Schemat statyczny elementów badawczych. Fig. 3. The static scheme of tested beams.

3.2. Wyniki badań

W belkach serii B, w ramach której przebadano belki o niskim stopniu zbrojenia: 0.05%, 0.07% i 0.09%, o nośności decydował moment rysujący. W belkach tych powstawała tylko jedna rysa a szerokość jej rozwarcia tuż po powstaniu była stosunkowo duża w ≥ 0.3 mm. Zaznaczył się wyraźny wpływ stopnia zbrojenia belek na wielkość rozwarcia rysy tuż po powstaniu: im wyższy stopień zbrojenia tym mniejsze były szerokości rys. Po zarysowaniu następował spadek sił na siłomierzach i możliwa była dalsza obserwacja pracy belek w zakresie pokrytycznym. Mimo, że po zarysowaniu w belkach nie następowało przełamanie, to jednak moment powstania rysy można uznać jako osiagnięcie stanu granicznego belki ze względu na szerokość rozwarcia rysy. Sposób zarysowania belek o ρ <0.1% był podobny do zarysowania belek betonowych niezbrojonych. Jednak charakter procesu powstawania rysy w belkach słabo zbrojonych był inny. W belkach niezbrojonych po powstaniu rysy, następowało nagłe przełamanie belki na dwie części. Proces pękania i zarazem zniszczenia w belkach betonowych miał charakter gwałtowny i towarzyszył mu huk. W belkach słabo zbrojonych po zarysowaniu możliwe było dalsze obciążania poprzez wymuszanie ugięć belek, przy którym, po spadku sił po zarysowaniu, siły wewnętrzne stabilizowały się na stałym poziomie, ale niższym od maksymalnego uzyskanego tuż przed zarysowaniem. Na rysunku 4 pokazano przykładowe wykres zależności moment zginający – ugięcie uzyskane w belkach serii B.

Inaczej przebiegał proces zarysowania w belkach serii S o $\rho = 0.12\%$. W belkach tych zanotowano nieznaczny wzrost nośności ponad moment rysujący, średnio o 6.7%. Powstało dwie lub trzy rysy, których szerokość rozwarcia tuż po powstaniu była mniejsza od 0.06 mm. Natomiast średnia szerokość rozwarcia rys w momencie osiągnięcia w belkach maksymalnego momentu zginającego nie przekroczyła 0.11 mm, a przebieg zarysowania był powolny i bardziej stabilny niż w belkach serii B. Po osiągnięciu momentu maksymalnego następował nieznaczny spadek sił, które w kolejnych etapach obciążania stabilizowały się na stałym poziomie. Obrazuje to rysunek 5. Można uznać, że w belkach o $\rho = 0.12\%$ proces zarysowania i niszczenia był zbliżony do takiego jaki występuje w belkach żelbetowych, mimo że były to belki słabo zbrojone.

W jeszcze bardziej stabilny sposób przebiegało zarysowanie w belce serii S o stopniu zbrojenia 0.20%. Powstało w niej pięć rys, a szerokość ich rozwarcia po powstaniu była stosunkowo mała. Maksymalny pomierzony moment zginający przekroczył moment rysujący o 32%. Jest to już znaczny wzrost nośności, przy czym szerokość rozwarcia rys w etapie osiągnięcia maksymalnego momentu nie przekroczyła 0.3 mm. Uznano, że belka o $\rho = 0.20\%$ zachowywała się jak typowa belka żelbetowa. Zależność momentu zginającego od ugięcia w belce o stopniu zbrojenia 0.2% pokazano na rys. 6.



Rys. 4. Zależność moment zginający-ugięcie w belce B6 – ρ =0.05% i B1 – ρ =0.09%. Fig. 4. Bending moment-deflection curve for the beam B6 – ρ =0.05% and B1 – ρ =0.09%.



Rys. 5. Zależność moment zginający-ugięcie w belce S3 – ρ =0.12%. Fig. 5. Bending moment-deflection curve for the beam S3 – ρ =0.12%.



Rys. 6. Zależność moment zginający-ugięcie w belce S6 - ρ =0.20%. Fig. 6. Bending moment-deflection curve for the beam S6 - ρ =0.20%.

3.3 Analiza wyników badań

Na podstawie pomierzonych w czasie badań szerokości rozwarcia rys w belkach słabo zbrojonych tuż po powstaniu stwierdzono, że ich wielkość zależy od stopnia zbrojenia elementu. Im mniejszy był stopień zbrojenia tym większa szerokość rozwarcia rysy tuż po powstaniu. Średnie wartości szerokości rozwarcia rys bezpośrednio po powstaniu w badanych belkach wyniosły: 0.37 mm w belkach o ρ =0.09%; 0.55 mm w belkach o ρ =0.07%; 0.47 mm w belkach o ρ =0.05%. Ze względu na tak duże wartości rozwarcia rys po zarysowaniu można stwierdzić, że został przekroczony stan graniczny szerokości rozwarcia rys prostopadłych w elementach słabo zbrojonych a więc przy projektowaniu nie należy dopuszczać do pojawienia się rys i powinno się przyjmować, że o nośności tych elementów decyduje moment rysujący.

Stwierdzono, że momenty rysujące uzyskane w belkach badawczych ze zbrojeniem są wyższe od momentów rysujących w belkach betonowych bez zbrojenia. Wyniki badań własnych są zbieżne z wynikami innych badaczy, zajmujących się elementami słabo zbrojonymi, np. K. Dąbrowskiego [6], który w swoich badaniach również odnotował wzrost momentu rysującego w belkach słabo zbrojonych.

Większą rysoodporność belek zbrojonych badacze przypisują zwiększonej odkształcalności betonu zbrojonego i wpływom ujednoradniającym zbrojenia, polegającym na "zszywaniu" rys a co za tym idzie zwiększeniu wytrzymałości betonu na rozciągnie przy zginaniu. Analizując jednak uzyskane w badaniach własnych wielkości granicznych odkształceń betonu przy rozciąganiu (otrzymane wartości zestawiono w tab. 3) nie stwierdzono zwiększonej odkształcalności betonu w badanych belkach słabo zbrojonych, a na podstawie otrzymanych wielkości ε_{ctu} uznano, że wynoszą one około 0.15‰ w przypadku betonu niezbrojonego i słabo zbrojonego.
Seria	Beton	Element	ρ [%]	ε _{ctu} [10 ⁻⁶]
		B1	0.05	162
В	f_{cm} =24.5 MPa	B2		106
	$G_r = 93.6 \text{ J/m}^2$	B3	0.07	156
	r -	B4		167
		B5	0.09	108
		B6		164
		S7	0.0	151
		S8		146
S	f_{cm} =20.5 MPa	S9		275
	$G_{r} = 82.9 \text{ J/m}^{2}$	S1	0.12	161
	1	S2		145
		S 3		182
		S6	0.20	188

Tabela 3.Odkształcenie graniczne betonu rozciąganego pomierzone w elementach badawczych.Table 3.The ultimate strain of tensile concrete measured during the experiment.

Inne wyjaśnienie wzrostu rysoodporności belek słabo zbrojonych można przedstawić na gruncie zasad mechaniki pękania. Według nieliniowej mechaniki pękania na moment rysujący w belkach zbrojonych ma wpływ charakter procesu powstawania rys. Inaczej on przebiega w belkach niezbrojonych, w których zarysowanie przebiega w sposób gwałtowny, a inaczej powstają rysy w elementach o odpowiednim stopniu zbrojenia, gdzie rysy powstają w sposób stabilny. Procesami tymi steruje energia pękania.

Badania wykazują (np. Woliński [16], Bažant i Pfeiffer [2]), że stosowanie betonów o dużej wytrzymałości lub zwiększenie gabarytów konstrukcji powoduje obniżenie ich odporności na kruche pękanie i stopnia bezpieczeństwa. Problem ten bardzo wyraźnie występuje w konstrukcjach słabo zbrojonych. Nadmierna kruchość może być przyczyną katastrofalnego zarysowania lub nagłego, nie sygnalizowanego zniszczenia konstrukcji. Wprowadzenie zbrojenia do elementu betonowego zmienia charakter zarysowania.

Na podstawie analizy wyników badań własnych uznano, że o nośności elementów słabo zbrojonych decyduje moment rysujący. We wszystkich badanych belkach serii B o niskim stopniu zbrojenia, które zakwalifikowano do elementów słabo zbrojonych, moment rysujący był maksymalnym pomierzonym momentem zginającym. W belkach serii S o stopniu zbrojenia ρ =0.12% zanotowano wzrost nośności ponad moment rysujący, ale był on nieznaczny. Jednocześnie zauważono, że w elementach ze słabym zbrojeniem moment rysujący był wyższy niż moment rysujący w belkach betonowych niezbrojonych.

Dodatkowo przeprowadzona analiza numeryczna, której wyniki przedstawiono w Słowik i Błazik-Borowa [12], wykazała, że na przebieg powstawania rys i rozkład naprężeń normalnych w belce ma wpływ stopień zbrojenia elementu oraz nie bez znaczenia jest również dobór prętów zbrojeniowych. Ten drugi czynnik można określić za pomocą współczynnika rozproszenia zbrojenia:

$$i_s = \rho \frac{\delta}{\phi} \tag{12}$$

gdzie: ρ – stopień zbrojenia, ϕ – średnica prętów w m, δ =10⁻³m.

Obliczenia numeryczne potwierdziły wzrost rysoodporności belek ze zbrojeniem w porównaniu do belek betonowych niezbrojonych.

4. Propozycja własna szacowania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych

W celu ilościowego opisu wpływu zbrojenia na rysoodporność belek słabo zestawiono wyniki badań własnych i badań K. Dąbrowskiego (rys. 7). Na osi rzędnych zamieszczono iloraz wartości momentu rysującego w elemencie słabo zbrojonym M_{cr}^{SRC} do momentu rysującego w elemencie bez zbrojenia M_{cr} , który charakteryzuje wzrost rysoodporności, czyli i nośności zginanych elementów słabo zbrojonych. Na osi odciętych umieszczono współczynnik x (wyrażony w %), który jest sumą stopnia zbrojenia ρ i współczynnika rozproszenia zbrojenia i_c .



- Rys. 7. Wzrost rysoodporności zginanych elementów słabo zbrojonych na tle wyników badań doświadczalnych.
- Fig. 7. The increase of cracking moment in slightly reinforced concrete members based on experimental results.

Prosta wynikająca z aproksymacji wyników badań doświadczalnych, przedstawiona na rys. 7, jest to funkcja regresji obliczona metodą najmniejszych kwadratów. Uzyskana funkcja, opisująca wzrost rysoodporności elementów słabo zbrojonych charakteryzuje się dosyć dobrą korelacją z wynikami badań. Dobra zgodność wyników badań i obliczeń wskazuje, że koncepcja uwzględnienia współczynnika rozproszenia zbrojenia (obok stopnia zbrojenia) przy określaniu nośności zginanych elementów słabo zbrojonych jest poprawna. Na podstawie wyników badań zaproponowano wzór do wyznaczania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych:

$$M_{ult}^{SRC} = M_{cr}^{SRC} = W_c \kappa f_{ctm} \left[125\rho \left(1 + \frac{\delta}{\phi} \right) + 1 \right]$$
(13)

W związku z tym, że we wzorze (13) znajduje się współczynnik κ , wyrażający iloraz f_{ct}/f_{ctm} , nośność elementów słabo zbrojonych jest uzależniona od wielkości elementu (*h*) i cech betonu (l_{ch}). Z kolei długość charakterystyczna betonu l_{ch} jest zależna od maksymalnego wymiaru ziaren kruszywa D_{max} . W elementach masywnych można stosować kruszywo o większych ziarnach. Uwzględnienie zatem współczynnika κ we wzorze (13) daje podstawę do ekstrapolacji wyników i wniosków z badań na elementach małych na elementy o dużych przekrojach i budowle masywne, gdzie najczęściej beton słabo zbrojony jest stosowany.

5. Przykłady zastosowania

Zaproponowana metoda wyznaczania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych została oparta na analizie procesów pękania betonu i pozwala w bezpieczny sposób wykorzystać przy projektowaniu wzrost rysoodporności tych elementów bez konieczności ich przezbrajania, co przedstawiono na poniższych przykładach.

Przykład pierwszy dotyczy belki o wymiarach przekroju 150×300 mm, wykonanej z betonu B15 i stali AI lub AII (rys. 8). Przykład drugi dotyczy belki o wymiarach przekroju 350×800 mm, wykonanej z betonu B15 lub B25 i stali AI (rys. 9). Nośność belek słabo zbrojonych wyznaczono na podstawie wzoru (13) i przyjęto, że wzór ten obowiązuje do wartości ρ_{min} powiększonych o 50% w stosunku do wielkości wyznaczonych ze wzoru (9). Przy wyższych stopniach zbrojenia nośność belki wyznaczono jak nośność elementu żelbetowego.



Rys. 8. Wpływ rodzaju stali na nośność belki słabo zbrojonej. Fig. 8. The influence of steel grade on load carrying capacity of slightly reinforced concrete beam.



Rys. 9. Wpływ cech betonu na nośność belki słabo zbrojonej.

Fig. 9. The influence of concrete grade on load carrying capacity of slightly reinforced concrete beam.

Literatura

- [1] Bažant Z.P., Oh B.H., *Crack Band Theory for Fracture of Concrete*, Materiaux et Constructions. Vol.16-No 93, mai-juin, 1983.
- [2] Bažant Z.P., Pfeiffer P.A., *Determination of Fracture Energy from Size Effect and Brittleness Number*, ACI Materials Journal, November-December, 1987.
- [3] Bosco C, Carpinteri A., *Fracture Mechanics Evaluation of Minimum Reinforcement in Concrete Structures*, Off-print from the volume "Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete". Elsevier Applied Science, 1992.
- [4] Carpinteri A., Ferro G., *Apparent Tensile Strength and Fictitious Fracture Energy of Concrete: A Fractal Geometry Approach to Related Size Effects*, Proceedings of the International Conference on Fracture and Damage of Concrete and Rock. Vienna, 1992.
- [5] Chambaud M.R., *Le calcule a la supture par flexion des poutres eu beton arme a faible pourcentage d'armature tendue*, Inst. Techn. du Beton et des Fr. Publ. nr 78, 1954.
- [6] Dąbrowski K., *Prostokątne elementy zginane z betonu słabo zbrojonego*, Towarzystwo Naukowe Ekspertów Budownictwa w Polsce. Warszawa, 1962.
- [7] Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E., Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements, Cement and Concrete Research. Vol. 6, 1976.
- [8] Hjorteset K., Minimum Reinforcement Requirements for Concrete Flexural Members Determined Using Nonlinear Fracture Mechanics, MSc thesis in Civil Engineering. University of Washington, 1990.
- [9] Mianowski K. M., *Metoda analizy przyczepności i rys w żelbecie*, Archiwum Inżynierii Lądowej, Vol. XXXVI, z. 1-2/1990.
- [10] Saliger R., Nowa teoria żelbetu na podstawie odkształceń plastycznych przy złamaniu, PWN. Warszawa, 1952.
- [11] Słowik M., Analiza nośności elementów z betonu słabo zbrojonego z uwzględnieniem stanów granicznych użytkowania, Rozprawa doktorska. Politechnika Lubelska, Lublin, 2000.
- [12] Słowik M, Błazik-Borowa E., *Wpływ doboru prętów zbrojeniowych na rozkład naprężeń w elemencie betonowym*, Eksploatacja i Niezawodność, nr4/2001.
- [13] Słowik M., Wyznaczania minimalnego stopnia zbrojenia w zginanych elementach z betonu, XIV Konferencja Naukowa "Metody numeryczne w projektowaniu i analizie konstrukcji hydrotechnicznych". Korbielów 2002. Materiały pokonferencyjne, 2002.
- Słowik M., O wyznaczaniu minimalnego stopnia zbrojenia zginanych elementów żelbetowych, Inżynieria i Budownictwo, nr 1/2003.
- [15] Styś D., Rejman G., *Efekt skali a minimalny stopień zbrojenia belek żelbetowych*, XLI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Kraków-Krynica, 1995.
- [16] Woliński Sz., Właściwości betonu rozciąganego i ich zastosowania w nieliniowej mechanice pękania, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Budownictwo i Inżynieria Środowiska. Vol. 15, No 91. Rzeszów, 1991.
- [17] CEB-FIP Model Code. Bulletin d'information, No. 196, 1990.
- [18] PN-56/B-03260, Konstrukcje żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie, 1956.
- [19] PN-B-03260, Konstrukcje żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie, 2002.
- [20] PrEN 1992-1-1, Design of Concrete Structures. General Rules and Rules for Buildings, 2002.
- [21] ZN-66/HP/1, Budowle hydrotechniczne. Konstrukcje słabo zbrojone. Obliczenia statyczne i projektowanie, Centralne Biuro Studiów i Projektów Budownictwa Wodnego "Hydroprojekt". Warszawa, 1966.

The analysis of load carrying capacity and cracking of slightly reinforced concrete members in bending

Marta Słowik

Lublin University of Technology, Department of Civil Engineering, e-mail: m.slowik@pollub.pl

Abstract: Slightly reinforced concrete members are the members made by concrete with reinforcement less than minimum given in codes for reinforced concrete ones. Plain concrete and slightly reinforced concrete members in bending are treated in the same way during the dimensioning and the influence of longitudinal reinforcement on the load carrying capacity is not taken into account. The mechanism of work and crack formation in slightly reinforced concrete members is not completely recognized. The author's own research program was made. The experiment was aimed at the determination of cracking moment and load carrying capacity of slightly reinforced concrete beams with different reinforcement ratio. Also plain concrete beams and the typical reinforced concrete beam were tested. The analysis of the obtained values of maximum bending moment and crack's widths was made according to the reinforcement ratio. The analysis of test results shows how the presence of longitudinal steel bars in concrete members, even when reinforcement ratio is low, changes cracking process and influences the value of cracking moment in flexural members. On the basis of test results, the method how to calculate the load carrying capacity of slightly reinforced concrete elements in bending has been proposed.

Key words: slightly reinforced concrete, minimum reinforcement ratio, load carrying capacity, cracking.

Experimental and numerical investigation of plywood progressive failure in CT tests

Ivelin V. Ivanov^{*,**}, Tomasz Sadowski^{**}, Magdalena Filipiak^{**}, Marcin Kneć^{***}

*Department of Engineering Mechanics, University of Rousse, 8 Studentska str., Rousse 7017, Bulgaria **Lublin University of Technology, Faculty of Civil and Sanitary Engineering, Department of Solid Mechanics, Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, Poland ***Lublin University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Applied Mechanics Department, Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin, Poland

Abstract: The plywood is considered as a layered cross-ply unidirectional fibre reinforced composite. The experimental Compact Tension (CT) tests carried out in different directions of plywood fibre orientation show that the characteristics of damages are fibre bundle rupture, matrix cracking along the fibres, and delamination at the ply interlayers of glue. The plywood CT specimens are modelled by continuum shell and cohesive finite elements with damage evolution in material models. The Finite Element (FE) model simulates the experimental behaviour of plywood samples very well and allows deep investigation of the different types of damage development and interaction. The FE model of plywood is useful for its lay-up optimization and for development of very efficient in large-scale simulations computational models of plywood.

Key words: plywood, veneer, progressive failure, damage, finite element model, finite element simulation.

1. Introduction

Plywood is very popular material in civil engineering and furniture industry, because it is comparatively cheap, strong, and lightweight material. Its strength and progressive failure resistance are very important for wooden houses survivability in earthquake, tornado, and hurricane events [1-3]. The progressive failure of plywood, however, is complicated because of its structure as a layered natural composite which is very similar to polymeric unidirectional fibre reinforced composites.

Plywood is made from thin sheets of timber – veneer, called also plies. The timber is orthotropic fibre material with well pronounced difference in elastic and mechanical properties between the longitudinal (L) to the fibres direction and the tangential direction (T) to the annually growth rings. The veneers are cut by rotating the trunks and therefore they are oriented in the *LT*-plane of timber material with a normal in radial (R) direction of the log. They are stacked together with the fibre direction of each ply perpendicular to the fibre direction of its adjacent ones and usually the plywood has an odd number of plies. The veneers are bonded together

under heat and pressure with strong adhesive, which makes the plywood a type of layered composite material. Plywood is used in many applications as a lumber of a higher quality because of its resistance to cracking, breaking, twisting and warping although the pure wood is very brittle material.

The Finite Element (FE) method was developed in recent few decades as a superior numerical method that could produce computer simulations of different phenomena of the real world. This allows many researchers to use the FE technique to investigate some problem that is not easy to be directly observed and its parameters to be measured. The FE method is best developed for Solid and Structure mechanics and it is enriched with many material models, including damage models as well as specific structure finite elements like cohesive elements, continuum shell elements, etc.

In this paper the problem of progressive failure in plywood material is investigated by Compact Tension (CT) experimental tests and FE analysis. The plywood specimens are made from spruce and pine veneers. The gradual degradation and fracture process of this material is very complicated. It obeys both description of damage growth in plies and delamination of composite layers. The numerical simulation of the problem was done by application of FE technique and ABAQUSTM commercial code.

2. Experimental CT tests of plywood

Compact Tension (CT) tests of 9-ply plywood were conducted using three types of specimens shown in Fig. 1: (a) with fibres of the outer plies oriented in the direction of loading, (b) with fibres of the outer plies oriented perpendicular to the direction of loading, and (c) with fibres in bias direction (45°) to the loading direction. Taking the outer plies as reference plies, the specimens can be denoted as longitudinal, transverse, and bias samples, respectively.



Fig. 1. Compact tension specimens of plywood with different orientation.

The longitudinal specimens with the fibres of the outer plies oriented in the loading direction failed with non even edges for these plies caused by fibre bundle rupture at different places along the fibres (see Fig. 2). The plies have cracks along the fibres connecting the different places of bundle rupture. The force developed and the displacement of the grips are registered for appropriate match of FE simulation to the experimental tests.



Fig. 2. Failure of a longitudinal CT specimen.

The transverse specimens failed with even failure edge of outer plies, having fibres oriented perpendicular to the loading direction, which could be seen in Fig. 3. The failure of outer plies is cracking along the fibres. The internal plies of the transverse specimens as well as of the longitudinal ones have very similar modes of failure as the outer plies depending on their orientation to the loading direction. Because the places of failure of the adjacent plies are different, the ruptured fibre bundles are pulled out after delamination at the glued interlayer connecting the plies.



Fig. 3. Failure of a transverse CT specimen.

When the bias specimens are tested, the fracture edges of the different layers are not strait lines (see Fig. 4). They are zigzag lines that possess the characteristics of failure of both – failure of the longitudinal to the loading direction plies and failure of the transverse plies. We have some fibre-bundles ruptured and comparatively long cracks along the fibres connecting the places of bundle rupture. The lines of failure of the different plies, however, do not coincide and delamination accompanies the failure.



Fig. 4. Failure of a bias CT specimen.

All specimens of plywood in CT tests have delamination between the layers, independently of the orientation of the fibres. Adjacent layers have failure at different places because of their different fibre orientation. This causes delamination, which is ply interface failure in shear, in fact, with fibres pulled out and formation of pockets as it could be seen in Fig. 5.



Fig. 5. Close look of the plywood failure area.

3. Finite element model of plywood

In order to simulate properly the progressive failure of plywood in tension, we need to have good models of the mechanical behaviour of its constituents. The veneers are orthotropic sheet material with very brittle behaviour. Their structure in mesoscale level consists of tubular water-conducting elements (tracheids) which are stronger in their longitudinal direction and weaker in transverse direction [4]. In microscopic level, the walls of tracheids are built up of long cells having unidirectional fibres of cellulous along the tracheids, which are connected together by lignin.

3.1. Single veneer model

The best choice for us is to represent the veneer as a unidirectional fibre composite layer with orthotropic elastic properties and damage evolution. ABAQUS[™] finite element code has a readily available damage model for unidirectional fibre composites and 2-D stress elements [5]. The material model can be used with the proper material and mechanical data for continuum shell elements in which each ply is discretized.

Damage variables, d_f , d_m and d_s , degrade the elastic moduli of material E_L , E_T and G_{LT} in the damaged elasticity matrix C_d :

$$\mathbf{C}_{d} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0\\ c_{12} & c_{22} & 0\\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$
(1)

$$c_{11} = (1 - d_f) E_L / D \tag{2}$$

$$c_{12} = (1 - d_f)(1 - d_m)\nu_{LT}E_T / D$$
(3)

$$c_{22} = (1 - d_m) E_T / D \tag{4}$$

$$c_{33} = (1 - d_s)G_{LT} \tag{5}$$

where ν_{LT} is a Poisson's ratio and:

$$D = 1 - (1 - d_f)(1 - d_m)\nu_{LT}^2 E_T / E_L$$
(6)

The damaged elasticity matrix governs the material constitutive equation:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_d \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{7}$$

where $\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}_{L} \quad \boldsymbol{\sigma}_{T} \quad \boldsymbol{\tau}_{LT}]^{T}$ is 2-D stress vector, corresponding to 2-D strain vector $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{L} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{T} \quad \boldsymbol{\gamma}_{LT}]^{T}$.

The damage variable, d_{f} , is determined by two modes of damage (fibre breakage) in dependence of the applied loading in fibre direction – tension or compression:

$$d_{f} = \begin{cases} d_{f_{t}}, & \sigma_{L} \geq 0 - \text{ fibre rupture} \\ d_{f_{c}}, & \sigma_{L} < 0 - \text{ fibre kinking} \end{cases}$$
(8)

while the damage variable, d_m , is determined by other two modes of matrix damage:

$$d_{m} = \begin{cases} d_{mt} , & \sigma_{T} \geq 0 - \text{matrix cracking} \\ d_{mc} , & \sigma_{T} < 0 - \text{matrix crushing} \end{cases}$$
(9)

These modes are independent and could be generally denoted by index M. The shear damage variable, d_s , is resultant of all four independent damage modes:

$$d_s = 1 - (1 - d_{ft})(1 - d_{fc})(1 - d_{mt})(1 - d_{mc})$$
(10)

The independent damage variables are initially zero and their evolution could begin when the corresponding failure criterion for damage initiation, F_M , becomes greater than unity ($F_M > 1$). The failure criteria of Hashin and Rotem [6] for each mode are as follows:

$$F_{ft} = \left(\frac{\sigma_L}{X_T}\right)^2 \tag{11}$$

$$F_{fc} = \left(\frac{\sigma_L}{X_c}\right)^2 \tag{12}$$

$$F_{mt} = \left(\frac{\sigma_T}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 \tag{13}$$

$$F_{mc} = \left(\frac{\sigma_T}{2S_{RT}}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_{RT}}\right)^2 - 1\right]\frac{\sigma_T}{Y_C} + \left(\frac{\tau_{LT}}{S_{LT}}\right)^2$$
(14)

where X_T is the strength of veneer in tension in longitudinal (*L*) direction, X_C – compressive strength in *L*-direction, Y_T – tensile strength in tangential (*T*) direction, Y_C – compressive strength in *T*-direction, S_{LT} – in-plane shear strength, S_{RT} – transverse shear strength.

The degradation of the stiffness of the material could cause several numerical problems in the calculations. First of all, a regularization procedure should be applied, in order to avoid the strain localization in one finite element and the sever mesh dependence of the simulation. The regularization procedure here is that the damage model is applied as a local damage, i.e. the damage evolution law is in term of equivalent displacements, not in strains. A characteristic length L_c is prescribe for each element in order to calculate the equivalent displacement, δ_M^{eq} , determining the damage evolution for each independent damage mode, M, after the damage initiation of the mode. The equivalent displacement is calculated for the fiber breakage modes simply by the formula:

$$\delta_{ft}^{\rm eq} = \delta_{fc}^{\rm eq} = L_c \sqrt{\varepsilon_L^2} \tag{15}$$

and for matrix damage modes by:

$$\delta_{mt}^{\rm eq} = \delta_{mc}^{\rm eq} = L_c \sqrt{\varepsilon_T^2 + \gamma_{LT}^2} \tag{16}$$

The static damage variable, d_M^{st} , for each active mode *M* is calculated by an irreversible linear-softening damage evolution law:

$$d_{M}^{\rm st} = \max\left\{d_{M}^{\rm st}, \frac{\delta_{M}^{\rm ult}(\delta_{M}^{\rm eq} - \delta_{M}^{\rm lim})}{\delta_{M}^{\rm eq}(\delta_{M}^{\rm ult} - \delta_{M}^{\rm lim})}\right\}$$
(17)

where δ_M^{lim} is the equivalent displacement for mode *M* calculated exactly when the damage initiation for this mode is satisfied by the corresponding criterion $(\delta_M^{\text{lim}} = \delta_M^{\text{eq}})$. δ_M^{ult} is the ultimate equivalent displacement that could be reached in dependence of the dissipated fracture energy, G_M^{cr} , for this mode of damage:

$$\delta_M^{\rm ult} = 2 \frac{G_M^{\rm cr}}{\sigma_M^{\rm lim}} \tag{18}$$

Here, σ_M^{lim} is the equivalent stress for mode *M* exactly when the damage initiation criterion for this mode is satisfied ($\sigma_M^{\text{lim}} = \sigma_M^{\text{eq}}$) and these equivalent stresses of the damage modes, σ_M^{eq} , are calculated as follows:

$$\sigma_{M}^{\rm eq} = \begin{cases} \left| \sigma_{L} \right|, & M = ft, fc \\ \frac{\sigma_{T} \varepsilon_{T} + \tau_{LT} \gamma_{LT}}{\delta_{M} / L_{c}}, & M = mt, mc \end{cases}$$
(19)

The evolution of damage variables is graphically explained by equivalent stressdisplacement diagram in Fig. 6. The material is linearly elastic for any mode of damage until the damage initiation (failure) criterion for this mode is met – ascending branch. When the damage is already initiated and the equivalent displacement, $\delta_M^{\rm eq}$, is greater than the limit, $\delta_M^{\rm eq} > \delta_M^{\rm lim}$, the static damage variable is calculated $(d_M^{\rm st} \in [0, 1])$ to reduce the equivalent stress, $\sigma_M^{\rm eq}$, linearly by multiplier $(1 - d_M^{\rm st})$ (descending branch) in such a way that the totally dissipated energy up to the ultimate failure, when equivalent displacement reaches the ultimate displacement, $\delta_M^{\rm ult}$, to be the critical fracture energy for this mode, $G_M^{\rm cr}$, representing the gray area of the triangle. Any unloading will retain the damage variable constant until the successive loading reaches the last point of unloading (the thin line with arrows).



Fig. 6. Irreversible linear softening damage evolution.

Since the descending branch of stress development represents a negative tangential stiffness of the material and therefore unstable solution for nonlinear static problems, the stabilization procedure is necessary to provide computationally efficient solution. The method that is applied here is a viscous damping and the damage variable for each independent damage mode, degrading the damaged elastic matrix, is calculated as solution of the time dependent differential equation:

$$\dot{d}_{M} = \frac{1}{\eta_{M}} (d_{M}^{\rm st} - d_{M}), \qquad (20)$$

where η_M is the viscous coefficient for this mode of damage *M*.



Fig. 7. Single veneer specimen in longitudinal (*L*) tension: (a) experimental failure, (b) fibre rupture damage, (c) matrix cracking damage.



Fig. 8. Single veneer specimen in transverse (\$T\$) tension: (a) experimental failure, (b) matrix cracking damage.



Fig. 9. Single veneer specimen in bias (45°) tension: (a) experimental failure, (b) matrix cracking damage.

In order to find the elastic and mechanical properties of single veneer, three types of specimens of pine and spruce wood were prepared with different orientation of fibres in the direction of loading. The tension tests were conducted in longitudinal, transverse, and bias (45°) direction to the direction of fibres of the specimens. The specimen of single veneer for tension tests is modelled by continuum shell finite elements in ABAQUSTM software. The damage model described above is used for material model. The elastic and mechanical properties of the material for continuum shell elements are tuned in order to obtain force-displacement curve, which is as close as possible to the

A typical failure of specimens in longitudinal to their fibres tension is shown in Fig. 7a. The fracture edge of specimen is not even because the fibres are ruptured in bundles at different places and they are connected by cracks along the fibres [7]. The damages that appear in longitudinal tension simulations are not only fibre rupture Fig. 7b but also matrix cracking Fig. 7c. This very well corresponds to the experimental observations although, because of the symmetric regular mesh, the simulations are perfect and they show symmetrically developed damage starting from four points of the specimen model while, in reality, the heterogeneity and imperfection cause unsymmetrical damage development.

experimental one with its breaking point at the maximum force reached.

The results for specimens in tension in transverse to the fibres direction are given in Fig. 8. The picture in Fig. 8a shows very even edge of fracture since the specimen is split along the fibres [4, 8]. The simulations show only matrix cracking mode of damage, which appear in a strip perpendicular to the loading direction as can be seen in Fig. 8b.

The results for tension in bias direction are similar to those of transverse direction (Fig. 9). The fracture edge is again even, but in 45 degree to the direction of tension as the specimens are split along the fibres (Fig. 9a). The FE simulations show the same damage mode but, because of the regular mesh and perfect material, the damage starts to develop from two points of the specimen and advances in 45° to the loading direction (Fig. 9b).

The average curve of each direction of tension tests represents the elastic property of veneer in the given direction of loading. The elastic properties of the veneer material are tuned in such a way in order to simulate elastic behaviour of the specimen negotiating the average force-displacement curve obtained in experiments for the given loading. The results of tuning the elastic properties by simulations are given in Tab. 1 for the two types of wood veneer.

Wood	E_L (MPa)	E_T (MPa)	ν _{LT} (-)	G_{LT} (MPa)	G_{LR} (MPa)	G _{RT} (MPa)
pine	6300	130	0.51	350	200	50
spruce	6200	210	0.013	350	200	40

Table 1. Elastic properties of single veneers of different type of wood.

The strength properties of the material, determining the damage initiation, are tuned in order to give maximum forces in force-displacement diagrams for pine and spruce veneers. As a result of the strength adjustment together with the fracture energy tuning [9], in order to have proper descending branch of the diagrams, the mechanical properties of all three types of single veneer wood are determined and given in Tab. 2 as parameters of the damage model accepted here for the numerical simulations. The maximum breaking forces obtained in the simulations are given in Tab. 3 for comparison with the experimental average. The maximum force obtained in the simulations is very close to that in the experiment excluding the case of bias tension, in which the maximum force is lower than the experimental one for both types of wood.

Wood	X_{T}	X_{c}	Y_T	$Y_{_C}$	$S_{_{LT}}$	$S_{_{TR}}$	$G_{_{ft}}^{ m cr}$	$G_{_{fc}}^{\mathrm{cr}}$	$G_{mt}^{ m cr}$	$G_{_{mc}}^{ m cr}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(N/mm)	(N/mm)	(N/mm)	(N/mm)
pine	26.7	20	0.8	10	12	12	0.98	0.98	0.03	0.10
spruce	78.0	50	2.2	10	20	20	1.6	1.6	0.06	0.20

Table 2. Mechanical properties of single veneers of different type of wood.

]	lab	le	3.	Ν	/12	ax1n	num	brea	iking	g to:	rce	mat	ch	betv	veen	exp	peri	men	ital	tests	anc	1 \$1	mul	atio	ns.	

		Experimental	Average	FE Simulations				
Wood	Direction	displacement (mm)	max force (N)	displacement (mm)	max force (N)			
pine	longitudinal	0.69	689.1	0.68	681.3			
	transverse	0.94	20.0	0.92	20.3			
	bias	0.78	53.0	0.62	40.9			
	longitudinal	1.71	1755	1.66	1731			
spruce	transverse	1.59	55.9	1.50	54.9			
	bias	1.42	122.1	1.14	108.3			

The agreement between the experimental and the simulated by FE method behaviour of single veneer is very good, which is a basis for representative FE analysis of plywood progressive failure. Of course, we need to simulate the interface failure between the plies, which causes delamination of the plywood at some stage of the progressive failure.

3.2. Interlayer failure and delamination

Specimens of 5-ply plywood are prepared with notches deep to the middle ply and at 8 mm distance as it is shown on the photograph in Fig. 10a. The tension of both ends of the specimens causes shear and something like delamination of the plies. The fracture usually happens near the one of the interfaces of the middle ply with one of its adjacent ply, as it is shown in Fig. 10b. The surface of fracture however is not exactly the glued surface. Some of the material of the adjacent layer is stuck on the middle ply (Fig. 10c).



Fig. 10. Plywood specimen tested in shear.

The results of shear tests are used to set the strength of ply interface [10], which can be simulated in FE model of plywood by cohesive elements. They are very similar to continuum shell elements in their geometry and nodal degrees of freedom. 3-D elements have three translational degrees of freedom per node and local coordinate system defining the normal of the element and two tangential directions in the plane of the element.

The constitutive response of cohesive elements is determined by traction-separation relationship [5]. The separation in cohesive elements is defined as a relative displacement of upper nodes to lower nodes with respect to their normals with three components: δ_i , i = n, s, t in normal direction, n, and in the other two tangential directions, s and t, respectively. Using the element thickness, h, the constitutive response of damaged element can be defined as:

$$T_i = (1 - d_c) \frac{K_{(i)}}{h} \delta_i \quad \text{(no summation on } i\text{)}$$
(21)

where T_i are the traction components and d_c is a damage variable which is initially zero and when the damage initiation criterion is met it could has evolution and could reach unity.

The damage initiation is determined by quadratic nominal stress criterion:

$$F_{c} = \left(\frac{\left\langle T_{n}\right\rangle}{\sigma_{c}^{\lim}}\right)^{2} + \frac{T_{s}^{2} + T_{t}^{2}}{\left(\tau_{c}^{\lim}\right)^{2}}$$
(22)

when it becomes greater than unity $F_c \geq 1$). Here σ_c^{\lim} and τ_c^{\lim} are the peeling and shear strengths of the interface while the symbol $\langle \rangle$ denotes Macaulay's brackets. Effective traction, $T_{\rm eff}$, and effective separation, $\delta_{\rm eff}$, are calculated at the initiation of damage:

$$T_{\rm eff} = \sqrt{\left\langle T_n \right\rangle^2 + T_s^2 + T_t^2} \tag{23}$$

$$\delta_{\rm eff} = \sqrt{\left\langle \delta_n \right\rangle^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2} \tag{24}$$

and they are denoted as $T_{
m eff}^{
m lim}$ and $\delta_{
m eff}^{
m lim}$, respectively.

The damage evolution after the damage initiation is governed by linear softening, which can determined the static damage variable, d_c^{st} , by the expression:

$$d_{c}^{\rm st} = \max\left\{d_{c}^{\rm st}, \frac{\delta_{\rm eff}^{\rm ult}(\delta_{\rm eff} - \delta_{\rm eff}^{\rm lim})}{\delta_{\rm eff}(\delta_{\rm eff}^{\rm ult} - \delta_{\rm eff}^{\rm lim})}\right\}$$
(25)

where $\delta_{\text{eff}}^{\text{ult}} = 2G_c^{\text{cr}} / T_{\text{eff}}^{\text{lim}}$ is the ultimate effective separation calculated from critical fracture energy of cohesion, G_c^{cr} . The damage evolution in cohesive elements is very similar to the single veneer damage evolution and it can be illustrated by the diagram in Fig. 6 replacing equivalent displacement and stress by effective separation and traction. The total critical fracture energy is defined by its three components:

$$G_c^{\rm cr} = G_n^{\rm cr} + G_s^{\rm cr} + G_t^{\rm cr}$$
(26)

and in the mix-mode failure at the ultimate state the components of the dissipated energy satisfy the power law criterion:

$$\left(\frac{G_n}{G_n^{\rm cr}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{G_s}{G_s^{\rm cr}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{G_t}{G_t^{\rm cr}}\right)^{\alpha} = 1$$
(27)

with parameter $\alpha = 2$ in this case. When the cohesive elements are used to connect continuum shell elements, they are not loaded by peeling traction and the only mode of failure of cohesive elements is shear.

In order to avoid numerical difficulties in FE simulation of cohesive elements failure, viscous damage stabilization is implemented. The viscous damage variable, d_c , degrading the elastic properties of material, is calculated from the static damage variable, d_c^{st} , using the viscous coefficient η_c by the relationship:

$$\dot{d}_c = \frac{1}{\eta_c} (d_c^{\rm st} - d_c) \tag{28}$$

The accepted properties of cohesive elements and their failure parameters are chosen to correspond to the shear strength determined experimentally and to some data found in literature. The properties are given in Tab. 4. The thickness of the cohesive elements used in the FE model of plywood is very small, it is h = 0.02 mm. In order to have stable calculation when the cohesive element properties are degraded, viscous stabilization is accepted for cohesive elements with viscous coefficient $\eta_c = 0.01$ s.

Table 4. Properties of cohesive elements modeling the plywood interlayer connection.

K_n	K_{s}	K_t	$\sigma_{_n}^{\mathrm{lim}}$	$\sigma_{_s}^{_{ m lim}}$	$\sigma_t^{ m lim}$	$G^{ m cr}_n$	$G_{\!s}^{ m cr}$	$G_t^{ m cr}$
(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(N/mm)	(N/mm)	(N/mm)
1910	250	250	20	6.89	6.89	0.6	0.6	0.6

4. CT test simulations and results

A quarter of plywood CT specimen was modelled by finite elements. Each veneer ply is modelled by one layer of continuum shell elements. The layers are connected by one interlayer of cohesive elements with 0.02 mm thickness. The plies of veneer have thickness of 1.5 mm and the continuum shell elements account for this thickness by deducting the thickness of cohesive elements from it in order to obey the total thickness of the plywood. The lay-up is set to [*pine/spruce/spruce/pine*]_s.

The loading velocity in the CT test simulations is 1 mm/s and the viscous coefficients for stabilization, which are used in the damage model of continuum shell elements as well as in cohesive elements, are all equal to 0.01 s.

The simulation of longitudinal CT specimens in tension gave force-displacement curve, which is given in Fig. 11a in comparison with the experimental ones of three specimens. The maximum breaking force in the simulation is in good agreement with the experimental average but the descending branch is not steep enough and damages in the simulation are delayed. The simulation of transverse CT specimens in tension shows very similar results as force-displacement curve, which is given in Fig. 11b. The force-displacement curve of simulated bias tension is lower than the experimental ones (see Fig. 11c). The maximum breaking forces of single veneer tension in this direction, however, are lower than the experimental averages for both pine and spruce wood and this explains the results.



Fig. 11. Force-displacement diagrams of three specimens compared with the simulation.

The contour plots shown in Fig. 12 are taken for the same instant of longitudinal tension simulation. They present the development of fibre rupture damage in longitudinal plies (Fig. 12a) which advances, except in the stronger spruce wood veneer, followed almost immediately by the matrix cracking of transverse plies (Fig. 12b) and then followed with some delay by the delamination of interlayers (Fig. 12c).

The contour plots shown in Fig. 13 present the development of matrix cracking of transverse plies (Fig. 13a) together with fibre rupture damage in longitudinal plies (Fig. 13b), which advances in the weaker pine wood ply and delayed in the stronger veneer. The matrix cracking of transverse plies is like more pronounced here in comparison with the longitudinal sample and the delamination of the interlayers (Fig. 13c) is again delayed.



Fig. 12. Damages in longitudinal tension: (a) fibre rupture in longitudinal layers, (b) matrix cracking in transverse layers, (c) delamination in interlayers.



Fig. 13. Damages in transverse tension: (a) matrix cracking in transverse layers, (b) fiber rupture in longitudinal layers, (c) delamination in interlayers.

The contour plots of damages in bias tension of plywood show that the fibre rupture is very delayed and the main damage mode of material failure is the matrix cracking of all plies shown in Fig. 14a. This damage however, is advanced by the delamination between the plies (see Fig. 14b). In this type of loading the delamination appears to play significant role. It is well known that the shear of material is the main failure in bias loading of layered fibre reinforced composites.



(b)

Fig. 14. Damages in bias tension: (a) matrix cracking in all layers, (b) delamination in interlayers.

5. Conclusions

The FE model of plywood seems to represent qualitatively the progressive failure in CT tests very well. The model needs some amendments maybe to improve its quantitative representation. The force-displacement curves of simulations do not corresponds very well to the experimental ones. The higher delay of damage development in the simulations is maybe due to the higher viscous coefficient for calculation stabilization as well as to the higher critical fracture energies of some damage modes or cohesive element failure.

The FE model of plywood offer good qualitative results and it is capable to be used for progressive failure investigation giving better understanding of this complex process. The FE model can be utilized for optimization of plywood lay-up to reach higher strength. The model is computationally efficient enough for CT test simulations but not for large-scale structure simulations. The model is useful, however, for developing more efficient model of the layered composite with delamination for large-scale simulations as a basis for comparison.

Acknowledgements

The authors wish to express their gratitude to Marie Curie Transfer of Knowledge programme for its support to the project MKTD-CT-2004-014058, in the framework of which this investigation was carried out as well as for the opportunity the authors to work together.

References

- [1] Richard N., Yasumura M., Davenne L., *Prediction of seismic behaviour of wood framed shear walls with openings by pseudodynamic test and FE model*, The Japan Wood Res. Soc. 49 (2003): 145-151.
- [2] Yasumura M., Yasui S., *Pseudodynamic tests and earthquake response analysis of timber structures I: plywood sheathed conventional wooden walls with shear openings*, J. Wood Sci. 52 (2006): 63-68.
- [3] Yasumura M., Kamada T., Imura Y., Uesugi M., Daudeville L., *Pseudodynamic tests and earthquake response analysis of timber structures II: two-level conventional wooden structures with plywood sheathed shear walls*, J. Wood Sci. 52 (2006) 69-74.
- [4] Wittel F.K., Dill-Langer G., Kröplin B-H., Modeling of damage evolution in soft-wood perpendicular to grain by means of a discrete element approach, Comput. Mater. Sci. 32 (2005) 594-603.
- [5] ABAQUS Version 6.6 Documentation, ABAQUS Inc., Providence, RI 02909-2499.
- [6] Hashin Z., Rotem A., *A fatigue criterion for fiber-reinforced materials*, J. Comp. Mater. 7 (1973): 448-464.
- [7] Dill-Langer G, Hidalgo R.C, Kun F., Moreno Y., Aicher S., Herrmann H.J., *Size dependency of tension strength in natural fiber composites*, Physica A 325 (2003): 547-560.
- [8] Landis E.N., Vasic S., Davids W.G., Parrod P., *Coupled experiments and simulations of microstructural damage in wood*, Exper. Mech. 42(4) (2002): 389-394.
- [9] Reiterer A., Sinn G., Stanzl-Tschegg S.E., *Fracture characteristics of different wood species under mode I loading perpendicular to the grain*, Mater. Sci. and Engnrg A 332 (2002): 29-36.
- [10] Uysal B., Bonding strength and dimensional stability of laminated veneer lumbers manufactured by using different adhesives after the steam test, Int. J. of Adhn & Adhsvs 25 (2005): 395-403.

FE modeling of delamination growth in interlaminar fracture specimens

Vyacheslav N. Burlayenko^{1,2}, Tomasz Sadowski²

¹National Technical University 'KhPI', Department of Applied Mathematics, 61 002 Kharkov, Frunze 21 Str., Ukraine, e-mail: v.burlayenko@pollub.pl ²Lublin University of Technology, Department of Solid Mechanics, 20-618 Lublin, Nadbystrzycka 40 Str., Poland, e-mail: t.sadowski@pollub.pl

Abstract: Interlaminar fracture specimens like Double Cantilever Beam (DCB), End Notched Flexural (ENF), Single Leg Bending (SLB) etc. are widely used for studying the interlaminar toughness of composite laminates. The aim of this paper is to analysis delamination specimens within the framework of a meso-level damage modeling of composite laminates. In this case interlaminar interface is assumed as a damageable homogeneous layer between adjacent layers of the specimen bulk material. The degradation of the interlaminar connection can be taken into account by means either of an appropriate damage initiation criterion and damage evolution law or using fracture mechanics approach. Onset and growth of the delamination pre-existing crack in the fracture specimens are simulated by using both modeling possibility within commercial finite element code ABAQUS[™]. Comparisons between numerical predictions of used different finite element models as well as available experimental data have been performed.

Key words: interlaminar fracture specimens, delamination, ABAQUS, finite element predictions.

1. Introduction

Nowadays the use of composite materials is growing rapidly around the world. The composite materials are fallen into structural materials with tailoring facilities for creating high performance structures. This their ability makes such materials more attractive for using in different engineering applications before traditional structure materials such as metals or concrete. For instance, the composite materials have been widely used as structural elements of aircrafts, airspace and transport vehicles, and marine vessels as well as structural materials in civil engineering and sport inventories, etc. However, because composite materials consist technologically of different constituent materials they exhibit more sensitivity to damage than conventional ones.

One of the most frequently encountered problems in composite layered materials is interface cracking or the loss of cohesion between layers, known as delamination phenomenon. The interlaminar deterioration may occur due to a variety of reasons, such as high in-service loading and aggressive conditions, low energy impact, manufacturing defects or high stress concentration at the geometrical or material discontinuities (e.g. free edge effects) [1]. This damage mode is particularly important for structural integrity of whole composite structure. Because, delamination leads to the drastic reduction of bending stiffness of composite structure and promotes local buckling phenomenon [2]. With delamination growth the load carrying capacity of a delaminated structure is further reduced and may eventually cause failure. Thus, the safety of using as a structural material of layered composites is strongly influenced by the quality of the adhesion between their different layers. To be able to guarantee the advantages of structures made of laminate or sandwich composite materials it is necessary that this critical damaging mechanism as well as material characteristics corresponding to fracture toughness of materials were carefully studied and analyzed.

Due to the intrinsic complexities of delamination phenomenon regarding its singular nature, quantitative assessments of the delamination effects on the strength and lifetime of laminated structures are difficult as well as universal delamination failure criterions has not yet been established. Analytical efforts and their numerical implementations to date have only attempted to quantify the effects of idealized delaminations. Experimental data of the fracture test specimens designed and loaded so to induce delamination growth close to those idealized situations are used for these purposes. Then, numerical simulations of the interlaminar fracture tests may be considered as being useful, at least, for two reasons. The first one, the numerical simulations or virtual testing replace many expensive and time consuming experiments. In this case, it is the necessity to test the numerical model in situation in which experimental results are easily available. The second one is connected with the necessity to build new analytical models, and then the numerical model is compared to experimental results for the purpose of fitting the correct parameters of these models.

In the present paper, numerical simulations are conducted to study the delamination growth in fracture test specimens such double cantilever beam and single le bending that are usually applied for extracting of fracture parameters. Twoand three-dimensional finite element (FE) analyses with ABAQUS[™] code [3] are carried out. Both the virtual crack closure technique that has been implemented in ABAQUS[™] as package VCCT for ABAQUS[™] version 1.2-3 and the modeling with cohesive elements available in ABAQUS[™] element library are applied to predict delamination growth in the initially delaminated composite laminate specimens. Delamination growths from finite element analyses are compared between different finite element models and with experiment data that are available from literature.

2. Interlaminar fracture tests

Over the past two decades it has become common practice to characterize the resistance to delamination using fracture mechanics approach. In the context of fracture mechanics, test methods have evolved for measuring the interlaminar fracture toughness in terms of a critical value of strain energy release rate (ERR), G_c , associated with delamination onset and growth. A complete description of interlaminar fracture toughness requires characterization of three pure fracture modes, opening mode I, sliding shear mode II, scissoring shear mode III and their combinations (Fig. 1).



Fig. 1. Crack growth modes: a) I - opening, b) II - sliding, c) III - scissoring.

The strain energy release rates (fracture toughness parameters) in all the three modes are usually used in single-mode criteria or combined in a mixed-mode criterion to determine the onset of crack propagation, and these generally require curve-fitting parameters taken from experimental tests. A number of delamination specimens have been proposed in order to identify fracture parameters in pure mode I, mode II or in mixed-mode situation. The near pure mode I fracture occurs in the Double Cantilever Beam (DCB) (Fig. 2a). Hence, the opening ERR G_{IC} , can be obtained. The End Notched Flexural (ENF) test configuration is preferred for measuring of pure Mode II ERR, G_{IIC} (Fig. 2b). From results of these pure mode loadings, the critical Mode I and Mode II fracture toughness parameters can be obtained according to the following formula:

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} \tag{1}$$

where *P*, *B* and *a* denote the applied load, the specimen width and the crack length, respectively, and *C* is the compliance (load divided by displacement). After compliance calibration (so-called compliance method, e.g. [4]) the formulae for the G_{IC} and G_{IIC} can be eventually derived.



Fig. 2. Fracture test specimens: a) DCB, b) ENF, c) SLB.

In order to generalize failure criterion on the delamination resistance under combined loadings the mixed-mode tests are needed. The mixed-mode I and II occurs, for instance, in the Single Leg Bending (SLB) specimen (Fig. 2c). In order to separate of total value of ERR into sum of each mode the finite element simulation is necessary. Then, with the critical applied load measured from the test as the input information for FE analysis, the ERR of each fracture mode can be computed separately. Several specimens have also suggested for measuring of the Mode III ERR, G_{IIIC} , the Split Cantilever Beam (SCB) is one of them. Nevertheless, an interaction mixed-mode I, II and III criterion has not yet been established [5].

3. Modeling

Two kinds of approach are now used to study delamination behavior of layered composites. The first one uses the conception of Fracture Mechanics. In such approach, delamination growth is predicted when a combination of the components of the energy release rate is equal to, or greater than, a critical value. Techniques such as virtual crack closure technique (VCCT) (Irwin [6], Rybicki and Kanninen [7], Raju [8], Zou et al. [9], Krueger [10]), J-integral method (Rice [11]), virtual crack extension (Hellen [12]) and stiffness derivative (Parks [13]) have often been used to calculate the ERR. The second one is developed within the framework of Damage Mechanics. These models are based on the cohesive zone conception in which the interface enclosing the delamination is modeled by a damageable material. Then, delamination is started when a damage variable reaches its maximum value (Allix et al. [14], Allix and Corigliano [15], Schellekens and de Borst [16], Benzeggagh and Kenane [17], Mi et al. [18], Chen et al. [19], Alfano and Crisfield [20], Camanho et al. [21], Goval-Singhal et al. [22]). Because, in finite element code ABAQUS[™] has been implemented the virtual crack closure technique as an add-on capability to ABAOUS/Standard v.6.6 and the cohesive zone approach as 2D or 3D cohesive elements, these both approaches will be considered below more explicitly.

3.1. Virtual crack close technique

When other material non-linearities can be neglected, methods based on Linear Elastic Mechanics have been proven to be effective in delamination modeling. In this case, delamination can be considered as a crack in the bond between two layers and its propagation can be treated as crack growth adopting the concepts of Fracture Mechanics. Therefore, in order to analyze the delamination growth of laminated structures it is necessary to determine the stress fields of delamination front. However, the stress of the delamination front is singular, whereas the ERR, which indicates intensity of stress fields along delamination front, is a finite value. The virtual crack closure technique is one of the most commonly applied methods for determining the components of the strain energy release rate along a crack front. The VCCT approach was proposed by Rybicki and Kanninen [7] and is based on two assumptions: 1) Irwin's assumption that the energy released in crack growth is equal to the work required to close the crack to its original length, and 2) that crack growth does not significantly alter the state at the crack tip (self-similarity state). For example, Fig. 3a illustrates the similarity between crack extension from *i* to *j* and crack closure at *j*.

Then, assuming that the crack closure is governed by linear elastic behaviour, the energy to close the crack and, consequently, the energy to open the crack, is calculated from the following equations:

$$-\frac{1}{2}\frac{F_j \Delta U_i}{\Delta A} = G_i, \quad \Delta A = \delta a \, b \tag{2}$$

where F_i , ΔU_i , δa , B and G_i denote node reaction force at j, displacement between released nodes at i, crack extension as the length of the element at the crack front, the width and the energy release rate.

$$-\frac{1}{2}\frac{F_{\nu,2,5}}{b\,d} = G_I \ge G_{IC} \tag{3}$$

where G_{IC} is the Mode I fracture toughness parameter (critical ERR).



Fig. 3. VCCT approach for pure Mode I: a) crack extension and closure, b) crack growth criterion.

Similar arguments and equations can be written in two dimensions for Mode II and for three-dimensional crack surfaces including Mode III. In the general case involving Mode I, II, and III a node at the crack tip will separate when the equivalent strain energy release rate at the crack tip exceeds the critical strain energy release rate for the bond or the material. That is, the crack extends when $G_{eqC} \ge G_{eqC}$, where G_{eq} is the equivalent strain energy release rate at a node, and G_{eqC} is the critical equivalent strain energy release rate calculated based on the some mixed-mode criterion [3]. It should be noted, that the use of VCCT is advantageous as it allows the strain energy release rates to be determined with simple equations from a single (FE) analysis [8], but pre-existing of the initially debonded surfaces along a predefined delamination

front is compulsory. Moreover, to date, the VCCT for ABAQUS[™] does not support 3D models with contact pairs involving higher-order underlying elements and is confined by static, quasi-static and coupled thermal-stress analyses.

3.2. Cohesive crack model

Some difficulties of the implementation of the VCCT into FE codes can to be overcome by using cohesive zone approach within a so-called cohesive element. Cohesive models offer the advantages of incorporating both initiation and growth of delamination in such a way that the damage is initiated by using a strength criteria and the final separation is governed by fracture mechanics parameters. All proposed now cohesive-zone models start from the assumption that one or more interfaces can be defined, where delamination propagation is allowed by the introduction of a possible discontinuity in the displacement field. The interface can be deduced a priori by means of physical observations. Then, considering delamination as a progressive loss of cohesion between adjacent layers of solid, it can be modeled as a deterioration of the interlaminar connection between the layers.

In finite element method cohesive zone models is implemented as interface (cohesive) elements which are compatible with regular solid finite elements. In two dimensions, the cohesive interface elements are composed of two line elements separated by a thickness (Fig. 4a). In three dimension problems they consist of two surfaces separated by a thickness (Fig. 4b). The relative motion of the bottom and top parts of the cohesive element measured along the thickness direction represents opening or closing of the interface. And, the relative motion of theses parts with respect to the element mid-plane is qualified as the transverse shear behaviour of the cohesive element. The stretching and shearing of the element mid-plane are associated with membrane strains [3].



Fig. 4. Schematics of cohesive elements: a) 2D 4-noded, b) 3D 8-noded.

The constitutive response of theses elements depends on the specific application and is based on certain assumptions about the stress strain states that are appropriate for each application area. The nature of the delamination phenomenon, as was above mentioned, may be modeled based on a traction-separation description of the interface. Originally the traction-separation model in ABAQUS[™] assumes linear elastic behaviour. It is written in terms of an elastic constitutive tensor K⁰ that

101

relates the nominal stresses (traction vector) $\tau^T = (\tau_n, \tau_s, \tau_t)$ to the nominal strains (opening displacement vector) $\Delta^T = (\delta_n, \delta_s, \delta_t)$ across the interface. Damage of the traction-separation response is defined within the general framework of Continuum Damage Mechanics used for conventional materials. According to that, the combination of several damage mechanisms acting simultaneously on the same material are possible and each failure mechanism consists of a damage initiation criterion, a damage evolution law, and a propagation condition. Fig. 5 shows a graphic interpretation of a simple bilinear traction-separation law written in terms of the effective traction τ and effective opening displacement δ .



Fig. 5. Bilinear traction – separation constitutive law.

It is obviously that the relationship the effective traction and effective opening displacement is defined by three parameters, two of which uniquely define the fracture process. These parameters are the peak traction (local strength of the material, τ_0), a characteristic opening displacement at fracture (δ_{cr}), and the energy needed for opening the crack (area under the traction-displacement curve, G_{cr}) (Fig. 5). Several damage initiation criteria are available in ABAQUS[™] code [3]. Once the corresponding initiation criterion is reached, the specified damage evolution law will describe the rate at which the material stiffness is degraded. A scalar damage variable D $(0 \le D \le 1)$ represents the overall damage in the material and captures the combined effects of all active degradation mechanisms. To describe the damage evolution in general case under a combination of normal and shear deformations across the interface, the different mode-mix laws defined in terms of energies and tractions are suggested by ABAQUS[™] [17, 21]. When the overall damage variable reaches its limit D_{max} at all of its material points the cohesive element can be removed that corresponds to complete fracture of the interface between layers and is considered as delamination propagation. Interpenetration of the two adjacent layers after complete debonding is prevented by modeling of contact properties.

3.3. Some numerical issues

In non-linear numerical analyses is usually solved by directly applying an interactive procedure, such as the Newton-Raphson method, in which the load is a known quantity and displacement vector is only unknown. The modeling of progressive damage is generally characterized by anisotropy, softening and irreversibility. These features originate the main difficulties connected with a convergence in an implicit solution procedure. Moreover, non-uniqueness of solution and localization problems can completely falsify the results. Several methods are available in ABAQUSTM to help avoid these problems. Using viscous regularization allows improving the convergence for theses kinds of problems. A useful method to avoid divergence due to local instabilities is using automatic stabilization. Both the dissipation energy and damping factor magnitudes can be used. Finally, nondefault solution control parameters can be used to control non-linear equation solution accuracy and time increment adjustment a well as to activate the line search technique [3].

4. Numerical predictions

The numerical simulation of delamination processes assumes that the potential surface of separation corresponding to the interlaminar interface is a priori known. Hence, in the case of the VCCT approach, FE modeling is made based on the introduction of double nodes across the potential debonding surface. The modeling with cohesive elements assumes the discretization of the defined interface by compatible cohesive elements, the nodes of which coincide with nodes of solid elements or are tied to sides of solid elements of adjacent layers of bulk material.

4.1. Double Cantilever Beam specimen model

The DCB specimen has a span 2L of 228.6 mm and a rectangular cross-section with width *B* of 25.4 mm and height 2h of 10.15 mm (Fig. 2a). This specimen consists of two identical adherents (arms or legs), with the Young's modulus *E*=55.158 GPa and Poisson's ratio *v*=0.3 of isotropic bulk material. These adherents are joined by an adhesive layer with the thickness. One end of the beam is fixed, and the other end is loaded with an external force with the same magnitude but opposite direction as shown in Fig. 2a. This self-equilibrated pair of forces was modeled by prescribed displacements (*u*=4.064 mm) resulting in an opening (mode I) loading mode. The spatial discretization of the DCB specimen was done for both two dimensional (2D) and three dimensional (3D) models. The 2D model used a finite element mesh of 4-noded bilinear plane strain quadrilateral incompatible mode elements, CPE4I. The 3D model was discretized by 8-noded solid brick incompatible mode elements, C3D8I, or by 4-noded fully integrated first-order shell elements, S4.

The interface of the potential debonding (Fig. 2a) in VCCT approach was modeled by nodes having same coordinates but belonging to different elements (double nodes) on the upper and lower surfaces of the delaminated interface. Then, the crack propagation was simulated based on the Benzeggagh-Kenane mixed-mode failure criterion with power 1.75 at the given fracture toughness parameters of the interface (G_{IC} =1.2 N/mm, G_{IIC} = G_{IIIC}=6 N/mm). The cohesive zone approach was realized by embedded into the 2D mesh of 4-noded cohesive elements, COH2D4, and into the 3D mesh of 8-noded cohesive elements, COH3D8, which are available in ABAQUS[™]. The cohesive elements similar as for the VCCT model use to present the bonded part of the DCB while cracked portion (pre-existing crack) between two interfaces did not contain these elements. The cohesive elements had share nodes with adjacent solid elements, presenting the bulk isotropic material. Parameters of the damage initiation criterion and damage evolution law as well as elastic interface constants were specified for the cohesive element to correspond to the debonded features of the interface layer using for crack growth analysis with VCCT. The elastic properties of the cohesive material are specified in terms of the tractionseparation response with stiffness values E=80 MPa, $G_1=80$ MPa, and $G_2=80$ MPa. The maximum nominal strain failure criterion for the given peak values of the nominal strain $\varepsilon_n = \varepsilon_s = \varepsilon_t = 9 \times 10^{-7}$ is selected for damage initiation in the cohesive elements and a mixed-mode energy-based damage evolution law based on B-K law criterion is selected for damage propagation. The relevant material data are as follows: $N_0=0.8$ MPa, $T_0=0.8$ MPa, $S_0=0.8$ MPa and $\eta=1$ (the notations from [3]).





Fig. 6 shows a contour plot of Misses stress that illustrates the debonding growth in the 3D models of the DCB specimen at the end of the analysis. Load-displacement responses predicted by the different FE models are shown in Fig. 7. Here, the results from the 3D analyses are compared with the results from 2D analyses. These analyses are performed using both the VCCT and cohesive elements. From the calculated results the critical force corresponding to debond initiation in the DCB district from theoretical one obtained by Mabson [23] within of 3-7%.



Fig. 7. Load displacement curve.

4.2. Single Leg Bending specimen model

The next example illustrates the prediction of debond growth in a single leg bending specimen which usually uses for study of a mixture of opening and shearing loading modes. The calculations were done using VCCT for ABAQUS™. The geometry parameters of SLB specimen (Fig. 2c) were the following: 2L=152.4 mm, B=25.4 mm, q=30.48 mm, a=37.34 mm. The top part of the specimen was composite of 24 layers with lay-up $[45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}/0^{\circ}]_{s}$ of the total thickness h_1 =5.034 mm. The bottom part consisted of 8 layer with lay-up $[45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}/0^{\circ}]_{s}$ of the total thickness h_{2} =1.687 mm. The bulk material properties were adopted as the following: $E_1=9.1$ GPa, $E_2=1.49$ GPa, $E_3=9.1$ GPa, $v_{12}=0.51$, v_{13} =0.06, v_{23} =0.0835, G_{12} =0.4 GPa, G_{13} =0.7 GPa, and G_{23} =0.4 GPa for material reinforced in the direction of angle 45°, and E_1 =2.466 GPa, E_2 =1.49 GPa, E_3 =2.466 GPa, v_{12} =0.1371, v_{13} =0.7473, v_{23} =0.0835, G_{12} =0.4 GPa, G_{13} =0.429 GPa, and G_{23} =0.4 GPa for material reinforced in the direction of angle 0°. The 2D model uses a finite element meshes 24×200 and 8×160 of 4-noded plane strain quadrilateral, incompatible mode elements, CPE4I, for the top and bottom parts, respectively. The 3D models use fully integrated first-order shell elements, S4, and linear brick solid, incompatible mode elements, C3D8I with the composite option for the cross-section description. A displacement (u=8.128 mm) instead a load is applied on the top part of the specimen at the location shown in Fig. 2c.

Fig. 8a,b show the deformed shape of the 3D models at the end of the analyses. Fig. 9 compares the results of load displacement responses from the 2D and 3D analyses obtained with VCCT for ABAQUS[™] with the results of the analysis performed using interface elements discussed in Mabson [23]. The comparison indicates that the solutions are quite close.



Fig. 8. The deformed configuration: a) 3D model with shell elements, b) 3D model with solid elements.



Fig. 9. Load displacement response predictions.

4.3. Double cantilever problem II : Alfano-Crisfield problem

This example verifies and illustrates the use of ABAQUS to predict mixed-mode multi-delamination in a layered composite specimen. Cohesive elements or double nodes are used to represent the bonded interfaces. The problem studied is the one that appears in Alfano [20]. The results presented are compared against the experimental results included in that reference, taken from Robinson [24]. The problem geometry and loading are depicted in Fig. 10: a layered composite specimen, L=200 mm long, with a total thickness H=3.18 mm and a width B=20 mm, loaded by equal and opposite displacements in the thickness direction u=2 mm at one end. The thickness direction is composed of 24 layers. The model has two initial cracks: the first a_1 (of length 40 mm) is positioned at the midplane of the specimen at the left end, and the second a_3 (of length 20 mm) is located to the right of the first and two layers below. The distance between two initial cracks a_2 is equal 20 mm.



Fig. 10. Model geometry for the Alfano multi-delamination problem.

The Alfano-Crisfield problem is modeled in two dimensions with top part of the specimen consisting of 12 layers (of thickness h_{12} =1.59 mm), the middle section of 2 layers (of thickness h_2 =0.265 mm) and the bottom part of 10 layers (of thickness h_{10} =1.325 mm). Each part was separately meshed with a mesh of 1×200 for both the plain strain 2D CPE4I elements and the 3D C3D8I elements. Two debond interfaces are defined, one between the 10th and 11th layers and the other between 12th and 13th layers, counting from the bottom, to identify the potential delamination. For modeling delamination growth the layers of the cohesive elements COH2D4 for 2D discretization or COH3D8 for 3D one were embedded at these interfaces. The response of the cohesive elements in the model is specified through the cohesive section definition as a "traction-separation" response type. The elastic properties of the cohesive layer material are specified in terms of the traction-separation response with stiffness values E=850 MPa, $G_1=850$ MPa, and $G_2=850$ MPa. The quadratic traction-interaction failure criterion is selected for damage initiation in the cohesive elements; and a mixed-mode, energy-based damage evolution law based on a power law criterion is selected for damage propagation. The relevant material data are as follows: N_0 =3.3 MPa, T_0 =7.0 MPa, S_0 =7.0 MPa, G_{IC} =0.33×10³ N/m, $G_{IIC}=0.8 \times 10^3$ N/m, $G_{IIIC}=0.80 \times 10^3$ N/m, and $\eta=1$. For the VCCT approach, using double nodes for representation of debond interfaces, the Benzeggagh-Kenane mixed-mode failure criterion is used to determinate growth of delamination based on the critical fracture toughness of the delamination interfaces. The material data for the bulk material composite are adopted as in [20]: E_1 =115.0 GPa, E_2 =8.5 GPa, E_3 =8.5 GPa, v_{12} =0.29, v_{13} =0.29, v_{23} =0.3, G_{12} =4.5 GPa, G_{13} =3.3 GPa, and G₂₃=4.5 GPa.

Fig. 11a shows a contour plot of the Misses stress indicating the growth of delamination in both debond interfaces at the end of the analysis. The plot of the prescribed displacement versus the corresponding reaction force for the delamination problem is presented in Fig. 11b, where the results calculated on the basis of the different FE models are compared between themselves and with the experimental results obtained in [20]. Both the ABAQUS/Standard and VCCT for ABAQUS™ results display in the graph. Good agreement is observed between the numerical predictions and the experimental results up to an applied displacement of approximately 20 mm. As seen from Fig 11b, a sharp drop in the reaction force is predicted at the point approximately 10 mm by the ABAQUS analysis, after which the reaction force values appear to be underpredicted by approximately 30% when compared to the experimental data. The reason for this deviation, which appears to coincide with the simultaneous propagation of both the cracks, is related to the sudden failure of a relatively large number of cohesive elements in a very short period of time. While the VCCT approach does not has such feature. Because, the release of the critical pair nodes occurs sequentially one-by-one.



Fig. 11. Prediction results: a) contour plot of Misses stress for the deformed shape of the 3D model, b) load-displacement responses.

5. Conclusions

Finite element analysis was conducted for interlaminar fracture specimens. Those specimens were selected because of them debonding data during testing is available in the literature. Two dimensional and three dimensional models were constructed using commercial code ABAQUS[™]. The interlaminar debond was modeled using either cohesive elements that are available in ABAQUS[™] or the virtual crack closure technique that is implemented in ABAQUS[™] by add-on package VCCT for ABAQUS[™]. Several example problems were considered and of them results were briefly discussed.

Acknowledgements

The research is supported by Marie Curie Actions, ToK project - MTKD-CT-2004-014058 coordinated by Prof. Tomasz Sadowski at the Lublin University of Technology and funded by European Union within the Sixth Framework Programme. Additional support from Polish Ministry of Science and Higher Education – grant No.65/6.PR UE/2005-2008/7 is also acknowledged.

References

- [1] O'Brien T.K., *Characterization of delamination onset and growth in a composite laminate*, in: Reifsnider K.I. (Ed.), Damage in Composite Materials, ASTM STP 775. Am. Sot. Testing Mater. (1982): 140-167.
- [2] Grigolyuk E.I, Kogan A.A. and Mamay V.I., *Deformation problems of laminated structures with delaminations*, Izv. Ross. Akad. Nauk., MTT 1 (1994): 6-34.
- [3] ABAQUS User Manual. Version 6.6, ABAQUS Inc., Pawtucket, Rhode Island, USA, 2005.
- [4] Whitney J.M., *Experimental characterization of delamination fracture*, in: N.J. Pagano (Ed.), Interlaminar Response of Composite Materials, Composite Materials Series 5 (1989): 111-239.
- [5] Li J., Lee S.M., Lee E.W. and O'Brien T.K., Evaluation of the edge crack torsion ECT test for Mode III interlaminar fracture toughness of laminated composites, J. Compos. Technol. Res. 19 (1997): 174-183.
- [6] Irwin G.R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate*, J. Appl. Mech. 24 (1957): 361-366.
- [7] Rybicki E.F., Kanninen M.F., A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, Eng. Fracture Mech. 9 (1977): 931-938.
- [8] Raju, I.S., *Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements*, Eng. Fracture Mech. 38 (3) (1987): 251-274.
- [9] Zou Z., Reid S.R., Li S., Soden, P.D., *Mode separation of energy release rate for delamination in composite laminates using sublaminates*, Int. J. Solids Struct. 38 (2001): 2597-2613.
- [10] Krueger R., *The virtual crack closure technique: history, approach and applications*, Applied Mechanical Review ASME 57(2) (2004): 109-142.
- [11] Rice J.R., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, J. Appl. Mech. 35 (1968): 379-386.
- [12] Hellen T.K., On the method of the virtual crack extension, Int. J. Numer. Methods Eng. 9 (1975): 187-207.
- [13] Parks D.M., A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, Int. J. Fract. 10 (4) (1974): 487-502.

- [14] Allix O., Ladeveze P., Corigliano A., *Damage analysis of interlaminar fracture specimens*, Compos. Struct. 31 (1995): 66-74.
- [15] Allix O., Corigliano A., Modelling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens, Int. J. Fract. 77 (1996): 111-140.
- [16] Schellekens J.C.J., de Borst R., A nonlinear finite-element approach for the analysis of mode-I free edge delamination in composites, Int. J. Solids Struct. 30(9) (1993):1239-53.
- [17] Benzeggagh M.L., Kenane M., *Measurement of Mixed-Mode Delamination Fracture Toughness of Unidirectional Glass/Epoxy Composites with Mixed-Mode Bending Apparatus*, Compos. Science and Technol. 56 (1996): 439-449.
- [18] Mi U., Crisfield M.A., Davies G.A.O., Progressive delamination using interface elements, J. Compos. Mater. 32 (1998): 1246-1272.
- [19] Chen J., Crisfield M.A., Kinloch A.J., Busso E.P., Matthews F.L., Qiu Y., Predicting progressive delamination of composite material specimens via interface elements, Mech. Compos. Mater. Struct. 6 (1999): 301-317.
- [20] Alfano G., Crisfield M.A., *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues*, Int. J. Numer. Methods Engng. 77(2) (2001): 111-170.
- [21] Camanho P.P., Da´vila C.G., de Moura M.F., *Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials*, J. Compos. Mater. 37(16) (2003): 1415-1438.
- [22] Goyal-Singhal V., Johnson E.R., Da´vila C.G., Irreversible constitutive law for modeling the delamination process using interfacial surface discontinuities, Compos. Struct. 64 (2004): 91-105.
- [23] Mabson G, *Fracture Interface Elements*, 46th PMC General Session of Mil-17 (Composites Materials Handbook) Organization, Charleston, SC, 2003.
- [24] Robinson P., Besant T., Hitchings D., *Delamination Growth Prediction Using a Finite Element Approach*, 2nd ESIS TC4 Conference on Polymers and Composites, Les Diablerets, Switzerland, 1999.
Asymptotic stress field at the tip of an inclined crack terminating to an interface

Liviu Marsavina^{1, 2}, Tomasz Sadowski¹

 ¹ Lublin University of Technology, Faculty of Civil and Sanitary Engineering, 20-618 Lublin, Nadbystrzycka 40, Poland, e-mail: t.sadowski@pollub.pl
 ² Politehnica University of Timisoara, Department Strength of Materials, Blvd. M. Viteazu, Nr.1, Timisoara 300222, Romania, e-mail: msvina@mec.upt.ro

Abstract: This paper presents the numerical results for the asymptotic stress field and the fracture parameters at the tip of an inclined cracks terminating to a bi-material ceramic interface. The numerical analysis was carried out using FRANC2D/L fracture analysis code. A biaxial specimen was modeled for producing different mixed mode loads and two materials combinations of Al_2O_3 and ZrO_2 were considered. The influence of the material combination and applied mixed mode load on the singularity orders, stress distributions and stress intensity factors is highlighted.

Key words: crack; bi-material interface; asymptotic stress field; stress intensity factor.

1. Introduction

The presence of cracks has a major impact on the reliability of advanced materials, like fiber or particle reinforced ceramic composites, ceramic interfaces, laminated ceramics. In the fabrication process of ceramic composite materials or in service interface cracks could appear in one of the constituents. These cracks growth and reach the interface and then can be deflected by the interface or can penetrate in the other constituent. Many researchers reported the presence of inclined cracks to interface. For example Kaya et al. [1] observed the deflection of an indenter induced crack when reach a zirconia - alumina interface, Fig. 1a. Tilbrook et al. [2] investigating the crack propagation path in layered and graded composite shown the influence of the interface on the crack path, Fig. 1b. In both cases the crack reach the interface at a particular angle.

Different researchers have investigated the interaction between an interface and a perpendicular or inclined crack. Zak and Williams [3] showed that the stress field singularity at the tip of a crack perpendicular to an interface or terminating at the interface is of order $r^{-\lambda}$, where λ is the real part of the eigenvalue and depends on the elastic properties of the bi-material. Cook and Erdogan [4] used the Mellin transform method to derive the governing equation of a finite crack perpendicular to the interface and obtained the stress intensity factors. Erdogan and Biricikoglu [5] solved the problem of two bounded half planes with a crack going through the interface. Bogy [6] investigated the stress singularity of an infinite crack terminated at the interface

with an arbitrary angle. Wang and Chen [7] used photoelasticity to determine the stress distribution and the stress intensity factors of a crack perpendicular to the interface. Lin and Mar [8], Ahmad [9] and Tan et al. [10] used finite element to analyze cracks perpendicular to bi-material in finite elastic body. Chen [11] used the body force method to determine the stress intensity factors for a normal crack terminated at a bi-material interface. Chen et al. [12] used the dislocation simulation approach in order to investigate the crack tip parameters for a crack perpendicular to an interface of a finite solid. He and Hutchinson [13] also considered cracks approaching the interface at oblique angles. Chang and Xu [14] presented the singular stress field and the stress intensity factors solution for an inclined crack terminating at a bi-material interface. A theoretically description of the stress singularity of an inclined crack terminating at an anisotropic bi-material interface was proposed by Lin and Sung [15]. Wang and Stahle [16] using a dislocation approach presented the complete solution of the stress field ahead of a crack approaching a bimaterial interface. They also calculate the stress intensity factor solutions and the T-stress. Liu et al. [17] determined the mixed mode stress intensity factors for a bi-material interface crack in the infinite strip configuration and in the case where both phases are fully anisotropic. Kaddouri et al. [18] and Madani et al. [19] used the finite element analysis to investigate the interaction between a crack and an interface in a ceramic/metal bi-material. They investigated the effects of the elastic properties of the two bounded materials and the crack deflection at the interface using the energy release rate. Marsavina and Sadowski [20] highlighted the effect of shielding and anti-shielding at a tip of a crack approaching a bi-material interface. A biaxial specimen subjected to mixed mode load was studied using finite element analysis.

The possibility of crack deflection or penetration when meets a bi-material interface was investigated by He et al. [21] and Marsavina and Sadowski [22] among others.

This paper presents the asymptotic stress field and the fracture parameters at the tip of an inclined cracks ended to a bi-material ceramic interface. The numerical results were obtained by considering the two materials as combinations of Al_2O_3 and ZrO_3 , often used in ceramic composite materials.



a) indentation crack deflected by interface, [1].

Fig. 1. Typical cases of inclined cracks to interface.



b) crack propagation path near interface, [2].

2. Singular stress field for an inclined crack terminating at a bi-material interface

Considering the general case of an inclined crack terminating at the interface with angle θ_0 (Fig. 2) the stress and displacement fields could be described by, [14]:

$$\sigma_{\theta\theta,j} + i\tau_{r\theta,j} = r^{\lambda-1} \left[A_j \lambda^2 e^{i(\lambda-1)\theta} + \overline{B_j} \lambda e^{-i(\lambda-1)\theta} + C_j \lambda e^{i(\lambda+1)\theta} \right] + r^{\overline{\lambda}-1} \left[B_j \overline{\lambda}^2 e^{i(\overline{\lambda}-1)\theta} + \overline{A_j} \overline{\lambda} e^{-i(\overline{\lambda}-1)\theta} + D_j \overline{\lambda} e^{i(\overline{\lambda}+1)\theta} \right]$$
(1)

$$2\mu_{j}\left(u_{r,j}+i\,u_{\theta,j}\right) = r^{\lambda}\left[A_{j}\kappa_{j}e^{i(\lambda-1)\theta} + \overline{B_{j}}\lambda\,e^{-i(\lambda-1)\theta} - \overline{D_{j}}\,e^{-i(\lambda+1)\theta}\right] + r^{\overline{\lambda}}\left[B_{j}\kappa_{j}e^{i(\overline{\lambda}-1)\theta} - \overline{A_{j}}\,\overline{\lambda}\,e^{-i(\overline{\lambda}-1)\theta} - \overline{C_{j}}\,e^{-i(\overline{\lambda}+1)\theta}\right]$$
(2)

where (r, θ) represents the polar coordinates, λ is the stress singularity (the eigenvalue), $\overline{\lambda}$ the conjugate of λ , A_j , B_j , C_j and D_j are undetermined complex coefficients and their complex conjugates $\overline{A_j}, \overline{B_j}, \overline{C_j}, \overline{D_j}$, j = 1, 2, 3 corresponding with region "j", and $i = \sqrt{-1}$.

The boundary conditions near the crack tip are:

$$\begin{split} u_{r,1}(r,\theta_{0}) &= u_{r,2}(r,\theta_{0}) \\ u_{\theta,1}(r,\theta_{0}) &= u_{\theta,2}(r,\theta_{0}) \\ u_{r,1}(r,-\pi+\theta_{0}) &= u_{r,3}(r,-\pi+\theta_{0}) \\ u_{\theta,1}(r,-\pi+\theta_{0}) &= u_{\theta,3}(r,-\pi+\theta_{0}) \\ \sigma_{\theta\theta,1}(r,\theta_{0}) &= \sigma_{\theta\theta,2}(r,\theta_{0}) \\ \tau_{r\theta,1}(r,\theta_{0}) &= \tau_{r\theta,2}(r,\theta_{0}) \\ \sigma_{\theta\theta,1}(r,-\pi+\theta_{0}) &= \sigma_{\theta\theta,3}(r,-\pi+\theta_{0}) \\ \sigma_{\theta\theta,2}(r,\pi) &= 0 \\ \tau_{r\theta,2}(r,\pi) &= 0 \\ \tau_{r\theta,3}(r,-\pi) &= 0 \\ \tau_{r\theta,3}(r,-\pi) &= 0 \\ \end{split}$$

(3)



Fig. 2. Crack terminating at a bi-material interface.

Substituting eqs. (1) and (2) into eqs. (3) leads to a linear equation system with twelve undetermined coefficients: A_j , $\overline{B_j}$, C_j and $\overline{D_j}$. From its nontrivial condition it can be obtained the following eigenequation which allows the determination of the singularity order:

$$\left[\alpha + \beta^2 - (1 - \beta)(\alpha - \beta)\lambda^2 \left(1 - \cos 2\theta_0\right) + (1 - \beta^2)\cos \pi\lambda \cos \lambda(\pi - 2\theta_0)\right]^2 + (1 - \beta^2)\sin^2\lambda(\pi - 2\theta_0)\left[(1 - \beta^2)\cos^2 \pi\lambda + \beta^2 - \alpha^2\right] = 0$$

$$\tag{4}$$

with α and β the Dundur's bi-material parameters [23]:

$$\alpha = \frac{\mu_1 \left(\kappa_2 + 1\right) - \mu_2 \left(\kappa_1 + 1\right)}{\mu_1 \left(\kappa_2 + 1\right) + \mu_2 \left(\kappa_1 + 1\right)} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{\mu_1 \left(\kappa_2 - 1\right) - \mu_2 \left(\kappa_1 - 1\right)}{\mu_1 \left(\kappa_2 + 1\right) + \mu_2 \left(\kappa_1 + 1\right)} \quad (5)$$

where μ_i and ν_i are the shear modulus and Poisson's ratio of material m (m = 1, 2), $\kappa_m = 3 - 4\nu_m$ for plane strain and $\kappa_m = (3 - \nu_m)/(1 + \nu_m)$ for plane stress.

Eq. (4) has normally two solutions in the interval 0 to 1 named λ_1 and λ_2 , which is known as split singularities [24]. These two solutions could be complex or real numbers. It can be observed that the stress singularity depends on the material parameters and crack inclination angle.



a. Interface crack

b. Crack normal to interface

Fig. 3. Particular cases of interface crack.

For $\theta_0 = 0$ or $\pm \pi$ the considered model becomes an interface crack model (Fig. 3a) and eq. (4) become:

$$\beta^{2} \sin^{2} \pi \lambda + \cos^{2} \pi \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\varepsilon$$
(6)

known as the oscillatory singularity solution for the interface crack, with the oscillatory index ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{7}$$

For $\theta_0 = \pm \pi / 2$ the case of normal crack to interface (Fig. 3b) eq. (4) reduces to:

$$\alpha + \beta^2 - 2\lambda^2(\alpha - \beta)(1 - \beta) + (1 - \beta^2)\cos\pi\lambda = 0$$
(8)

according with [5] and shows that only real eigenvalues exists: $\lambda_1 = \lambda_2$.

An extrapolation method could be applied for the determination of the stress intensity factors. For example if the singularity orders $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ are real values the stress field could be expresses as:

$$\sigma_{\theta\theta1} + i\tau_{r\theta1} = K_1 r^{\lambda_1 - 1} + iK_2 r^{\lambda_2 - 1} \quad \text{for } \theta = 0,$$
(9)

and the stress intensity factors could be found:

$$K_{1} = \lim_{r \to 0} (r^{1-\lambda_{1}} \sigma_{\theta\theta1}\Big|_{\theta=0}), \quad K_{2} = \lim_{r \to 0} (r^{1-\lambda_{2}} \tau_{r\theta1}\Big|_{\theta=0})$$
(10)

In order to investigate the stress singularity, combinations between two ceramic materials were considered: Al_2O_3 and ZrO_2 (with the mechanical properties shown in Table 1) and angles between crack and interface from 0° to 90° with 5° increments. The results of eq. (4) are presented in Table 2 for plane strain. Only the stress singularities λ_1 and λ_2 values between 0 and 1 were considered.

Ta	ble	1.	Ma	iteria	l pro	operties	and	D	unc	lurs	param	ieters.
----	-----	----	----	--------	-------	----------	-----	---	-----	------	-------	---------

Properties/Material	Al_2O_3	ZrO ₂
Modulus of elasticity, [MPa] Poisson's ratio Fracture toughness, [MPa m ^{0.5}]	400000 0.22 4.5	200000 0.25 12
Combinations: Material 1/Material 2	ZrO ₂ / Al ₂ O ₃	Al ₂ O ₃ /ZrO ₂
Dundur's parameters E_1/E_2 , [-] α , [-] β , [-]	0.5 - 0.333 - 0.120	2.0 0.333 0.120

Fig. 4 shows the variation of eq. (4) versus λ for three particular cases of crack inclination angle θ_0 (0; $\pi/4$ and $\pi/2$). It can be observed that eq. (4) could have two complex solution ($\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\varepsilon$) for $\theta_0 = 0$, two different real solutions ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) for $\theta_0 = \pi/4$ or two equal real solutions ($\lambda_1 = \lambda_2$) for $\theta_0 = \pi/2$.



Fig. 4. Plot of $f(\lambda)$ given by eq. (4) versus λ .

Table	2.	Stress	singu	larity	λ	for	pl	ane	strain

Material combination		E ₁ /E ₂	= 0.5		$E_1/E_2 = 2.0$				
Singularities	2	L_1	2	L ₂	2	L ₁	2	2	
Angle θ_o [deg]	Re (λ_1)	Im (λ_1)	Re (λ_2)	Im (λ_2)	Re (λ_1)	Im (λ_1)	Re (λ_2)	Im (λ_2)	
0	0.5000	0.0320	0.5000	0.0320	0.5000	0.0320	0.5000	0.0320	
5	0.5070	0.0319	0.5070	0.0319	0.4873	0.0288	0.4873	0.0288	
10	0.5142	0.0307	0.5142	0.0307	0.4764	0.0213	0.4764	0.0213	
15	0.5217	0.0280	0.5217	0.0280	0.4672	0.0014	0.4672	0.0014	
20	0.5293	0.0235	0.5293	0.0235	0.4806		0.4387		
25	0.5367	0.0158	0.5367	0.0158	0.4820		0.4248		
30	0.5538		0.5340		0.4816		0.4150		
35	0.5720		0.5292		0.4801		0.4080		
40	0.5844		0.5285		0.4778		0.4032		
45	0.5933		0.5292		0.4749		0.4003		
50	0.5988		0.5309		0.4713		0.3989		
55	0.6011		0.5333		0.4671		0.3990		
60	0.6004		0.5363		0.4623		0.4004		
65	0.5973		0.5400		0.4571		0.4028		
70	0.5925		0.5442		0.4513		0.4062		
75	0.5866		0.5491		0.4453		0.4104		
80	0.5801		0.5544		0.4391		0.4153		
85	0.5733		0.5603		0.4329		0.4208		
90	0.5667		0.5667		0.4267		0.4267		

From Table 2 and Fig. 4 it can be observed that depending on angle θ_0 we can have a complex or oscillatory solution (for low angles $\theta_0 = 0^\circ$ representing an interface crack), multiple singularities and double root singularity (for $\theta_0 = 90^\circ$). It can be observed that higher singularities than 0.5 were obtained when the crack is in the ZrO₂ ($E_1/E_2 = 0.5$), and lower values for $E_1/E_2 = 2.0$ when the crack is in the stiffer material.

3. The asymptotic stress field for an inclined crack terminating to interface

3.1. Problem description

The biaxial specimen with an inclined crack at 45° has been successfully used to growth mixed mode cracks [25] and to investigate the singular stress field in mixed mode conditions. In contrast with the specimens containing inclined cracks in monoaxial tension, this type of specimen has the advantage of creating different type of mixed modes at the crack tip on the same geometry, only by changing the applied loads on the two axes, Fig. 5.



Fig. 5. Biaxial specimen.

In order to study the effect of the biaxial load on the asymptotic stress field a quarter of a biaxial specimen with an interface was numerically investigated with FRANC2DL code, [26]. Plane strain conditions were considered and the model dimensions were w = 50 mm and a = 70.71 mm. The materials considered for the analysis were combinations between Al₂O₃ and ZrO₂, Table 1. Quadratic isoparametric elements were used for the model with a refined mesh near to crack tip, Fig. 6. Eight singular elements were placed around the crack tip as a common technique to model the stress singularity. The mesh consists 11754 elements connected in 34353 nodes.





Fig. 6. Mesh, boundary conditions and crack detail for the FEM model.

The model was loaded with five different combinations of the applied stresses σ_x and σ_y ($k=\sigma_x/\sigma_y$) in order to produce mixed modes from pure Mode I (k=1) to pure Mode II (k=-1). The symmetric boundary conditions were imposed. The polar coordinate system (r, θ) was considered with the origin at the crack tip, Fig. 6b.

A convergence study for the asymptotic analysis and mesh density was prior carried on for a crack perpendicular to an interface in a sandwich plate [27]. The obtained numerical results agrees with the analytical solution of the asymptotic stress field, for example the singularity orders were between 0.8 % to the analytical solution. The same analysis parameters were considered like: mesh density at the crack tip (the smallest element size at the crack tip $10^{-4}a$) and intervals for asymptotic analysis.

3.2. Split singularities

The singularity orders λ_1 and λ_2 were determined numerically from the asymptotic stress field on a direction $\theta = -15^{\circ}$ as the slope $(1-\lambda_{1,2})$ of the log $(\sigma_{\theta\theta}/\sigma_y)$ versus log (r/a), respectively log $(\tau_{r\theta}/\sigma_y)$. The main steps of this asymptotic analysis are summarized below:

- the numerical results for $\sigma_{\theta\theta}$ (respectively for $\tau_{r\theta}$) were collected on a path with $\theta = -15^{\circ}$, Fig. 7a;
- the stresses were normalized to the applied load on *y* direction, and were plotted on logarithmic scale, fig. 7b;
- from a linear interpolation the quantity $1-\lambda_{1,2}$ was obtained as the slope of the trendline, and then singularity orders λ_1 and λ_2 were determined. It can be observed that the coefficient of determination for the regression analysis (R^2 value) approach 1 which indicates a good linear fit of numerical data.





b) Linear interpolation for logarithmic plot.

Fig. 7. The determination of the singularity orders, case of material combination $E_1/E_2=0.5$ and load combination k = 1.

The obtained results of singularity orders are presented in Table 3.

Material combination	k	1.0	0.50	0.0	-0.5	-1.0
	λ_1	0.5467	0.5566	0.5730	0.5995	0.6501
$E_1/E_2=0.5$	λ_2	0.8342	0.8321	0.6342	0.6457	0.5942
E /E 20	λ_1	0.4587	0.4475	0.4296	0.4086	0.3756
$E_1/E_2=2.0$	λ_2	0.1955	0.2250	0.3710	0.4039	0.4186

Table 3. Singularity orders for different combinations of mixed mode loading.

The results from Table 3 show that the singularity orders vary significantly with applied load combination and material properties. It can be observed that the singularity order λ_1 increase with the increasing of mode II load (decreasing k) for $E_1/E_2 = 0.5$. In contrary for the material combination with $E_1/E_2 = 2.0$ the singularity order decrease with decreasing k. The singularity order λ_2 decrease with decreasing k for material combination with $E_1/E_2 = 2.0$ the singularity order decrease with decreasing k. The singularity order λ_2 decrease with decreasing k for material combination with $E_1/E_2 = 0.5$ and increase with decreasing k for $E_1/E_2 = 2.0$.

3.3. Asymptotic stress field - radial variations

Fig. 8 presents the radial variation of the stresses $\sigma_{\theta\theta}$ (normalized to applied stress in *y* direction) in logarithmic coordinates for the two considered materials combinations on a radial path with $\theta = -15^{\circ}$ and for 0 < r/a < 0.028. For the same radial parameters (θ , *r*) Fig. 9 presents the distribution of tangential stress $\tau_{r\theta}$. For both materials combinations and applied load mixities *k* the radial variations are linear on the log-log plot. The slope of the lines in Fig. 8 are equal with $1-\lambda_1$, while in Fig. 9 the slopes are $1-\lambda_2$.



Fig. 8. Logarithmic distribution of $\sigma_{\theta\theta}$ stresses on a radial direction ($\theta = -15^{\circ}$), $\Box = k=1.0$, $\Delta k = 0.5$, $\circ k = 0.0$, $\blacktriangle k = -0.5$, * k = -1.0.



Fig. 9. Logarithmic distribution of $\tau_{r\theta}$ stresses on a radial direction ($\theta = -15^{\circ}$). $\Box k=1.0, \Delta k = 0.5, \circ k = 0.0, \blacktriangle k = -0.5, * k = -1.0.$

For both material combinations it can be observed that the singularity orders are sensitive with the material combination and load parameter k. As we expect maximum circumferential stresses $\sigma_{\theta\theta}$ were obtained for loads with k=1 (mode I) and minimum values for k=-1 (mode II), and vice versa for tangential stresses $\tau_{r\theta}$. Comparing the value of stresses between the two material combinations it can be observed that for the same loading case k higher values for the stresses $\sigma_{\theta\theta}$ and $\tau_{r\theta}$ were obtained when the crack was in the compliant material ($E_1/E_2 = 0.5$).

3.4. Asymptotic stress field – circumferential variations

The circumferential stress distributions are plotted at a distance r/a = 0.01 from the crack tip, in order to be in the singularity zone. The circumferential variation of $\sigma_{\theta\theta}$ normalized to the applied stress in y direction σ_y is plotted in Fig. 10, and for tangential stress $\tau_{r\theta}$ in Fig. 11 for both material combinations.



Fig. 10. Circumferential distribution of $\sigma_{\theta\theta}$ stresses at distance r/a = 0.01, $\Box k=1.0$, $\Delta k = 0.5$, $\circ k = 0.0$, $\blacktriangle k = -0.5$, * k = -1.0.



Fig.11 Circumferential distribution of $\tau_{r\theta}$ stresses at distance r/a = 0.01, \Box k=1.0, Δ k = 0.5, \circ k = 0.0, \blacktriangle k = -0.5, * k = -1.0.

It can be observed that the distribution of $\sigma_{\theta\theta}$ is changing from symmetric for k = 1 to anti-symmetric for k = -1, and vice versa for $\tau_{r\theta}$ distribution. The maximum values for the normal stress $\sigma_{\theta\theta}$ on the crack direction ($\theta = 0^{\circ}$) were obtained for k=1 (mode I) and the minimum for k=-1 (mode II) Fig. 10, as we expect. Fig. 11 shows that the maximum circumferential stress $\tau_{r\theta}$ on the crack line ($\theta = 0^{\circ}$) was obtained for k=-1 (load in pure mode II) and is 0 for k=1 (load in pure Mode I). The maximum values of the tangential stress $\tau_{r\theta}$ moves from $\theta = 0^{\circ}$ for k=-1 to $\theta = 74.5^{\circ}$ for k=1. The stress results from Figs. 10 and 11 confirm the stress free boundary conditions on the crack faces ($\theta = \pm 180^{\circ}$).

3.5. Stress intensity factors

The determination of the Stress Intensity Factors (SIF) was performed using eq. (10), by extrapolating at the crack tip the asymptotic results of $\sigma_{\theta\theta}$ and $\tau_{r\theta}$ for a path with $\theta = 0^{\circ}$. Fig. 12 shows the determination of the stress intensity factors from numerical results for material combination with $E_1/E_2 = 0.5$ and mixed mode case with k = 0.0. The obtained values of SIF's are $K_1 = 4.273$ MPa m^{1- λ 1} and $K_2 = 4.0$ MPa m^{1- λ 2}.

Taking into account the dimensions for the SIF's [MPa $m^{1-\lambda}$] it is hard to make comparisons between obtained results. Usually, normalized stress intensity factors are used for example in [11], [28]:

$$f_1 = \frac{K_1}{\sigma_i a^{1-\lambda_1}}, \qquad f_2 = \frac{K_2}{\sigma_i a^{1-\lambda_2}}$$
 (11)

The normalized stress intensity factor results are shown in Fig. 13. The computed values of the normalised SIF's cover entire domain from pure mode I (k = 1) to pure mode II (k=-1). Higher values for normalised SIF's were obtained for the case when the crack is in the compliant material for the same load combination.



Fig. 12. SIF determination by extrapolation, $\circ \sigma_{\theta\theta}$, + $\tau_{r\theta}$.

Fig. 13. Non-dimensional stress intensity factors.

4. Conclusions

For an inclined crack to a bi-material interface it was shown that the singular stress field could be expressed as a linear superposition of the modes, usually of unequal exponents.

For two material combinations by solving the eigenequation different types of singularities were obtained: complex, multiple or single depending on crack angle θ_0 and on material combinations. The singularity order $0 < \lambda < 0.5$ when the crack is in the stiffer material and meets the compliant ones, and $0.5 < \lambda < 1$ when vice versa.

For an 45^o inclined crack terminating on a bi-material interface the asymptotic stress field was numerically investigated. Five loading combinations were considered from pure Mode I to pure Mode II. The split singularities of the asymptotic stress field were numerically determined.

The stress intensity factors were estimated by extrapolation technique, based on the numerical results for the asymptotic stress field.

The effect of the bi-axial load on the asymptotic stress field and on the stress intensity factors for an inclined crack terminated on the interface was highlighted.

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the support of Marie Curie Transfer of Knowledge project MTKD-CT-2004-014058.

References

- [1] Kaya C, Butler E.G., Lewis M.H., *Co-extrusion of Al2O3/ZrO2 bi-phase high temperature ceramics with fine scale aligned microstructures*, Journal of the European Ceramic Society 23, (2003), pp. 935-942.
- [2] Tilbrook M. T., Rozenburg K., Steffler E. D., Rutgers L, Hoffman M., *Crack propagation paths in layered, graded composites*, Composites: Part B 37, (2006), pp. 490-498.
- [3] Zak A.R., Williams M.L., *Crack point stress singularities at a bi-material interface*, J. Appl. *Mech*, Volume: 30, (1963), pp. 142-143.
- [4] Cook T.S., Erdogan F., *Stress in bonded materials with a crack perpendicular to the interface*, Int. J. Eng. Sci., Volume: 10, (1972), pp. 677-697.
- [5] Erdogan F., Biricikoglu V., *Two bonded half planes with a crack going through the interface*, Int. J. Engng. Sci., Volume: 11, (1973), pp. 745-766.
- [6] Bogy D.B., *On the plane elastic problem of a loaded crack terminating a material interface*, J. Int. Fract., Volume: 38, (1971), pp. 911-918.
- [7] Wang W.C., Chen J.T., *Theoretical and experimental re-examination of a crack at a bimaterial interface*, J. Strain Anal., Volume: 28, (1993), pp. 53-61.
- [8] Lin K.Y., Mar J.W., *Finite element analysis of stress intensity factors for crack at a bimaterial interface*, Int. J. Fract., Volume: 12, (1976), pp. 451-531.
- [9] Ahmad J., *A micromechanics analysis of cracks in unidirectional fibre composite*, J. Appl. Mech., Volume: 58, (1991), pp. 964-972.
- [10] Tan M., Meguid S.A., Dynamic analysis of cracks perpendicular to bimaterial interfaces using new singular finite element, Finite Elements in Analysis and Design, 22, (1996), pp. 69-83.
- [11] Chen D.H., *A crack normal to and terminating at a bimaterial interface*, Engng. Fract. Mech., Volume: 19, (1994), pp. 517-532.

- [12] Chen S.H., Wang T.C., Kao Walter S., *A crack perpendicular to the bi-material interface in finite solid*, Int. J. Solids Struct, 40, (2003), pp. 2731-2755.
- [13] He M.Y., Hutchinson J.W., Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, Int. J. Solids Struct., Volume: 25, (1993), pp. 1053-1067.
- [14] Chang J., Xu J.-Q., The singular stress field and stress intensity factors of a crack terminating at a bimaterial interface, Int. J. Mechanical Sciences, 49, (2007), pp. 888-897.
- [15] Lin Y.Y., Sung J.C., *Singularities of an inclined crack terminating at an anisotropic biomaterial interface*, Int. J. Solids Struct, 38, (1997), pp. 3727-3754.
- [16] Wang T.C., Stahle P., *Stress state in front of a crack perpendicular to bi-material interface*, Engng. Fract. Mech., Volume: 4, (1998), pp. 471-485.
- [17] Liu L., Kardomateas G. A., Holmes J. W., *Mixed mode stress intensity factors for a crack in an anisotropic bi-material strip*, Int. J. Solids Struct., 41, (2004), pp. 3095-3017.
- [18] Kaddouri K., Belhouari M., Bachir Bouiadjra B., Serier B., *Finite element analysis of crack perpendicular to bi-material interface: Case of couple ceramic-metal*, Comput. Mater. Sci., 35, (2006), pp. 53-60.
- [19] Madani K., Belhouari M., Bachir Bouiadjra B., Serier B., Benguediab M., Crack deflection at an interface of alumina/metal joint: A numerical analysis, Comput. Mater. Sci., 35, (2007), pp. 625-630.
- [20] Marsavina L., Sadowski T., *Fracture parameters at bi-material ceramic interfaces under bi-axial state of stress*, Proceedings of IWCMM 17, Paris, 2007, p. 45-46.
- [21] He M.Y., Hsueh C.H., Becher P.F., *Deflection versus penetration of a wedge-load crack: effects of branch-crack length and penetrated-layer width*, Composites: Part B, 31, (2000), pp.299-308.
- [22] Marsavina L, Sadowski T, Effect of biaxial load on crack deflection/penetration at bi-material ceramic interface, Int. J. Fracture (2008), OnLine First, DOI: 10.1007/s10704-008-9181-y.
- [23] Dundurs J., Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformation, J. Compos. Mater., Volume: 1, (1969), pp. 310-322.
- [24] Zang Z., Suo Z., Split singularities and the competition between crack penetration and debond at a bimaterial interface, Int. J. Solids Struct., 44, (2007), p. 4559-4573.
- [25] Bold P. E, Brown M. W., Allen R.J., Shear Mode crack growth and rolling contact fatigue, Wear, 144, (1991), pp. 307-317.
- [26] Iesulauro, E., FRANC2D/L a Crack Propagation simulator for plane layered materials, Cornell University, Ithaca, 2002.
- [27] Marsavina L., Sadowski T., *The influence of the interface on fracture parameters*, Proceedings of the AIQ ICF Conference, Alger 2008 (in press).
- [28] Murakami Y., Stress intensity factors handbook, Vol. I, Pergamon Press, Oxford, 1987.

124

Pomiary wilgotności murów z kazimierskiej opoki wapnistej przy zastosowaniu metody TDR

Zbigniew Suchorab¹, Danuta Barnat-Hunek², Henryk Sobczuk³

 ¹ Wydział Inżynierii Środowiska, Instytut Inżynierii Ochrony Środowiska, e-mail: Z.Suchorab@fenix.pol.lublin.pl
 ² Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej,Instytut Budownictwa, e-mail: d.barnathunek@op.pl
 ³ Wydział Inżynierii Środowiska, Instytut Inżynierii Ochrony Środowiska, e-mail: H.Sobczuk@fenix.pol.lublin.pl

Streszczenie: W referacie przedstawiono badania obejmujące monitoring parametrów fizycznych i analize składu mineralogiczno – petrograficznego opoki wapnistej z regionu Kazimierza Dolnego. Wykorzystano między innymi techniki reflektometryczne TDR (Time Domain Reflectometry) jako jedno z badań wilgotnościowych. Badaniom poddano kamień z Zamku w Janowcu nad Wisłą, którego mury najlepiej odzwierciedlają postępującą korozję zależną od ekspozycji zewnętrznej i wieku murów oraz kamień z kamieniołomu w Kazimierzu Dolnym. Badania porozymetryczne opoki wapnistej z elewacji południowej i północnej Zamku w Janowcu oraz kamienia z kamieniołomu wykazały różnice w zakresie zmian struktury kamieni. Różnice te przyczyniają się do odmiennego zachowania opoki w procesach podciagania kapilarnego wody i roztworów soli. Zwiazane jest to z odpowiednim doborem ochrony konserwatorskiej, preparatów zabezpieczających mur, których rodzaj i aplikacja zależa m. in. od cech porozymetrycznych podłoża. W referacie przedstawiono technike pomiarowa TDR jako dobra alternatywe do pomiarów transportu wody w porowatych materiałach budowlanych oraz innych parametrów wodnych charakteryzujących dany materiał.

Słowa kluczowe: opoka wapnista, destrukcja murów, wilgotność, techniki reflektometryczne

1. Wstęp

Istotnym problemem konserwatorskim i technologicznym jest ochrona obiektów wystawionych na działanie czynników atmosferycznych, zwłaszcza wody W wyniku oddziaływań środowisk korozyjnych na kamienne mury następują zmiany własności fizycznych i mechanicznych kamienia i zapraw. Bardzo niekorzystną cechą opoki wapnistej z regionu Kazimierza Dolnego i Nasiłowa jest porowata struktura, która przekłada się na jej niską odporność na działanie wody. W praktyce wyrażone jest to przede wszystkim niską mrozoodpornością oraz dużą nasiąkliwością. Tak nieodporny na wodę i mróz kamień ulega przyspieszonej destrukcji zwłaszcza, gdy znajdują się w nim sole rozpuszczalne w wodzie, które dodatkowo potęgują procesy jego niszczenia. W znacznym stopniu cechy te obecnie eliminują wykorzystanie opoki jako materiału konstrukcyjnego i wykończeniowego o ekspozycji zewnętrzZbigniew Suchorab, Danuta Barnat-Hunek, Henryk Sobczuk

nej, choć w praktyce była ona od wieków szeroko stosowana w budownictwie i architekturze Lubelszczyzny. Opoka wapnista jest kamieniem o niejednorodnej, porowatej strukturze w związku z tym źródło pochodzenia kamienia, jego ekspozycja w budynku, wiek wbudowania mogą mieć istotny wpływ na skuteczność przeprowadzanych zabiegów konserwatorskich tj. odsalanie, wzmacnianie, hydrofobizację kamienia.

Przed przystąpieniem do prac remontowych należałoby wykonać gruntowną ocenę stanu technicznego obiektu oraz poznać charakterystykę materiału, z jakiego został wzniesiony.

W artykule przedstawiono badania obejmujące monitoring parametrów fizycznych i analizę składu mineralogiczno – petrograficznego kamienia.

W artykule zaproponowano między innymi technikę reflektometryczną TDR (Time Domain Reflectometry) jako perspektywiczną alternatywę w badaniach wilgotnościowych.

Do tego celu zakwalifikowano Zamek w Janowcu, którego mury najlepiej odzwierciedlają postępującą korozję zależną od ekspozycji zewnętrznej i wieku murów poza tym istnieje możliwość pobrania odpowiedniej ilości próbek z charakterystycznych miejsc, co nie zawsze jest możliwe na innych obiektach zabytkowych.

2. Wpływ warunków zewnętrznych na stan murów

Woda

W literaturze polskiej i zagranicznej bardzo często sygnalizowany jest problem zawilgocenia i zasolenia obiektów zabytkowych i coraz częściej współczesnych.

Murowane obiekty zabytkowe i współczesne narażone są na oddziaływanie wilgoci, a w wyniku braku odpowiedniej izolacji przeciwwilgociowej charakteryzują się nadmiernym zawilgoceniem. Skutki występowania podwyższonej wilgotności są widoczne szczególnie na obiektach zabytkowych, starych, w których brak zabezpieczeń przeciwwodnych. Niemniej jednak współcześnie spotykamy obiekty, przy wznoszeniu, których nie zachowano zasad sztuki budowlanej, czy też eksploatowano niezgodnie z przeznaczeniem. Następstwem tego jest obniżenie trwałości murów spowodowane między innymi dużym zawilgoceniem i zasoleniem. W Niemczech oraz Austrii przyjmuje się, że około 80% [1] uszkodzeń zabytkowych obiektów powstało w wyniku stałego lub okresowego zawilgocenia ścian.

Woda jest bezpośrednią przyczyną postępującej dezintegracji kamiennych murów. Zwłaszcza wapienie są bardzo nieodporne na działanie wody. Wskutek rozpuszczającego działania wody zwłaszcza kwaśny węglanu wapnia $Ca(HCO_3)_2$ wytrącany jest z materiału, następuje przemieszczanie lepiszcza kamienia z partii wewnętrznych i jego akumulacja w warstwie powierzchniowej, wskutek czego powierzchnia staje się nierówna, chropowata z licznymi zagłębieniami [3].

Niezależnie od źródła pochodzenia wilgoci w budynku, skutki nadmiernego zawilgocenia są następujące:

 obniżenie właściwości fizyko – mechanicznych materiałów budowlanych, co powoduje zmniejszenie trwałości murów, spadek wytrzymałości na ściskanie nawet o 50% (w przypadku opoki wapnistej), pogorszenie parametrów termoizolacyjnych przegród, co powoduje wzrost zapotrzebowania na energię do ogrzania budynku, - degradacja strukturalna przegród wywołana korozją mechaniczną, biologiczną, chemiczną. Podwyższona wilgotność materiałów budowlanych powoduje erozję, czyli wymywanie składników mineralnych, z których składa się materiał, a także przyczynia się do rozwoju grzybów domowych i pleśniowych oraz do porażenia elementów drewnianych przez mikroorganizmy i owady. Korozja mechaniczna przyspieszana jest głównie przez mróz i nadmierną insolację. Przyczyną postępujących procesów korozji chemicznej są sole rozpuszczalne w wodzie, które powodują powolną destrukcję murów, a zwłaszcza tynków,

 pogorszenie warunków higieniczno – sanitarnych poprzez nadmierną wilgotność powietrza w pomieszczeniach mieszkalnych oraz wadliwą wentylację, co stwarza niekorzystny mikroklimat w pomieszczeniach. Powstające grzyby i pleśnie uniemożliwiają dalszą eksploatację pomieszczeń ze względu na szkodliwy wpływ na zdrowie użytkowników.

Za transport wody przez mur kamienny odpowiadają m. in.:

- podciąganie kapilarne wody, które jest tym większe, im większy stopień zwilżania materiału i mniejsze napięcie powierzchniowe cieczy. Jeśli napięcie powierzchniowe materiału stykającego się z wodą jest zbliżone do wartości napięcia powierzchniowego wody, wówczas materiał ten jest dobrze zwilżalny. Tak jest w przypadku materiałów krzemianowych, gdyż ich napięcie powierzchniowe wynosi około 73 – 74 mN/m, a wody około 72 mN/m.

- infiltracja wód gruntowych do muru spowodowana przez brak lub nieszczelności izolacji przeciwwilgociowej pionowej. Infiltracja wód gruntowych jest proporcjonalna do naporu wody, który zwiększa się ze wzrostem poziomu wód gruntowych lub ze wzrostem ilości opadów atmosferycznych.

- kondensacja pary wodnej na powierzchni muru w porach i kapilarach otwartych jest związana ze strukturą materiału tj. porowatością, wielkością i kształtem porów. Materiały drobnoporowate tj. opoka wapnista charakteryzują się tym, iż para wodna i woda długo utrzymują się w ich porach i odparowują powoli. Im kapilary mają większe średnice, tym woda szybciej odparowuje.

Intensyfikacja oddziaływania wody na kamień uzależniona jest od wielu czynników. Przede wszystkim związana jest ze składem mineralnym kamienia, jego teksturą, strukturą.

Domasłowski podaje, że kalcyt i krzemionka obecne w opoce wapnistej jako ciała polarne o właściwościach hydrofilnych łatwo otaczają się błonkami solwatacyjnymi wody i roztworów soli. Błonki te zmniejszają siły przyciągania między cząstkami skałotwórczymi. Jeżeli siły adhezji między wodą, a składnikami kamienia są większe niż adhezja między samymi składnikami kamienia, to kamień ulega dezintegracji [3].

Podsumowując, niszczące działanie wody zależy od: stopnia wypełnienia przez nią porów, wielkości porów, kształtu porów, składu mineralnego i nasiąkliwości kamienia.

Zmiany temperatury

Wody opadowe mogą niszczyć mury w sposób mechaniczny, czego dowodem są szkody mrozowe, szczególnie widoczne na elewacjach południowych, gdyż tam częstotliwość cykli zamarzania i odmarzania jest największa. Wraz z obniżeniem temperatury, wzrasta ciśnienie rozsadzające lodu, które wynosi 21,15 kN/cm² w temperaturze -22°C. Mechanicznej korozji ulegają też kamienie zawierające minerały ilaste, które pęcznieją pod wpływem wody i stają się plastyczne. Powoduje to duży spadek wytrzymałości. Najmniej odporne na działanie mrozu są kamienie drobnoporowate wykazujące dużą nasiąkliwość, ponieważ kapilary o małych średnicach wypełniają się całkowicie wodą. Ciśnienie lodu wzrasta wraz z obniżeniem temperatury np. przy temperaturze 0°C wynosi 60 N/cm², a przy –20°C wynosi 19700 N/cm².

Temperatura dodatnia również może powodować uszkodzenia powierzchni kamienia. Prężność pary wodnej wzrasta w kapilarach nasyconych wodą w wyniku ogrzania wody. Wywołuje ona ciśnienie na ścianki kapilar, wskutek czego niszczy materiał. Jednak do takich uszkodzeń dochodzi rzadko. Gwałtowne zmiany temperatury, w których woda nie uczestniczy, mogą wywoływać intensywne zniszczenia. Główną przyczyną jest duża rozszerzalność termiczna minerałów, niejednorodność ich budowy, niska przewodność cieplna. Skutki szczególnie widoczne są na południowych elewacjach budynków. Ulegają one szybszemu zniszczeniu. Pod wpływem naprężeń termicznych następuje dezintegracja strukturalna, powstają naprężenia ścinające miedzy warstwami o różnej temperaturze np. między tynkiem a podłożem. Od intensywności insolacji, a więc i wahań temperatury zależą mechanizmy zniszczeń.

Przykładem zniszczeń spowodowanych przez wahania temperatury, naprężenia termiczne, wielokrotne cykle zamarzania i odmarzania są chociażby przypory zabytkowego XVI – wiecznego Spichlerza Ulanowskich w Kazimierzu Dolnym nad Wisłą [4], czy mury omawianego w artykule Zamku w Janowcu (Rys. 1, 2). Wieloletni efekt procesów korozyjnych porowatej opoki wapnistej jest odmienny w zależności od ekspozycji w stosunku do stron świata, co przedstawiają Rys. 1 i 2. XVI-wieczny mur od strony południowej wykazuje liczne zniszczenia kamienia i zaprawy, ubytki kamienia, brak zespolenia zaprawy z kamieniem. Natomiast mur od strony północnej jest jednolity, stabilny, z licznymi szarymi nawarstwieniami.



- Rys. 1 Skorodowany mur na elewacji południowej. Zamku w Janowcu. Miejsce pobrania kamienia K2.
- Fig. 1. Corroded wall on the southern elevation of the Janowiec Castle. Place of K2 stone sampling.



Rys. 2. Elewacja północna Zamku w Janowcu. Miejsce pobrania kamienia K3 Fig. 2. Northern elevation of the Janowiec Castle. Place of K3 stone sampling.

Sole rozpuszczalne w wodzie

Niszczący wpływ wilgoci w murze jest tym większy, im transportowana woda zawiera więcej szkodliwych związków chemicznych, soli rozpuszczalnych w wodzie. W warunkach zmiennego zawilgocenia, gdy dochodzi do przemiennego wysychania i zawilgocenia obiektu, mogą powodować duże uszkodzenia elementów budowli. Procesy korozyjne objawiają się wykwitami, nalotami, zmianą zabarwienia materiału, krystalizacją soli na powierzchni murów.

Destrukcyjne działanie rozpuszczonych soli polega na tym, iż podczas zawilgocenia i wysychania murów tworzą się hydraty i substancje wtórne, których objętość przewyższa pierwotną objętość rozpuszczonych produktów [8]. Substancje te powstają w wyniku rozkładu minerałów, korozji chemicznej i biologicznej kamienia, w których główną rolę odgrywa woda. W wyniku odparowania wody z powierzchni kamienia następuje stężenie roztworu soli, przesycenie i w fazie końcowej krystalizacja soli w strefie parowania. Ponieważ w porach drobnoporowatej opoki wapnistej woda utrzymuje się długo i odparowuje zbyt wolno, sole krystalizują w ich wnętrzu. Podczas krystalizacji sole zwiększają swoja objętość, co związane jest z ciśnieniem krystalizacyjnym, które rośnie wraz ze wzrostem temperatury [9].

Podobne zniszczenia, a nawet większe jak cykle zamarzanie – odmarzanie powodują procesy krystalizacja – rozpuszczanie. W związku z tym zjawisko to zauważalne jest przede wszystkim na południowych elewacjach, na których często-tliwość wysychania i zawilgocenia jest duża. Tam też występują duże amplitudy temperatur, podczas których sole krystalizują w formie bezwodnej, a następnie w niższej temperaturze uwadniają się i zwiększają swoją objętość. Jedną z najgroźniejszych soli w budynku jest siarczan sodu Na_2SO_4 , którego objętość wzrasta około 5 –cio krotnie podczas przejścia z postaci bezwodnej do dziesięciowodnej.

Analizując agresywność czynników środowiskowych, dochodzi się do wniosku, iż ekspozycja kamienia w murze ma istotny wpływ na jego trwałość. Od intensywności i częstotliwości procesów nawilżania - wysychania, zamarzania - odmarzania, hydratacji – dehydratacji soli, czy innych mechanizmów zniszczeń zależą zmiany struktury kamienia tj, porowatości otwartej, rozmiarów, kształtu i powierzchni wewnętrznych porów.

Badania parametrów wilgotnościowych kamieni przy wykorzystaniu technik reflektometrycznych TDR pozwalają na głębszą analizę wpływu powyższych czynników na stan zawilgocenia i transport wody w murach z opoki wapnistej.

3. Charakterystyka opoki wapnistej

W celu poznania charakterystyki kamienia oraz wpływu powyższych czynników wykonano badania, które objęły:

- kamień z kamieniołomu w Kazimierzu Dolnym – zwany dalej K1,

- kamień z XVI-wiecznego muru Zamku w Janowcu z elewacji południowej K2,
- kamień z XVI-wiecznego muru Zamku w Janowcu z elewacji północnej K3.

Należy zaznaczyć, iż kamienie z murów charakteryzowały się niskim stopniem zasolenia, który oznaczono przy użyciu zestawu firmy Merck.

3.1. Analiza mineralogiczno – petrograficzna

Analizy mineralogiczne pobranych materiałów pozwoliły na porównanie składu i wykazanie ewentualnych różnic pomiędzy kamieniami. Oznaczenie składu mineralnego wykonano wykorzystując mikroskopię optyczną w świetle spolaryzowanym, skaningową mikroskopię elektronową (SEM) oraz dyfraktometrię rentgenowską (XRD). Badania mineralogiczne kamienia uzupełniono oznaczeniami teksturalnymi, wykorzystując porozymetrię rtęciową.

Kamieniem użytym do budowy Zamku w Janowcu była opoka wapnista potocznie zwana wapieniem kazimierskim. Niejednorodny wapień kazimierski reprezentuje skałę o strukturze bioorganicznej, w której mocno pokruszone fragmenty igieł gąbek i znacznie rzadziej otwornic są scementowane mikrytowo – krzemionkowym spoiwem o charakterze masy wypełniającej. Tekstura badanego wapienia jest bezładna, a obserwacje w mikroskopie skaningowym potwierdzają jej porowaty charakter (Rys. 3).

Ziarniste składniki mineralne to kwarc, glaukonit, wodorotlenki żelaza i minerały nieprzezroczyste [2] reprezentowane między innymi przez piryt (Rys. 4).



Rys. 3. Tekstura opoki wapnistej (*K2*) w obrazie mikroskopii elektronowej (SEM). Fig. 3. Chalk rock texture (K2) in the SEM (Scanning Electron Microscopy).



Rys. 4. Skład mineralny kamienia (*K2*) – mikroskopia optyczna. Fig. 4. Mineral content of the K2 stone – optic microscopy.

Na dyfraktogramach składu mineralnego badanych kamieni stwierdzono obecność kalcytu (związanego ze spoiwem mikrytowym), kwarcu, glaukonitu i opalu, z którego zbudowane są igły gąbek i pancerzyki okrzemek (Rys. 3).

3.2. Badania porozymetryczne

Na wysokość podciągania kapilarnego w murze ma wpływ struktura materiału, czyli promień porów, kapilar oraz gęstość transportowanej cieczy. Im kapilary mają większą średnicę, a ciecz posiada mniejszą gęstość, tym podciąg jest większy. Należy podkreślić fakt, iż ruch kapilarny zachodzi tylko w kapilarach o określonej średnicy.

Według Klemma [6] transport wody następuje jedynie w porach w zakresie 0,1 mm - 10⁴mm. Poniżej tej średnicy zachodzi wyłącznie dyfuzja par i gazów. Powyżej 1mm następuje swobodny przepływ cieczy, nie występują już zjawiska kapilarne.

Badania porozymetrii rtęciowej wykonano na 3 próbkach dla każdego rodzaju kamienia. Badania wykazały zbliżoną porowatość kamieni, której średnia wartość wynosi odpowiednio: K1 - 36,87%; K2 - 39,26%; K3 - 37,27% (Tab. 1). Gęstość właściwa wynosi od 2,36 do 2,72 g/cm³, zaś gęstość pozorna od 1,52 do 1,63 g/cm³. W kamieniu *K2* dominująca średnica porów to 1,961·10⁻³mm, która uczestniczy w intensywnym ruchu kapilarnym. Zgodnie z klasyfikacją IUPAC są to wielkości charakterystyczne dla makroporów. W kamieniach *K1* i *K3* nie można jednoznacznie określić dominującej średnicy porów, gdyż waha się ona od 6·10⁻⁶mm do 1,26·10⁻³mm. W porach o średnicach do 10⁻⁴mm, zwanych mikro i mezoporami, następuje tylko [9] dyfuzja par i gazów oraz kondensacja kapilarna pary wodnej.

Rodzaj kamienia	Porowatość [%]	Całkowita obję- tość porów [cm³/g]	Gęstość pozorna [g/cm³]	Gęstość właściwa [g/cm³]	Dominująca średnica po- rów [nm]
K1	36,87	0,2319	1,594	2,533	3,8; 28
K2	39,26	0,2477	1,591	2,626	1961
К3	37,27	0,2340	1,592	2,540	6; 28; 805

Tabela 1.Wyniki badań porozymetrycznych opoki wapnistej.Table 1.Results of the porosimetric measurement on chalk rock.

Zbigniew Suchorab, Danuta Barnat-Hunek, Henryk Sobczuk

Na podstawie wyników badań porozymetrii rtęciowej można wnioskować, że kamień *K2* będzie wykazywać większą tendencję do podciągania kapilarnego wody niż kamień z kamieniołomu i elewacji północnej. Potwierdziły to wyniki badań zaprezentowane w punktach 4.2.1 i 4.2.2 artykułu. Kamień ten charakteryzuje się największą porowatością, w jego strukturze dominują makropory właściwe (39,26%, 0,2477cm³/g, 1,961·10⁻³mm), które biorą udział w procesach nasączania i wysychania kamienia.

Nasuwa się przypuszczenie, że struktura kamienia uległa zmianie pod wpływem długotrwałego działania czynników korozyjnych, tj. wielokrotne zamarzania i odmarzania, naprężenia termiczne w wyniku intensywnego nasłonecznienia. Właściwości fizyczne kamienia z elewacji północnej (K3) nie różnią się istotnie od parametrów kamienia K1, pomimo iż od XVI wieku stanowił on element muru Zamku w Janowcu.

4. Badania wilgotnościowe opoki wapnistej przy wykorzystaniu technik reflektometrycznych i tradycyjnych

4.1. Opis metody stosowanej w badaniach

Opoka wapnista poddana analizie laboratoryjnej jest materiałem charakteryzującym się dużą porowatością, która z kolei ma znaczny wpływ na właściwości wodne tego ośrodka. Tak jak każdy ośrodek porowaty opoka zbudowana jest z trzech faz – stałej, gazowej oraz ciekłej. Traktując ją jako dielektryk należy zauważyć, iż największy wpływ na zewnętrzne pole elektryczne wykazuje woda, co wynika z jej niesymetrycznego rozkładu ładunków (Rys. 5).

Taka cząsteczka ma charakter dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego 6,216 \cdot 10⁻³⁰ C·m.



Rys. 5. Niesymetryczna budowa cząsteczki wody. Fig. 5. Asimetric character of water molecule.

Parametrem mierzonym techniką TDR jest przenikalność dielektryczna ε , będąca miarą zachowania cząstek materii po przyłożeniu zewnętrznego, zmiennego pola elektrycznego [10]. Na skutek przyłożenia zmiennego pola elektrycznego cząsteczki wody obracają się zgodnie z kierunkiem przyłożonego pola. Konsekwencją takiego porządkowania dipoli jest gromadzenie energii, która zostaje wyzwolona, gdy pole elektryczne znika. Energia ta jest wyrażona w postaci rzeczywistej części względnej przenikalności elektrycznej ośrodka ε' i stanowi ona podstawę przy pomiarach wilgotności ośrodków porowatych. Z kolei urojona część zespolonej przenikalności dielektrycznej (ε'') reprezentuje straty energii zewnętrznego pola elektrycznego wywołane przewodnictwem jonowym ośrodka zależnym od koncentracji soli. Przenikalność

dielektryczna takiego ośrodka o niezerowym przewodnictwie elektrycznej wyraża się równaniem zespolonym:

$$\varepsilon_{\omega} = \varepsilon_{\omega}' - i \left(\varepsilon_{\omega}'' + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} \right), \tag{1}$$

gdzie: $\varepsilon'\omega$ – rzeczywista część przenikalności dielektrycznej ośrodka w danej częstotliwości ω , $\varepsilon''\omega$ – urojona część przenikalności dielektrycznej w danej częstotliwości ω , i – jednostka urojona, σ_0 – przewodnictwo elektryczne, ε_0 – przenikalność dielektryczna próżni (ε_0 = 8,85·10⁻¹² F/m), ω – częstotliwość kołowa zewnętrznie przyłożonego pola elektrycznego. Straty energii pola związane z jonowym przewodnictwem elektrycznym (urojona część przenikalności dielektrycznej) obserwuje się przy niskich częstotliwościach. Biorąc pod uwagę zakres częstotliwości stosowanych dla techniki TDR, uważa się, że nie mają one znacznego wpływu na wartość całkowitą przenikalności dielektrycznej i w pomiarach mogą być pomijane.

Ze względu na polarną budowę cząsteczki wody jej przenikalność dielektryczna zasadniczo różni się od przenikalności dielektrycznej fazy stałej oraz gazowej (Tabela 2).

Tabela 2.	Wartości przenikalności dielektrycznej w zależności od rodzaju ośrodka.
Table 2.	Values of dielectric permittivity in dependence on the medium kind.

Ośrodek	Przenikalność dielektryczna (20°C)
Powietrze	1
Woda	80
Bazalt	12
Granit	7-9
Piaskowiec	9-11

Dla wody wynosi ona około 80, dla powietrza 1, zaś dla szkieletu fazy stałej waha się ona w przedziale od kilku do kilkunastu w zależności od materiału.

Należy podkreślić, iż przenikalność dielektryczna jest wartością zależną od wielu parametrów (pomimo, iż powszechnie określa się ją mianem stałej dielektrycznej – jest niezależna od natężenia pola). Zależy natomiast od temperatury, gęstości, składu chemicznego i co najistotniejsze w pomiarach dielektrycznych od częstotliwości przyłożonego pola [12].

Dla częstotliwości poniżej 10 GHz, w tym w zakresie częstotliwości właściwym dla techniki TDR (ok. 1 GHz), wartość przenikalności dielektrycznej jest w zasadzie stała i jak to wynika z tabeli 2 wynosi 80.

Wartości przedstawione w tabeli 2 dla minerałów tworzących szkielet fazy stałej, jak i dla powietrza świadczą o tym, iż przenikalność dielektryczna materiału powietrznie suchego lub o niewielkiej zawartości wolnej wody jest niska, zaś przenikalność dielektryczna ośrodka o dużej zawartości wody (na przykład w stanach całkowitego nasycenia, kiedy faza gazowa jest całkowicie wyparta przez wodę) jest duża. Zatem mierząc wartość stałej dielektrycznej takiego trójfazowego ośrodka można przy zastosowaniu właściwej kalibracji empirycznej określić wilgotność badanego ośrodka, w opisywanym przypadku opoki wapnistej.

W technice TDR stałą dielektryczną wyznacza się w oparciu o prędkość propagacji impulsu elektromagnetycznego wzdłuż falowodu jakim są pręty sondy TDR, a wynosi ona:

$$\varepsilon = \left(\frac{c}{V}\right)^2,\tag{2}$$

gdzie ε – względna stała dielektryczna ośrodka porowatego, c – prędkość światła w próżni (3·10⁸ m·s⁻¹), V – prędkość propagacji impulsu wzdłuż prętów sondy TDR (m/s), przy czym V = $2L/t_p$ (t_p – czas propagacji sygnału wzdłuż prętów sondy oraz L – długość prętów sondy wprowadzonych w ośrodek porowaty).

Zestaw badawczy TDR zbudowany jest z trzech podstawowych elementów (Rys. 6, 8) – miernika, sond oraz komputera PC funkcjonującego jako stacja sterująca oraz jako magazyn danych.



Rys. 6 Stanowisko pomiarowe TDR. Fig. 6. TDR set.



Rys. 7. Przebieg badania - próbki z sondami. Fig. 7. Samples with TDR probes.

Miernik TDR generuje szpilkowy impuls elektromagnetyczny o prędkości narastania i opadania ok. 300·10⁻¹² s (Skierucha, Malicki, 2004). Propaguje on następnie wzdłuż kabla koncentrycznego o określonej, stałej impedancji do sondy pomiarowej, będącej falowodem z materiałem dielektrycznym o stałej dielektrycznej, która jest w tym przypadku parametrem mierzonym. Wskutek zmian impedancji na granicy koncentryk - sonda oraz na końcu sondy do miernika powraca echo wysłanego impulsu, które jest następnie odbierane przez rejestrator monitorujący, a uzyskany sygnał powrotny wyrażany jest w postaci zmiany napięcia w czasie, w formie tzw. reflektogramu. Interpretacja reflektogramu, a konkretnie odbić impulsu elektromagnetycznego w sondzie jest podstawą pomiaru wilgotności metodą TDR. Można jej dokonać metodą wizualną przy pomocy oscyloskopu, lub co jest powszechnie wykorzystywane w badaniach monitoringowych – automatycznie przy pomocy właściwych algorytmów, dzięki którym możliwe jest jednoznaczne określenie stałej dielektrycznej ośrodka.

Przy założeniu automatycznej interpretacji powracającego echa (na czym opiera się idea funkcjonowania techniki TDR) cykl badawczy powtarzany jest wielokrotnie z częstotliwością żądaną przez użytkownika. Umożliwia to ciągły pomiar wilgotności przegrody lub materiału budowlanego w różnych punktach i różnym czasie, dzięki czemu zapewniona jest możliwość ciągłego monitoringu stanów wilgotnościowych jak i obserwacji ich zmian.

Sondy TDR są właściwie zakończeniem kabla koncentrycznego, różniącym się od niego nie tylko kształtem, ale również materiałem, z którego wykonano dielektryk pomiędzy przewodami. Dla kabla koncentrycznego materiałem dielektrycznym jest polietylen natomiast dla sond jest to badany materiał. Stała dielektryczna polietylenu jest znana i w zasadzie niezmienna na całej długości kabla i nie ma wpływu na uzyskany wynik pomiaru. Stała dielektryczna badanego materiału zależy od jego budowy oraz, co tutaj najbardziej istotne, od zawartości wody w ośrodku. Każda zmiana impedancji w układzie przewód-sonda wywołuje częściowe, bądź całkowite odbicie sygnału. Stąd jedno odbicie pojawia się w miejscu przejścia kabla w sondę, własności ośrodka gwałtownie się zmieniają, co pociąga za sobą zmiany impedancji. Kolejne odbicie pojawia się na końcu falowodu, gdzie impedancja zmierza w kierunku impedancji wolnej przestrzeni i fala jest odbijana.



Rys. 8. Typowy zestaw pomiarowy TDR. Fig. 8. Typical TDR set.



- Rys. 9. Reflektogramy TDR w zależności od zawartości wody w układzie. Linią pogrubioną pokazano przebieg impulsu w sondzie TDR. Górny reflektogram wskazuje na materiał suchy, środkowy stany nienasycone, a dolny jest charakterystyczny dla wody (kółkiem oznaczono odbicie powracające z badanego materiału).
- Fig. 9. TDR waveguides representing dry, moist and saturated materials (from upstairs), circle represents the echo returning from the measured material.

Zbigniew Suchorab, Danuta Barnat-Hunek, Henryk Sobczuk

Rys. 9 przedstawia reflektogramy TDR dla trzech układów różniących się między sobą zawartością wody (stałą dielektryczną). Dwa pierwsze piki w każdym reflektogramie posiadają kontrolny charakter i są pomijalne z punktu widzenia realizowanych pomiarów. Są one rezultatem celowego zaburzenia ciągłości przewodu i są niezależne od warunków, w jakich wykonywane są pomiary, służą zatem za wzorzec czasu.

Znając prędkość propagacji impulsu elektromagnetycznego (lub jego czas) można wyznaczyć wartość stałej dielektrycznej ośrodka porowatego w oparciu o fundamentalną formułę (2) dla techniki TDR.

W oparciu o zmierzoną przy pomocy techniki TDR, wartość stałej dielektrycznej ośrodka trójfazowego można określić jego wilgotność. Istnieje wiele modeli umożliwiających określenie tego parametru. Ogólnie dzielą się one na fizyczne oraz empiryczne modele mieszanin materiałów dielektrycznych [10, 12]. Do modeli fizycznych zaliczamy głównie modele α oraz model de Loor. Z kolei z modeli empirycznych najbardziej znane są modele wyprowadzone dla ośrodków porowatych takich jak grunty – model Toppa [14] i Malickiego [7]. Na podstawie badań reflektometryczno-grawimetrycznych określono również krzywe kalibracyjne dla niektórych materiałów budowlanych takich jak betony komórkowe [13].

W realizowanych badaniach do ustalenia wartości wilgotności materiału wykorzystano empiryczną formułę Malickiego, która poza stałą dielektryczną uwzględnia również gęstość materiału w stanie suchym, dzięki czemu możliwe jest uzyskanie większej precyzji wyników:

$$\theta = \frac{\left(\varepsilon^{0.5} - 0.819 - 0.168\rho - 0.159\rho^2\right)}{7.17 + 1.18\rho},\tag{3}$$

gdzie ρ jest gęstością fazy stałej w stanie suchym [g·cm⁻³].

4.2. Przeprowadzone badania

4.2.1. Techniki reflektometryczne pomiaru przyrostu wilgotności kamienia

W celu zbadania właściwości wodnych opoki wapnistej wykorzystano miernik TDR produkcji polskiej firmy Easy Test. Do pomiarów wykorzystano sondy laboratoryjne LP/ms, które wprowadzono w porowatą strukturę materiału poprzez nawiercane otwory. W celu minimalizacji nieszczelności na granicy falowód-ośrodek porowaty pustki wypełniono pyłem wiertniczym.

Badania laboratoryjne przeprowadzono na trzech próbkach w kształcie prostopadłościanów wyciętych z odpowiednich kamieni. Wymiary próbek – 5cm x 12cm x 12cm. Próbki wysuszono do stałej masy w temperaturze 65°C (temperaturę obniżono ze 105°C ze względu na możliwość wystąpienia gipsu w kamieniu), a następnie sezonowano w warunkach laboratoryjnych przez okres jednego miesiąca. Wszystkie powierzchnie próbek, które nie podlegały badaniu uszczelniono przed wodą, nakładając dwie warstwy żywicy epoksydowej. Próbki umieszczono na ruszcie w kuwecie z czystą wodą wodociągową o temperaturze 23°C, tak, aby badana powierzchnia znajdowała się 1cm poniżej lustra wody (Rys. 7). Sondy TDR (LP/ms) zainstalowano odpowiednio na wysokościach 2,5; 5; 7,5 oraz 10 cm nad powierzchnią wody. Odczytane wartości rejestrowane były na właściwych kanałach z odstępem czasowym 6 godzin (0,25 doby). Na podstawie pomiarów wilgotnościowych metodą TDR wykonano wykresy przedstawiające proces podciągania kapilarnego wody w badanych próbkach w czasie. Wykresy przedstawiają jak zmieniała się wilgotność objętościowa [cm³/cm³] próbki wyznaczana techniką TDR. Wilgotność wyznaczono w oparciu pomiar czasu propagacji impulsu wzdłuż falowodu, jaki stanowiły pręty sondy LP/ ms. Następnie na podstawie pomiarów czasu propagacji obliczono względną stałą dielektryczną badanego ośrodka wg formuły (2), zaś wilgotność oszacowano wg empirycznej formuły Malickiego (3) [7].





Fig. 10. Capilary rise process in Kazimierz chalk rock determined with TDR method.

Pomiary przebiegu podciągania kapilarnego wody przez opokę wapnistą zbadaną metodą TDR wykazuje największe powinowactwo do wody przez skorodowany kamień z elewacji południowej (*K2*). Kamień ten charakteryzuje się największą zdolnością kapilarną, która jest widoczna już w pierwszym dniu, zaś po upływie dwóch tygodni wilgotność jego jest największa z wszystkich analizowanych próbek i przekracza $30\%_{vol}$ zmierzone na wysokości 2,5cm nad lustrem wody. Natomiast na wysokości 10cm jego wilgotność wyznaczona metodą TDR wynosi po 14 dniach ok. $22\%_{vol}$.

Z kolei kamień *K3* z elewacji północnej wykazuje zbliżoną dynamikę podciągania kapilarnego wody, lecz jego maksymalna wilgotność zmierzona sondą TDR na wysokości 2,5cm nad lustrem wody po upływie 14 dni jest mniejsza od kamienia *K2* i nie przekracza $30\%_{vol}$. Na 10cm powyżej zwierciadła wody wilgotność jest większa od odpowiedniej w kamieniu *K2* i wynosi ponad $24\%_{vol}$.

Kamień *K1* pochodzący bezpośrednio z kamieniołomu charakteryzuje się natomiast najmniejszą zdolnością do podciągania kapilarnego, proces ten przebiega najwolniej i po upływie okresu pomiarowego (14 dni) maksymalna wilgotność zmierzona techniką TDR nie przekracza w nim wielkości 28%vol w odległości 2,5cm od zwierciadła wody oraz 23%vol w odległości 10cm od powierzchni wody.

4.2.2. Nasiąkliwość powierzchniowa

Na próbkach przeznaczonych do badań TDR wykonano równorzędnie oznaczenia nasiąkliwości powierzchniowej wg PN-EN 1925:2001. Próbki ważono po upływie 0,5; 6h i 1, 2, 7 i 14-stu dobach. Wyniki przedstawia Rys. 11.



Rys. 11. Nasiąkliwość powierzchniowa kamieni. Fig. 11. Surface water absorbability of the stones.

Analiza nasiąkliwości opok, pochodzących z trzech różnych źródeł wykazała, że kamienie te charakteryzują się innymi właściwościami wilgotnościowymi. Kamienie można uszeregować według nasiąkliwości powierzchniowej wodą w następujący sposób: $K1 \le K3 \le K2$. Największą nasiąkliwość powierzchniową posiada kamień K2 (18,63kg/m²) z południowej elewacji zamku, charakteryzujący się największym stopniem destrukcji.

5. Podsumowanie

Przeprowadzone badania porozymetryczne i wilgotnościowe opoki wapnistej z elewacji południowej i północnej Zamku w Janowcu oraz kamienia z kamieniołomu wykazały różnice w zakresie zmian struktury kamieni. Wpływ oddziaływań środowisk korozyjnych najmniej widoczny jest w miejscach o ustabilizowanych warunkach mikroklimatycznych, czyli na murach północnych.

Natomiast różnice te przyczyniają się do odmiennego zachowania opoki w procesach podciągania kapilarnego wody i roztworów soli. Ma to znaczący wpływ na trwałość budowli oraz dalszy proces korozji. Znajomość właściwości wodnych umożliwia dobór ochrony konserwatorskiej tj. preparatów zabezpieczających mur, których rodzaj i aplikacja zależą w głównej mierze od cech porozymetrycznych podłoża.

Niejednorodność cech fizycznych badanych opok tj. gęstości objętościowej, gęstości, porowatości, podciągania kapilarnego opoki wynika między innymi z różnych źródeł pochodzenia, z ekspozycji w stosunku do stron świata, co wiąże się z insolacją i cyklami zamarzania i odmarzania, korozją chemiczną itp.

W artykule przedstawiono możliwość pomiaru wilgotności przy zastosowaniu techniki TDR. Technika ta posiada duży potencjał pomiarowy, a w szczególności monitoringowy w odniesieniu do ośrodków porowatych. Obecnie jest w fazie wdrażania w przodujących laboratoriach zajmujących się fizyką budowli.

Zaletą tej metody jest jej niska czułość na zasolenie ośrodka (w zakresie częstotliwości, w których pracuje nie uwzględnia ona urojonej części stałej dielektrycznej) w rezultacie czego pomiar nie jest obarczony błędem wywołanym przewodnictwem elektrycznym spowodowanym koncentracją jonów zawartych w materiałach budowlanych.

Metoda jest obecnie w fazie rozwoju i trwają prace nad przeniesieniem jej w warunki polowe. Umożliwi ona prowadzenie badań na obiektach rzeczywistych, dzięki czemu wyeliminuje ona konieczność pobierania próbek z badanych obiektów w celu wykonania badań termo-grawimetrycznych. Pozwoli ona na długoterminowy monitoring zmian wilgotności przegród budowlanych i może się przyczynić do minimalizacji negatywnych skutków oddziaływania wody na budowlę.

Literatura

- [1] Adamowski J., *Powłoki i wyprawy elewacyjne na obiektach zabytkowych*, Wybrane problemy projektowo technologiczne. Maszynopis.
- [2] Barnat Hunek D., Franus W., Stan zachowania murów zabytkowego Spichlerza Ulanowskich w Kazimierzu Dolnym nad Wisłą, Konf. Naukowa: Postęp i nowoczesność w konserwacji zabytków. Problemy, perspektywy. Politechnika Lubelska, Lublin, 2005. 49-53.
- [3] Domasłowki W., *Profilaktyczna konserwacja kamiennych obiektów zabytkowych*, UMK skrypty i teksty pomocnicze. Toruń 1993.
- [4] Franus W., Barnat Hunek D., *Przyczyny niszczenia zabytkowych budynków z opoki wapnistej w Kazimierzu Dolnym*, Świat Kamienia, Vol. 35 (2005), pp. 32-34.
- [5] Garecki M., Znaczenie diagnostyki w robotach izolacyjno renowacyjnych budynków poddanych działaniu wilgoci, Renowacje i Zabytki, Vol. 4 (2005), pp. 127-137.
- [6] Klemm P., praca zbiorowa., 2005: *Budownictwo ogólne. Tom 2. Fizyka budowli*, Arkady. Warszawa 2005.
- [7] Malicki M.A., Plagge R., Roth. C.H., Reduction of soil matrix effect on TDR dielectric

moisture determination by accounting for bulk density or porosity, European J. of Soil Science, vol. 47(3), 1996, pp. 357-366.

- [8] Rydz Z., Turowski R., *Hydrofobizacja strukturalna mas tynkarskich i zapraw budowlanych za pomocą Hydrolitu*, Materiały Budowlane, Vol. 3 (1989), pp. 14-15.
- [9] Skibiński S., Udział soli rozpuszczalnych w wodzie w procesach niszczenia kamiennych obiektów zabytkowych oraz konserwatorskie sposoby ograniczania ich działania, Ochrona Zabytków, Vol. 3-4 (1985), pp. 244-257.
- [10] Skierucha W., Wpływ temperatury na pomiar wilgotności gleby metodą reflektometryczną, Rozprawy i Monografie Instytutu Agrofizyki im. Bohdana Dobczańskiego PAN w Lublinie, Lublin 2005(5)
- [11] Skierucha W., Malicki M.A., *TDR Method for the Measurement of Water Content and Salinity of Porous Media*, Institute of Agrophysics, Polish Academy of Sciences, Lublin 2004
- [12] Sobczuk H., Plagge R., Time Domain Reflectometry Method in Environmental Measurements, Monografie Komitetu Inżynierii Środowiska PAN, Vol. 39, Lublin 2007
- [13] Sobczuk H., Suchorab Z., *Calibration of TDR instruments for moisture measurement of aerated concrete, Monitoring And Modelling the properties of soil as porous medium*, Institute of Agrophysics Polish Academy of Sciences, Lublin 2005, pp. 158-165
- [14] Topp G.C., Davis J.L., Annan A.P., Electromagnetic determination of soil water content: Measurements in coaxial transmission lines, Water Resources Research, vol. 16, 1980, pp. 574-582.

Moisture measurements of the chalk rock walls from Kazimierz Dolny with the application of TDR method

Zbigniew Suchorab, Faculty of Environmental Engineering, Institute of Environmental Protection Engineering e-mail: Z.Suchorab@fenix.pol.lublin.pl Danuta Barnat-Hunek, Faculty of Civil and Sanitary Engineering, Institute of Buildings mail: d.barnathunek@op.pl Henryk Sobczuk, Faculty of Environmental Engineering, Institute of Environmental Protection Engineering e-mail: H.Sobczuk@fenix.pol.lublin.pl

Abstract: The article presents monitoring measurements of the physical parameters and mineralogical-petrographical composition analysis of the chalk rock from the Kazimierz Dolny region. The experiments involve the reflectometric techniques TDR (Time Domain Reflectometry) as a perspective alternative in moisture determinations. The investigation domain was the stone from the Castle of Janowiec by the Vistula river, which walls indicate the progressive corrosion depending on external exposition and age. Other object of investigations was the stone from quarry in Kazimierz Dolny. Porosimetric examinations of the chalk rock from the southern and northern elevation of the castle indicate differences in structure changes of the stones. These differences influence different behaviour of the chalk rock during capillary rise of water and salt solutions. It is connected with the suitable matching of the conservation protection, wall protecting preparations which kind and application depend on porosimetric parameters of the material. The TDR method is applied as a good alternative of water transport measurement in porous building materials and other water parameters characterisig described material.

Keys words: chalk rock, walls destruction, moisture, reflectometric measurement, TDR.

140

Wpływ tarciowych oporów ruchu na zasięg tłoczenia dyspersji cementowej

Jerzy Szerafin

Politechnika Lubelska, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: j.szerafin@pollub.pl

Streszczenie: Dyspersyjny charakter cementowych mieszanek iniekcyjnych sprawia wiele trudności w praktycznych realizacjach procesu iniekcji ciśnieniowej, jak również w próbach teoretycznego ujęcia tego zagadnienia. Istniejące modele reologiczne zaczynów cementowych traktują je jako układy ciągłe. W artykule podjęto próbę wprowadzenia do modelu reologicznego ciała Binghama członu reprezentującego opory natury tarciowej, powstające na stykach ziaren cementu. Ujęta w ten sposób ziarnistość mieszanki cementowej pozwala w konsekwencji na analityczne wyprowadzenie nowych równań przepływu zaprezentowanych w pracy. Podano sposób wyprowadzenia równań przepływu oraz możliwości analitycznego szacowania wielkości związanych z oporami tarciowymi. Analiza wyników obliczeń wskazuje na pojawiające się znaczne rozbieżności w porównaniu z już istniejącymi rozwiązaniami. Nowe równania lepiej przewidują efekty uzyskiwane w praktycz-nych realizacjach procesu iniekcji.

Słowa kluczowe: iniekcja, dyspersja cementowa, równania przepływu.

1. Wprowadzenie

Metody iniekcyjnego wypełniania pustek w strukturze materiału przy użyciu mieszanek cementowych znajdują wiele praktycznych zastosowań, jak iniekcje kanałów w elementach kablobetonowych, naprawy konstrukcji murowych i betonowych, iniekcje wzmacniające w gruntach i wiele innych mniej typowych. Tego typu prace inżynierskie wymagają już na etapie ich projektowania dobrego rozeznania na temat możliwych do osiągnięcia efektów. Dlatego też podejmowane są próby ujęcia zagadnienia przepływu cieczy iniekcyjnej, zarówno analityczne, np.: (Mierzwa [3]), jak i coraz szerzej wykorzystujące metody numeryczne, opisywane przez (Chin [2], Warner [8]). Rozwiązania analityczne w zdecydowanej większości pomijają dyspersyjny charakter mieszanki cementowej, co zdaniem autora prowadzi do powstawania znacznych rozbieżności wyników obliczeń z rzeczywistymi efektami procesu iniekcji. W dalszej części niniejszej pracy przedstawiono propozycję rozwiązania równań przepływu, uwzględniającą dyspersyjny charakter iniektu cementowego poprzez wprowadzenie dodatkowych oporów tarciowych powstających na styku ziaren cementu.

2. Podstawy teoretyczne opisu przepływu dyspersji cementowej

Wyprowadzenie równań opisujących przepływ iniektu wiąże się z koniecznością ujęcia w formie matematycznej dwóch zagadnień cząstkowych:

- charakterystyki reologicznej mieszanki iniekcyjnej,

- geometrii układu pustek iniektowanej struktury.

W dalszej części artykułu pierwsze z tych zagadnień będzie rozpatrzone bliżej.

Znanych jest szereg modeli reologicznych zaczynów cementowych (Mierzwa [3], Struble [5], Szwabowski [7]), od stosunkowo prostego modelu ciała Binghama, po bardziej skomplikowane, ujmujące nieliniowość zależności naprężeń ścinających i prędkości ścinania.



Rys. 1. Przykładowe krzywe płynięcia zaczynu cementowego, a) model ciała Binghama $\tau = \tau_{_0} + \eta_{_{pl}} \cdot \dot{\gamma}$, b) model Herschella-Bulkleya $\tau = \tau_{_0} + m \cdot \dot{\gamma}^n$.

Fig. 1. Types of flow behavior of cement paste, a) Bingham model $\tau = \tau_0 + \eta_{pl} \cdot \dot{\gamma}$, b) Herschella-Bulkley model $\tau = \tau_0 + m \cdot \dot{\gamma}^n$.

2.2. Określenie oporów tarciowych

Opisane modele zawierają dwa podstawowe parametry reologiczne: granicę płynięcia τ_o , oznaczającą wielkość naprężeń, po przekroczeniu których rozpoczyna się przepływ, oraz lepkość plastyczną η_{ρ} , stanowiącą o wielkości oporów wewnętrznych powstających podczas przepływu. Granica płynięcia τ_o , przyjmowana w konstruowanych modelach reologicznych jako element St. Venanta, jest wielkością stałą.

Tymczasem, jak zauważa (Szwabowski [7]), w układach ziarnistych wielkość granicznych naprężeń, po przekroczeniu których rozpoczyna się przepływ musi zależy od wielkości naprężeń normalnych σ , zgodnie z równaniem Coulomba:

$$\tau_0 = c + \sigma \cdot \mathrm{tg}\varphi \tag{1}$$

gdzie: c – spójność, tg φ – współczynnik tarcia wewnętrznego powstającego pomiędzy poszczególnymi ziarnami fazy stałej przy ich wzajemnym przemieszczaniu się.

Uwzględnienie powyższych uwag wiąże się z koniecznością modyfikacji modeli reologicznych mieszaniny cementowej o czynnik tarciowy. Po uwzględnie-

niu postulatu (1) i dokonaniu niezbędnych przekształceń, liniowy model Binghama przyjmuje postać:

$$\tau = (\tau_0 + k \cdot p) + \eta_{vl} \cdot \dot{\gamma} \tag{2}$$

gdzie: p oznacza ciśnienie tłoczne w danym punkcie, k jest parametrem określającym opory tarciowe.

Parametr k jest określony jako iloczyn trzech czynników:

$$\mathbf{k} = \mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{m} \tag{3}$$

gdzie: tg φ – współczynnik tarcia wewnętrznego, λ – współczynnika rozpływu bocznego, *m* – względnej wielkości powierzchni styku ziaren cementu w płaszczyźnie ścinania.

2.2. Wyprowadzenie równania przepływu z uwzględnieniem oporów tarciowych

Przyjęty matematyczny opis właściwości reologicznych dyspersji iniekcyjnej należy powiązać z matematycznym opisem układu nieciągłości iniektowanej struktury. Ze względu na dużą różnorodność zastosowań metody iniekcji, istnieje wiele modeli oddających geometrię pustek, w których przebiega proces iniekcji. Wniniejszejpublikacjizostanieprzedstawionametodauzyskaniarównaniaprzepływu w stosunkowo prostym geometrycznie układzie prostoliniowych kanałów tłocznych o stałej średnicy, dokładniej opisana w pracy (Szerafin [6]).

Rozkład naprężeń w przekroju kanału kołowego wyznacza się rozpatrując walcowy fragment cieczy w przewodzie tłocznym zgodnie z rys. 2 oraz ustalając warunki równowagi (4):

$$p \cdot \pi r^2 = (p + dp) \cdot \pi r^2 + \tau \cdot 2\pi r \cdot dl \tag{4}$$

a po uproszczeniach:



Rys. 2. Schemat elementu do wyznaczania rozkładu naprężeń stycznych w przekroju kołowym. Fig. 2. A pattern assumed to determine shear stress in annular pipe.

Wobec tego, że ciśnienie w przekroju kapilary jest stałe, zatem naprężenia ścinające w przekroju zmieniają się liniowo wzdłuż jej promienia i wzrastają od

zera w osi przewodu do wartości $\tau_{\rm w}$ przy ściance (p. rys. 3), gdzie osiągają wielkość maksymalną:

$$\tau_w = -\frac{dp}{dl} \cdot \frac{R}{2} \tag{6}$$

Znak "*minus*" w powyższych równaniach oznacza, że w kanale zachodzi spadek ciśnienia, a więc gradient dp/dl jest ujemny.



Rys. 3. Rozkład naprężeń τ i profil prędkości przepływu ν w przekroju przewodu tłocznego. Fig. 3. Shear stresses and flow velocity in annular pipe.

Natężenie przepływu w kanale kołowym jest dane wzorem:

$$Q = \int_{0}^{Q} dQ = 2\pi \int_{0}^{R} v \cdot r \cdot dr$$
⁽⁷⁾

który można doprowadzić do równania:

$$Q = \frac{\pi \cdot D^3}{8\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} f\left(\tau\right) \cdot \tau^2 \cdot d\tau \tag{8}$$

nazywanym w literaturze ogólnym równaniem przepływu cieczy w przewodzie kołowym". Na podstawie równania (8) można wyznaczyć wydatek objętościowy Q. Postać funkcji podcałkowej f(τ) jest określona przez przyjęty model reologiczny cieczy. Dla liniowego modelu Binghama $f(\tau) = \frac{\tau - \tau_0}{\eta_{pl}}$, zaś po uwzględnieniu oporów tarciowych:

$$f\left(\tau\right) = \frac{\tau - \tau_0 - k \cdot p}{\eta_{_{pl}}} = \frac{\tau - \tau_1}{\eta_{_{pl}}} \tag{9}$$

Po podstawieniu (9) do (8) uzyskuje się:

$$Q = \frac{\pi \cdot D^3}{8\eta_{pl} \cdot \tau_w^3} \cdot \int_{\tau_1}^{\tau_w} \left(\tau^3 - \tau_1 \cdot \tau^2 \right) \cdot d\tau \tag{10}$$

Zmiana dolnej granicy całkowania z "0" na " τ_1 " wynika z założenia, że przepływ cieczy zachodzi tylko wówczas, gdy $\tau > \tau_1$.

Po scałkowaniu równania (10) uzyskuje się zależność:

$$Q = \frac{\pi \cdot D^3}{8\eta_{pl}} \left(\frac{\tau_w}{4} - \frac{\tau_1}{3} + \frac{\tau_1^4}{12\tau_w^3} \right)$$
(11)

Z przeprowadzonych analiz numerycznych wynika, że ostatni człon w nawiasie równania (11) można pominąć z niewielkim błędem dla poprawności rozwiązania. Podstawiając ponadto:

$$Q = v_{\alpha} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \tag{12}$$

oraz zależność (6), można równanie (11) przekształcić do postaci:

$$v_{sr} = -\frac{D}{2\eta_{pl}} \left(\frac{D}{16} \cdot \frac{dp}{dl} + \frac{\tau_1}{3} \right)$$
(13)

Dokonując uporządkowania względem *p*, oraz uwzględniając na podstawie (9), że $\tau_1 = \tau_0 + k \cdot p$ otrzymuje się równanie różniczkowe niejednorodne:

$$\frac{dp}{dl} + \frac{16\left(6v_{sr} \cdot \eta_{pl} + D \cdot \tau_{0}\right)}{3D^{2}} + \frac{16k}{3D}p = 0$$
(14)

Równanie tego typu rozwiązuje się przez sprowadzenie do równania jednorodnego a następnie uzmiennienie pojawiającej się stałej całkowania. Po wykonaniu niezbędnych przekształceń można uzyskać wyrażenie w postaci:

$$p = -\frac{6\eta_{pl} \cdot v_{\acute{u}r} + \tau_0 \cdot D}{D \cdot k} + c \cdot e^{-\frac{16k}{3D}l}$$
(15)

Stałą całkowania *c* można wyznaczyć wykorzystując warunek, że na wyjściu pompy tłoczącej panuje ciśnienie początkowe P_0 (l=0, p= P_0). Można więc uzyskać równanie:

$$p = \frac{6\eta_{pl} \cdot v_{sr} + \tau_0 \cdot D}{D \cdot k} \cdot \left(e^{-\frac{16k}{3D}l} - 1\right) + P_0 \cdot e^{-\frac{16k}{3D}l}$$
(16)

wiążące parametry technologiczne instalacji ciśnieniowej (ciśnienie na wyjściu pompy P_0 , średnią prędkość przepływu w przekroju przewodu tłocznego v_{sr}), parametry geometryczne (średnica przewodu tłocznego D) oraz parametry reologiczne (τ_0 , η_p , k). Pozwala ono na wyznaczenie wartości ciśnienia tłocznego p, panującego w dowolnym punkcie kanału tłocznego, określonym przez jego odległość od punktu początkowego l.

Z praktycznego punktu widzenia najbardziej istotne jest określenie zasięgu iniekcji *L* w danych warunkach. Na podstawie równania (16), przy przyjęciu dodatkowego założenia całkowitej odporności mieszanki iniekcyjnej na segregację składników, można uzyskać równanie na zasięg iniekcji w prostoliniowych, cylindrycznych przewodach tłocznych o stałej średnicy. Należy w tym celu rozpatrzyć stan równowagi strumienia cieczy iniekcyjnej w chwili zastopowania przepływu wskutek narastających wzdłuż osi kanału strat ciśnienia. Na długości nieruchomego (zastopowanego) strumienia ciśnienie spada od wartości początkowej P_0 do wartości końcowej P_b na tyle małej, że nie wystarcza do pokonania granicy ścinania mieszanki iniekcyjnej. Przyjęto w przybliżeniu, że ciśnienie tłoczne spada do zera w odległości *L* oznaczającej zasięg tłoczenia. Stąd wynika warunek brzegowy: p=0, l=L. Prędkość przepływu w chwili jego zablokowania $\nu=0$. Po uwzględnieniu tych warunków, zasięg tłoczenia wyniesie:

$$L = \frac{3D}{16k} \cdot \ln\left(\frac{P_0 \cdot k}{\tau_0} + 1\right) \tag{17}$$

3. Wyznaczanie parametru tarciowego k

Na podstawie analizy zawartej w pracy (Szwabowski [7]) przyjęto sposób obliczania parametru k (w dalszej części pracy nazywanego parametrem tarciowym) jako iloczynu trzech wielkości podstawowych, zgodnie ze wzorem (3). Wielkości te mają sprecyzowane fizyczne interpretacje, a w poniższych podpunktach przedstawiono propozycje ich analitycznego określania.

3.1. Współczynnik tarcia wewnętrznego tg φ

Współczynnik tarcia wewnętrznego dla zaczynów cementowych bez dodatków można obliczać z przytaczanych w pracy (Bleszczik [1]) półempirycznych wzorów, cechujących się wysoką zgodnością z danymi doświadczalnymi:

$$tg\phi = tg\phi_{bl} \cdot tg\phi_{rel} + \frac{0,27(r+a) - 1,73\delta}{r+\delta+a}$$
(18)

gdzie: tg φ_{bl} oznacza współczynnik tarcia wewnętrznego zaadsorbowanej wody błonkowej,

gdy:
$$0.05 \le \frac{w}{c \cdot \omega_n} < 0.7$$
, $tg\phi_{bl} = 0.38$ (19)

ponadto:

gdy:
$$\frac{w}{c \cdot \omega_n} \ge 0,7$$
, $tg\phi_{bl} = \frac{0,1}{\left[2,5\left(\frac{w}{c \cdot \omega_n} - 0,7\right)^2 + 0,515\right]^2}$ (20)

Wielkość tg φ_{rel} jest względnym współczynnikiem tarcia wewnętrznego,

gdy:
$$\frac{w}{c \cdot \omega_n} \ge 0.9$$
, $tg\phi_{rel} = 1 + \sin\alpha_z \left(0.15\frac{r+a}{\delta} - 1\right)$ (21)

Wielkości pomocnicze w powyższych wzorach:

$$\alpha_z = \arccos\left(0,865\frac{r+a+\delta}{r+a}\right) \tag{22}$$

 ω_n – oznacza współczynnik wodno-cementowy normowej konsystencji zaczynu.

146
Wielkości geometryczne, charakteryzujące strukturę zaczynu cementowego są następujące: r (średni promień ziarna cementu, a (grubość wody błonkowej), δ (odległość pomiędzy ziarnami cementu pomniejszona o dwie grubości zaadsorbowanej wody błonkowej). Wielkości te wyznaczono rozpatrując zależności geometryczne w niewielkim fragmencie zaczynu, zaś uzyskane wzory mają charakter ogólny.



Rys. 4. Geometria układu ziaren cementu w zaczynie. Fig. 4. Cement grain geometry in cement paste.

Przyjęto następujące oznaczenia: V_c – objętość ziaren cementu (założono ich kulisty kształt), V_w – objętość całkowita wody, V_o – objętość kulistej otoczki wodnej, rozdzielającej poszczególne ziarna cementu, V_l – objętość pozostałej części wody, w lukach (przestrzeniach międzyziarnowych), V_k – objętość kuli – suma objętości ziarna cementu i kulistej otoczki wodnej, V_{catk} – objętość całkowita układu, S – szczelność upakowania kul w układzie:

$$S = \frac{V_k}{V_{ca\mu k}} = \frac{V_k}{V_k + V_l}$$
(23)

Przy założeniu całkowitego wypełnienia stosu wodą mamy:

 $V_w = V_o + V_l \text{ oraz } V_c = V_k - V_o \text{ skąd wynika: } V_c = V_k + V_l - V_w.$

Ponieważ $V_l = V_k \cdot (1-S)/S$, więc $V_c = V_k/S - V_w$. Z kolei podstawiając $V_w = \rho_c \cdot V_c \cdot (w/c)$, otrzymuje się: $V_c = V_k/S - \rho_c \cdot V_c \cdot (w/c)$. Stosunek objętości kul jest równy stosunkowi sześcianów ich promieni $V_k/V_c = (r_k/r_c)^3$, a więc można zapisać:

$$r_{k} = r_{c} \cdot \sqrt[3]{S\left(1 + \rho_{c} \frac{w}{c}\right)}$$
(24)

Odległość pomiędzy ziarnami cementu $\Delta = 2(r_k - r_c)$. Ostatecznie więc:

$$\Delta = 2r_c \cdot \left(\sqrt[3]{S\left(1 + \rho_c \frac{w}{c}\right)} - 1 \right)$$
(25)

Średni promień ziaren cementu wyznaczany jest z warunku zachowania powierzchni właściwej:

$$r_c = \frac{3}{F_B \cdot \rho_c} \tag{26}$$

Grubość warstwy błonek wodnych na ziarnach cementu przyjęto stałą, δ = 0,05 $\mu m.$

JULY SZCIAIIII

Szczelność przyjęto za (Mikoś [4]) S = 0,5236 jak dla kul w węzłach sześcianów, co przy ustalonym *w/c* daje najmniejsze odległości pomiędzy ziarnami cementu. Wyniki obliczeń współczynnika tarcia wewnętrznego tg φ dla przykładowych współczynników w/c oraz powierzchni właściwych cementu zestawiono w Tab. 1.

Tabela 1.Wyniki obliczeń współczynnika tarcia wewnętrznego tg
 φ zaczynów cementowych, przeprowadzone na podstawie teoretyczno-eksperymentalnych wzorów Bleszczika.

Table 1.Calculation results of internal friction coefficient of cement pastes $tg\phi$, on the basis of
Bleszczik formulas.

w/c	Powierzchnia właściwa cementu, cm²/g				
	4000	5000	6000	7000	12000
0.4	0.21	0.24	0.27	0.3	~1
0.45	0.086	0.104	0.12	0.14	0.26
0.5	0.013	0.030	0.047	0.064	0.150

3.2. Względna wielkość powierzchni kontaktu ziaren cementu w płaszczyźnie ścinania

Na podstawie przyjętych założeń powierzchnię styku dwóch ziaren w otoczkach wodnych wyznacza się wychodząc z warunku całkowitego spłaszczenia błonki wodnej w miejscu zetknięcia się ziaren (Rys. 5.).



Rys. 5. Rysunek pomocniczy do obliczeń powierzchni styku ziaren.

Fig. 5. Schematic drawing showing the way of contact surface calculations.

Z warunków geometrycznych układu wynika, że:

$$r_s = \sqrt{\left(r_c + a\right)^2 - r_c^2} = \sqrt{a\left(a + 2r_c\right)} \tag{27}$$

Współczynnik m obliczać można z zależności:

$$m = \frac{F_s}{F} = \frac{\pi \cdot r_s^2}{\pi \cdot \left(r_c + \Delta / 2\right)^2}$$
(28)

Oznaczenia w powyższych wzorach jak w p. 3.1.

Wyniki obliczeń współczynnika m dla warunków analogicznych jak określone w p. 3.1. zestawiono w Tab. 2.

148

Table2.Calculation results of coefficient m.						
w/c	Powierzchnia właściwa cementu, cm²/g					
	4000	5000	6000	7000	12000	
0.4	0.038	0.047	0.057	0.066	0.115	
0.45	0.036	0.045	0.054	0.063	0.110	
0.5	0.035	0.043	0.052	0.061	0.106	

Tabela 2.	Wyniki obliczeń współczynnika m.
Table2.	Calculation results of coefficient m

3.3. Współczynnik rozporu bocznego λ

Wykorzystując analogię z ośrodkiem gruntowym, współczynnik rozporu bocznego λ wyznaczać się będzie ze wzoru znanego w mechanice gruntów:

$$\lambda = tg^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) \tag{29}$$

Kąt tarcia wewnętrznego φ określony zostanie na podstawie obliczeń współczynnika tarcia wewnętrznego według danych zawartych w Tab. 1. Wyniki obliczeń współczynnika rozporu bocznego zestawiono w Tab. 3.

Tabela 3. Wyniki obliczeń współczynnika rozporu bocznego λ . Table 3. Calculation results of coefficient λ .

w/c	Powierzchnia właściwa cementu, cm²/g				
	4000	5000	6000	7000	12000
0.4	0.66	0.62	0.59	0.55	0.17
0.45	0.84	0.81	0.79	0.76	0.60
0.5	0.97	0.94	0.91	0.88	0.74

3.4. Wartości parametru tarciowego k

Wyniki obliczeń zawarte w tabelach 3.1 - 3.3 stanowią podstawę od wyznaczenia parametru tarciowego, którego wartości obliczone dla zaczynów cementowych bez domieszek zawarto w Tab. 4 i zobrazowano na Rys. 6.

Tabela 4. Wyniki obliczeń parametru tarciowego k. Table 4. Calculation results of friction parameter k.

w/c	Powierzchnia właściwa cementu, cm²/g				
	4000	5000	6000	7000	12000
0.4	0,00527	0,00699	0,00908	0,01089	0,01955
0.45	0,00260	0,00379	0,00512	0,00670	0,01716
0.5	0,00044	0,00121	0,00222	0,00344	0,01177

Jerzy Szerafin



Rys. 6. Wartości parametru tarciowego k obliczone dla zaczynów cementowych bez domieszek. Fig. 6. Friction parameter *k* calculated for cement pastes without any admixtures.

4. Analiza wpływu oporów tarciowych na parametry technologiczne procesu iniekcji

Klasyczne równanie Buckinghama-Reinera, które nie uwzględnia oporów tarciowych, pozwala obliczyć wielkość ciśnienia tłocznego $p_{(B,R)}$ w odległości *l* z zależności:

$$p_{(B-R)} = P_0 - \left(\frac{32\eta_{pl} \cdot v_{iir}}{D^2} + \frac{16\tau_0}{3D}\right) \cdot l$$
(30)

natomiast zasięg tłoczenia $L_{(B-R)}$:

$$L_{(B-R)} = \frac{3 \cdot P_0 \cdot D}{16\tau_0} \tag{31}$$

Jak wynika z postaci równania (30) spadek ciśnienia na długości przewodu tłocznego jest tu liniowy. Uwzględnienie w równaniach przepływu oporów tarciowych skutkuje pojawieniem się jakościowych zmian w rozkładzie ciśnienia. Również najbardziej istotny z praktycznego punktu widzenia parametr technologiczny – zasięg tłoczenia – zależy nieliniowo od parametrów reologicznych mieszanki iniekcyjnej oraz od ciśnienia tłocznego (por. równanie (17)). W celu zbadania wpływu oporów tarciowych na efekty procesu iniekcji porównano wyniki obliczeń uzyskane na podstawie równań klasycznych (30) i (31) z nowymi równaniami, wzbogaconymi o człon tarciowy (16) i (17).

4.1. Spadek ciśnienia tłocznego

Opory przepływu, wyrażone są poprzez jednostkowy spadek ciśnienia dp/dl. Wielkość oporów tarciowych wzdłuż przewodu tłocznego jest zmienna, co wynika z faktu zmniejszania się ciśnienia wzdłuż kanału tłocznego, a tym samym i oporów natury tarciowej, które zależą wprost proporcjonalnie od wielkości ciśnienia panującego w danym punkcie kanału. Natomiast opory ruchu, wynikające z rozwiązania klasycznego są stałe i stosunkowo niewielkie w porównaniu z oporami wynikającymi z nowych równań przepływu.

Rozkład ciśnienia tłocznego wzdłuż kanału uzyskany na podstawie równań (16) i (30) przedstawiono na rys. 7.





Fig. 7. Injection pressure along the pipe. Classical equation – upper line, equation including friction resistances – lower line.

4.2. Zasięg tłoczenia

Zależność wielkości oporów tarciowych od ciśnienia tłocznego ma bardzo istotny wpływ na uzyskiwany efekt procesu iniekcji mierzony zasięgiem tłoczenia. Jak wynika z wykresu przedstawionego na rys. 8, wzrost wartości ciśnienia tłocznego na pompie iniekcyjnej powyżej pewnej wartości nie daje zadowalających efektów w postaci zwiększenia zasięgu tłoczenia (czarna linia). Jest to zjawisko obserwowane w praktyce iniekcyjnej, kiedy pomimo wzrostu wartości ciśnienia nie udaje się pokonać wzrastających oporów tłoczenia cieczy dyspersyjnej. Natomiast nieuwzględnienie oporów tarciowych (niebieska linia) i liniowa zależność zasięgu i ciśnienia, wynikająca z postaci równania (31) powoduje znaczne przeszacowanie obliczanych odległości tłoczenia.



- Rys. 8. Porównanie wpływu ciśnienia początkowego na zasięg tłoczenia według równań: nie uwzględniających oporów tarciowych (31) – górna linia; z oporami tarciowymi (17) – dolna linia.
- Fig. 8. The influence of the initial pressure on the injection range. Classical equation upper line, equation including friction resistances lower line.

Parametry reologiczne: τ_0 i *k* nie są zmiennymi niezależnymi, lecz zmiany ich wartości występują łącznie. Dlatego też wpływ stopnia upłynnienia dyspersji przedstawiony na rys. 9 ujęto obliczając wartości parametrów reologicznych dla wybranych wskaźników *w/c*.



- Rys. 9. Porównanie wpływu stopnia upłynnienia dyspersji cementowej na zasięg tłoczenia. Równanie klasyczne (30) – linia górna; równanie uwzględniające opory tarciowe (16) – linia dolna.
- Fig. 9. The influence of cement grout flow ability on the injection range. Classical equation upper line, equation including friction resistances lower line.

Przy niewielkich ciśnieniach tłocznych (w tym przypadku rzędu 0,01MPa), wpływ oporów tarciowych jest zaniedbywalny i wyniki obliczeń zasięgów tłoczenia według obu równań są zbliżone. Natomiast przy wzroście wartości ciśnienia tłocznego rośnie znaczenie oporów tarciowych, skutkujące coraz większymi rozbieżnościami, niezależnie od wskaźnika *w/c*. Jednocześnie zachodzące przy wzroście *w/c* zmniejszenie zawartości cząstek stałych w dyspersji, a tym samym zwiększenie średnich odległości pomiędzy nimi powoduje zmniejszenie oporów przepływu i wzrost zasięgu iniekcji. Wzrost ten przebiega nieliniowo w miarę zmniejszania zawartości cząstek stałych i w pewnym momencie (nie opisanym w niniejszych badaniach) cząstki stałe na skutek utraty kontaktu ze sobą, nie generują już oporów tarciowych.

5. Spostrzeżenia i wnioski

Równanie reologiczne mieszanki cementowej (3) oddaje jej dyspersyjny charakter, zaś uzależnienie naprężeń granicznych od ciśnienia tłocznego przynajmniej częściowo tłumaczy częste trudności występujące podczas tłoczenia cieczy dyspersyjnych, gdy aplikowanie coraz wyższego ciśnienia nie prowadzi do pokonania tworzącego się zatoru.

- Wyniki analiz równania przepływu dyspersji przedstawione na rysunkach 7-9 wskazują na ogólną poprawność przyjętego rozwiązania.
- 2. Zwiększanie ciśnienia tłocznego powoduje wzrost zasięgu tłoczenia *L*, jednak przyrost ten jest stopniowo coraz mniejszy. Wiąże się to z rosnącą wielkością oporów o charakterze tarciowym, w stykach ziaren cząstek stałych, wraz ze wzrostem ciśnienia tłocznego.

- 3. Widoczne są na rys. 8 i 9 duże różnice wyników obliczeń zasięgu tłoczenia (do ok. 1 rzędu wielkości), uzyskiwanych na podstawie wzorów (17) i (31). Różnice te świadczą o istotnym udziale oporów tarciowych, w rozpatrywanych, silnie skoncentrowanych zawiesinach (*w/c* w przedziale 0,4-0,5).
- 4. Wyniki obliczeń zasięgu tłoczenia, dla układów dyspersyjnych i niedyspersyjnych zbliżają się do siebie, w miarę zmniejszania się ciśnienia tłocznego i stopnia koncentracji cząstek cementu w zaczynie.

Literatura

- [1] Bleszczik N. P., *Strukturalno-mechaniczeskije swojstwa i reologia bietonnoj smiesi i presswakumbietona*, Nauka i Tiechnika. Mińsk, 1977.
- [2] Chin W.C., Computational Rheology for Pipeline and Annular Flow, Gulf Proffesional Publishing, 2001.
- [3] Mierzwa J., Właściwości reologiczne zaczynów cementowych stosowanych w wybranych procesach technologicznych budownictwa, Monografia. Politechnika Krakowska 1988.
- [4] Mikoś J., Związki fizyczne struktury porowatości z cechami betonu cementowego, Zeszyty Naukowe. Politechnika Śląska. Gliwice, 1979.
- [5] Struble L. J., Ji X., rozdział *Rheology* w: *Handbook of Analytical Techniques in Concrete Science and Technology*, pod redakcją Ramachandran V.S., Beaudoin J.J., William Andrew Publishing/Noyes, 2001.
- [6] Szerafin J., Równania konstytutywne cieczy w zastosowaniu do dyspersji cementowych w procesie iniekcyjnego wypełniania pustek w strukturze betonu, Rozprawa doktorska, Lublin, 1999.
- [7] Szwabowski J., *Urabialność mieszanki betonowej w ujęciu reologicznym*, ZN Politechniki Śląskiej. Gliwice 1987.
- [8] Warner J., *Practical Handbook of Grouting. Soil, Rock and Structures*, Wiley and Sons, New Jersey 2004.

Influence of the friction factor on the range of cement dispersion flow

Jerzy Szerafin

Faculty of Civil and Sanitary Engineering, Lublin University of Technology, Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: j.szerafin@pollub.pl

Abstract: Dispersial nature of cement grout makes many difficulties in practical applications of the injection process. It is also difficult to describe by theoretical equations. The rheological models treat cement paste as continuous material. In this paper the new flow equation was derived, which contains the factor of the friction between cement grains introduced to the Bingham model. The possibilities of the calculation of this new factor was presented. The analysis of the calculation's results of the classical and new equations shows significant differences. The new equation allows to better predict the effects of the real injection applications.

Key words: injection, cement dispersion, flow equations.

Informacje dla autorów.

Objętość pracy nie powinna przekraczać 16 stron maszynopisu. Maszynopis należy przygotować w formacie A4, jednostronnie, z marginesem 2.5cm z każdej strony. Pracę należy nadsyłać pocztą (1 kopia maszynopisu i dyskietka zapisana w formacie MS-Word) lub drogą elektroniczną.

Układ pracy powinien być następujący: tytuł pracy, pełne nazwiska i imiona autorów, miejsce pracy wraz z adresem e-mail, streszczenie – do 200 słów, słowa kluczowe, właściwy tekst pracy z pierwszym rozdziałem stanowiącym wprowadzenie. Na końcu pracy należy zamieścić w języku angielskim: tytuł pracy, pełne nazwiska i imiona autorów, miejsce pracy wraz z adresem e-mail, abstract – do 200 słów, słowa kluczowe.

Wzory matematyczne należy pisać stylem matematycznym (najlepiej styl Euclid 10, zawarty w edytorze równań MS-Word), np.:

$$S_{u}(z,n) = \frac{4x_{u}(z)\sigma_{u}^{2}}{n\left[1+70.7x_{u}^{2}(z)\right]^{5/6}}$$
$$x_{u}(z) = L_{ux} \cdot \frac{n}{\overline{u}(z)}$$

W tekście należy umieszczać rysunki (tabele) czarno-białe z opisem i podpisem w języku polskim i angielskim.

Do tabeli i rysunków należy umieszczać odnośniki możliwie blisko ich występowania w tekście – Rys. 1, Tab. 1. Odnośniki do literatury należy umieszczać w tekście w następujący sposób: Matthews i Rawlings [1], Murakami [2], Patel i in. [3].

Zestawienie literatury należy umieścić na końcu pracy przed streszczeniem w języku angielskim, w kolejności cytowania w tekście, w następującej formie:

- [1] Matthews F.L., Rawlings R.D., *Composite materials: engineering and science*, London, Chapman and Hall, 1994.
- [2] Murakami S., *Comparison of various turbulence models applied to a bluff body*, J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 46-47 (1993) 389-402.
- [3] Patel V.C, Tyndall J., Yoon J. Y., *Laminar flow over wavy walls*, ASME J. Fluids Eng. 113 (1991) 523-538.

Information for authors.

The text may not exceed 16 typed pages. The manuscript should be typed in the A4 format, with the margins 2.5 cm on each side. The paper should be sent by mail (1 copy and diskette with Ms-Word file) or by e-mail.

The following paper layout should be used: title, authors full names, affiliation with e-mail, abstract (max. 200 words), key words, text of the paper with the introduction as the first chapter.

Equations should be typed using mathematical style (preferably Euclid 10 style in Ms-Word equation editor), for example:

$$\begin{split} S_u\left(z,n\right) &= \frac{4x_u(z)\sigma_u^2}{n\big[1+70.7x_u^2(z)\big]^{5/6}}\\ x_u(z) &= L_{ux}\cdot\frac{n}{\overline{u}\left(z\right)} \end{split}$$

Figures and tables should be prepared monochromatic.

References to figures and tables should be placed close to its appearance in text – Fig. 1, Tab. 1. References to the literature should be cited by names and numbers: Matthews i Rawlings [1], Murakami [2], Patel i in. [3].

All references in the text must be listed at the end of the paper according to its appearance in the text:

- [1] Matthews F.L., Rawlings R.D., *Composite materials: engineering and science*, London, Chapman and Hall, 1994.
- [2] Murakami S., *Comparison of various turbulence models applied to a bluff body*, J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 46-47 (1993) 389-402.
- [3] Patel V.C, Tyndall J., Yoon J. Y., *Laminar flow over wavy walls*, ASME J. Fluids Eng. 113 (1991) 523-538.