

Wpływ sposobu realizacji warunków
brzegowych w metodzie wirów
dyskretnych na odpowiedź
aeroelastyczną pomostów

Monografie – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Budownictwa i Architektury
ul. Nadbystrzycka 40
20-618 Lublin

Tomasz Nowicki

Wpływ sposobu realizacji warunków brzegowych w metodzie wirów dyskretnych na odpowiedź aeroelastyczną pomostów



Politechnika Lubelska
Lublin 2012

Recenzenci:

dr hab. inż. Ewa Błazik-Borowa, prof. Politechniki Lubelskiej

dr hab. inż. Ryszard Sygulski, prof. Politechniki Poznańskiej

Skład i redakcja techniczna: Tomasz Nowicki

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2012

ISBN: 978-83-63569-11-2

Wydawca: Politechnika Lubelska

ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej

Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej

ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin

tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl

www.biblioteka.pollub.pl

Druk: TOP Agencja Reklamowa Agnieszka Łuczak

www.agencjatop.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl

Nakład: 100 egz.

Spis treści

Streszczenie.....	7
Summary.....	7
1.Oznaczenia i symbole.....	8
2.Wprowadzenie.....	13
2.1.Motywacja.....	13
2.2.Cel i zakres opracowania.....	14
2.3.Organizacja opracowania.....	18
3.Podstawowe prawa mechaniki płynów.....	19
3.1.Charakterystyki opisujące płyn.....	19
3.2.Równanie ciągłości.....	20
3.3.Równanie Naviera–Stokesa.....	21
3.4.Pole wirowe przepływu.....	22
3.5.Warunki brzegowe w przepływie.....	28
3.6.Przepływ potencjalny.....	29
3.7.Przepływ dwuwymiarowy.....	29
3.8.Ciało stałe w przepływie dwuwymiarowym.....	31
4.Metody eksperymentalne inżynierii wiatrowej.....	33
4.1.Inżynieria wiatrowa.....	33
4.2.Teoria podobieństwa zjawisk.....	34
4.3.Analiza wymiarowa.....	37
4.4.Tunel aerodynamiczny Politechniki Krakowskiej.....	38
4.5.Oddziaływanie wiatru na pomosty.....	40
5.Metody obliczeniowe inżynierii wiatrowej.....	44
5.1.Przepływy turbulentne.....	44
5.2.Klasyczne modele turbulencji.....	45
5.3.Komputerowe metody rozwiązywania równań różniczkowych....	52

6. Metoda wirów dyskretnych.....	55
6.1. Przegląd zastosowań w inżynierii wiatrowej.....	55
6.2. Założenia.....	62
6.3. Podstawy teoretyczne metody wirów dyskretnych.....	63
6.4. Implementacja komputerowa metody wirów dyskretnych.....	71
6.5. Porównanie z klasycznymi metodami komputerowymi.....	105
6.6. Weryfikacja działania systemu obliczeniowego.....	106
7. Badania autorskie – eksperyment laboratoryjny.....	113
7.1. Przekroje pomostów.....	113
7.2. Eksperyment w tunelu aerodynamicznym.....	122
8. Badania autorskie – symulacje komputerowe.....	169
8.1. Scenariusz obliczeniowy.....	169
8.2. Przebieg symulacji komputerowej.....	172
8.3. Wyniki symulacji komputerowych.....	178
8.4. Komentarz do badań komputerowych.....	184
9. Wnioski końcowe.....	186
9.1. Podsumowanie.....	186
9.2. Potencjalne zastosowania praktyczne.....	187
Bibliografia.....	190

Streszczenie

Z punktu widzenia inżynierii lądowej monografia porusza wyjątkowo istotny temat niestateczności aeroelastycznej lekkich pomostów mostowych. W pracy przedstawiono wyniki szczegółowych analiz odpowiedzi aeroelastycznej czterech typowych profili stosowanych w mostownictwie. Analizy obejmują swoim zakresem zarówno badania laboratoryjne w tunelu aerodynamicznym jak i symulacje numeryczne. W opracowaniu zawarto podstawy teoretyczne przeprowadzonych badań, dokładny opis zastosowanej metodologii oraz obszernie przedstawiono uzyskane wyniki. Rezultaty zostały rzeczowo skomentowane. Sformułowano również zalecenia dla praktyki inżynierskiej.

Równoległym celem monografii jest przedstawienie metody wirów dyskretnych. Opisane zostały podstawy teoretyczne metody oraz szczegóły implementacji komputerowej.

Summary

From the point of view of civil engineering this monograph takes a very important problem of aeroelastic instability of light bridge decks. Four typical decks profiles have been analyzed and the results are presented in this book. The analyses include both wind tunnel laboratory tests and numerical simulations. The study covers theoretical background of the research that been carried out, detailed description of the methodology and the results have been presented comprehensively. The results have been demonstratively commented and recommendation for engineering practice have been formulated.

Presentation of Discrete Vortex Method is a parallel object of the monography. Theoretical fundamentals of the method and their computer implementations have been depicted.

1. Oznaczenia i symbole

Litery łacińskie

a	przyśpieszenie
A	pole powierzchni, obszar, współczynnik empiryczny
B	szerokość, współczynnik empiryczny
c_x, c_y, c_α	współczynniki tłumienia związane ze stopniami swobody
d	odległość rozstawu sprężyn zawieszenia modelu
Eu	liczba Eulera
\mathbf{F}	siła
F_x, F_y	składowe siły
f_y	częstotliwość drgań giętnych (pionowych) pomostu lub modelu
f_α	częstotliwość drgań skrętnych (obrotowych) pomostu lub modelu
f_f	dominująca częstotliwość flatteru
Fr	liczba Frouda
g	przyśpieszenie ziemskie
H	wysokość
I	moment bezwładności
I_v	intensywność turbulencji
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	wersory osi X,Y,Z odpowiednio
i	jednostka urojona
K	współczynnik oddziaływania wzajemnego paneli
$\mathbf{K}, \mathbf{K}_\lambda$	funkcja jądra wiru dyskretnego
k	energia kinetyczna turbulencji
k_x, k_y, k_α	współczynniki sztywności związane ze stopniami swobody
k_L, k_W	skale podobieństwa

L	długość, szerokość, oznaczenie krzywej
m	masa
\underline{m}	masa na jednostkę długości
M	moment siły, rząd momentu wirowego, liczba Macha
N_p	liczba wirów dyskretnych
N_s	liczba paneli ciała
P, Q	liczby losowe
p	pole ciśnień, ciśnienie w punkcie
\bar{p}	wartość średnia ciśnienia
\tilde{p}	fluktuacja ciśnienia
Re	liczba Reynoldsa
$\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{q}$	wektory wodzące
r, θ	oznaczenie współrzędnych biegunowych
Δs	długość panela
St	liczba Strouhala
Th	liczba Theodorsena
$t, \Delta t$	czas, przedział czasu
T	temperatura
\mathbf{V}	prędkość w punkcie
V_x, V_y	składowe wektora prędkości
V_t, V_n	składowa styczna i normalna wektora prędkości
V_c^f, V_1	prędkość krytyczna (startowa) flatteru
V_2	prędkość wygaszenia flatteru
V_3	prędkość zaniku oscylacji
\mathbf{u}	pole prędkości przepływu
u_x, u_y, u_x	składowe wektora pola prędkości
\mathbf{u}_1	pole prędkości przyptywu globalnego
\mathbf{u}_2	pole prędkości indukowane przez chmurę wirową

\mathbf{u}_3	pole prędkości indukowane przez obracające się ciała
\tilde{u}, \tilde{w}	fluktuacja prędkości
X, Y, Z	globalny układ kartezjański, współrzędne globalne
x, y, z	lokalny układ kartezjański, współrzędne lokalne, jako indeksy - oznaczenie składowych
$\mathbf{x}=[x, y]$	punkt na płaszczyźnie
\underline{Z}	moment wirowy (wartość zespolona)

Litery greckie

α	kąt obrotu ciała, kąt natarcia, współczynnik empiryczny
β	kąt nachylenia panela, współczynnik empiryczny
Γ, Γ	cyrkulacja, moc wiru, wartość wirowości
Γ_0	suma wirowości
γ	wirowość panela
δ	delta Diraca
ε	rozmiar jądra wiru dyskretnego, dysypacja energii kinetycznej
ε_B	odległość emisji dyskretnej warstwy brzegowej
η	współczynnik empiryczny
κ	stała von Karmana
λ_ε	funkcja jądra wiru dyskretnego (cutoff function)
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ν	współczynnik lepkości kinematycznej
ν_T	współczynnik kinematycznej lepkości turbulentnej
Π	oznaczenie płaszczyzny lub wielkości bezwymiarowej
ρ	gęstość
ϕ	faza początkowa
Φ	potencjał pola przepływu
ψ	funkcja strumienia

Ω	prędkość obrotowa
ω, ω	pole wirowe prędkości przepływu
ω_p, ω_p	dyskretne pole wirowe prędkości przepływu
ω_y, ω_α	częstości kołowe drgań własnych

Zapis wielkości skalarnych i wektorowych

Przyjęto, że czcionka pogrubiona prosta służy do oznaczania wielkości wektorowych. Natomiast krój o grubości normalnej pochyłonej wskazuje zmienną skalarną. Jeżeli wielkość wektorowa zapisana jest krojem normalny pochyłonym, należy przez to rozumieć jej moduł.

Rozważania i obliczenia, jeżeli nie zaznaczono inaczej, przeprowadzane są w kartezjańskim układzie odniesienia $[X, Y, Z]$ lub $[X, Y]$. Wielkości wektorowe zapisywane są w notacji wersorowej lub uproszczonej z użyciem nawiasów kwadratowych:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = [A_x, A_y, A_z]$$

Oprócz układu kartezjańskiego zastosowany został układ biegunowy $[r, \theta]$. Za każdym razem wyraźnie to zaznaczono.

Zapis liczb zespolonych

Liczby zespolone zapisywane są czcionką prostą niepogrubioną z podkreśleniem, zaś ich moduły oraz części rzeczywiste i urojone czcionką pochyłą bez podkreślenia. Część rzeczywistą podpisano indeksem dolnym x , zaś urojoną y . Jednostkę urojona oznaczono przez \mathbf{i} .

$$\underline{a} = a_x + \mathbf{i} a_y, \quad a = |\underline{a}|$$

Zapis rachunku różniczkowego

Oznaczając przez f funkcję skalarną, a przez $\mathbf{F} = \mathbf{i} F_x + \mathbf{j} F_y + \mathbf{k} F_z = [F_x, F_y, F_z]$ funkcje wektorową, podstawowe operacje rachunku różniczkowego zapisywane są w postaci:

$$\nabla(\dots) = \mathbf{i} \frac{\partial \dots}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \dots}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \dots}{\partial z} \quad \text{operator różniczkowy nabra}$$

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{gradient}$$

$$\nabla \circ \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{dywergencja}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad \text{rotacja}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \circ (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{laplasjan skalara}$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = [\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z] \quad \text{laplasjan wektora}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (\dots) = u_x \frac{\partial \dots}{\partial x} + u_y \frac{\partial \dots}{\partial y} + u_z \frac{\partial \dots}{\partial z} \quad \text{pochodna konwekcyjna}$$

Jedynie w rozdziale 5.2., ze względu na złożoność postaci wzorów matematycznych, zastosowano zapis pochodnych w symbolice wskaźnikowej. W symbolice tej indeks umieszczony przed przecinkiem oznacza składową wielkości, której pochodna jest obliczana, natomiast indeks umieszczony po przecinku – symbol współrzędnej, względem której ta pochodna jest obliczana. Użyto również umowy sumacyjnej, tzn. powtórzenie indeksu oznacza zapis sumy, np.:

$$\nabla \mathbf{F} = F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z} = F_{i,i}$$

gdzie indeks i jest ogólnym oznaczeniem osi oraz $i=1,2,3$, gdzie kolejne cyfry oznaczają osie układu współrzędnego.

2. Wprowadzenie

2.1. Motywacja

Budowle zdolne oprzeć się niekorzystnemu oddziaływaniu środowiska i zapewniające przez to człowiekowi możliwość realizacji jego egzystencjalnych celów są bez wątpienia wyznacznikiem rozwoju cywilizacji. Każda epoka w dziejach ludzkości utrwaliła się poprzez budowle wzniesione podczas jej trwania. Zdecydowana większość wykształconych ludzi usłyszawszy słowo Egipt przywołuje w wyobraźni obraz kamiennych piramid. Miasto Paryż i wieża Eiffela stanowią obecnie jedność, a wizytówką metropolii San Francisco jest most Golden Gate. Bardzo długo można wymieniać miejsca, których wartość kulturalna została podniesiona za sprawą dzieł budowlanych. Nie ulega więc wątpliwości, że wysiłki podejmowane w kierunku lepszego zrozumienia konstrukcji budowlanych są potrzebą leżącą w naturze człowieka, wynikającą z przesłanek dalece przekraczających zaspokojenie bieżących potrzeb bytowych.

Projektanci konstrukcji muszą zawsze brać pod uwagę przegraną z siłami natury. Tak stało się w roku 1940, kiedy most Tacoma Narrows Bridge uległ zniszczeniu w konsekwencji rozwinięcia się zjawiska flatteru w środkowej części pomostu (Ilustracja 1). Od tamtego wydarzenia nie doszło do równie spektakularnej katastrofy, lecz dziś nikt nie wątpi, że przekraczanie kolejnych granic wysokości i rozpiętości obiektów budowlanych może prowadzić do wystąpienia zjawisk wcześniej nie spotykanych.

Niniejsza praca skupia się na jednej z sił natury: wietrze i jego oddziaływaniu na konstrukcje budowlane. To właśnie dynamiczne oddziaływanie wiatru było przyczyną katastrofy mostu w miejscowości Tacoma. Do dziś zjawiska wzajemnej interakcji wiatr – konstrukcja, ze względu na ich złożoną naturę, nie są dostatecznie rozpoznane, czego konsekwencją jest pewien poziom ryzyka wpisany w każdy nowy projekt. Analizy i badania zawarte w pracy zawężono do zakresu odpowiedzi aeroelastycznej lekkich i długich pomostów. Pomosty takie spotyka się przeważnie w mostach wiszących i podwieszonych. Oba typy konstrukcji pozwalają pokonywać duże rozpiętości w sposób ekonomicznie uzasadniony oraz wnoszą nową jakość estetyczną do przestrzeni publicznej. Obiekty takie są coraz częściej wznoszone, ponieważ trwale wpisują się w dorobek kulturowy państw, a ich konstrukcje stają się coraz śmielsze [2]. Celowe jest zatem rozwijanie warsztatu inżynierskiego, umożliwiającego lepszy wgląd w pracę tego typu budowli i co za tym idzie zapewnienie ich bezpieczeństwa.

Ograniczenie pracy do konkretnej dziedziny inżynierskiej pozwoliło na szczegółowe rozpoznanie zagadnień z nią związanych. Wyniki badań,

za sprawą takiego podejścia, mogą być bezpośrednio zastosowane w praktyce inżynierskiej. Jednak, pomimo obranej drogi, praca zawiera wiele aspektów ogólnych. Najważniejszym z nich jest studium metody wirów dyskretnych. Jest to obiecująca, lecz relatywnie młoda metoda numeryczna rozwiązywania podstawowego równania mechaniki płynów – równania Naviera–Stokesa. Została ona nie tylko użyta do przewidzenia możliwości wystąpienia zjawisk niestabilności aeroelastycznych, lecz również sama w sobie jest przedmiotem badań w przedstawianej pracy.



Ilustracja 1. Katastrofa Tacoma Narrows Bridge

Źródło: <http://www.enm.bris.ac.uk>

2.2. Cel i zakres opracowania

Praca skupia się na odpowiedzi aeroelastycznej lekkich pomostów. Pomosty takie projektuje się głównie w mostach podwieszonych i wiszących (Ilustracja 2). Tego typu konstrukcje pozwalają na pokonywanie dużych rozpiętości bez podpór pośrednich, są łatwe w montażu i przy dużych rozpiętościach relatywnie tanie.

Oprócz niewątpliwych zalet pomosty takie charakteryzują się stosunkowo niedużą masą oraz niewielkimi sztywnościami: giętą i skrętną, przez co są podatne na wzbudzenie aerodynamiczne. Problem niestabilności dotyczy głównie środkowych części długich przęseł (Ilustracja 1). Potrzeba pokonywania coraz dłuższych dystansów oraz konieczność zmniejszania kosztów, prowadzi do zmniejszania wymiarów i masy pomostów. Prowadzi to niewątpliwie

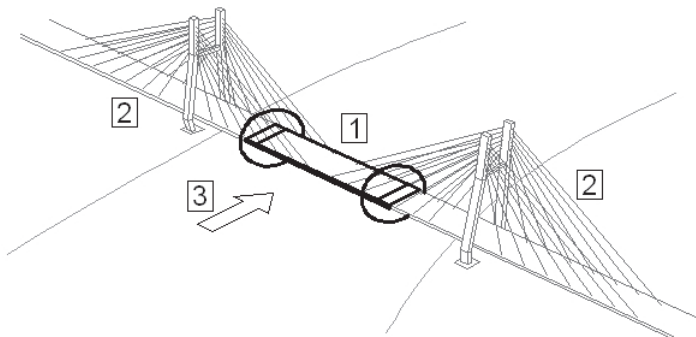
do rozwiązań zarówno bardziej ekonomicznych, jak i estetycznych. Jednak równocześnie stawia przed inżynierami coraz większe wymagania.



Ilustracja 2. Od lewej: a) Most Siekierkowski w Warszawie o konstrukcji podwieszonej, b) Most Akashi Kaikyo (Japonia) wiszący

Źródło: a) <http://lotniczapolska.pl>, b) Wikipedia

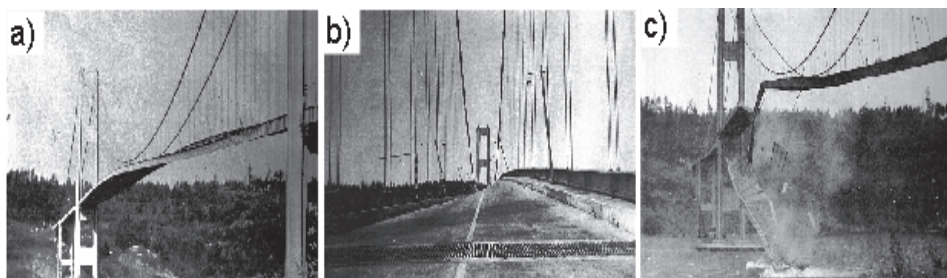
Obecnie na świecie najbardziej znanym przypadkiem zaniedbania przez projektantów dynamicznego wpływu wiatru na pomost jest katastrofa pierwszego mostu Tacoma Narrows (Ilustracje 1 oraz 3). Został on oddany do użytkowania 1. lipca 1940 roku. Już podczas prac konstrukcyjnych oraz w trakcie użytkowania konstrukcja wykazywała wyraźne cechy niestabilności aerodynamicznej. Wiejący wiatr wywoływał widoczne oscylacje konstrukcji. Most został nazwany Galopującą Gertą i nawet stał się atrakcją turystyczną.



Rysunek 1. Schemat mostu podwieszono: 1 – część środkowa pomostu potencjalnie aerodynamicznie niestabilna, w badaniach zastąpiona modelem, 2 – części zewnętrzne stabilne, 3 – strumień wiatru

Źródło: opracowanie własne

W pierwszych miesiącach funkcjonowania obiektu zespół naukowców i inżynierów z Uniwersytetu w Waszyngtonie podejmował próby wyjaśnienia zjawiska i szukał sposobów zaradczych. Jednak zanim rozwiązanie zostało znalezione, most runął 7. października 1940 roku przy wietrze wiejącym z prędkością ok. 19 m/s , mimo że obliczenia konstrukcyjne wykonywano przy założeniu prędkości znacznie większej. Niestety nie uwzględniono dynamicznego działania wiatru i nie wzięto pod uwagę zjawisk aeroelastycznych, które wówczas były znane w lotnictwie, lecz ciągle nieuwzględniane w budownictwie.



Ilustracja. 3 Katastrofa mostu Tacoma Narrows Bridge w roku 1940, a), b) drgająca środkowa część pomostu, c) zniszczony pomost

Źródło: <http://www.enm.bris.ac.uk>

Przypadek mostu Tacoma Narrows Bridge zapoczątkował rozwój interdyscyplinarnej dziedziny naukowej inżynierii wiatrowej. Brak podobnych katastrof mostowych w późniejszych dziejach budownictwa należy niewątpliwie zaliczyć do jej sukcesów. Jednak przypadek mostu w Wołgogradzie w 2010 roku (Ilustracja 4) niezbitnie pokazuje, że aerodynamika pomostów nie jest jeszcze zamkniętą dziedziną wiedzy. Pomost obiektu wpadł w drgania z amplitudą przewyższającą $1,5\text{ m}$ przy wietrze wiejącym z prędkością 18 m/s . W tym przypadku nie doszło do katastrofy, jednak most został wyłączony z ruchu. W momencie powstania niniejszej pracy brak było rzetelnych naukowych publikacji na ten temat, lecz wstępne ustalenia co do przyczyny zjawiska, tj. wzbudzenia wiatrowego, wydają się jak najbardziej trafne. Należy tutaj zaznaczyć, że most w Wołgogradzie nie miał ani konstrukcji wiszącej, ani podwieszanej, tzn. takich z którymi wiązano możliwość wystąpienia podobnych zjawisk.

W pracy badania aerodynamiczne pomostów zostały przeprowadzone na modelach laboratoryjnych i komputerowych. Założono, że w przypadku długiego pomostu, jego środkowa część (Rysunek 1) może być analizowana jako

przypadek dwuwymiarowy o 2 stopniach swobody. Założenie takie jest powszechnie przyjmowane przez naukowców i inżynierów oraz szczegółowo opisane w literaturze tematycznej.



Ilustracja 4. Wzbudzenie aerodynamiczne mostu w Wołgogradzie w roku 2010, a) widok konstrukcji pomostu, b) c) drgający pomost

Źródło: <http://www.1tv.ru>

Niniejsza praca łączy w sobie dwa główne cele badawcze:

- analizę odpowiedzi aeroelastycznej modeli pomostów w wybranych konfiguracjach,
- analizę metody wirów dyskretnych jako metody numerycznej, mogącej służyć do przewidywania takiej odpowiedzi.

W związku z tym termin „warunek brzegowy”, postawiony w temacie pracy należy rozumieć jako:

- wariant konfiguracji pomostu, tj. jego kształt i parametry zawieszenia,
- sposób realizacji emisji warstwy brzegowej w metodzie wirów dyskretnych.

Praca ma zatem charakter dwutorowy: eksperymentalny i numeryczny. Starano się w ten sposób podejść do problemu w sposób jak najbardziej kompleksowy. Część eksperymentalna została przeprowadzona w tunelu aerodynamicznym Laboratorium Inżynierii Wiatrowej Politechniki Krakowskiej. Natomiast realizacja części numerycznej wiązała się z koniecznością opracowania autorskiego programu do symulacji przepływów turbulentnych opartego na algorytmach metody wirów dyskretnych. Metoda ta jest bowiem metodą młodą, jeszcze nieugruntowaną i ciągle badaną. W chwili pisania pracy autorowi nie były znane żadne programy komputerowe dostępne na zasadach komercyjnych implementujące tą metodę.

Podsumowując, praca leży na styku dyscyplin naukowych:

- budownictwa,
- inżynierii wiatrowej,
- metod numerycznych.

2.3. Organizacja opracowania

Całość opracowania składa się z 8 rozdziałów wliczając wprowadzenie. Rozdziały 2, 3, 4, 5 wprowadzają podstawy teoretyczne, na bazie których zostały wykonane autorskie prace badawcze. Rozdziały 6, 7, 8 zawierają opis tych prac, uzyskane wyniki oraz wnioski. Rozdział nr 5 łączy obie te cechy. Prace uzupełniają załączniki oraz bibliografia.

Rozdział 2 zestawia podstawową terminologię, wzory oraz prawa mechanik płynów w zakresie stosowanym w pracy. Przy czym nacisk został położony na zilustrowanie i interpretację fizyczną przedstawionych zagadnień, bez przytaczania wyprowadzeń i dowodów matematycznych, gdyż te dostępne są w literaturze źródłowej.

Rozdział 3 zamyka elementarną wiedzę z dziedziny inżynierii wiatrowej niezbędną do zrealizowania postawionych celów pracy. Omówiona jest w nim teoria podobieństwa zjawisk wraz z zasadami analizy wymiarowej. Opisany jest tutaj tunel aerodynamiczny, w którym przeprowadzono badania eksperymentalne. Zestawiono również zjawiska aerodynamiczne dotyczące pomostów.

Rozdział 4 przedstawia klasyczne metody obliczeniowe mogące służyć do komputerowego rozwiązania postawionego problemu. Przegląd ten ma na celu wprowadzenie metody wirów jako alternatywnej techniki pozbawionej wad typowych dla metod klasycznych.

Rozdział 5 omawia podstawy metody wirów dyskretnych oraz objaśnia szczegółowo sposób implementacji jej algorytmów obliczeniowych w postaci autorskiego programu komputerowego

Rozdział 6 to dokładny opis wykonanego eksperymentu w tunelu aerodynamicznym zawierający m. in. wyniki badań, wnioski oraz odniesienie do prac innych autorów.

Rozdział 7 dotyczy eksperymentu numerycznego i prezentuje symulacje komputerowe wykonane autorskim systemem obliczeniowym VIR2D wraz z odniesieniem do wyników badań doświadczalnych

Rozdział 8 to podsumowanie, zestawienie wniosków, wskazanie zastosowań praktycznych oraz określenie dróg kontynuacji podjętego tematu.

3. Podstawowe prawa mechaniki płynów

Kluczową kwestią analizowanych zagadnień jest opływ powietrza wokół modelu (laboratoryjnego lub numerycznego) wraz z ich wzajemną interakcją. Zaimplementowane zostały dwie grupy metod: eksperymentalne oraz numeryczne. Metody te można obecnie traktować jako wzajemnie uzupełniające się ze wskazaniem na eksperymentalne jako wiodące. Jednak podstawą obu nurtów jest teoretyczna mechanika płynów. Z tego powodu praca rozpoczyna się zestawieniem najważniejszych pojęć i praw z tej dziedziny. Rozdział został opracowany w oparciu o pozycje bibliograficzne [8, 9, 10, 11, 13, 17, 18].

3.1. Charakterystyki opisujące płyn

Ogólnym mianem płynu określa się 2 stany skupienia: ciekły i gazowy. (W pracy analizowane były wyłącznie przepływy powietrza.) Przepływ płynu jest znany, jeżeli w każdym punkcie określone są pola związane z przepływem, tzn.: prędkość \mathbf{u} , gęstość ρ , temperatura T i ciśnienia p . Wielkości te w ogólnym przypadku są zależne od współrzędnych położenia i czasu. W technice jednak często spotyka się przepływy, które wykazują pewne charakterystyczne właściwości. Przepływ ustalony występuje wówczas, jeżeli funkcje przepływu nie zależą od czasu. Istnieje wiele zjawisk fizycznych, dla których to założenie jest spełnione. Mówimy wówczas, że funkcje pól są funkcjami ustalonymi (stacjonarnymi). Przepływ nieściśliwy oznacza, że w dowolnym punkcie płynu jego gęstość ma zawsze taką samą wartość. Prowadzi to do wniosku, że w przypadku takiego płynu działanie sił zewnętrznych nie może zmienić jego objętości, a jedynie kształt. Ciecze w większości analiz technicznych traktowane są jako płyny nieściśliwe. W przypadku problemów inżynierii wiatrowej prędkości przepływów powietrza nie przekraczają poziomu 0,4 prędkości dźwięku (w powietrzu) i z tego powodu powietrze również może być również traktowane jako nieściśliwe.

W celu opisu przepływów wprowadza się szereg pojęć, z których najważniejsze zostaną przytoczone. Strumień objętości przepływu jest objętością jaka przepływa przez powierzchnię A w czasie jednostkowym:

$$\iint_A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \iint_A u_n dA, \quad (3.1)$$

gdzie $d\mathbf{A}$ – skierowany element powierzchni, \mathbf{u} – wektor prędkości w tym punkcie, u_n – składowa normalna do elementu

Strumień masy przepływu mówi ile masy płynu przepływa przez powierzchnię A w czasie jednostkowym:

$$\iint_A (\rho \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_A (\rho u)_n dA, \quad (3.2)$$

gdzie oznaczenia jak wyżej.

Natomiast linią prądu nazywamy linię ciągłą styczną w każdym punkcie do wektora prędkości przepływu \mathbf{u} .

3.1.1. Model płynu Newtona

Płynem newtonowskim nazywany jest płyn lepki, który może być opisany modelem Newtona–Maxwella. Płyny złożone z prostych cząsteczek chemicznych spełniają to założenie. W szczególności płynem takim jest powietrze atmosferyczne. Model opiera się na hipotezie, że naprężenia styczne w płynie są proporcjonalne do pochodnej prędkości. W przypadku pola prędkości $\mathbf{u} = [u_x, 0, 0]$ możemy zapisać:

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (3.3)$$

gdzie współczynnik μ nazywany jest lepkością dynamiczną.

Oprócz lepkości dynamicznej wprowadza się pojęcie lepkości kinematycznej, która wyraża się wzorem:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.4)$$

Lepkość płynu w ogólnym przypadku zależy od temperatury i ciśnienia. Zatem może być różna w różnych obszarach. W przypadku gazów lepkość jest wynikiem przekazywana pędu między sąsiednimi warstwami poruszającego się płynu, za pośrednictwem ruchu cząsteczek. Rośnie ona zatem wraz ze wzrostem temperatury. Występowanie lepkości płynu jest przyczyną pojawiania się warstwy brzegowej na ciałach stałych zanurzonych w przepływie.

3.2. Równanie ciągłości

Równanie ciągłości wyraża prawo zachowania masy (niezniszczalności materii) w odniesieniu do pola prędkości przepływu w obszarze bez źródeł płynu. Wyraża się ono równaniem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0. \quad (3.5)$$

Równanie to dotyczy przypadku ogólnego, w którym gęstość płynu ρ może być różna w poszczególnych punktach obszaru i może także zmieniać się w czasie t , zaś pole prędkości jest funkcją położenia i czasu $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x, y, z, t)$. Pierwszy człon równania wyraża zmianę masy zawartej w elementarnej objętości kontrolnej wskutek lokalnej zmiany gęstości płynu w czasie. Drugi człon odpowiada zmianie masy będącej wynikiem przepływu przez tą objętość.

Jeżeli przepływ jest ustalony, wówczas równanie ciągłości przybiera postać:

$$\nabla \rho \mathbf{u} = 0 \quad . \quad (3.6)$$

W wielu zagadnieniach technicznych możemy nie uwzględniać efektów ściśliwości płynu, tzn. poczynić założenie $\rho = \text{const}$. Wówczas równanie ciągłości przybiera najprostszą formę:

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Treścią fizyczną równania (3.7) jest niezmiennosc objętości elementu płynu nieściśliwego. Pola spełniające to równanie noszą nazwę pól bezźródłowych.

3.3. Równanie Naviera–Stokesa

Równanie Naviera–Stokesa jest podstawowym równaniem opisującym ruch płynu. Wyraża ono zasadę zachowania pędu. W postaci ogólnej dla płynu newtonowskiego przybiera ono postać:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{3} \nu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad , \quad (3.8)$$

gdzie zastosowano oznaczenia jak w poprzednich rozdziałach.

Człon stojący po lewej stronie równania (3.8) reprezentuje siły bezwładności i jako pochodna substancjalna może zostać przedstawimy w postaci rozwiniętej:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad . \quad (3.9)$$

Pierwszy człon prawej strony (licząc od lewej) równania (3.8) uwzględnia siły masowe czynne \mathbf{F} . Są to wszystkie siły, które mogą być związane z masą jednostkową np. siła grawitacji lub odśrodkowa. W przypadku analizy ruchu lekkich gazów siłę ciężkości można pominąć w obliczeniach i przy braku innych sił masowych człon ten znika z równania. Kolejny człon wyraża siły wynikające z istnienia skalarnego pola ciśnienia p . Siły te są związane z gradientem tego ciśnienia i gęstością płynu. Ostatnie dwa człony prawej strony reprezentują siły

lepkości. Łatwo spostrzec, że przy założeniu $\rho = \text{const}$ i na mocy (3.7) ostatni człon wynosi zero.

W myśl powyższych założeń równanie Naviera–Stokesa przybiera szczególną postać:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} . \quad (3.10)$$

Postać ta będzie wykorzystywana w dalszej części pracy.

3.4. Pole wirowe przepływu

Pole wirowe $\boldsymbol{\omega}$ związane jest z polem prędkości \mathbf{u} zależnością:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} . \quad (3.11)$$

Ponieważ zachodzi tożsamość: $\nabla \boldsymbol{\omega} = \nabla (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$, to pole wirowe jest zawsze polem bezźródłowym.

Linia wirową (analogia od linii prądu) nazywamy linię styczną w każdym punkcie do wektora $\boldsymbol{\omega}$. Powierzchnię utworzoną z linii wirowych nazywana jest powierzchnią wirową. Jeżeli taka powierzchnia daje w przekroju linię zamkniętą, to określana jest mianem rukki wirowej. Płyn wypełniający rurkę wirową nazywany jest wirem. Wir, którego przekrój poprzeczny ma wymiar elementarny nazywamy włóknem wirowym.

Częstym przypadkiem w przyrodzie jest sytuacja, w której cała masa ośrodka płynnego z wyjątkiem wyraźnie wydzielonych obszarów porusza się ruchem potencjalnym, tzn. wszędzie, poza wyodrębnionymi obszarami, zachodzi $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Wyróżnione wiry nazywane są wirami izolowanymi.

Strumieniem wirowości (analogia do strumienia prędkości) określa się całkę powierzchniową ze składowej normalnej wektora wirowości:

$$\iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A} = \iint_A \omega_n dA , \quad (3.12)$$

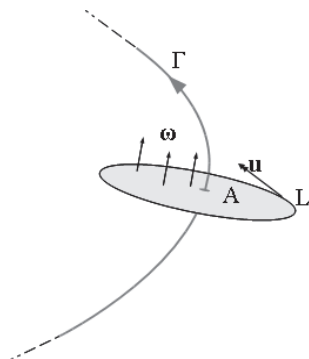
gdzie $d\mathbf{A}$ – skierowany element powierzchni, $\boldsymbol{\omega}$ – wektor wirowości w tym punkcie, ω_n – składowa normalna do elementu.

Cyrkulacja prędkości jest całką liniową ze składowej stycznej wektora prędkości:

$$\int_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_L u_t dl , \quad (3.13)$$

gdzie $d\mathbf{l}$ – skierowany element linii, u_t – składowa styczna do linii.

3.4.1. Twierdzenie Stokesa



Rysunek 2. Ilustracja twierdzenia Stokesa

Źródło: opracowanie własne

Wyjątkowo przydatne w mechanice płynów jest twierdzenie Stokesa mówiące, że strumień wirowości przez powierzchnię A (Rysunek 2), ograniczony konturem zamkniętym L jest równy cyrkulacji prędkości wzdłuż tego konturu zamkniętego (3.14). Zależność ta stanowi podstawę do określania cyrkulacji wiru Γ . Cyrkulacja ta nazywana jest w pracy również mocą wiru lub jego wirowością.

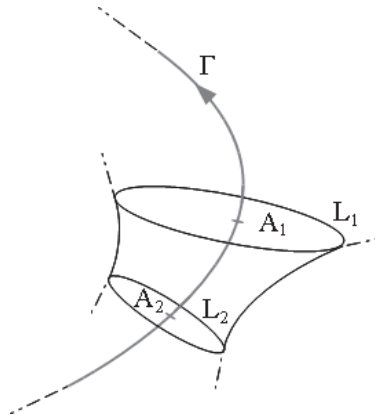
$$\iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma \quad (3.14)$$

3.4.2. Pierwsze twierdzenie Helmholtza

Pierwsze twierdzenie Helmholtza stanowi, że wzdłuż rurki wirowej (Rysunek 3) strumień wirowości obliczany dla dowolnego jej przekroju jest wielkością stałą. W szczególności moc wiru jest stała w przestrzeni. Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem (na podstawie twierdzenia Stokesa), że cyrkulacja prędkości wzdłuż dowolnego konturu zamkniętego obejmująca zawsze te same wiry nie zmienia się.

$$\Gamma = \iint_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.15)$$

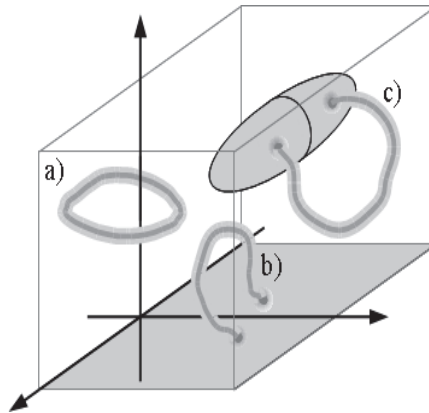
$$\Gamma = \oint_{L_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.16)$$



Rysunek 3. Rurka wirowa o zmienny przekroju

Źródło: opracowanie własne

Konkluzją wynikającym z pierwszego twierdzenia Helmholtza jest wniosek dotyczący kształtu wirów w płynie. Wiry nie mogą się kończyć w obrębie rozpatrywanej masy płynu. Mogą mieć formę pierścieni wirowych, przylegać obustronnie do granic płynu lub rozciągać się do nieskończoności (Rysunek 4 oraz Ilustracja 5).



Rysunek 4. Możliwe konfiguracje wirów w płynie: a) pierścień, b) końce linii na granicy obszaru przepływu, c) końce wiru na granicy ciała zanurzonego w przepływie

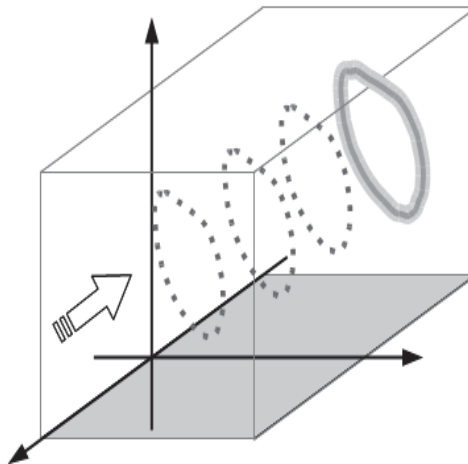
Źródło: opracowanie własne



Ilustracja 5. Przykład wiru występującego w przyrodzie

Źródło: <http://concen.org>

3.4.3. Drugie twierdzenie Helmholtza



Rysunek 5. Ruch linii wirowej w płynie nielepkim

Źródło: opracowanie własne

Przy założeniu płynu nielepkiego cyrkulacja prędkości wzdłuż dowolnego zamkniętego konturu płynnego, tzn. łączącego wciąż te same elementy płynu i przemieszczająca się wraz z ich ruchem jest stała w czasie. Oznacza, to że wiry są liniami materialnymi, a cyrkulacja posiada cechę trwałości (Rysunek 5). Twierdzenie to wynika wprost z równania Naviera – Stokesa.

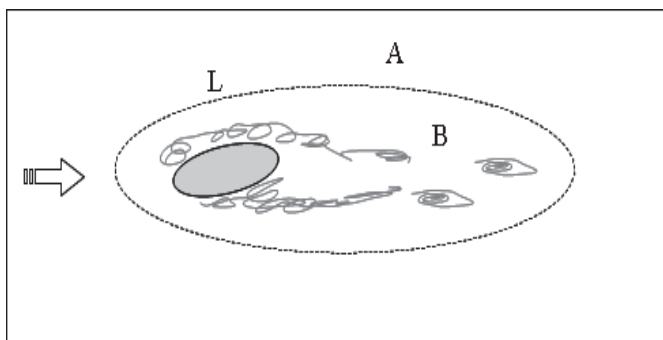
Rozwinięciem drugiego prawa Helmholtza dla płynów lepkich jest twierdzenie Kelvina [13]:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \nu \int_L (\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r} . \quad (3.17)$$

Stanowi ono opis ruchu linii wirowej w płynie lepkim, w którym linia ta zanika. W przypadku płynu nielepkiego prawa strona wynosi zero i równanie wyraża drugie prawo Helmholtza.

3.4.4. Prawo zachowania wirowości

Prawo zachowania wirowości ma zastosowanie w przypadku przepływów z obszarami wirów izolowanych (Rysunek 6) i mówi, że całkowita cyrkulacja wirów izolowanych wynosi zero [15, 30]. Najprostszą ilustracją tego prawa jest przepływ płynu wokół ciała stałego. Przyjmijmy, że wszędzie w dużej odległości od tego ciała przepływ jest bezwirowy. Jedynym źródłem wirowości jest obecność ciała, tzn. brak jest zewnętrznego źródła wirów. Zakładając, że obszar przepływu jest nieskończony, zawsze możemy dobrać taki kontur zamknięty L , który obejmie wszystkie wiry. Cyrkulacja wyznaczona wokół tego kontury z uwzględnieniem obszaru zewnętrznego wynosi zero, co oznacza na podstawie (3.14), że suma cyrkulacji wszystkich wirów izolowanych również musi wynosić zero. Wniosek ten jest ważny, ponieważ mówi, że całkowita wirowość wprowadzona do przepływu poprzez obecność ciała stałego znosi się. Oznacza to również, że zanik wirów postępuje w jednakowym tempie bez względu na ich znak.



Rysunek 6. Ciało stałe w strumieniu bezwirowym A - obszar bezwirowy, B - obszar wirów izolowanych

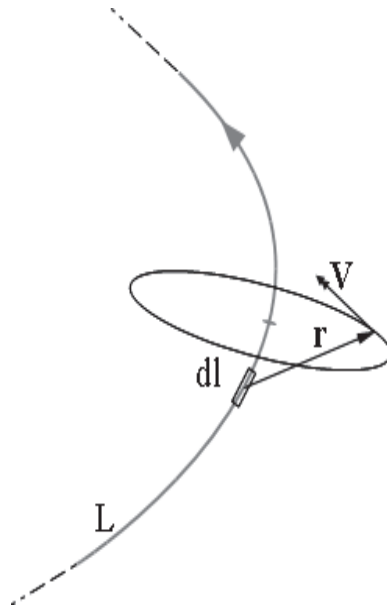
Źródło: opracowanie własne

3.4.5. Prawo Biota–Savarta

Jeżeli wirowość przepływu jest znana, tzn. znane jest położenie linii wirowych i ich moce (cyrkulacje), wówczas pole prędkości indukowane w dowolnym punkcie może być znalezione przy zastosowaniu prawa Biota-Savarta. Jeżeli weźmiemy wir o cyrkulacji Γ (Rysunek 7), to prędkość wzbudzoną przez ten element możemy określić ze wzoru:

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} . \quad (3.18)$$

Jest to zmiana prędkości wywołana przez pojedynczy wir w danym punkcie. Jeżeli pole wirowe składa się z większej liczby wirów, to należy zsumować wszystkie wpływy w punkcie.

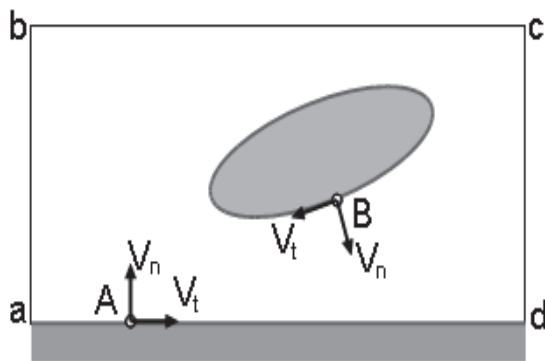


Rysunek 7. Prędkość indukowana przez wir

Źródło: opracowanie własne

3.5. Warunki brzegowe w przepływie

Wyznaczenie przepływu, tzn. znalezienie przynajmniej jego pola prędkości, polega na rozwiązaniu równania Naviera–Stokesa (3.8). Jest to równanie różniczkowe i wymaga sformułowania warunków brzegowych. Obliczenia wykonywane są zazwyczaj w skończonej domenie, na przykład prostokątnej jak na rysunku 8., której granice mogą być obrane w obrębie płynu (wolne brzegi domeny) lub na granicy z ciałem stałym (ograniczenie domeny). Ponadto w domenie obliczeniowej mogą znajdować się ciała stałe. W pierwszej kolejności wymagamy opisu przepływu na granicach domeny. Będzie to albo określenie napływu, tzn. dla wybranych granic określamy wartość prędkości przepływu (warunek Dirichleta), albo określenie sposobu ułożenia linii prądu w sąsiedztwie tych granic (warunek Neumana). W przypadku ciał stałych znajdujących się w przepływie wymagamy, aby przepływ był do nich „przyklejony”. Realizuje się to poprzez spełnienie warunków określanych w literaturze jako no-through-flow oraz no-slip. Warunek no-slip oznacza znikanie składowej stycznej prędkości V_t w każdym punkcie na ograniczeniu domeny A lub na brzegu ciała B (Rysunek 8.) . Natomiast warunek no-through-flow oznacza brak wnikania i emisji płynu na granicy z ciałem stałym i jest spełniony, gdy składowa normalna prędkości V_n wynosi zero. Oznacza to również, że żadna linia prądu nie może przechodzić przez ciało. W związku z tym może on być również zrealizowany w ujęciu Neumana.



Rysunek 8. Domena obliczeniowa dla przepływu a-b, b-c, c-d – wolne brzegi domeny, a-d – ograniczenia domeny, V_n, V_t – składowe prędkości normalna i styczna

Źródło: opracowanie własne

Zazwyczaj ruch płynu rozpatrujemy względem domeny obliczeniowej. Jeżeli ciało stałe w przepływie także porusza się względem tej domeny, wówczas składowe prędkości styczną i normalną V_t, V_n obliczane w dowolnym punkcie na brzegu ciała należy rozpatrywać w układzie odniesienia związanym z tym ciałem lub uwzględnić jego ruch.

3.6. Przepływ potencjalny

Przepływ nazywamy potencjalnym, jeżeli istnieje taka funkcja potencjalna, że pole prędkości jest jej gradientem:

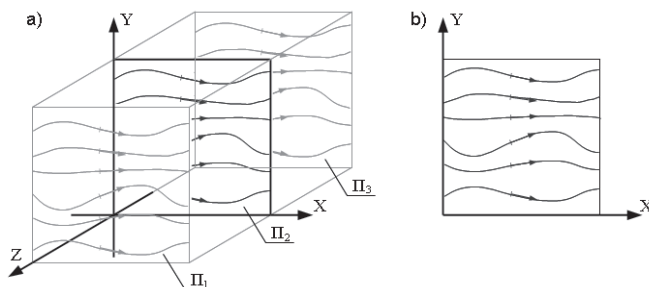
$$\mathbf{u} = \nabla \Phi . \quad (3.19)$$

Jeżeli lepkość płynu jest niewielka i można ją pominąć wówczas przepływ może być traktowany jako potencjalny. W przepływie takim ruch wirowy nie może powstać, a jeżeli został wprowadzony, to nie zanika. W przypadku przepływu potencjalnego równanie ciągłości (3.7) przybiera postać równania Laplacea:

$$\nabla^2 \Phi = 0 . \quad (3.20)$$

Zapis ten mówi, że dywergencja gradientu pola potencjalnego prędkości wynosi zero.

3.7. Przepływ dwuwymiarowy



Rysunek 9. Przepływ dwuwymiarowy: a) pole prędkości jednakowe dla płaszczyzn prostopadłych do osi Z, b) wybrana płaszczyzna analizy Π_2

Źródło: opracowanie własne

Przepływy dwuwymiarowe (płaskie), mimo że nie występują w przyrodzie, stanowią cenne narzędzie naukowe i inżynierskie. Pozwalają w łatwiejszy i szybszy sposób analizować wiele zagadnień fizycznych. Można wskazać wiele

problemów technicznych, które z powodzeniem mogą być rozwiązane przy tym założeniu. W analogiczny sposób korzysta się w mechanice ciała stałego z płaskiego stanu naprężenia lub płaskiego stanu odkształcenia.

W przepływie dwuwymiarowym (Rysunek 9a) zakłada się, że jedna ze składowych wektora prędkości w każdym punkcie wynosi zero. Zakładając, że $u_z=0$ pole prędkości przepływu pozostaje funkcją dwóch współrzędnych przestrzennych oraz współrzędnej czasowej:

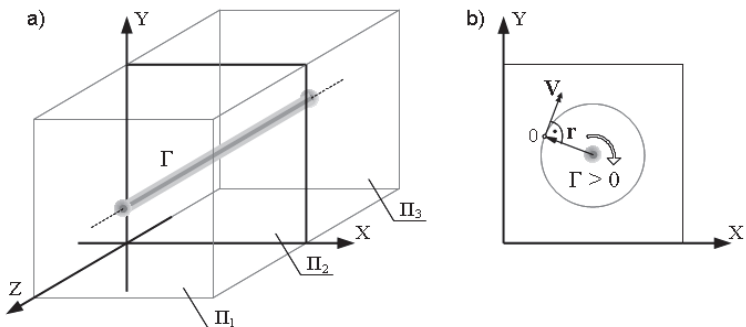
$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(x, y, t)=\left[u_x(x, y, t), u_y(x, y, t)\right] . \quad (3.21)$$

Pozwala to rozpatrywać rozwój przepływu w dowolnie wybranej płaszczyźnie (Rysunek 9b).

Konsekwencją założenia dwuwymiarowości przepływu jest postać jego pola wirowego. W każdym punkcie płaszczyzny analizy wektor tego pola jest do niej prostopadły, ponieważ:

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla \times \mathbf{u}=\left[\omega_x, \omega_y, \omega_z\right]=\left[0, 0, \omega_z\right] , \quad (3.22)$$

gdzie $\omega_x=\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}=0$, $\omega_y=\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}=0$, $\omega_z=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0$.



Rysunek 10. Prostoliniowy wir o cyrkulacji Γ , a) jego projekcja na płaszczyznę obliczeniową, b) indukcja prędkości na płaszczyźnie analizy Π_i

Źródło: opracowanie własne

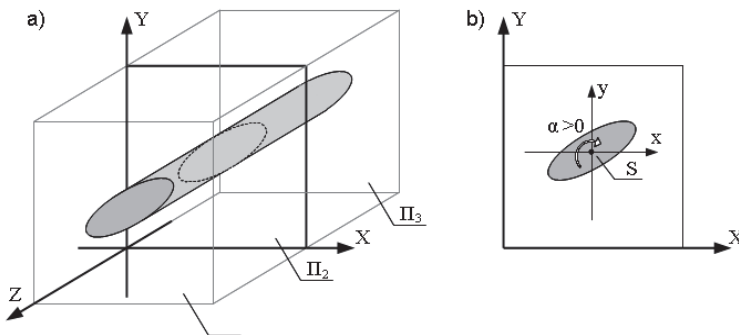
Zatem wszystkie linie wirowe są nieskończone, wzajemnie równoległe i prostopadłe do płaszczyzny przepływu Π . Rurki wirowe i wiry są prostoliniowe i także prostopadłe do tej płaszczyzny (Rysunek 10a). Zaś pole wirowe

może być traktowane jako skalarne, ponieważ w każdym punkcie jest opisane przez jedną wartość (np. ω_z). Wiry występujące w przepływie płaskim nazywają się w wirami płaskimi.

W pracy przyjęto, że wir płaski jest dodatni, jeżeli jest skierowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara (Rysunek 9b). Wir taki w dowolnym punkcie, ale z wyłączeniem punktu jego położenia, indukuje prędkość $\mathbf{V}=[V_x, V_y]$, której wartość wyznacza się na podstawie prawa Biota–Savarta (3.18). Stosując (3.18) do linii prostej nieskończonej, prostopadłej do płaszczyzny analizy o stałej cyrkulacji Γ oraz oznaczając położenie punktu indukcji względem wiru $\mathbf{r}=[r_x, r_y]$ otrzymujemy:

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} [r_y, -r_x] . \quad (3.23)$$

3.8. Ciało stałe w przepływie dwuwymiarowym



Rysunek 11. Ciało stałe w przepływie płaskim a) ciało nieskończenie długie b) projekcja na płaszczyznę; (X, Y) – układ globalny, (x, y) – układ lokalny z początkiem w początkowym położeniu środka ciężkości ciała

Źródło: opracowanie własne

Przyjęcie założenia dwuwymiarowego przepływu pociąga za sobą konsekwencje dotyczące ciała stałego w nim zanurzonego. Ciało takie również musi być dwuwymiarowe (Rysunek 11), tzn. nieskończenie długie wzdłuż jednej z osi (tutaj Z), zaś analiza ogranicza się do wybranej płaszczyzny. Przekrój poprzeczny w kierunku prostopadłym do płaszczyzny analizy jest stały, co oznacza, że jego kształt nie zmienia się lub zmiana kształtu jest jednakowa i równoczesna we wszystkich płaszczyznach równoległych do płaszczyzny analizy. Ruch ciała, jeżeli występuje, jest możliwy jedynie w kierunkach,

leżących w rozpatrywanej płaszczyźnie. Charakterystyki opisujące taki obiekt, tzn. parametry bezwładności oraz zawieszenia, odnoszą się do długości jednostkowej.

Ciało płaskie sztywne posiada trzy niezależne stopnie swobody: przesuw poziomy, pionowy oraz obrót. Umieszczenie ciała w przepływie oznacza określenie początkowego położenia środka ciała S – punkt wokół którego ciało może wykonywać ruch. Punkt ten staje się początkiem układu lokalnego (x, y) , w którym opisywany jest ruch ciała. W pracy przyjęto, że obrót α jest dodatni, gdy odbywa się zgodnie ze wskazówkami zegara. Z każdym stopniem swobody wiążemy parametry: sztywność k , współczynnik tłumienia c oraz bezwładność – masę m lub moment bezwładności I . Oddziaływanie płynu na ciało następuje poprzez ciśnienie i może być sprowadzone do siły i momentu wypadkowego: $\mathbf{F}=[F_x, F_y], M$. Zatem ruch ciała opisują równania:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x &= F_x \\ m \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y &= F_y \\ I \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha &= M \end{aligned} \quad (3.24)$$

W tak postawionym problemie największą trudność stanowi określenie F_x, F_y, M w dowolnej chwili czasowej.

4. Metody eksperymentalne inżynierii wiatrowej

Złożona postać równań opisujących zagadnienia przepływów sprawia, że zarówno znalezienie rozwiązań dokładnych w przypadkach ogólnych jak i przeprowadzenie precyzyjnych symulacji komputerowych w tej dziedzinie jest ciągle nieosiągalne. W tej sytuacji najbardziej wiarygodne są pomiary przeprowadzane na obiektach rzeczywistych lub na modelach w tunelach aerodynamicznych. Przy czym w przypadku prac projektowych jedynie drugi sposób jest możliwy. Wiedzę na temat przeprowadzania takich badań w dziedzinie aerodynamiki konstrukcji budowlanych obejmuje inżynieria wiatrowa. Rozdział został opracowany w oparciu o pozycje bibliograficzne [1, 6, 8, 21, 23].

4.1. Inżynieria wiatrowa

Inżynieria wiatrowa jest młodą dziedziną wiedzy, która wyodrębniła się z innych dyscyplin naukowych w latach 30 XX wieku. Stanowi ona miejsce styku różnych obszarów wiedzy przydatnych w zakresie badań na wiatrem i jego oddziaływaniu na obiekty budowlane oraz ludzi.

W zakres zainteresowania inżynierii wiatrowej wchodzi:

- fizyka wiatru ze szczególnym naciskiem na obszar przyziemny,
- oddziaływanie wiatru na obiekty budowlane wraz z ich aerodynamiką,
- wpływ wiatru na ludzi i środowisko,
- wykorzystanie wiatru (np. w energetyce),
- zarządzanie klęskami żywiołowymi spowodowanymi wiatrem,
- organizacja badań nad wiatrem (normalizacja, kodyfikacja).

Konsekwencją tak sformułowanych celów jest konieczności łączenia szerokiego spektrum wiedzy: metrologii, aerodynamiki, mechaniki budowli, mechaniki płynów, energetyki, metrologi, statystyki, metod numerycznych, teorii bezpieczeństwa, medycyny i wielu innych. Inżynierię wiatrową można opisać jako dyscyplinę praktyczną i ukierunkowaną na praktyczne cele.

Zdecydowaną większość obszaru zainteresowania inżynierii wiatrowej zajmuje wpływ wiatru na obiekty budowlane i ludzi. W tym zakresie stosowane metody można podzielić na:

- normowe, polegające na stosowaniu przyjętych przepisów, standardów, algorytmów znormalizowanych,
- obliczeniowe (analityczne lub fizyczne) opierające się wyłącznie na modelach matematycznych,

- półempiryczne, które najczęściej uzupełniają metody obliczeniowe o dodatkowe parametry doświadczalne,
- empiryczne polegające na badaniach modeli lub in situ.

Powyższe metody zostały wymienione w kolejności rosnących możliwości. Procedury normowe dotyczą wyłącznie przypadków prostych i powtarzalnych. Zaś badania eksperymentalne mogą być zastosowane do zagadnień nowatorskich, nietypowych i o skomplikowanej aerodynamice (poruszanie się w przepływie, praca w śladzie aerodynamicznym itp.)

4.2. Teoria podobieństwa zjawisk

Badania aerodynamiczne prowadzone w tunelach aerodynamicznych wykonuje się na obiektach w zmniejszonej skali, co podyktowane jest głównie koniecznością zapewnienia wygody prac, przekładającej się wprost na czasochłonność i koszty. Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa stanowią podstawę teoretyczną, dzięki której możliwe jest odniesienie wyników uzyskanych na modelach do rzeczywistych obiektów. Inaczej mówiąc, pozwala „przeliczać” uzyskane wyniki w przypadku zmiany skali obiektu. Oprócz tego jest to również cenne narzędzie, dające ramy teoretyczne do tworzenia modeli empirycznych i półempirycznych w przypadkach złożonych problemów inżynierskich.

Koncepcja podobieństwa zjawisk opiera się na liczbach bezwymiarowych. Intuicyjne najbardziej oczywistymi liczbami bezwymiarowymi są współrzędne bezwymiarowe, za pomocą których definiuje się podobieństwo geometryczne. Przyjmijmy, że geometria obiektu rzeczywistego opisana jest w przestrzeni w układzie odniesienia $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$, a modelu w układzie $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$. Jeżeli teraz możemy każdy punkt obiektu rzeczywistego A o współrzędnych $(\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A)$ jednoznacznie przyporządkować punktowi modelu o współrzędnych $(\hat{X}_A, \hat{Y}_A, \hat{Z}_A)$ oraz dla każdej takiej pary zachodzi:

$$\frac{\hat{X}_A}{\bar{X}_A} = \frac{\hat{Y}_A}{\bar{Y}_A} = \frac{\hat{Z}_A}{\bar{Z}_A} = k_L, \quad (4.1)$$

wówczas obiekty te określamy jako geometrycznie podobne ze skalą k_L . Pozwala to na opis obu w jednakowych współrzędnych bezwymiarowych, które buduje się w oparciu o wybrany charakterystyczny wymiar ciała:

$$\bar{x} = \frac{\bar{X}}{L}, \bar{y} = \frac{\bar{Y}}{L}, \bar{z} = \frac{\bar{Z}}{L}, \quad (4.2)$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{X}}{L}, \hat{y} = \frac{\hat{Y}}{L}, \hat{z} = \frac{\hat{Z}}{L}, \quad (4.3)$$

gdzie: \bar{L}, \hat{L} oznaczają te same charakterystyczne wymiary obiektu i modelu.

Oczywiście zachodzi:

$$\frac{\hat{L}}{\bar{L}} = k_L . \quad (4.4)$$

W związku z powyższym zachodzi również:

$$\bar{x} = \hat{x} , \quad \bar{y} = \hat{y} , \quad \bar{z} = \hat{z} , \quad (4.5)$$

co bezpośrednio stanowi o możliwości odniesienia wyników modelowych do obiektu rzeczywistego.

Oprócz współrzędnych bezwymiarowych przestrzennych wprowadza się także bezwymiarową współrzędną czasową:

$$\bar{t} = \frac{t}{T} , \quad (4.6)$$

$$\hat{t} = \frac{t}{\hat{T}} , \quad (4.7)$$

gdzie \bar{T}, \hat{T} oznaczają charakterystyczny przedział czasu w odniesieniu do obiektu rzeczywistego i modelu.

Rozpatrując przepływ płynu, zainteresowanie ciałami stałymi (obiekty opływane, ściany itp.) można ograniczyć do ich powierzchni brzegowych. Dwie powierzchnie brzegowe \bar{S} oraz \hat{S} dotyczące obiektu rzeczywistego i modelu są geometrycznie podobne, jeżeli prawdziwy jest zapis:

$$\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \hat{S}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t}) = 0 , \quad (4.8)$$

co oznacza, że opisane są takimi samymi równaniami w jednolitych współrzędnych bezwymiarowych oraz została uwzględniona zmiana w czasie.

Podobieństwo geometryczne można rozszerzyć do podobieństwa pól fizycznych. Dwa pola są podobne, jeżeli zachodzi:

$$\frac{\hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t})}{\bar{W}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})} = k_W , \quad (4.9)$$

gdzie k_W jest skalą podobieństwa.

Zatem dwa przepływy są podobne, jeżeli zachodzi podobieństwo wszystkich pól z nimi związanymi: pola prędkości, ciśnień, temperatury, gęstości, lepkości, sił masowych itd. Niestety porównanie pól metodą „punkt po punkcie” nie jest z reguły możliwe, więc realizacja podobieństwa przepływów musi być wykonana innymi metodami. Najczęściej stosowaną metodą (zatem sprawdzoną w wielu doświadczeniach) jest metoda kryterialna, polegająca na osiągnięciu

tych samych wartości bezwymiarowych liczb podobieństwa w przypadku obu przepływów. Liczby podobieństwa mogą być definiowane na wiele sposobów. Jednak praktyka wykazała, że najbardziej przydatne i przez to trwale ugruntowane są:

- liczba Reynoldsa: $Re = \frac{uL}{\nu}$ (4.10)

- liczba Strouhala: $St = \frac{Lf}{u}$ (4.11)

- liczba Frouda: $Fr = \frac{u^2}{gL}$ (4.12)

- liczba Macha: $M = \frac{u}{a}$ (4.13)

- liczba Eulera: $Eu = \frac{p}{\rho u^2} = \frac{1}{\kappa M^2}$ (4.14)

gdzie u – prędkość przepływu globalnego lub prędkość poruszającego się ciała, ν – lepkość kinematyczna płynu, L – charakterystyczny wymiar geometryczny ciała, f – częstotliwość zjawiska, g – przyspieszenie ziemskie, a – prędkość dźwięku w przepływie niezakłóconym, p – ciśnienie strumienia globalnego, κ - wykładnik izentropy.

Liczby te mogą zostać wyprowadzone z równania Naviera–Stokesa w postaci ogólnej (3.8), co w konsekwencji umożliwia zapisanie tego równania w postaci bezwymiarowej. Niestety poza przepływami identycznymi wypełnienie wszystkich kryteriów podobieństwa nie jest na ogół możliwe. Oznacza to, że odniesienie wyników badań modelowych do obiektów rzeczywistych jest zawsze obarczone pewnym błędem. Jednak w poprawnie przeprowadzonym eksperymencie błąd ten jest niewielki. W zagadnieniach oddziaływania wiatru na konstrukcje budowane zaniedbuje się liczbę Frouda (stosunek sił grawitacyjnych do konwekcyjnego członu sił bezwładności), ponieważ w tych zjawiskach wpływ sił grawitacyjnych nie odgrywa większej roli. Liczba Macha (alternatywnie Eulera) uwzględnia wpływ siły ciśnieniowych na przebieg zjawiska. Stanowi ona istotny warunek podobieństwa przepływów w ośrodku, którego gęstość znacząco się zmienia. W przypadku powietrza następuje to dopiero gdy $u > 0,4 a$. W typowych pracach eksperymentalnych istotne jest osiągnięcie podobieństwa opisanego liczbą Reynoldsa, oznaczającą stosunek sił lepkości do konwekcyjnego członu sił bezwładności, co w przypadku realizacji przepływu modelowego za pomocą tego samego ośrodka (np.: powietrza) oznacza spełnienie równania:

$$\hat{u} \hat{L} = \bar{u} \bar{L} . \quad (4.15)$$

W przypadku przepływów nieustalonych wymagamy również spełnienia liczby Strouhala, czyli osiągnięcie równości:

$$\frac{\hat{L}\hat{f}}{\hat{u}} = \frac{\bar{L}\bar{f}}{\bar{u}}, \quad (4.16)$$

gdzie znak nad zmienną – jak wcześniej – oznacza parametr modelu lub obiektu rzeczywistego.

Modelowania dodatkowych zjawisk, takich jak: transport ciepła, przemiany fizyczne i chemiczne, zjawiska elektryczne, wymaga dołączenia dodatkowych równań, co w konsekwencji wprowadza kolejne kryteria podobieństwa, wyrażane w postaci liczb bezwymiarowych. Jednak w typowych zadaniach inżynierii wiatrowej zjawiska takie nie są rozpatrywane.

4.3. Analiza wymiarowa

Analiza wymiarowa jest oparta na teorii podobieństwa i przez to bezpośrednio z nią związana. Jest to narzędzie powszechnie stosowane w naukach przyrodniczych. Polega ono na analizie wielkości fizycznych, opisujących zjawisko fizyczne. W przypadku zagadnień mechaniki istnieją 3 podstawowe miary: masa m , długość l oraz czas t . Stanowią one tzw. bazę wymiarową, za pośrednictwem której można wyrazić wszystkie inne wielkości wymiarowe w postaci:

$$w = m^p l^q t^r, \quad (4.17)$$

gdzie w – dowolną wymiarową wielkość mechaniczną, p, q, r są rzeczywistymi wykładnikami.

Zakładamy, że zjawisko mechaniczne opisane jest za pomocą $n+1$ wielkości wymiarowych a, a_1, a_2, \dots, a_n oraz k parametrów bezwymiarowych $\Pi_{n+1}, \Pi_{n+2}, \dots, \Pi_{n+k}$. Natomiast prawo fizyczne nim rządzące wyraża się zależnością funkcyjną (znaną lub poszukiwaną) wiążącą te wielkości w postaci:

$$a = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \Pi_{n+1}, \Pi_{n+2}, \dots, \Pi_{n+k}) = 0. \quad (4.18)$$

Wybieramy następnie 3 niezależne wymiarowo wielkości a_1, a_2, a_3 , które będą stanowić bazę. Przy czym nie muszą to być bezpośrednio miary wymienione wcześniej. Obrana baza pozwala zamienić pozostałe wielkości wymiarowe na bezwymiarowe poprzez podzielenie ich przez odpowiednią kombinację bazy:

$$\Pi_i = \frac{a_i}{m^{p_i} l^{q_i} t^{r_i}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.19)$$

gdzie p_i, q_i, r_i są odpowiednio dobranymi wykładnikami.

Natomiast wielkości bezwymiarowe pozostają. Zatem prawo fizyczne można wyrazić w formie:

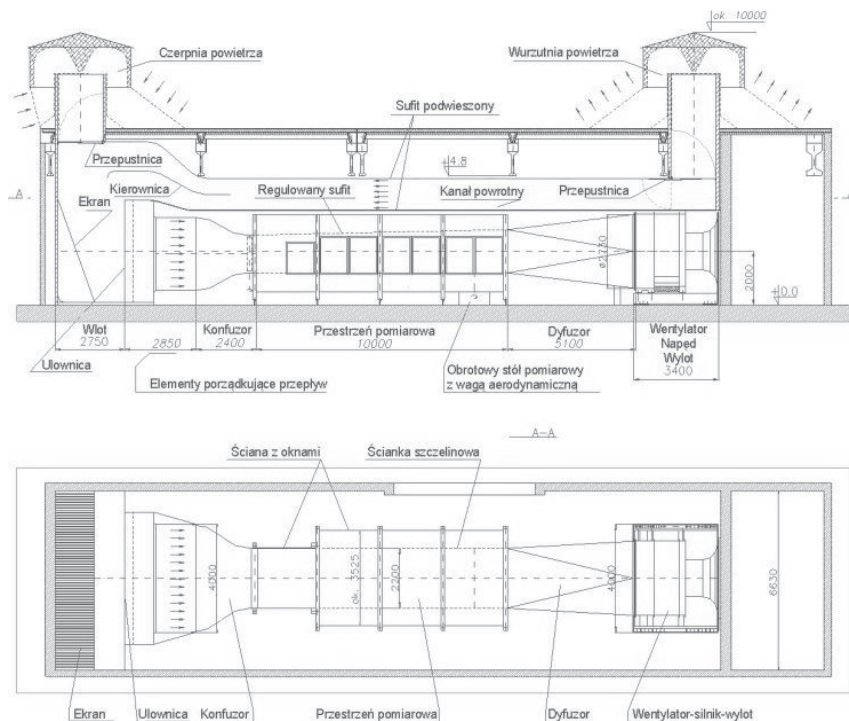
$$\Pi = F(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n, \Pi_{n+1}, \Pi_{n+2}, \dots, \Pi_{n+k}) . \quad (4.20)$$

Ten ogólny wniosek analizy wymiarowej jest znany jako twierdzenie Π lub twierdzenie Buckinghama i wyraża hipotezę, że prawa fizyczne wyrażają się relacjami o postaci niezależnej od układu jednostek wykreowanymi przez człowieka.

4.4. Tunel aerodynamiczny Politechniki Krakowskiej

Badania eksperymentalne zostały przeprowadzone w Laboratorium Inżynierii Wiatrowej Politechniki Krakowskiej. Laboratorium to wyposażone jest w tunel aerodynamiczny z warstwą przyścienną. Tunel może pracować w dwóch typach obiegu: otwartym lub zamkniętym. Obieg otwarty polega na jednokrotnym użyciu powietrza, tzn. powietrze jest zasysane z zewnątrz przez czerpnię, przepływa ono przez przestrzeń pomiarową i następnie jest usuwane przez wyrzutnię na zewnątrz. Obieg taki jest najczęściej stosowany w przypadku realizacji wielu technik wizualizacyjnych (np. wizualizacja dymowa). Obieg zamknięty wykorzystuje wielokrotnie tą samą objętość powietrza, która krąży w obwodzie przestrzeni pomiarowa – kanał powrotny.

Tunel aerodynamiczny jest skomplikowanym urządzeniem technicznym składającym się z szeregu elementów. Przepływ powietrza wywołany jest przez wentylator umieszczony po stronie ssącej. Na schemacie (Rysunek 12) przepływ powietrza następuje od strony lewej do prawej i w tej kolejności omawiane będą elementy tunelu. Strumień wejściowy kształtowany jest przez: komorę stabilizacyjną z ekranem ażurowym, wlot, siatki deturbulizacyjne, ulownicę i konfuzor. Zadaniem tych elementów jest przejście strumienia powietrza i jego odpowiednie ukierunkowanie. Dodatkowo elementy te gwarantują, że strumień powietrza wprowadzany do przestrzeni pomiarowej jest jednorodny i charakteryzuje się niską turbulencją. Wymiary wewnętrzne przestrzeni pomiarowej to: szerokość $2,20\text{ m}$, wysokość od $1,40\text{ m}$ do $1,60\text{ m}$, długość $10,00\text{ m}$. Składa się ona z 4 segmentów o długości $2,50\text{ m}$ każdy. Modele umieszczane są w trzecim lub czwartym segmencie licząc zgodnie ze zwrotem przepływającego strumienia. Pierwszy, drugi i ewentualnie trzeci segment służy do uformowania odpowiedniego profilu prędkości średniej wiatru i turbulencji atmosferycznej. Formowanie to odbywa się przy pomocy siatek turbulizacyjnych, barier, iglic i klocków. Elementy te mogą być stosowane w dowolnych konfiguracjach lub nie zastosowane wcale. Brak tych elementów skutkuje przepływem o niskiej turbulencji.



Rysunek 12. Tunel aerodynamiczny Politechniki Krakowskiej: przekrój pionowy (powyżej), przekrój poziomy

Źródło: [1]

Segmenty przestrzeni pomiarowej, oprócz pierwszego, posiadają ściany boczne podwójne. Przestrzeń pomiarową bezpośrednio ograniczają ściany szczelinowe. Mają one budowę ażurową, tzn. składają się z poziomych paneli pomiędzy którymi znajdują się szczeliny. W odległości ok. $0,60\text{ m}$ od ścianek szelinowych znajdują się ściany szczelne z oknami. Taka budowa ścian zmniejsza efekt blokady przepływu. Sufit przestrzeni pomiarowej może zmieniać swoje położenie w kierunku góra–dół, co umożliwia sterowanie gradientem ciśnienia statycznego w części pomiarowej. W górnej części przestrzeni pomiarowej znajduje się pozycjoner (koordynatnik) - urządzenie do mocowania wszelkiego rodzaju sond pomiarowych i kontrolowanego ich przemieszczania w całym obszarze przestrzeni pomiarowej. Podłoga segmentów 1, 2, 3 wyposażona jest w klocki turbulizacyjne, które mogą być automatycznie podnoszone i upuszczane. Dla każdego z segmentów zestaw klocków działa niezależnie. W podłodze segmentów 3 oraz 4 znajdują się okrągłe obrotowe stoły pomiarowe o średnicy 2 m . Umieszczone na nich modele można obracać o 180° . Pierwsze stanowisko przeznaczone jest głównie do badań zjawisk

opływu i ich wizualizacji oraz klimatu wiatrowego i wiatrowo–środowiskowego. Drugi stół obrotowy przeznaczony jest głównie do badań aerodynamicznych i aeroelastycznych modeli budowli i konstrukcji. Przestrzeń pomiarowa jest oświetlona sztucznie światłem halogenowym.

Strumień powietrza, opuszczający przestrzeń pomiarową, przepływa przez dyfuzor, kompensator, wentylator i ostatecznie trafia do wylotu. Kompensator łączy dyfuzor z wentylatorem i jego zadaniem jest zapewnienie szczelnego połączenia przy minimalnym przekazywaniu drgań z wentylatora. Przepływ powietrza wywołwany jest przez wentylator. Zastosowany został jeden wentylator osiowy jednostopniowy o średnicy zewnętrznej $2,72\text{ m}$ i prędkości końca łopaty do ok. 100 m/s . Urządzenie wraz z silnikiem o mocy 200 kW posadowione jest na płycie wibroizolacyjnej, oddzielonej od bloku fundamentowego czterema sprężynami. Maksymalna średnia prędkość przepływu powietrza w przestrzeni pomiarowej wynosi 40 m/s . Kierownice, znajdujące się w przestrzeni wylotu, wyprowadzają strumień powietrza ku górze.

Elementy wyposażenia znajdujące się ponad przestrzenią pomiarową, tzn.: przepustnice, kanał powrotny, czerpnia i wyrzutnia, pozwalają na skonfigurowanie obiegu powietrza jako zamkniętego lub otwartego.

4.5. Oddziaływanie wiatru na pomosty

Ze względu na dużą podatność lekkich pomostów wiszących i podwieszonych na działanie wiatru efekty aerodynamiczne odgrywają istotną rolę w procesie projektowania. Wiedza o tych zjawiskach jest obszernym działem przynależnym do inżynierii wiatrowej. Ogólnie działanie wiatru na pomosty można podzielić na 2 kategorie: quasi statyczne i dynamiczne.

W grupie oddziaływań quasi statycznych znajdują się następujące zjawiska:

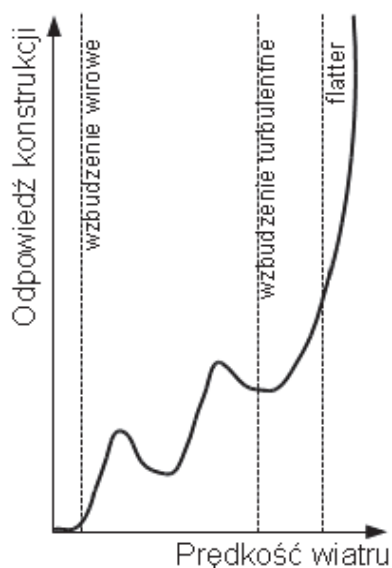
- parcie, unoszenie, obrót,
- zwichrzenie,
- dywergencja aerodynamiczna.

Natomiast wśród efektów dynamicznych dotyczących pomostu rozróżnia się:

- wzbudzenie wirowe,
- wzbudzenie turbulentne,
- flatter giętno–skrętny.

Analiza konstrukcji pomostu w zakresie quasi statycznym zakłada, że nie ma ona wpływu na przepływ powietrza wokół niej, tzn. nie następuje sprzężenie pomiędzy przepływem i budowlą. Wówczas biorąc pod uwagę jedynie średnią prędkość wiatru wyznaczamy wypadkowe oddziaływania. W przypadku

pomostu lub podobnego elementu są to siły: oporu, unoszenia oraz moment obrotający. Oszacowania tych wielkości wykonuje się na podstawie współczynników aerodynamicznych, które uzyskuje się z badań modelowych prowadzonych w tunelach aerodynamicznych. Uzyskane wartości obciążeń używa się w obliczeniach traktując je jako oddziaływania statyczne. W ramach analizy statycznej sprawdza się możliwość utraty stateczności przez pomosty wskutek zginania w płaszczyźnie, tzn. zwichrzenia. Jeżeli moment skręcający powoduje istotny obrót pomostu, wówczas należy wyznaczyć siły aerostaticzne w nowej konfiguracji. Obrót pomostu powoduje zwiększenie kąta natarcia wiatru, co z reguły skutkuje zwiększeniem się tych sił. Zjawisko to określa się mianem dywergencji aerodynamicznej lub flutterem dywergencyjnym.



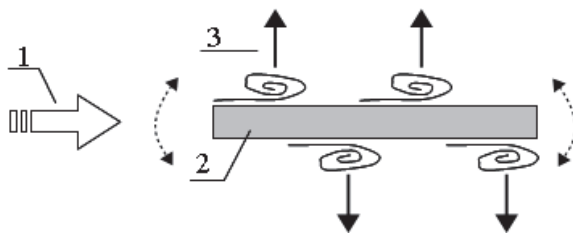
Rysunek 13. Rodzaj odpowiedzi konstrukcji w zależności od prędkości wiatru

Źródło: [4]

W przypadku lekkich i wiotkich pomostów ograniczenie analiz do zakresu quasi statycznego jest błędem w sztuce i może prowadzić do katastrof budowlanych. Obciążenie wiatrem ma zawsze charakter dynamiczny i może prowadzić do wzbudzenia aerodynamicznego o różnej postaci. Efektem wzbudzenia są drgania konstrukcji, które mogą mieć różne konsekwencje poczynając od obniżenia komfortu użytkowania a kończąc na zniszczeniu budowli.

Obecność obiektu w przepływie powietrza prowadzi bezpośrednio do zaburzeń tego przepływu, objawiających się pojawianiem wirów. Wiry powstają w cyklicznych, lecz niekoniecznie symetrycznych układach wokół przeszkody, czego skutkiem jest niesymetryczny i zmienny w czasie, ale cykliczny, rozkład ciśnień na jej powierzchni. Siły wypadkowe, wynikające z tego rozkładu, są również zmienne w czasie i charakteryzują się powtarzalnością. Pod ich wpływem obiekt wykonuje drgania. Sytuację taką określa się mianem wzbudzenia wirowego i występuje przy małych prędkościach przepływu (Rysunek 14). Amplitudy drgań z reguły nie są duże i nie zagrażają bezpieczeństwu konstrukcji. Mogą jednak powodować dyskomfort użytkowników. Przemieszczenia osiągają maksymalne wartości w przypadku, gdy częstotliwość generacji wirów (odrywania wirów) pokrywa się z częstotliwością drgań własnych obiektu. Jednak oscylacje te, w przypadku typowych konstrukcji budowlanych, mają charakter samotłumiących.

Przepływający strumień powietrza w naturze jest turbulentny, tzn. charakteryzuje się fluktuacjami prędkości wokół wartości średniej. Wraz ze wzrostem prędkości przepływu fluktuacje również rosną. Powoduje to zanik cyklicznych wirów wokół przeszkody, a dystrybucja ciśnień i siły wypadkowe są kształtowane przez sam fakt występowania turbulencji. Mówimy wówczas o wzbudzeniu turbulentnym (trzepotaniu, buffetingu). Zakres odpowiedzi konstrukcji zależy od intensywności turbulencji, charakterystyk dynamicznych i kształtu obiektu. Zjawisko to nasila się, jeżeli obiekt znajduje się w śladzie aerodynamicznym innego obiektu. Podobnie jak poprzednio wzbudzenie wirowe nie zagraża bezpieczeństwu typowych konstrukcji inżynierskich.

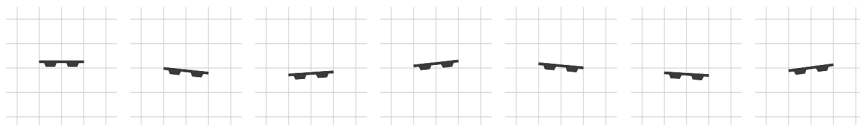


Rysunek 14. Schemat mechanizmu wzbudzenia wirowego:
 1 – strumień powietrza, 2 – obiekt w przepływie (np. pomost),
 3 – wir i wywoływana przez niego siła

Źródło: opracowanie własne

Cechą odróżniającą flutter (łopotanie) od wzbudzenia wirowego i turbulentnego jest sprzężenie ruchów giętnego (pionowego) i obrotowego pomostu (Rysunek 15). Skojarzenie tych deformacji może nastąpić, jeżeli

częstotliwości drgań własnych giętnych i skrętnych są do siebie zbliżone. Wówczas dla prędkości przepływu większej od wartości krytycznej mogą wystąpić drgania samowzbudne z rosnącą amplitudą. Powoduje to wysokie zagrożenie dla pomostów. Z tego powodu wyznaczenie prędkości krytycznej jest wyjątkowo istotne.



Rysunek 15. Typowe zachowanie pomostu w trakcie flutteru – kolejne migawki w jednakowych odstępach czasu

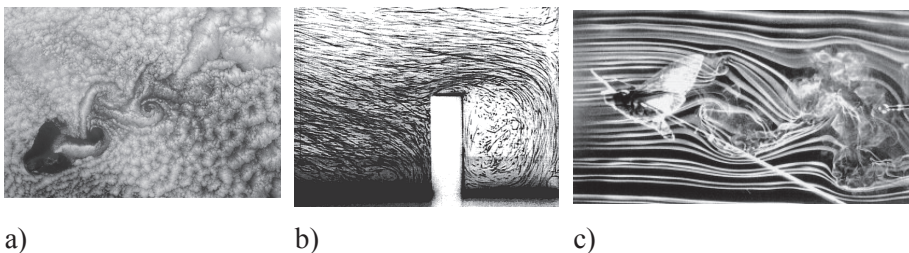
Źródło: opracowanie własne

5. Metody obliczeniowe inżynierii wiatrowej

Niekwestionowane zalety metod empirycznych okupione są dużymi kosztami prac laboratoryjnych. Koszty te wynikają z cen rynkowych nieruchomości (utrzymania zakupu lub wynajmu), sprzętu laboratoryjnego i pracy ludzi. Sytuacja taka powoduje, że od dawna poszukuje się metod tańszych, mogących zastąpić drogie i czasochłonne badania laboratoryjne. Bieżący rozdział prezentuje najpopularniejsze współczesne metody obliczeniowe stosowane w inżynierii wiatrowej. Celem tego zestawienia jest prezentacja metod, dla których metoda wirów dyskretnych stanowi atrakcyjną alternatywę, ponieważ – jako metoda oparta na odmiennej koncepcji – nie dziedziczy wielu wad. Natomiast szczegółowe wyprowadzenia, opisy algorytmów i przykłady obliczeń dostępne są w literaturze źródłowej. Rozdział został opracowany na podstawie pozycji bibliograficznych [1, 6, 16, 19, 20].

5.1. Przepływy turbulentne

Największym problemem wszystkich metod obliczeniowych mechaniki płynów jest turbulencja przepływu, istotna w przypadku większości problemów inżynierskich. Ponieważ ujęcie tego zjawiska w sposób bezpośredni wydaje się niemożliwe, poszukiwane są ciągle metody umożliwiające jego opis w sposób uproszczony.



Ilustracja 5. Różne skale wirów spotykanych w przyrodzie: a) wiry atmosferyczne wokół wyspy Guadalupe, b) zaburzenia przepływu wywołane obecnością budynku, c) lot owada w powietrzu

Źródło: a) <http://www.universetoday.com>, b) <http://venus.iis.u-tokyo.ac.jp>,
c) <http://www.zoo.cam.ac.uk>

W obrębie zagadnień inżynierii wiatrowej możemy przyjąć, że występowanie turbulencji przepływu wynika z ruchu wirowego, czyli istnienia wirów w przepływie. Wiry w przepływie pojawiają się zawsze, gdy masa płynu

poruszająca się pierwotnie ruchem jednostajnym napotyka zmianę środowiska (ciało stałe, granica ośrodka, struga poruszająca się z inną prędkością itp.) Największą trudnością ujęcia ruchu wirowego jest wieloskalowość tego zjawiska (Ilustracja 5.).

W przyrodzie wynikowe pole przepływu powstaje jako złożenie pokrywające swoim zakresem pełną skalę wirów. Z powodu wielkiej rozpiętości tej skali, nie jest możliwe bezpośrednie ujęcie tego zjawiska w obliczeniach. Najczęściej przepływ opisuje się stosując hipotezę Reynoldsa, która pozwala zapisać składowe wektora pola prędkości i pola ciśnień jako sumy wielkości uśrednionych i fluktuacji:

$$u_i = \bar{u}_i + \tilde{u}_i, \quad (5.1)$$

$$p = \bar{p} + \tilde{p}, \quad (5.2)$$

gdzie $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3] = [u_x, u_y, u_z]$ – wynikowe pole prędkości, p – pole ciśnień, \bar{u}_i, \bar{p} – wartości średnie, \tilde{u}_i, \tilde{p} – fluktuacje.

Przyjęcie powyższej hipotezy jest wygodne również z tego powodu, że pozwala opisywać turbulencje przy zastosowanie narzędzi statystyki i rachunku prawdopodobieństwa.

5.2. Klasyczne modele turbulencji

Pomimo że równanie Naviera–Stokesa (3.8) wraz z równaniem ciągłości (3.5) i warunkami brzegowymi stanowi kompletny układ zależności, pozwalający otrzymać pola opisujące przepływ turbulentny, to ze względu na skalę problemów inżynierii wiatrowej (przepływ wokół budowli lub nad terenem) bazowanie wyłącznie na tych równaniach prowadziłoby do zadań o zbyt dużych rozmiarach. Przy czym rozmiar zadania można opisać liczbą węzłów siatki dyskretyzującej obszar przepływu. Rozmiary najmniejszych wirów występujące w takich przepływach wyznaczone według skali Kołmogorowa są rzędu $0,1 \div 1,0 \text{ mm}$ [6]. W typowych zadaniach inżynierii lądowej liczba punktów węzłowych siatki przestrzennej metody dyskretnej umożliwiające uchwycenie takich zjawisk powinna być rzędu $Re^{9/4}$. W przypadku problemów inżynierii wiatrowej wartość liczby Reynoldsa znajduje się w przedziale $Re = 10^5 \div 10^7$. Oznacza to, że osiągnięcie dokładnego rozwiązania numerycznego metodą bezpośredniego całkowania równań opisujących ruch płynu wymagałoby zastosowania siatki dyskretnej o liczbie węzłów na poziomie $10^{11} \div 10^{16}$. Na obecnym etapie rozwoju techniki komputerowej rozwiązania takie nie są osiągalne. Jest to powód stosowania zastępczych modeli turbulencji, które podnoszą rozdzielczość modeli dyskretnych, ale są bardziej skomplikowane niż równania bazowe. Modele te zestawia Rysunek 16. Krótkie omówienie w kolej-

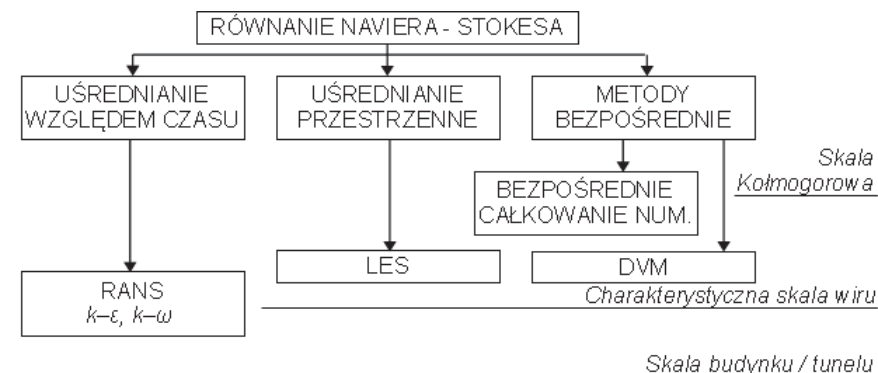
nych rozdziałach ich podstawowych koncepcji ma służyć porównaniu klasycznych metod ujęcia turbulencji z algorytmami metody wirów dyskretnych, o której będzie mowa w rozdziale 6.

5.2.1. Model RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes equations)

Model RANS nazywany również modelem uśrednień Reynoldsa opiera się na hipotezie (5.1) i (5.2), w której wartości średnie prędkości obliczane są w czasie:

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u_i(\mathbf{x}, t) dt, \quad (5.3)$$

gdzie Δt oznacza czas uśredniania.



Rysunek 16. Poziomy rozdzielczości numerycznych modeli turbulencji

Źródło: [6]

Średnia wartość fluktuacji obliczona wg (5.3) wynosi oczywiście zero. Natomiast średnia wartość iloczynu dwóch fluktuacji jest w ogólności różna od zera:

$$\overline{\tilde{u} \cdot \tilde{w}} \neq 0. \quad (5.4)$$

Następnie przy założeniu jednorodności i nieściśliwości płynu równanie Naviera–Stokesa przedstawia się w postaci „uśrednionej” wyrażającej zasadę zachowania pędu w uśrednionym przepływie turbulentnym:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_{i,j} \bar{u}_j = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} + \frac{1}{\rho} (\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^*), \quad (5.5)$$

gdzie tensory $\bar{\tau}_{ij} = \mu(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$ oraz $\tau_{ij}^* = -\rho \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}$ oznaczają naprężenia występujące w płynie. Przy czym drugi z nich należy utożsamiać z turbulencją przepływu (naprężenia Reynoldsa).

Tensory naprężeń Reynoldsa występujące w wynikowym modelu opisu ruchu płynu stanowią dodatkowe niewiadome układów równań, który teraz staje się niezamknięty i wymaga dodatkowych warunków wiążących składowe tensora τ_{ij}^* . Dodatkowe równania mogą być dobierane w różny sposób, w wyniku czego możemy mówić raczej o rodzinie metod RANS niż o pojedynczej metodzie.

Model Boussinesqua (1877) uznawany jest obecnie za najstarszy. Polega on na związaniu składowych tensora Reynoldsa ze składowymi tensora prędkości deformacji $u_{i,j}$ za pomocą dodatkowego współczynnika:

$$\tau_{ij}^* = -\rho \nu_T (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (5.6)$$

gdzie ν_T jest współczynnikiem kinematycznej lepkości turbulentnej.

Podejście takie, co prawda nie wprowadza dodatkowych równań, jednak prowadzi do sprzeczności założeń. Bowiem przyjmując założenie, że płyn jest nieściśliwy, na podstawie (5.6) można wykazać, że składowe diagonalne tensora τ_{ij}^* muszą zniknąć. Natomiast bazując na definicji $\tau_{ii}^* = -\rho \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}$ łatwo zauważyć, że składowe diagonalne wynoszą zero jedynie przy zaniku fluktuacji prędkości, tzn. w przepływie ustalonym. Usunięcie tej sprzeczności może zostać osiągnięte przez przyjęcie, że lepkość kinematyczna nie jest wielkością stałą lecz funkcją współrzędnych przestrzennych.

Model Prandtla również nie wprowadzał dodatkowych równań domykający do układu (5.5). Jest on oparty na koncepcji drogi mieszania w przyściennej warstwie brzegowej. Polega na określeniu współczynnika kinematycznej lepkości turbulentnej w postaci:

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad (5.7)$$

gdzie l oznacza drogę mieszania określoną równaniem $l = \kappa \cdot y$, zaś y jest współrzędną prostopadłą do ściany. Współczynniki κ nazywany jest w literaturze stałą von Karmana.

Zatem w tym modelu naprężenia Reynoldsa w warstwie przyściennej wynoszą:

$$\tau_{xy}^* = -\rho l^2 \left[\frac{d\bar{u}}{dy} \right], \quad (5.8)$$

gdzie x jest współrzędną równoległą do ściany.

Całkowanie tego równania oraz wyznaczenie stałych całkowania na podstawie danych doświadczalnych daje tzw. „funkcję ściany”:

$$\hat{u} = \frac{1}{\kappa} \ln \hat{y} + 5,5 \quad , \quad (5.9)$$

gdzie $\hat{u} = \frac{\bar{u}}{u_0}$ jest bezwymiarową prędkością, $\hat{y} = \frac{y u_0}{\nu}$ bezwymiarową odległością od ściany, u_0 prędkością porównawczą, zaś ν kinematycznym współczynnikiem lepkości.

Doświadczenie potwierdza, że funkcja ściany jest prawdziwa dla $\hat{y} > 5$. Natomiast w przypadku odległości mniejszych obserwuje się, że w przybliżeniu zachodzi: $\hat{y} = \hat{u}$.

Model van Driesta jest modyfikacją modelu Prandtla. Bazuje on na odmiennym określeniu drogi mieszania. W modelu tym zamiast prostej zależności $l = \kappa \cdot y$ przyjęto:

$$l = \kappa y \left[1 - e^{-\frac{\hat{y}}{A}} \right] \quad , \quad (5.10)$$

gdzie $A = 26$ – współczynnik empiryczny, $\hat{y} = \frac{y u_0}{\nu}$ jest współrzędną bezwymiarową zdefiniowaną tak jak poprzednią, zaś $u_0 = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, τ_0 - naprężenie styczne przy ścianie.

Model Kolmogorowa wprowadza jedno równanie domykające, w którym lepkość turbulentna uzależniona jest od energii kinetycznej turbulencji k :

$$\nu_T = c_\mu l \sqrt{k} \quad , \quad k = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \quad , \quad c_\mu = 0,09 \quad . \quad (5.11)$$

Prowadzi to niestety do konieczności wprowadzenia równania wiążącego z innymi wielkościami występującymi w równaniu Reynoldsa (5.5). Tym równaniem jest równanie transportu energii kinetycznej turbulencji:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i k_{,i} = (\nu_k, k_{,i})_{,i} + (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} \quad , \quad (5.12)$$

gdzie $\nu_k = \nu + \nu_T$.

5.2.2. Model k - ε

Model ten jest współcześnie często stosowany w dziedzinach naukowych i inżynierskich. Wprowadza dwa dodatkowe równania uzupełniające, które opisują tensor naprężeń turbulentnych Reynoldsa:

$$\tau_{ij}^* = \mu_T (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} , \quad (5.13)$$

$$\mu_T = \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} , \quad (5.14)$$

gdzie k (jak poprzednio) oznacza energię kinetyczną turbulencji, ε dysypację energii kinetycznej turbulencji, zaś c_μ jest stałą.

Wielkości k oraz ε wymagają wprowadzenia dwóch równań transportu:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + (\bar{\rho} k \bar{u}_i)_{,i} = (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} - \bar{\rho} \varepsilon + (\mu_k k_{,i})_{,i} , \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + (\bar{\rho} \varepsilon \bar{u}_i)_{,i} = c_{\varepsilon 1} (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} - c_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k} + (\mu_\varepsilon \varepsilon_{,i})_{,i} , \quad (5.16)$$

gdzie $\mu_k = \mu + \mu_T / \sigma_k$, $\mu_\varepsilon = \mu + \mu_T / \sigma_\varepsilon$, a stałe modelu przyjmują następujące wielkości: $c_\mu = 0,09$, $c_{\varepsilon 1} = 1,45 \div 1,55$, $c_{\varepsilon 2} = 1,92 \div 2,00$, $\sigma_k = 1,00$, $\sigma_\varepsilon = 1,30$, $\bar{\rho}$ oznacza wartość średnią gęstości ośrodka.

Przedstawione powyżej równania transportu zostały sformułowane dla płynu nieściśliwego przez Laudnera i Spaldinga (1972). W wyniku dalszych prac nad tym modelem równania te zostały uproszczone. Launder, Reece i Rodi (1975) zaproponowali model DSM (Differential Second Moment), w którym układ dodatkowych równań przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j})}{\partial t} + (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_j})_{,j} = P_{ij} + D_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} , \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\varepsilon \bar{u}_j)_{,j} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) . \quad (5.18)$$

Kolejną wersją jest wersja ASM (Algebraic Stress Model) zaproponowany przez Rodi (1976):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (k \bar{u}_j)_{,j} = D_k + P_k - \varepsilon , \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\varepsilon \bar{u}_j)_{,j} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) , \quad (5.20)$$

$$(P_k - \varepsilon) \frac{\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}}{k} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} . \quad (5.21)$$

Dodatkowe funkcje ostatnich dwóch modeli (DSM oraz ASM) określone są następująco:

$$D_{ij} = \left[C_k \overline{\tilde{u}_m \tilde{u}_l} (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j})_{,l} \frac{k}{\varepsilon} \right]_{,m} , \quad (5.22)$$

$$D_k = \left[C_k \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} k \frac{k_{,l}}{\varepsilon} \right]_{,m} , \quad (5.23)$$

$$D_\varepsilon = \left[C_\varepsilon \overline{\tilde{u}_m \tilde{u}_l} k \frac{\varepsilon_{,l}}{\varepsilon} \right]_{,m} , \quad (5.24)$$

$$P_k = -\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \overline{u}_{i,j} , \quad (5.25)$$

$$P_{ij} = -\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} \overline{u}_{j,k} - \overline{\tilde{u}_j \tilde{u}_k} \overline{u}_{i,k} , \quad (5.26)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon , \quad (5.27)$$

$$\Phi_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) . \quad (5.28)$$

Stałe modeli dobierane są eksperymentalnie. Najczęściej spotykane w literaturze wartości to:

$$C_1 = 1,8 , \quad C_2 = 0,6 , \quad C_k = 0,22 , \quad C_\varepsilon = 0,16 , \quad C_{\varepsilon_1} = 1,44 , \quad C_{\varepsilon_2} = 1,92 .$$

5.2.3. Model $k-\omega$

Jest to model zaproponowany przez Kołmogorowa. Opiera się on na związaniu energii kinetycznej turbulencji z polem wirowym przepływu:

$$\omega = c \frac{k^2}{l} , \quad (5.29)$$

gdzie c jest stałą.

Wówczas dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej zapisać można następująco:

$$\mu_T = \rho \frac{k}{\omega} , \quad (5.30)$$

zaś równania transportu energii kinetycznej oraz wirowości są następujące:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} k)}{\partial t} + (\bar{\rho} k \bar{u}_i)_{,i} = (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} + (\mu_k k_{,i})_{,i} - \check{\beta} \bar{\rho} k \omega , \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + (\bar{\rho}\omega\bar{u}_i)_{,i} = \alpha \frac{\omega}{k} (\bar{\tau}_{ij}\bar{u}_j)_{,i} + (\mu_\varepsilon\omega_{,i})_{,i} - \beta \bar{\rho}\omega^2 . \quad (5.32)$$

Stałe modelu przyjmują następujące wartości: $\alpha=5/9$, $\beta=3/40$, $\check{\beta}=9/100$.

5.2.4. Metoda symulacji dużych wirów (LES – Large Eddy Simulation)

Metoda LES, zaproponowana przez Smagorinskyego (1963), opiera się na przestrzennym uśrednieniu pola przepływu i zaczęto ją szeroko stosować w komputerowych symulacjach przepływów turbulentnych począwszy od lat 70 XX wieku.

Wartość średnią prędkości w objętości U definiuje się następująco:

$$\check{u}_i = \frac{1}{V} \int_V u_i(\mathbf{x}, t) dU . \quad (5.33)$$

Uśrednianie to jest powiązane z filtracją przestrzenną zdefiniowaną równaniem:

$$\langle u_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) u(\xi, t) d\xi , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1 , \quad (5.34)$$

gdzie f jest funkcją filtrującą, która może być dobierana w różny sposób. Natomiast biorąc $f(\xi) = \frac{1}{V}$, gdy $\xi \in U$ oraz $f(\xi) = 0$ dla $\xi \notin U$ filtrowanie przestrzenne jest tożsame z uśrednianiem przestrzennym.

Model LES otrzymuje się poddając filtracji przestrzennej równanie Naviera – Stokesa oraz równanie ciągłości. W wyniku czego otrzymujemy:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_i u_j \rangle_{,j} = -\frac{1}{\rho} \langle p \rangle_{,i} + \nu [\langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i}] , \quad (5.35)$$

$$\langle u_i \rangle_{,i} = 0 . \quad (5.36)$$

Nawiasy kątowe oznaczają wartość przefiltrowaną. Natomiast filtrację iloczynu składowych $u_i u_j$ można przekształcić do postaci:

$$\langle u_i u_j \rangle_{,i} = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle - \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^* , \quad (5.37)$$

gdzie τ_{ij}^* jest tutaj tensorem naprężeń turbulentnych w skali mniejszej niż zastosowana skala filtracji, tj. skali siatki dyskretyzującej obszar. Naprężenia te zostały związane ze składowymi tensora deformacji:

$$\tau_{ij}^* = 2\mu_{SGS} \langle d_{ij} \rangle = 2\rho\nu_{SGS} \langle d_{ij} \rangle , \quad (5.38)$$

$$\langle d_{ij} \rangle = \frac{1}{2} (\langle u_i \rangle_j \langle u_j \rangle_i) , \quad (5.39)$$

gdzie: $\nu_{SGS} = (C_S \Delta)^2 \sqrt{\langle d_{ij} \rangle \langle d_{ij} \rangle}$, $\Delta = (h_x h_y h_z)^{1/3}$, $C_S = 0,10 \div 0,25$. Parametry h_x, h_y, h_z oznaczają wymiary siatki dyskretyzującej obszar, zaś C_S nazywane jest stałą Smagorinskyego.

Na podstawie powyższych równań otrzymuje się standardowe równanie LES:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)_{,j} = -\frac{1}{\rho} \langle p \rangle_{,i} + (\nu + \nu_{SGS}) [\langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i}] . \quad (5.40)$$

Metoda ta pozwala na bezpośrednie symulowanie wirów o skali porównywalnej z rozmiarami oczka siatki. Natomiast mniejsze wiry uwzględniane są poprzez wprowadzenie dodatkowej lepkości ν_{SGS} , która reprezentuje naprężenia w wirach o mniejszej skali niż przyjęty rozmiar siatki. Stała C_S w modelu standardowym nie zależy od czasu i przestrzeni i jest dobierana dla kategorii zadań np. w przypadku przepływów przez przewody przyjmuje wartość $0,1$.

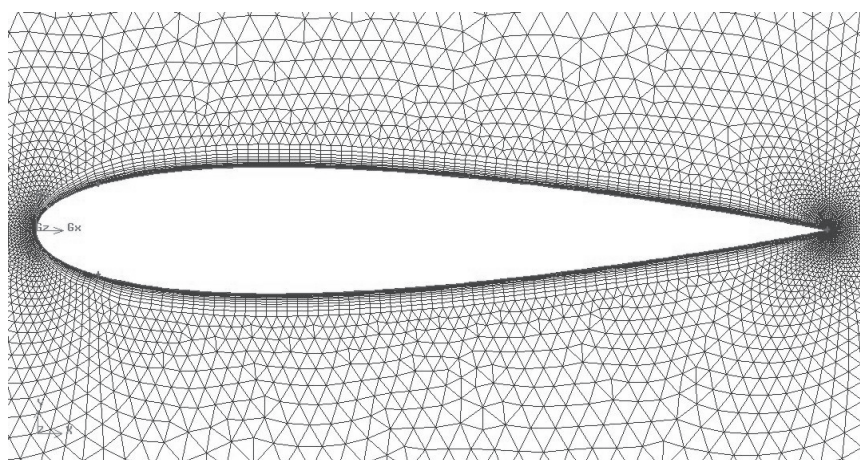
5.3. Komputerowe metody rozwiązywania równań różniczkowych

Podstawowe równania mechaniki płynów uzupełnione o dodatkowe modele turbulencji wraz z zadanymi warunkami brzegowymi, zawsze prowadzi do równań różniczkowych, które należy rozwiązać. W większości przypadków nie poszukuje się dokładnych rozwiązań analitycznych, gdyż te są trudne lub niemożliwe od osiągnięcia. Dla praktyki inżynierskiej zadowalające są rozwiązania przybliżone uzyskiwane komputerowymi metodami rozwiązywania równań różniczkowych:

- metodą różnic skończonych,
- metodą elementów skończonych,
- metodą objętości skończonych.

Wszystkie powyższe metody są metodami siatkowymi. Oznacza to, że geometria obszaru obliczeniowego musi być przedstawiona w postaci siatki (Rysunek 17). Znanym powszechnie faktem jest wpływ siatki obliczeniowej na uzyskiwane wyniki. Współcześnie duże zaangażowanie badaczy w rozwijanie technik automatycznej generacji siatek obliczeniowych (2D i 3D) oraz ilość wiedzy zgromadzonej w tym zakresie pozwala opisywać tę dziedzinę jako odrębną dyscyplinę wiedzy. Poprawnie sporządzona siatka obliczeniowa nie powinna wpływać na uzyskiwane wyniki obliczeń oraz nie powinna przyczyniać się do nadmiernego wydłużania czasu symulacji komputerowych. Najbardziej ogólną zasadą budowania siatek obliczeniowych jest zmiana jej gęstości wraz ze zmianą gradientu pola szukanej wielkości fizycznej.

W obszarach, w których interesująca wielkość fizyczna zmienia się szybko (duże gradienty), siatkę zagęszcza się. Obszary takie występują m. in. na styku płyn – ciało stałe i w miejscach zmiany geometrii ciała (początek, koniec, załamania, wnieki, itp.). Siatki najczęściej zbudowane są z trójkątów lub czworokątów w 2D oraz czworościanów i sześciocianów. Zaleca się, aby figury te były foremne lub zbliżone do foremnych. Dodać należy również, że każda z wymienionych metod cechuje się odrębnymi wymaganiami jeśli chodzi o kształt siatki. Dodatkowe komplikacje powstają w przypadku ciała ruchomego, ponieważ zmiana położenia pociąga za sobą konieczność zmiany siatki. Oznacza to w praktyce budowę siatki obliczeniowej w każdym kroku symulacji obliczeniowej. W przypadku nietypowych geometrii lub wymagań obliczeniowych generacja siatki staje się odrębnym zadaniem nie mniej skomplikowanym niż przepływ turbulentny.



Rysunek 17. Dyskretyzacja obszaru obliczeniowego za pomocą siatki (obszar bez siatki oznacza wnętrze ciała stałego)

Źródło: opracowanie własne

Po zbudowaniu siatki obliczeniowej równania różniczkowe zamieniane są na układ równań (najczęściej liniowych). Każda z metod w inny sposób przybliża szukane funkcje w obszarze obliczeniowym. Równania różniczkowe nie są rozwiązywane w każdym punkcie obszaru przepływu, lecz tylko w jej węzłach. W metodzie różnic skończonych pochodne zastępuje się ilorazami różnicowymi (preferowana jest siatka złożona z kwadratów). W metodzie elementów skończonych przebieg funkcji wewnątrz elementu aproksymuje się za pomocą odpowiednio dobieranych przebiegów tzw. funkcji kształtu. Metoda objętości skończonych może być wyprowadzona z metody elementów

skończonych przy założeniu stałej wartości funkcji kształtu. Każda metoda doprowadza do układu równań o rozmiarach rzędu kilkuset tysięcy, którego rozwiązanie stanowi kolejny nietrywialny problem.

Podsumowując ten krótki przegląd metod obliczeniowych należy stwierdzić, że modelowanie komputerowe przepływów turbulentnych stanowi duże wyzwanie numeryczne. Wiąże się ze stosowaniem skomplikowanych modeli turbulencji, które często wymagają kalibracji w tunelach aerodynamicznych. Wymaga stosowania komputerów o dużych mocach obliczeniowych i zaawansowanego oprogramowania inżynierskiego. Zdarza się również, że techniki obliczeniowe dopracowane dla jednej klasy problemów nie dają dobrych rezultatów w innych zagadnieniach. Obecnie w wielu przypadkach koszt wykonania obliczeń komputerowej mechaniki płynów przekracza koszt przeprowadzenia eksperymentu w tunelu aerodynamicznym. Z tego powodu ciągle szuka się alternatywnych metod obliczeniowych.

6. Metoda wirów dyskretnych

Rozdział rozpoczyna się krótkim przeglądem pomyślnych zastosowań metody wirów dyskretnych w dziedzinie inżynierii lądowej. Następnie przedstawione są teoretyczne podstawy metody i szczegóły implementacji komputerowej w postaci autorskiego programu VIR2D. Rozdział został opracowany na podstawie pozycji bibliograficznych [3, 6, 13, 15, 22, 28–44].

6.1. Przegląd zastosowań w inżynierii wiatrowej

Narodziny metody wirów dyskretnych należy datować na lata 30 XX wieku. Jednakże szybki rozwój metod wirowych w mechanice rozpoczął się w latach 80 XX wieku. Metoda wirów dyskretnych, należąca do grupy metod opierających się na bezpośrednim śledzeniu licznej grupy cząstek, jest metodą komputerową wymagającą dużych mocy obliczeniowych, tzn. pamięci operacyjnych rzędu co najmniej setek MB i procesorów o szybkości rzędu co najmniej setek MHz. Z tego powodu zainteresowanie tą metodą musiało być poprzedzone rozpowszechnieniem się szybkich i tanich komputerów.

Metoda wirów dyskretnych wykorzystywana była z powodzeniem do rozwiązywania problemów naukowych i inżynierskich w rozwoju których turbulencja odgrywa istotną rolę. Z dużym powodzeniem była stosowana m. in. w mechanice płynów, fizyce plazmy, inżynierii wiatrowej i budownictwie [26, 28–39, 42–44]

6.1.1. Optyw wokół budynku

Zagadnienie rozwoju pola prędkości wiatru wokół obiektu budowlanego zostało dogłębnie przeanalizowane w pracy [42]. Problem ten został rozwiązany metodą wirów dyskretnych, a uzyskane wyniki skonfrontowane z pomiarami przeprowadzonymi na rzeczywistym obiekcie.

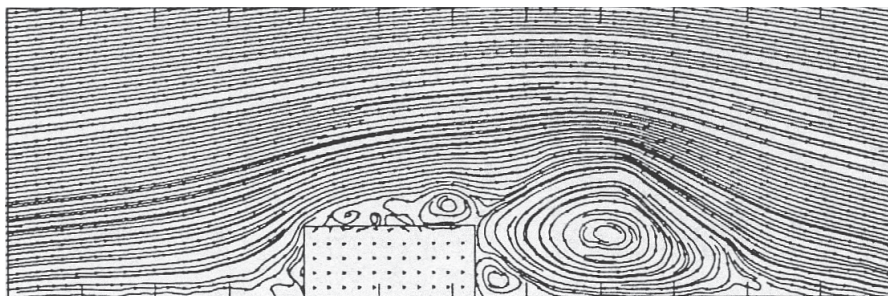
Przedmiotem analizy był istniejący budynek w obrębie kampusu akademickiego Texas Tech University zlokalizowany w płaskim terenie z dala od innych zabudowań. Obiekt miał kształt prostopadłościanu o wymiarach rzutu poziomego $L=13,5\text{ m}\times B=9,5\text{ m}$ ($L/B\approx 1,5$) i wysokości $H=4,0\text{ m}$ ($L/H\approx 3,4$). Został on wyposażony w urządzenia monitorujące parametry pola prędkości w jego bezpośrednim sąsiedztwie i bezpośrednio na jego ścianach. Pozwalało to dokładnie ustalić prędkości i ciśnienia w charakterystycznych punktach.

Pomiary oraz analizę komputerową wykonano dla średniej prędkości przepływu równej $8,6\text{ m/s}$ zmierzonej na wysokość budynku H przy prze-

plywie prostopadłym do dłuższego boku L . W symulacjach komputerowych założono potęgowy profil wiatru z wykładnikiem $\alpha=0,18$. Analiza DVM została uproszczona do przypadku przepływu dwuwymiarowego. Obliczenia przeprowadzono dla niezmiennej prędkości przepływu, tzn. symulacja rozpoczęła się przy prędkości docelowej i w drodze kolejnych iteracji osiągnięte zostało stabilne w sensie statystycznym rozwiązanie. Chmura cząsteczek tworząca dyskretne pole wirów przepływu osiągnęła liczebność 24 000 sztuk. Liczba Reynoldsa opisująca zjawisko wynosiła: $Re=2,3 \cdot 10^6$ (Jako wymiar charakterystyczny przyjęto wysokość obiektu).

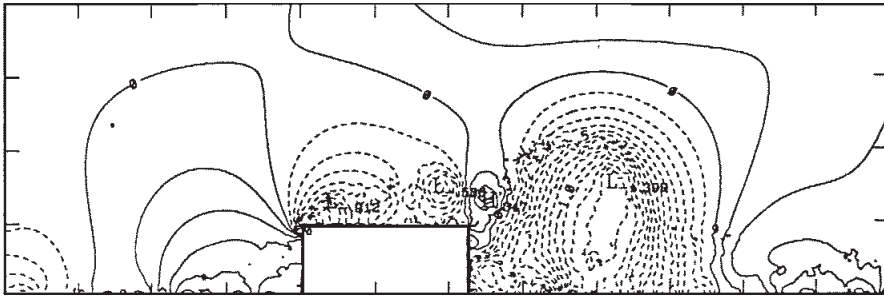
Na etapie każdego kroku symulacji możliwe było określenie pola prędkości przepływu i wyznaczenia na tej podstawie powiązanego z nim pola ciśnień. Znajomość pola ciśnień pozwoliła wyznaczyć siły działające na przegrody (ściany i dach) obiektu. Cytowane poniżej ilustracje przedstawiają mały fragment uzyskanych wyników (Rysunki 18 i 19 oraz Wykres 1).

W przytoczonym przykładzie stwierdzić można dobrą zgodność wyników analizy komputerowej i pomiarów wykonanych na rzeczywistym obiekcie. Uzyskane z symulacji współczynniki ciśnienia mają niższe wartości niż te wynikające z pomiarów, jednak kształt krzywej bardzo dobrze nadaje za punktami pochodzącymi z eksperymentu. Wizualizacje zarówno pola prędkości jak i pola ciśnień dobrze oddają fizykę zjawiska. Na tej podstawie można stwierdzić, że przepływ turbulentny został w sposób zadowalający odtworzony przy zastosowaniu metody wirów dyskretnych. Rozbieżności wyników spowodowane były najprawdopodobniej założeniem dwuwymiarowego przepływu w przypadku obiektu, którego długość była tylko 1,5 razy większa od szerokości. Nie dyskwalifikuje to jednak wyników analizy komputerowej. Z inżynierskiego punktu widzenia są one ciągle bardzo wartościowe.



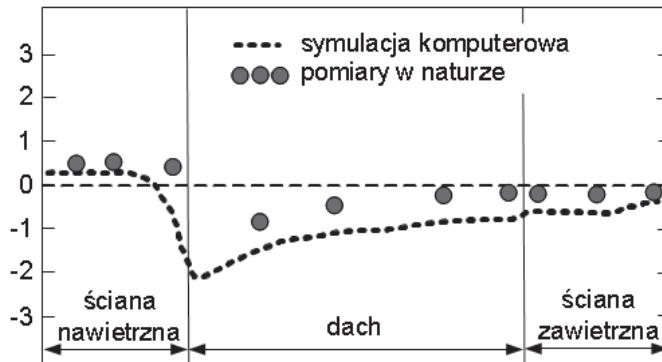
Rysunek 18. Linie prądu pola prędkości

Źródło:[42]



Rysunek 19. Izobary pola ciśnień odpowiadające polu z rysunek 18

Źródło:[42]



Wykres 1. Średnie wartości współczynników ciśnienia działającego na przegrody obiektu – porównanie z wartościami pomierzonymi

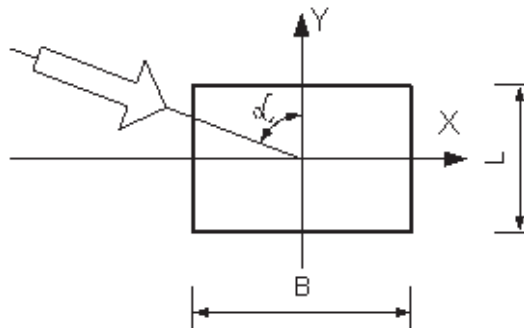
Źródło:[42]

6.1.2. Wyznaczanie charakterystyk aerodynamicznych

Zastosowanie metody wirów dyskretnych do określenia wartości współczynników aerodynamicznych było jednym z celów autorów pracy [30]. Symulacje komputerowe przeprowadzono dla przekroji prostokątnych (Rysunek 20) dla których stosunek boków L/B zmieniał się od $0,25$ do $3,00$.

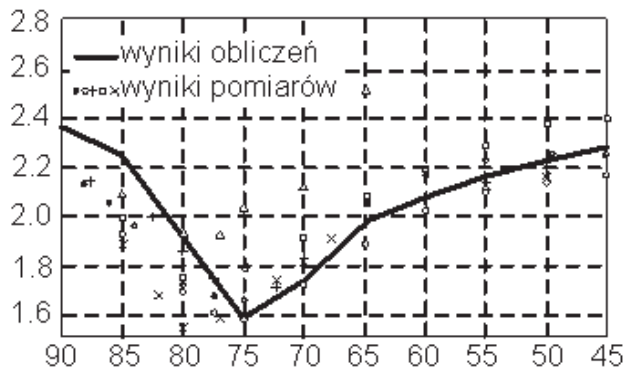
Obliczenia wykonano dla kątów natarcia strumienia powietrza $\alpha = 45^\circ \div 90^\circ$. Założony został przepływ dwuwymiarowy. Zatem uzyskane wyniki adekwatne są dla obiektów nieskończenie długich. W trakcie analiz liczba Reynoldsa

wynosiła $Re=2 \cdot 10^4$. Wyniki przedstawione na wykresach od 2 do 4 ilustrują uzyskane wyniki dla przypadku $L/B=1$. Autorzy badań własne wyniki analizy komputerowej zestawili z wynikami eksperymentalnymi szeroko dostępnymi w światowej literaturze. W tym przypadku jak i poprzednio możemy stwierdzić dobrą zgodność wyników analizy komputerowej z wynikami eksperymentów.



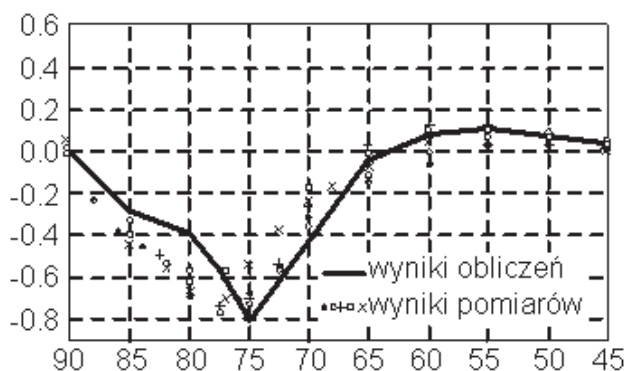
Rysunek 20. Analizowany przekrój

Źródło: [30]

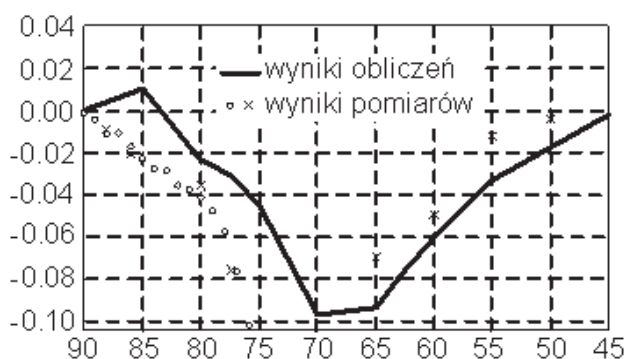


Wykres 2. Współczynnik oporu aerodynamicznego

Źródło: [30]



Wykres 3. Współczynnik aerodynamiczny siły bocznej

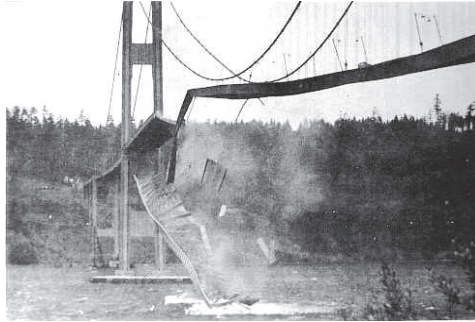


Wykres 4. Współczynnik aerodynamiczny momentu

Źródło 3-4: [30]

6.1.3. Przewidywanie odpowiedzi aeroelastycznej

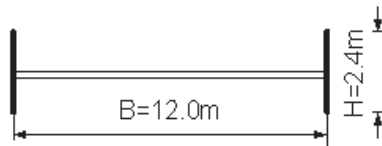
Rezultaty symulacji komputerowych przedstawione w pracy [36] bez wątpienia uwidaczniają jedną z większych zalet metody wirów dyskretnych. W przeciwieństwie do innych metod komputerowych, takich jak np. metoda objętości skończonych, metoda wirów dyskretnych może zostać zrealizowana bez dyskretyzacji pola przepływu w postaci siatki obliczeniowej. Brak konieczności budowania siatki obliczeniowej jest szczególnie korzystny w przypadku symulacji komputerowej poruszających się ciał w przepływie. Nie występuje wówczas konieczność zmiany siatki wraz ze zmianą położenia ciała.



Ilustracja 6. Tacoma Narrows Bridge tuż po katastrofie wywołanej pojawieniem się zjawiska flutteru

Źródło: <http://www.enm.bris.ac.uk>

Przedmiotem analizy autorów pracy była katastrofa mostu Tacoma Narrows Bridge (Ilustracja 6.). Katastrofa ta była spowodowana pojawieniem się zjawiska flutteru w środkowej części pomostu przy średniej prędkości wiatru wynoszącej 19m/s . Głównym celem pracy była rekonstrukcja zjawiska aeroelastycznego, które doprowadziło do awarii konstrukcji. Symulacje numeryczne przeprowadzono przy założeniu dwuwymiarowego przyływu. Analizowano jedynie centralną część pomostu (Rysunek 21.) umieszczonego w strumieniu powietrza.



Rysunek 21. Schematyczny przekrój pomostu Tacoma Narrows Bridge

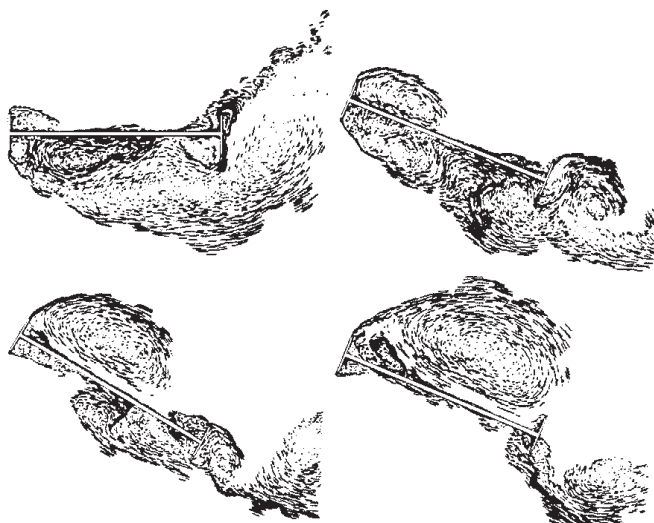
Źródło: [36]

Program badań polegał na wykonywaniu symulacji komputerowych dla kolejnych stałych prędkości przepływu. Analizy pokryły przedział prędkości od 5m/s do 20m/s . Zjawisko flutteru pojawiło się przy prędkości wynoszącej 19m/s , co było zgodne ze faktem historycznym. Przykładowe wizualizacje zachowania pomostu przedstawione są na rysunku 21.

6.1.4. Zakres zastosowań metody wirów dyskretnych w inżynierii lądowej

Podsumowując przytoczone przykłady zastosowań metody wirów dyskretnych można wskazać szerokie obszary inżynierii lądowej, w których może być ona szczególnie przydatna.

Możliwość określenia turbulentnego pola przepływu wiatru wokół obiektów budowlanych, tj. pola prędkości i ciśnień, pozwala na wyznaczenia obciążeń tych obiektów w drodze symulacji komputerowych. Zarówno wartości chwilowe jak i średnie mogą być w ten sposób znalezione. Znajomość rozkładu ciśnień na obiektach budowlanych pozwala umieszczać wyloty przewodów kominowych w miejscach, gdzie nie zachodzi ryzyko pojawienia się ciągów wstecznych. Dodatkowo wizualizacje przepływu pozwalają na szybkie zidentyfikowanie miejsc w sąsiedztwie budynków o obniżonym komforcie wiatrowym oraz tras rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń.



Rysunek 21. Wyniki symulacji komputerowych odpowiedzi pomostu.

Źródło: [36]

Oprócz analizowania całych obiektów budowlanych analiza komputerowa DVM może być z powodzeniem zastosowana do obliczeń pomocniczych. Często używanymi parametrami w obliczeniach inżynierskich są współczynniki aerodynamiczne oporu, siły bocznej i momentu. Współczynniki te dla elementów budowlanych o typowych kształtach przekroji poprzecznych zostały określone i są dostępne w literaturze branżowej. Jednakże stosowanie

elementów o kształtach nietypowych zawsze podciąga za sobą konieczność ich znalezienia. Programy komputerowe oparte o metodę wirów dyskretnych mogą być tutaj wyjątkowo przydatne.

Szeroką dziedziną zastosowań metody wirów dyskretnych są problemy odpowiedzi aeroelastycznej konstrukcji budowlanych. Zjawiska takie są bardzo groźne i mogą prowadzić do spektakularnych katastrof budowlanych. Ze względu na swoją bezsiatkową naturę metoda wirów dyskretnych dobrze nadaje się do modelowania zjawiska interakcji pomiędzy ciałem stałym i płynem. Znacznie przewyższa pod tym względem inne metody komputerowe takie jak: metodę różnic skończonych, metodę objętości skończonych czy metodę elementów skończonych.

Przytoczone przykłady wskazują jednoznacznie, że metoda wirów dyskretnych ma duży potencjał obliczeniowy. Właściwe są więc badania naukowe mające na celu rozwój tej metody. Ma ona bowiem duże predyspozycje stać się równie popularnym narzędziem inżynierskim jakim współcześnie jest metoda elementów skończonych czy metoda objętości skończonych. Przy czym zauważyć należy, że metoda wirów dyskretnych, opierając się na odmiennej idei, wprowadza nową jakość w dziedzinie obliczeń komputerowych.

6.2. Założenia

Omówiona w pracy wersja metody wirów dyskretnych opiera się na następujących założeniach:

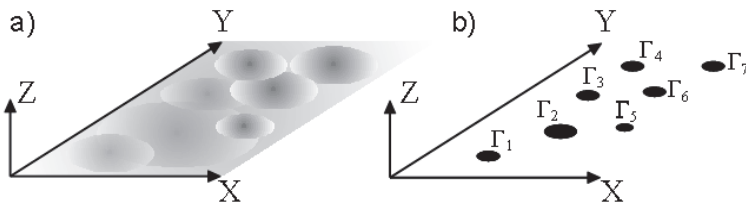
- Przepływ jest dwuwymiarowy
- Płyn jest homogeniczny, jednofazowy, nieściśliwy oraz spełnia założenie Newtona–Maxewlla, a jego lepkość jest stała.
- Ciała w przepływie są również dwuwymiarowe, sztywne oraz mają możliwość ruchu.
- Przyjęto, że temperatura nie zmienia się lub alternatywnie zmiana temperatury nie wpływa na pozostałe parametry przepływu.
- Strumień globalny (napływ) jest jednorodny i nieturbulentny i ma prędkość \mathbf{u}_1 .
- Warstwa brzegowa związana z ciałem stałym w przepływie ma stałą, bardzo małą grubość.

Przyjęcie powyższych założeń prowadzi do szeregu uproszczeń związanych z opisem matematycznym i implementacją komputerową. Konieczność zastosowania uproszczeń wynika z faktu, że ogólna wersja metody byłaby wyjątkowo trudna, a może nawet niemożliwa, do zrealizowania przy użyciu powszechnie dostępnych komputerów. W momencie pisania pracy autorowi nie była znana taka implementacja.

Należy jednak zaznaczyć, że często wybierane różne założenia w naukach teoretycznych nie świadczą jedynie o niedoskonałościach warsztatu matematycznego lub komputerowego. Są one również przejawem zrozumienia rozpatrywanych zagadnień fizycznych. Bowiem w sytuacji, gdy pomimo przyjętych uproszczeń uzyskane wyniki są satysfakcjonujące, możemy mówić o dużej świadomości rozpatrywanych zjawisk, tzn. umiejętności (nierzadko intuicyjnej) określenia, które parametry są bardziej, a które mniej istotne.

6.3. Podstawy teoretyczne metody wirów dyskretnych

6.3.1. Dyskretne pole wirowe



Rysunek 22. Płaskie pole wirowe: a) ciągłe, b) dyskretne

Źródło: opracowanie własne

Fundamentalną ideą metody wirów dyskretnych jest przedstawienie ciągłego pola wirowego za pomocą N_p wirów dyskretnych (Rysunek 22.) o tak dobranych położeniach i mocach (cyrkulacjach), aby pole prędkości \mathbf{u}_2 wygenerowane przez pole ciągłe i pole wirowe było jednakowe. Najprostszą metodą dyskretyzacji pola wirowego jest podział domeny na siatkę komórek i następnie skoncentrowanie cyrkulacji każdej komórki w punkcie. Punkt umieszczenia każdej cząstki wirowej dobiera się tak, aby momenty wirowe celi równały się zero. Oczywiście pole ciągłe może być reprezentowane z różną dokładnością. Dyskretyzacja ciągłego pola wirowego jest możliwa, jednak w przypadku realizowanych symulacji komputerowych nie zachodzi taka potrzeba, ponieważ pole wirowe powstaje w wyniku odrywania się warstwy brzegowej od ciała, zaś warstwa brzegowa generowana jest w postaci dyskretnej. Nie zachodzi też potrzeba regeneracji ciągłego pola wirowego na podstawie pola dyskretnego.

Oznaczając ciągłe, płaskie, niestacjonarne pole wirowe przez $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}\omega(\mathbf{x}, t)$, zaś pole wirowe dyskretne składające się z N_p cząstek przez $\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{k}\omega_p(\mathbf{x}, t)$ możemy zapisać w formie wektorowej:

$$\omega(\mathbf{x}, t) \approx \omega_p(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_p} \Gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (6.1)$$

lub w postaci skalarnej:

$$\omega(\mathbf{x}, t) \approx \omega_p(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_p} \Gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad , \quad (6.2)$$

gdzie $\mathbf{x} = [x, y]$ – dowolny punkt na płaszczyźnie, $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i]$ – położenie i-tego wiru, t – czas, $\Gamma_i = \mathbf{k} \Gamma_i$ – i-ty wir dyskretny, δ – delta Diraca, \mathbf{k} – wersor osi Z .

Ponieważ stosowanie delty Diraca prowadzi do szeregu trudności numerycznych zastępuje się ją alternatywnymi funkcjami λ_ε nazywanymi funkcjami odcięcia (cutoff functions), a pole wirowe zapisuje się wtedy w formie:

$$\omega(\mathbf{x}, t) \approx \omega_p(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \lambda_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad . \quad (6.3)$$

Funkcje odcięcia dobiera się w postaci [13]:

$$\lambda_\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \lambda\left(\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon}\right) \quad , \quad (6.4)$$

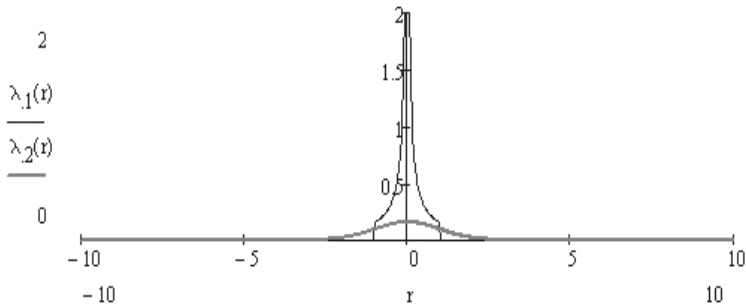
gdzie: $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ wskazuje dowolny punkt na płaszczyźnie względem wiru i , $r = |\mathbf{r}|$ jest odległością tego punktu od wiru, parametr $\varepsilon \ll 1$ interpretować należy jako promień odcięcia (rozmiar cząstki wirowej). Natomiast λ jest funkcją osiowo symetryczną spełniającą warunek:

$$\int_D \lambda(\mathbf{r}) dD = 1 \quad . \quad (6.5)$$

Wybór funkcji λ jak i parametru ε jest decyzją arbitralną. Przykłady funkcji odcięcia podane są w [13]. Tutaj zostały przytoczone dwa najprostsze warianty wraz z wykresami:

$$\lambda_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad , \quad (6.6)$$

$$\lambda_2(r) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \quad . \quad (6.7)$$



Wykres 5. Wykresy funkcji $\lambda_1(r)$, $\lambda_2(r)$

Źródło: opracowanie własne

6.3.2. Dekompozycja równania Naviera–Stokesa

Podstawą dalszych rozważań jest równanie Naviera–Stokesa w postaci (3.10), wynikającej z poczynionych założeń:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} .$$

Obliczając rotacje z obu stron tego równania otrzymujemy postać nazywaną w literaturze równaniem transportu wirów:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega . \quad (6.8)$$

Równanie powyższe opisuje dwa równocześnie zachodzące w płynie zjawiska: konwekcję i dyfuzję. Zjawiska te mogą być przedstawione oddzielnie za pomocą dwóch równań [6, 13, 15]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0 , \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega . \quad (6.10)$$

Równanie (6.9) opisuje konwekcję wirów w ujęciu Lagrange'a, zaś równanie (6.10) dotyczy dyfuzji wirów. Rozdzielenie to funkcjonuje w literaturze pod nazwą Split Algorithm.

Przedstawiona dekompozycja równania Naviera–Stokesa stanowi podstawową koncepcję metody wirów dyskretnych. Równania (6.9) i (6.10)

rozwiązywane równocześnie w kolejnych krokach czasowych pozwalają śledzić, zmieniający się w czasie, przepływ płynu. Dodatkową zaletą takiego opisu jest brak konieczności wyznaczania pola ciśnień.

6.3.3. Pole prędkości

Kolejną fundamentalną koncepcją metody wirów dyskretnych jest przedstawienie pola prędkości w postaci:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (6.11)$$

gdzie $\boldsymbol{\psi}$ jest wektorową funkcją strumienia prędkości, zaś ϕ potencjałem prędkości.

Przedstawienie to oznacza, że wynikowe pole prędkości złożone jest z dwóch pól. Pierwsze z nich \mathbf{u}_1 jest polem potencjalnym. Pole to nie może być przedstawione w postaci wirów dyskretnych, ponieważ rotacja tego pola jest zerowa. Jest ono utożsamiane z przepływem globalnym, który jest znany. Drugi składnik \mathbf{u}_2 jest polem prędkości, którego pole wirowe jest różne od zera. Pole te jest przedstawiane w postaci dyskretnej, a śledzenie jego rozwoju jest podstawowym zadaniem realizowanym w symulacjach komputerowych. W dalszej części pracy zostanie wprowadzone pole prędkości \mathbf{u}_3 pochodzące od ruchu obrotowego ciała i warstwy wirowej. Ma ono taką samą genezę jak pole \mathbf{u}_2 i na potrzeby tego rozdziału zostanie przyjęte, że pole \mathbf{u}_2 zawiera w sobie pole \mathbf{u}_3 .

Należy zauważyć, że powyższa reprezentacja pola prędkości zapewnia spełnienie równania ciągłości (3.7) w sposób tożsamościowy:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \phi) + \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = 0. \quad (6.12)$$

Natomiast wyznaczając pole wirowe dla reprezentacji (6.11) otrzymujemy:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \phi) + \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = 0 + \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = 0 + 0 - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}, \quad (6.13)$$

czyli ostatecznie, podstawiając (3.11), równanie funkcji strumienia prędkości:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}. \quad (6.14)$$

6.3.4. Rozwiązanie równania funkcji strumienia

Równanie funkcji strumienia prędkości (6.14) jest równaniem Poissona. Pozwala ono wyznaczyć pole prędkości \mathbf{u}_2 na podstawie pola wirowego $\boldsymbol{\omega}$. Rozwiązuje się je przy użyciu funkcji Greena. W przypadku zadania płaskiego właściwą funkcją Greena jest $(2\pi |\mathbf{r}|)^{-1}$. Stosując ją otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}_\infty - \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0) dD_0 . \quad (6.15)$$

Zatem wzór (6.11) może zostać zapisany dokładniej:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} dD_0 . \quad (6.16)$$

Jest to wyrażenie prawa Biota–Savarta (3.4.5.) dla ciągłego płaskiego pola wirowego, gdzie źródłem indukcji jest element $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0) dD_0$, zaś $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ promieniem od źródła do punktu indukcji. Składniki $\boldsymbol{\psi}_\infty$ oraz \mathbf{u}_1 należy utożsamiać z przepływem globalnym. Natomiast znak „-” jest konsekwencją przyjęcia zwrotu dodatniej cyrkulacji zgodnej z ruchem wskazówek zegara.

Ponieważ pole wirowe rozpatrywane jest w postaci dyskretnej według (6.1), wzór (6.16) może być przedstawiony w postaci:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\boldsymbol{\Gamma}_i(\mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2} \quad (6.17)$$

lub:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 - \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \boldsymbol{\Gamma}_i , \quad (6.18)$$

gdzie $\boldsymbol{\Gamma}_i = \mathbf{k} \boldsymbol{\Gamma}_i$, zaś jądro (kernel) \mathbf{K} przybiera postać:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{r^2} = \frac{1}{2\pi r^2} [-r_y, r_x] \quad (6.19)$$

dla dowolnego punktu oddalonego od wiru i o wektor $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i = [r_x, r_y]$,
 $r = \sqrt{(r_x^2 + r_y^2)}$.

Wzór (6.18) zastosowany do pojedynczego wiru jest tożsamy z (3.23).

Bezpośrednie stosowanie wzorów (6.18, 6.19) prowadzi do dużych błędów numerycznych w przypadku, gdy r jest bliskie zeru. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie opisu pola wirowego w postaci (6.3). Prowadzi to do rozmytej postaci jądra (6.19) poprzez splot z funkcją (6.4):

$$\mathbf{K}_\lambda(\mathbf{r}) = \mathbf{K} * \lambda_\varepsilon(\mathbf{r}) = \int_D \mathbf{K}(\mathbf{r}) \lambda_\varepsilon(\mathbf{r}) dD . \quad (6.20)$$

Najczęściej używanymi jądrami są wyrażenia Rankinea (6.21) lub Gaussa (3.21):

$$\mathbf{K}_R(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot \begin{cases} \frac{r^2}{\varepsilon^2}, & r < \varepsilon \\ 1, & r \geq \varepsilon \end{cases}, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot \left[1 - e^{-\frac{r^2}{\varepsilon^2}} \right]. \quad (6.22)$$

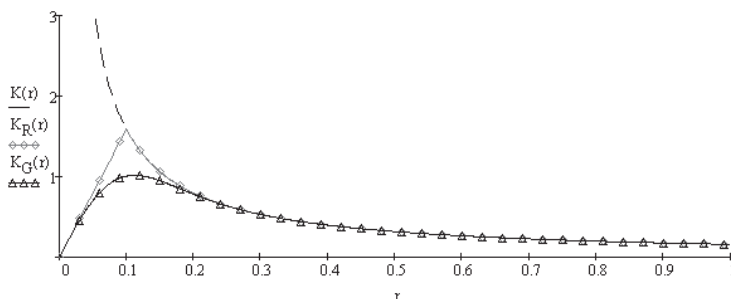
W celu zobrazowania działania jąder dokładnego i rozmytych zostaną wyznaczone ich moduły:

$$K(r) = \frac{1}{2\pi r}, \quad (6.23)$$

$$K_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{2\pi\varepsilon^2}, & r < \varepsilon \\ \frac{1}{2\pi r}, & r \geq \varepsilon \end{cases}, \quad (6.24)$$

$$K_G(r) = \frac{1}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{\varepsilon^2}} \right]. \quad (6.25)$$

Wykres 6 uzasadnia często spotykaną w literaturze nazwę kropel wirowych (vortex blobs) w odniesieniu do wirów dyskretnych. Stosowanie jądra dokładnego w obliczeniach indukowanej prędkości w bliskim sąsiedztwie wiru prowadzi do uzyskiwania bardzo dużych wartości dążących do nieskończoności. W przypadku jąder rozmytych przekroczenie granicznej bliskości z wirami ε powoduje zanikanie jego wpływu.

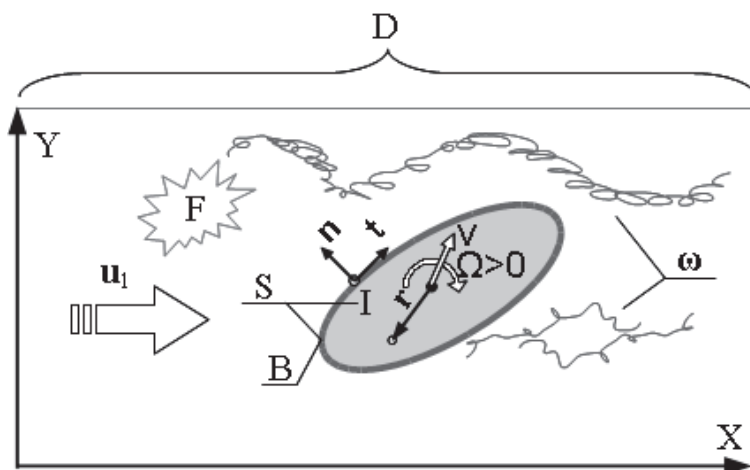


Wykres 6. Wykresy modułu jądra dla $\varepsilon=0,1$

Źródło: opracowanie własne

6.3.5. Ciało stałe w przepływie

Formuła (6.16) opisuje wartość pola prędkości w dowolnym punkcie domeny D bez rozróżnienia jej składników, tj. dotyczy również obszarów zajętych przez ciała stałe. Rozpatrzmy teraz przypadek ciała stałego zanurzonego w przepływie (Rysunek 23). Domena składa się z rozłącznych obszarów: płynu F i ciała stałego S , który z kolei złożony jest z wnętrza I oraz brzegu B . Przepływ globalny jest sumą części bezwirowej \mathbf{u}_1 oraz części wirowej \mathbf{u}_2 związanej z polem wirowym $\boldsymbol{\omega}$. Analogicznie ciało stałe wykonuje ruch posuwisty z prędkością \mathbf{V} oraz obrotowy z prędkością kątową $\boldsymbol{\Omega}$.



Rysunek 23. Ciało stałe w przepływie (opis w tekście)

Źródło: opracowanie własne

Wykonywanie ruchu obrotowego przez ciało oznacza, że każdy punkt obszaru ciała I wykonuje ruch obrotowy. Możliwe jest zatem wyznaczenie pola wirowego w obrębie tego obszaru (w ciele). Ma ono wartość $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$ [8, 30]. Pole to musi być uwzględnione przy całkowaniu obszaru D . Zatem w przypadku istnienia ciała stałego w przepływie wzór (6.16) pozwalający wyznaczyć prędkość w dowolnym punkcie obszaru F przybiera postać:

$$\mathbf{u}_F(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} dF_0 - \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} dB_0 - \frac{1}{2\pi} \iint_I \frac{2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} dI_0 \quad (6.26)$$

Powyższy wzór jest zapisem zasady superpozycji. Mówi on, że prędkość w dowolnym punkcie płynu jest złożeniem następujących wpływów:

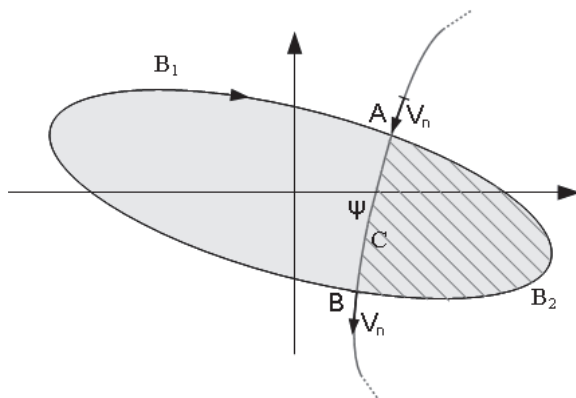
- strumienia globalnego,
- pola wirowego,
- wirowej warstwy brzegowej,
- obracających się ciał stałych.

Natomiast prędkość w obszarze I i B , tzn. wewnątrz ciała lub na jego brzegu, \mathbf{u}_S może być bezpośrednio wyznaczona na podstawie \mathbf{V} oraz $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (6.27)$$

Znak „-” jest konsekwencją założenia dodatniego znaku wirowości i prędkości obrotowej zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Wyznaczenie prędkości przepływu w dowolnym punkcie płynu jest konieczne do rozwiązania równania konwekcji (6.9). Natomiast wyznaczenie prędkości na brzegu ciała jest niezbędne do spełnienia warunków brzegowych.

6.3.6. Generacja warstwy brzegowej



Rysunek 24. Sprawdzenie możliwości przecięcia ciała przez linię prądu przy spełnionym warunku Dirichleta

Źródło: opracowanie własne

Spełnienie warunków brzegowych no-through-flow i no-slip prowadzi do pojawienia się warstwy brzegowej związanej z ciałem. Posługując się wzorem (6.26) możliwe jest wyznaczenie prędkości przepływu w płynie w warstwie przyległej do brzegu ciała. Wyznaczona w ten sposób wartość z reguły nie spełnia warunków brzegowych, tzn. przepływ nie jest „przyklejony” do ciała.

Jedyną możliwością spełnienia warunków brzegowych jest wprowadzenie na brzegu ciała wirów, których indukcja w każdym punkcie na brzegu zniesie prędkość wzbudzaną przez przepływ zewnętrzny. Wirowość związaną z brzegiem ciała utożsamiamy z warstwą brzegową. W przypadku wysokich liczb Reynoldsa możemy przyjąć, że jest ona bardzo cienka, a jej oderwanie następuje natychmiast [15]. Sposób wyznaczania wirowości brzegowej dla modelu dyskretnego zostanie przedstawiony w rozdziale 6.4.6..

Udowadnia się, że realizacja jednego z warunków brzegowych prowadzi do spełnienia drugiego. Załóżmy, że w każdym punkcie brzegu $B=B_1+B_2$ jest spełniony warunek no-through-flow (Rysunek 24). Następnie przyjmijmy, że prędkość wyznaczona według (6.26) w punkcie A ma składową prostopadłą do brzegu ciała V_n różną od zera. Ponieważ nie istnieją żadne źródła płynu (dodatnie lub ujemne) wewnątrz ciała, sytuacja taka może nastąpić jedynie wówczas, gdy linia prądu ψ przechodzi przez ciało. Konsekwencją czego jest istnienie drugiego punktu B , w którym również nie jest spełniony warunek no-slip.

Przyjmijmy, że z ciałem został związany układ odniesienia, w którym przeprowadzane są dalsze rozważania. Ponieważ w przyjętym układzie ciało jest nieruchome wówczas w jego obszarze zarówno pole prędkości jak i pole wirowe wynosi zero. Zatem na podstawie twierdzenia Stokesa możemy zapisać dla zakreskowanego fragmentu tego obszaru:

$$\oint_{B_2+C} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_{B_2} V_t ds + \int_C V_n ds = 0 \quad (6.28)$$

Przyjęcie założenia dotyczącego spełnienia warunku no-through-flow na brzegu ciała oznacza, że w każdym jego punkcie składowa styczna prędkości wynosi zero $V_t=0$. Prowadzi to do wniosku, że cyrkulacja na odcinku B_2 wynosi zero. Zatem możemy zapisać:

$$\int_C V_n ds = 0 \quad (6.29)$$

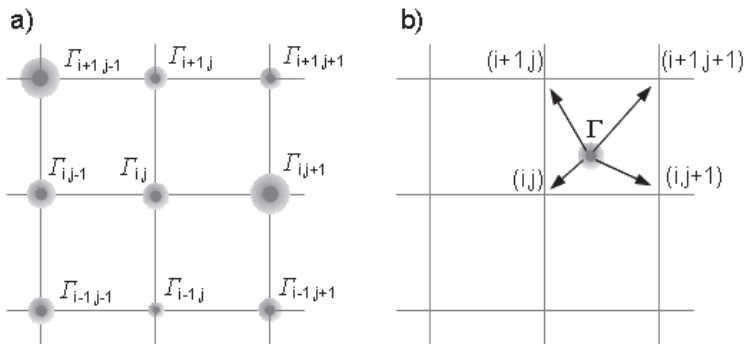
Ponieważ wzdłuż linii prądu prędkość nie zmienia zwrotu, jedyną możliwością spełnienia tego równania jest zerowa wartość tej prędkości, tzn. $V_n=0$. Oznacza to, że spełnienie warunku no-through-flow jest wystarczające i oznacza wypełnienie warunku no-slip. Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe.

6.4. Implementacja komputerowa metody wirów dyskretnych

Istnieje wiele wersji implementacji komputerowych metody wirów dyskretnych. W ogólności można je podzielić na dwie grupy: siatkowe

i bezsiatkowe. Należy jednak zauważyć, że w przypadku tej metody należy raczej mówić o „technice siatkowej” znacznie różniącej się od metod klasycznych opisanych w rozdziale 5.3.. Siatka w metodzie wirów dyskretnych nie stanowi podstawy obliczeniowej, lecz jest jedynie sposobem zarządzania dużą liczbą wirów dyskretnych. Brak jest również ugruntowanej definicji klasyfikującej metody wirowe w kategoriach: siatkowe i bezsiatkowe. Ponadto w przypadku metod siatkowych istnieje możliwość realizacji algorytmów bezsiatkowych w wybranych fragmentach domeny obliczeniowej lub zastosowanie siatki tylko w celach pomocniczych. Jednak najczęściej za metody siatkowe uznaje się te, w których pole wirowe wyznaczane jest w stałych, ustalonych na początku symulacji, punktach przestrzeni. Natomiast za bezsiatkowe przyjmuje się te, w których cząstki wirowe mają swobodę przyjmowania położenia.

Koncepcja metody siatkowej przedstawiona jest na rysunku 25. Obszar domeny dzielony jest na kwadraty, w narożach których skupia się całkowita wirowość domeny. Konwekcja, dyfuzja i emisja warstwy brzegowej prowadzi do redystrybucji wirowości pomiędzy oczkami siatki. W tym przypadku redystrybucja wirowości wiru wolnego (jeżeli dopuszcza się istnienie takich) polega na dodaniu właściwej części jego mocy do najbliższych węzłów.



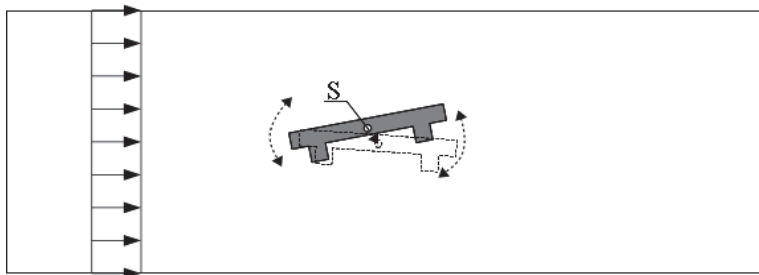
Rysunek 25. Siatka metody wirów dyskretnych a) punkty skupienia wirowości, b) redystrybucja wirowości wiru wolnego

Źródło: opracowanie własne

W pracy zdecydowano się zrealizować metodę wirów dyskretnych w formie bezsiatkowej. Wybór ten podyktowany był koniecznością uwzględnienia w obliczeniach obiektu ruchomego. Brak siatki oznacza brak konieczności dostosowywania się do zmiany pozycji ciała. Jednak nawet w tym przypadku konieczny jest podział domeny obliczeniowej na komórki przypominające

siatkę. Służą one do przestrzennej organizacji wirów oraz do obliczania indukcji grupowej. Natomiast wszystkie wiry wolne mają swobodę przyjmowania dowolnych położeń.

W ramach niniejszej rozprawy powstał program komputerowy VIR2D implementujący algorytmy metody wirów dyskretnych. Głównym zadaniem programu jest przewidywanie odpowiedzi aeroelastycznej ciała sprężyste zawieszonoego w przepływie (Rysunek 26).



Rysunek 26. Przeznaczenie programu obliczeniowego VIR2D, S – punkt zawieszenia sprężystego

Źródło: opracowanie własne

Danymi wejściowymi programu są m. in.:

- rozmiar domeny obliczeniowej,
- program zmiany przepływu globalnego,
- geometria ciała wraz z masą i momentem bezwładności,
- punkt zawieszenia sprężystego,
- parametry zawieszenia dla 3 stopni swobody (sztywności, współczynniki tłumienia),
- ewentualne blokady stopni swobody.

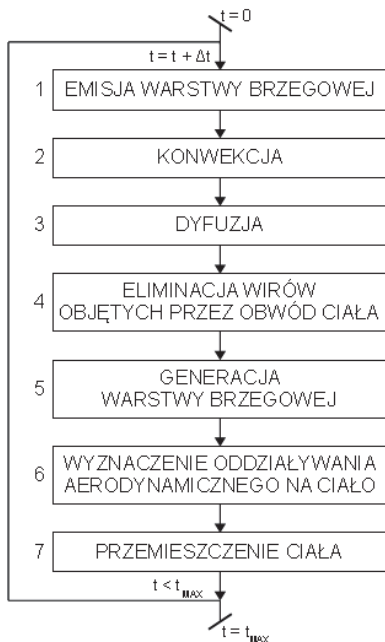
Natomiast w kolejnych krokach czasowych otrzymuje się:

- rozkład dyskretnego pola wirowego, który stanowi naturalny sposób wizualizacji turbulentnego pola przepływu,
- wartości sił działających na ciało,
- parametry ruchu ciała: przyśpieszenia, prędkości oraz przemieszczenia.

6.4.1. Ogólny algorytm obliczeń

Symulacja komputerowa z zastosowaniem metody wirów dyskretnych polega na przeprowadzeniu skończonej liczby kroków obliczeniowych. Liczba ta,

w zależności od problemu, waha się od kilku do kilkudziesięciu tysięcy. Każdy krok obliczeniowy polega na wykonaniu tych samych procedur (Rysunek 27), z których każda ma na celu zrealizowanie odrębnego zjawiska fizycznego. Procedury te omówione są w poszczególnych podrozdziałach pracy.



Rysunek 27. Schemat blokowy pojedynczego kroku symulacji metody wirów dyskretnych

Źródło: opracowanie własne

W przypadku rozpoczęcia symulacji, gdy w przepływie nie ma wirów wolnych, w trakcie pierwszego kroku operacje oznaczone numerami 1, 2, 3, 4 oraz 6, 7 nie wykonują się. Wykonuje się jedynie procedura nr 5, tj. generacja warstwy brzegowej. Wynikiem jej działania jest wirowość brzegowa. Pole prędkości indukowane przez tą warstwę złożone z przepływem globalnym prowadzi do potencjalnego pola prędkości zdefiniowanego w rozdziale 3.6. Wynik ten jest równoważny rozwiązaniu równania Laplacea (3.20) [15, 42]. Pole to jest polem startowym symulacji.

Komentarza wymaga również procedura nr 4, tj. eliminacja wirów objętych przez obwód ciała. Ponieważ wiry dyskretne mają swobodę przyjmowania nowych położeń, możliwa jest sytuacja, że część z nich, po zrealizowaniu

konwekcji i dyfuzji, znajdzie się wewnątrz ciała. Sytuacja taka jest niedopuszczalna. Najlepszą metodą w tym przypadku jest usunięcie takich wirów z domeny obliczeniowej. Zabieg taki nie wprowadza nieścisłości w rozwiązaniu, ponieważ wir usunięty zregeneruje się na brzegu ciała w trakcie realizacji procedury nr 5, tj. podczas generacji warstwy brzegowej [15].

Zaimplementowany schemat obliczeniowy jest schematem uproszczonym. Można bowiem zauważyć, że emisja warstwy brzegowej (procedura nr 4) powoduje zmianę konfiguracji wirów w domenie. Należałoby zatem dla tej nowej konfiguracji znaleźć nową warstwę brzegową. Jednak zabieg ten prowadzi do bardzo małych zmian w wartościach wirowości warstwy brzegowej i może być pominięty bez straty dokładności obliczeń. Potwierdzają to zarówno doświadczenia innych badaczy opisane w literaturze [15], jaki i własne.

Kolejnym uproszczeniem jest brak kontroli pozycji wirów względem ciała po wykonaniu procedury nr 7. Jest możliwe, że ciało po zmianie pozycji obejmie swoim obwodem pojedyncze wiry wolne. Nie muszą one być identyfikowane od razu. Pozwala się takim wirom wykonać konwekcje i dyfuzje. Dopiero wówczas są usuwane. Nie prowadzi to do błędów, ponieważ przy małym kroku czasowym przemieszczenia wirów są niewielkie.

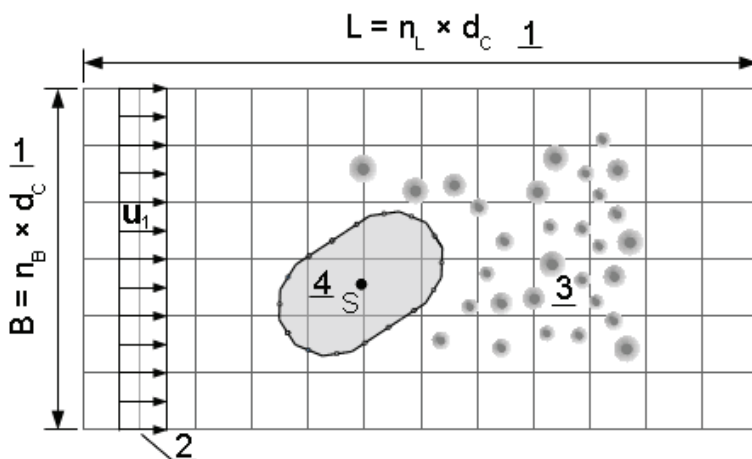
6.4.2. Domena obliczeniowa

Domena obliczeniowa (Rysunek 28) ma kształt prostokąta o długości L i wysokości B . Boki domeny są podzielone na równe części w liczbie n_L, n_B odpowiednio. Podział ten tworzy $n_L \times n_B$ prostokątnych komórek. Najczęściej długości boków oraz liczbę podziałów dobiera się tak, aby komórki były kwadratami (albo były zbliżone do kwadratów) o długości boku d_C . Komórki służą do przestrzennej organizacji wirów dyskretnych. Dodatkowo dla każdej niepustej komórki, w każdym kroku symulacji, obliczana jest suma wirów oraz momenty wirowe. Pozwala to na szybkie obliczenie prędkości od grupy wirów w punktach odległych od tej komórki. Dzięki temu nie zachodzi konieczność sumowania indywidualnych wpływów od każdego wiru znajdującego się w komórce.

Podział domeny obliczeniowej na komórki spełnia również istotną rolę w zakresie bezpośredniej implementacji komputerowej. Każda komórka zamyka w swojej strukturze klasę kontenerową języka C++ będącą dynamiczną strukturą do przechowywania wirów dyskretnych. Struktury te zdolne są do automatycznego przekazywania i przyjmowania wirów od innych komórek (kontenerów). Rozpoznają w jakim stopniu ciało stałe wypełnia ich wnętrze. Przyjmują wiry emitowane przez warstwę brzegową ciała. Komunikują się ze strukturą danych opisującą ciało stałe w celu określenia czy dany wir został objęty przez obwód ciała. Wiry objęte przez obwód ciała są usuwane

z przepływu. Obszar zewnętrzny wobec domeny jest traktowany jako pojedyncza, specjalna komórka. Nie przechowuje ona wirów, lecz ich sumę. W celu realizacji obiektu komórki okazało się niezbędne zaprojektowanie indywidualnej klasy pojemnikowej, która nie występuje w standardzie języka C++.

Przepływ globalny $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(t) = [V_x(t), V_y(t)]$ wypełnia całą domenę i w przypadku braku ciała i chmury wirowej jest polem prędkości przepływu. Wektor prędkości w każdym punkcie domeny obliczeniowej jest taki sam. Przepływ globalny może zmieniać się w czasie.



Rysunek 28. Domena obliczeniowa o wymiarach $B \times L$ i jej składniki: 1 – $n_B \times n_L$ komórek, 2 – przepływ globalny, 3 – chmura wirowa, 4 – ciało sztywne sprężyste zawieszane.

Źródło: opracowanie własne

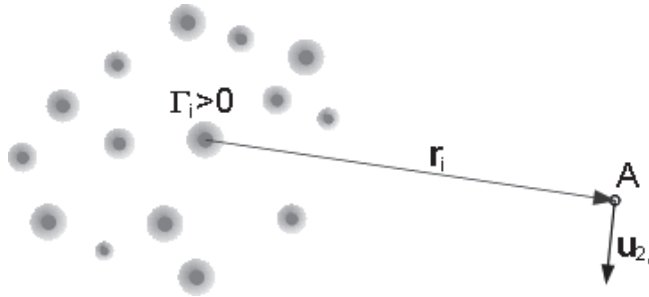
6.4.3. Chmura wirowa

Pole wirowe przepływu jest reprezentowane przez skończony zbiór N_p wirów dyskretnych (Rysunek 29.) nazywanych chmurą wirową (vortex cloud). Każdy wir na podstawie współrzędnych położenia jest przyporządkowany do komórki domeny obliczeniowej. W trakcie symulacji wir może zmienić komórkę. Przyjęto, że wir dodatni ma cyrkulację zgodną z ruchem wskazówek zegara.

Prędkość wzbudzana przez chmurę wirową w dowolnym punkcie domeny obliczeniowej stanowi superpozycję indukcji wszystkich wirów:

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{u}_{2,i} = - \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{K}_\lambda (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \Gamma_i, \quad (6.30)$$

gdzie: \mathbf{K}_λ jest jądrem Rankina lub Gaussa.



Rysunek 29. Chmura wirowa i prędkość indukowana przez wir i w punkcie A

Źródło: opracowanie własne

6.4.4. Ciało stałe w przepływie

Ciało sztywne w przepływie reprezentowane jest przez zamknięty układ N_s prostych skierowanych odcinków zwanych panelami (Rysunek 30). Założono, że dodatni obieg następuje zgodnie ze wskazówkami zegara. W każdym panelu wyróżniony zostaje punkt środkowy, który nazywany jest punktem kontrolnym. Panel i opisany zostaje poprzez podanie współrzędnych jego końców w układzie związanym z ciałem (x, y) . Na podstawie tych współrzędnych obliczane są przyrosty odcinka skierowanego $\Delta x_i, \Delta y_i$, długość panela Δs_i , funkcje trygonometryczne kąta nachylenia β_i oraz współrzędne punktu kontrolnego. Ciało jest umiejscowione w przepływie poprzez określenie położenia jego środka S w układzie globalnym domeny obliczeniowej (X, Y) , tj. podanie współrzędnych położenia i kąta obrotu. Pozwala to na znalezienie współrzędnych globalnych punktów paneli i pozostałych wielkości.

Z panelami związana jest warstwa brzegowa, którą stanowi cyrkulacja γ_i równomiernie rozłożona na ich długości lub alternatywnie wiry dyskretne umiejscowione w punktach kontrolnych o mocach $\gamma_i \Delta s_i$. Obecność wiru dyskretnego w punkcie kontrolnym panelu j powoduje wzbudzenie prędkości w punkcie kontrolnym panelu i .

Ponieważ w pracy postuluje się spełnienie warunku no-slip w ujęciu Dirichleta $V_t=0$, składowa równoległa zostanie przedstawiona w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned} V_{t\ ij} &= \frac{\Delta s_j \gamma_j r_{yij}}{2\pi r_{ij}^2} \cos(\beta_i) - \frac{\Delta s_j \gamma_j r_{xij}}{2\pi r_{ij}^2} \sin(\beta_i) \\ V_{t\ ij} &= \frac{\Delta s_j (r_{yij} \cos(\beta_i) - r_{xij} \sin(\beta_i))}{2\pi r_{ij}^2} \gamma_j \end{aligned} \quad (6.34)$$

lub krócej:

$$V_{t\ ij} = K_{ij} \gamma_j, \quad (6.35)$$

przy zastosowaniu współczynnika K_{ij} opisującego udział wiru panela j w składowej równoległej od panela w punkcie i .

$$K_{ij} = \frac{\Delta s_j (r_{ij,y} \cos(\beta_i) - r_{ij,x} \sin(\beta_i))}{2\pi r_{ij}^2}. \quad (6.36)$$

Tablica współczynników K_{ij} stanowi integralny element opisu ciała w metodzie wirów dyskretnych. Jest ona kwadratowa i ma ona wymiar $N_s \times N_s$. W ogólności nie jest symetryczna.

Wartość współczynnika samoindukcji panela K_{ii} nie może być wyznaczana wg (6.36). Wartość ta wynosi [15]:

$$K_{ii} = -\frac{1}{2}.$$

Ciało może wykonywać ruch postępowy z prędkością \mathbf{V}_B oraz ruch obrotowy z prędkością kątową $\boldsymbol{\Omega}_B$ względem globalnego układu odniesienia (domeny obliczeniowej). Przyjęto że dodatni obrót odbywa się zgodnie ze wskazówkami zegara. Prędkość punktu kontrolnego i wynikająca z ruchu ciała jako bryły sztywnej wynosi:

$$\mathbf{V}_{Bi} = \mathbf{V}_B + \mathbf{p}_i \times \boldsymbol{\Omega}_B, \quad (6.37)$$

gdzie \mathbf{p}_i jest wektorem od środka ciała do punktu kontrolnego i .

Podobnie jak poprzednio należy wyznaczyć składową równoległą tej prędkości do panela:

$$V_{t\ Bi} = V_{x\ Bi} \cos(\beta_i) + V_{y\ Bi} \sin(\beta_i). \quad (6.38)$$

Warstwa brzegowa reprezentowana za pomocą wirów dyskretnych, rozmieszczonych w punktach kontrolnych, oraz ruch obrotowy całego ciała (6.26) są źródłem wzbudzenia prędkości w dowolnym punkcie przepływu. Pole

prędkości wzbudzone przez ciało (na zewnątrz tego ciała) \mathbf{u}_3 może być wyznaczone według zależności:

$$\mathbf{u}_3 = - \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{K}_\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \gamma_i \Delta s_i - \frac{1}{2\pi} \iint_I \frac{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{r^2} dI, \quad (6.39)$$

gdzie: dI_0 jest elementem pola zaś \mathbf{r} wektorem od tego elementu do punktu indukcji, zaś „-” we wzorze jest konsekwencją przyjętej konwencji oznaczania dodatniej cyrkulacji i prędkości obrotowej.

W implementacji komputerowej całkowanie we wzorze (6.39) jest realizowane w sposób dyskretny. Pole powierzchni ciała jest podzielone na N fragmentów o polach powierzchni ΔA_i , a całka jest zamieniona na sumę:

$$\mathbf{u}_3 = - \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{K}_\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \gamma_i \Delta s_i - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^N \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i}{r^2} \Delta A_i. \quad (6.40)$$

Podejście takie jest tożsame z dyskretyzacją pola wirowego wewnątrz ciała. Istnieje też możliwość zastosowanie twierdzenia Stokesa (3.14) w celu zamiany całki powierzchniowej na całkę po obwodzie ciała. Prowadzi to do znalezienia ekwiwalentnych wirów zlokalizowanych w punktach kontrolnych. Jednakże przeprowadzone symulacje komputerowe (przedstawione w dalszej części pracy) pokazały, że prędkość obrotowa cała ma niewielki udział w generacji pola prędkości przepływu.

6.4.5. Zasada zachowania cyrkulacji przepływu

Prawo zachowania wirowości opisane w rozdziale 3.4.4. pozwala zapisać równanie:

$$\sum_{i=1}^{N_p} \Gamma_i + \Gamma_\infty + \sum_{i=1}^{N_s} \gamma_i \Delta s_i - \Gamma_B^{t-\Delta t} + 2 A \Omega = 0, \quad (6.41)$$

gdzie $\sum_{i=1}^{N_p} \Gamma_i$ jest sumą wirowości wirów wolnych (chmury wirowej), Γ_∞ oznacza sumę wirowości wirów, które opuściły domenę symulacji, $\sum_{i=1}^{N_s} \gamma_i \Delta s_i$ interpretować należy jako sumę wirowości warstwy brzegowej, $\Gamma_B^{t-\Delta t}$ oznacza sumę wirowości wirów, które znalazły się wewnątrz ciała w poprzednim korku czasowym (wiry te zostały usunięte i następnie zregenerowane), zaś $2 A \Omega$ jest całkowitą wirowością związaną z ruchem obrotowym ciała.

6.4.6. Generacja warstwy brzegowej w ujęciu dyskretnym

Spełnienie warunku no-through-flow w punktach kontrolnych paneli ciała wraz z równaniem zachowania cyrkulacji przepływu (6.41) prowadzi do układu równań pozwalającego wyznaczyć wirowości paneli γ_i .

Postulujemy spełnienie warunku no-slip w punkcie kontrolnym panelu i . Punkt ten porusza się względem domeny obliczeniowej z prędkością \mathbf{V}_{Bi} (6.37), której składowa równoległa do panelu wynosi (6.38):

$$V_{t\ Bi} = V_{x\ Bi} \cos(\beta_i) + V_{y\ Bi} \sin(\beta_i) .$$

Składowa prędkości strumienia globalnego $\mathbf{u}_1 = [u_{1x}, u_{1y}]$ równoległa do panelu i wynosi:

$$u_{t\ 1} = u_{1x} \cos(\beta_i) + u_{1y} \sin(\beta_i) .$$

Natomiast prędkość indukowana przez chmurę wirową $\mathbf{u}_2 = [u_{2x}, u_{2y}]$ obliczaną wg (6.30) ma składową styczną w punkcie kontrolnym wynoszącą:

$$u_{t\ 2} = u_{2x} \cos(\beta_i) + u_{2y} \sin(\beta_i) .$$

Oczywiście w ogólności wszystkie powyższe składowe nie znoszą się, tzn. warunek *no-slip* nie jest spełniony i przepływ nie jest „przyklejony” do ciała:

$$u_{t\ 1} + u_{t\ 2} \neq V_{t\ Bi} .$$

Realizacja warunku no-slip polega na takim doborze wirowości paneli, aby spełnione było równanie:

$$\sum_{j=1}^{N_s} K_{ij} \gamma_j + u_{t\ 1} + u_{t\ 2} = V_{t\ Bi} \quad i = 1 \dots N_s , \quad (6.42)$$

gdzie:

$$\sum_{j=1}^{N_s} K_{ij} \gamma_j = \sum_{j=1}^N V_{t\ ij} = V_{t\ i}$$

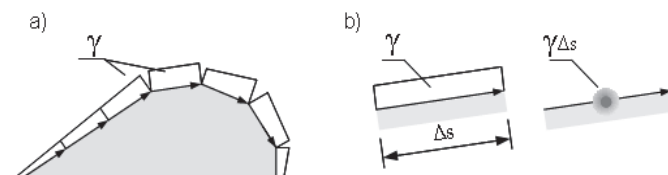
jest składową styczną prędkości indukowaną w punkcie kontrolnym i przez wszystkie panele ciała, natomiast współczynnik K_{ij} obliczany jest wg (6.36).

W celu uzyskania jednoznacznego rozwiązania układu równań (6.42) musi zostać uzupełniony o równanie zachowania cyrkulacji (6.41). Najlepszą metodą według pozycji [15] jest dodanie równania zachowania cyrkulacji do równania każdego panela (6.42), co zostało zrealizowane w programie komputerowym VIR2D. Zabieg ten prowadzi do powstania układu równań z niewiadomymi γ_i , który z reguły (tj. dla typowych kształtów ciała) jest dobrze uwarunkowany. Pomimo że spełnienie warunku no-slip jest wystarczające, w programie dodatkowo jest kontrolowany warunek no-through-flow.

Wyznaczone wielkości γ_i mają wymiar prędkości [m/s] i można je interpretować jako prędkość równoległą do panela w punkcie kontrolnym [15], tzn. prędkość w obszarze warstwy brzegowej. Wniosek ten będzie miał zastosowanie przy wyznaczaniu ciśnień działających na panele.

6.4.7. Emisja warstwy brzegowej

Sposób wyboru realizacji dyfuzji w metodzie wirów dyskretnych wpływa na sposób emisji warstwy brzegowej do przepływu. Sposób emisji warstwy brzegowej w niniejszej pracy nazywany jest sposobem realizacji warunku brzegowego. Zaś jednym z jej celów określenie wpływu tego sposobu na wyniki obliczeń komputerowych. Sposób emisji warstwy brzegowej jest realizowany metodami przybliżonymi, które mogą mieć wpływ na wynik obliczeń.



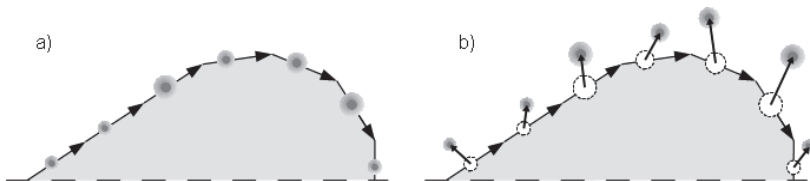
Rysunek 31. Zamiana ciągłej warstwy brzegowej na wiry dyskretny, a) ciągła warstwa brzegowa na obwodzie ciała, b) sposób utworzenia wiru dyskretnego

Źródło: opracowanie własne

Zakłada się, że w przypadku wysokich liczb Reynoldsa warstwa ta jest bardzo cienka i w każdym kroku czasowym jest w całości emitowana do przepływu. Ciągła warstwa (Rysunek 31.) jest zamieniana na dyskretną i wprowadzana do przepływu w postaci wirów dyskretnych. Istnieją różne metody emisji warstwy.

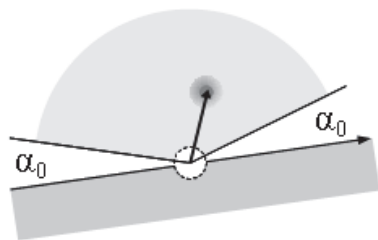
6.4.7.1. Metoda ruchów losowych

Realizację kroku dyfuzyjnego metodą ruchów losowych można rozszerzyć do emisji warstwy brzegowej złożonej z wirów dyskretnych położonych w środkach paneli (Rysunek 32). Wiry te zostają przemieszczone w losowo wybrane miejsca znajdujące się na zewnątrz ciała wg procedury (6.73), gdzie kąt θ dobrany jest losowo z zawężonego przedziału $\langle \theta + \alpha_0, 2\pi - \alpha_0 \rangle$ tak, aby przemieszczenie było skierowane na zewnątrz ciała (Rysunek 33). W celu uniknięcia problemów numerycznych w programie VIR2D przyjęto $\alpha = 10^\circ$.



Rysunek 32. Emisja warstwy brzegowej do domeny obliczeniowej w postaci wirów dyskretnych poprzez ruchy losowe, a) wiry dyskretny w środkach paneli, b) wprowadzenie wirów do przepływu

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 33. Obszar emisji wiru.

Źródło: opracowanie własne

6.4.7.2. Metoda stałych punktów emisji

Metoda stałych punktów emisji jest metodą uproszczoną. Polega ona na emitowaniu wirów dyskretnych w stałych miejscach wokół ciała (Rysunek 34). Punkt emisji określa się, odmierzając stałą odległość od punktu kontrolnego panela ε_B na zewnątrz wzdłuż normalnej do panela. W pracy ta metoda realizacji warunku brzegowego jest związana z deterministycznym modelem dyfuzji.

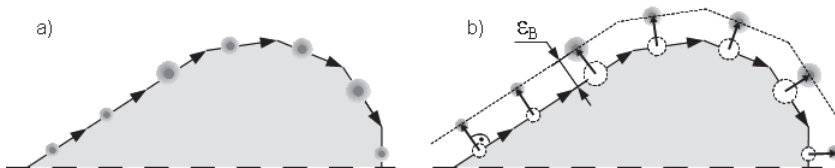
Odległość emisji wiru od brzegu ciała została przyjęta wg [15]:

$$\varepsilon_B = \sqrt{\frac{4\nu\Delta t}{3}}, \quad (6.43)$$

gdzie ν – lepkość kinematyczna ciała, Δt – długość kroku czasowego.

Wartość ε_B można interpretować jako grubość warstwy brzegowej.

Dla $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ oraz $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ wynosi ona $0,45 \text{ mm}$.



Rysunek 34. Emisja warstwy brzegowej do domeny obliczeniowej w postaci wirów dyskretnych w stałych miejscach emisji, b) wprowadzenie wirów do przepływu

Źródło: opracowanie własne

6.4.8. Rozwiązanie równania konwekcji

Stosując operator różniczkowania wędrownego Stokesa (pochodnej substancjalnej):

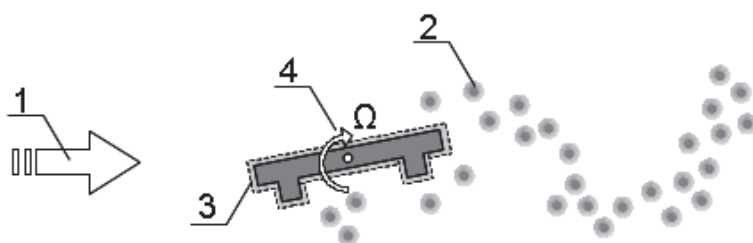
$$\frac{D(\dots)}{Dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial(\dots)} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\dots) \quad (6.44)$$

część konwekcyjną równania Naviera–Stokesa (6.9):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0$$

możemy wyrazić w postaci:

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad (6.45)$$

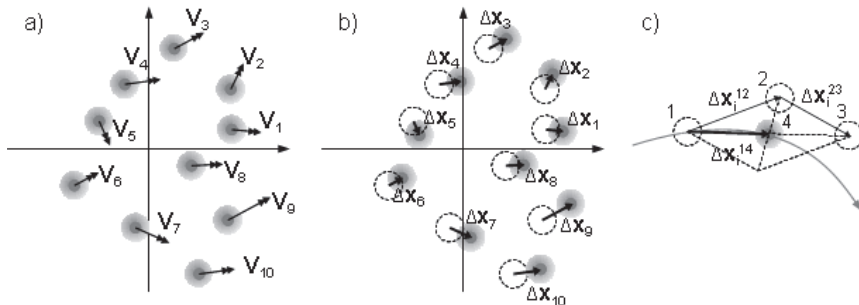


Rysunek 35. Składniki indukujące prędkość przepływu: 1 – strumień globalny, 2 – wiry wolne, 3 – warstwa brzegowa, 4 – obracające się ciało

Źródło: opracowanie własne

Równanie (6.45) oznacza znikanie pochodnej substancjalnej pola wirowości. Rozwiązywane jest ono metodą przyrostową (Eulera) we współrzędnych

Lagrangaea w odniesieniu do zbioru wirów dyskretnych. Zatem przeprowadzenie kroku konwekcyjnego o czasie trwania Δt sprowadza się do wyznaczenia wartości pola prędkości w punkcie położenia każdego wiru i następnie przemieszczenie wirów w nowe położenia (Rysunek 36).



Rysunek 36. Konwekcja chmury wirowej: a) prędkości wypadkowe w punkcie położenia każdego wiru, b) przemieszczenia każdego wiru dyskretnego c) procedura przemieszczenia wiru: 1 – położenie początkowe, 2 – położenie tymczasowe, 3 – położenie nieosiągnięte, 4 – położenie ostateczne

Źródło: opracowanie własne

Obliczenie prędkości w punkcie położenia dowolnego wiru dyskretnego wymaga wykonania superpozycji wpływów (Rysunek 35): strumienia globalnego, chmury wirowej, warstwy brzegowej na ciele, obracających się ciał w przepływie.

W celu poprawienia wyników obliczeń należy zastosować przyrosty co najmniej 2 rzędu według procedury:

1. Dla każdego wiru dyskretnego i w punkcie położenia pierwotnego wiru 1 (Rysunek 36) obliczana jest wypadkowa prędkość przepływu $\mathbf{V}_i^1 = [V_{xi}^1, V_{yi}^1]$
2. Następnie wszystkie wiry są przemieszczane do nowego tymczasowego położenia 2 wg wzoru:

$$\begin{aligned} x_i^2 &= x_i^1 + \Delta x_i^{12} = x_i^1 + V_{xi}^1 \cdot \Delta t \\ y_i^2 &= y_i^1 + \Delta y_i^{12} = y_i^1 + V_{yi}^1 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (6.46)$$

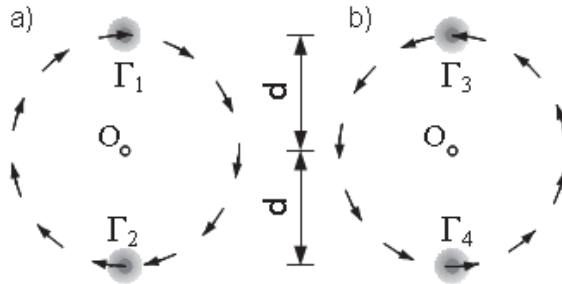
3. Po przemieszczeniu w nowe położenia, wiry tworzą nowy układ. W nowym układzie ponownie wyznaczana jest prędkość $\mathbf{V}_i^2 = [V_{xi}^2, V_{yi}^2]$ każdego wiru od wszystkich wpływów. Ostateczne położenie wirów obliczane jest wg:

$$\begin{aligned}
 x_i^4 &= x_i^1 + \Delta x_i^{14} = x_i^1 + \frac{V_{x_i}^1 + V_{x_i}^2}{2} \cdot \Delta t \\
 y_i^4 &= y_i^1 + \Delta y_i^{14} = y_i^1 + \frac{V_{y_i}^1 + V_{y_i}^2}{2} \cdot \Delta t
 \end{aligned}
 \tag{6.47}$$

Uwzględnienia przyrostów kolejnych rzędów możliwe jest przez kolejne powtórzenia kroku 3 powyższej procedury. Za każdym razem należy uwzględniać prędkość początkową (z kroku 1) oraz końcową. W dalszej części liczbę powtórzeń kroków konwekcyjnych określa się skróconym terminem rzęd dokładności konwekcji.

6.4.9. Szczególne przypadki konwekcji

W celu zobrazowania kinematyki wirowej zostały przedstawione wyselekcjonowane przypadki układów wirów. Rysunek 37. pokazuje parę jednakowych wirów położonych w odległości równej $2d$. Konstelacja taka wskutek samoindukcji będzie obracać się wokół środka położenia O . Wiry dodatnie będą wykonywać obrót zgodny ze wskazówkami zegara, zaś ujemne – przeciwnie. Natomiast dipol wirowy (dwa wiry równe co do wartości bezwzględnej lecz o różnych znakach) będzie przemieszczał się wzdłuż linii prostej prostopadłej do odcinka łączącego wiry (Rysunek 38). Takie układy wirów możemy określić mianem stabilnych, ponieważ wzajemne położenia cząstek nie ulegają zmianie.

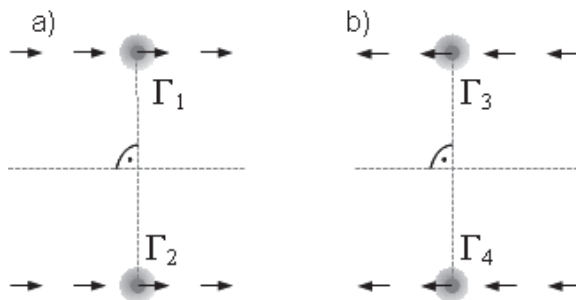


Rysunek 37. Konwekcja układu dwóch wirów dyskretnych izolowanych a) $\Gamma_1 = \Gamma_2 > 0$, b) $\Gamma_3 = \Gamma_4 < 0$

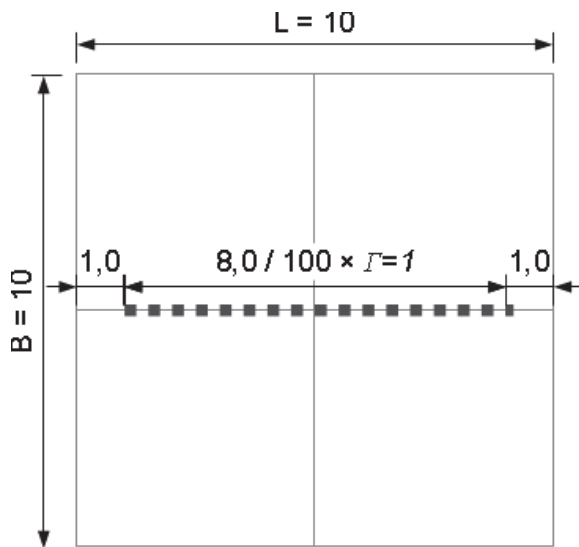
Źródło: opracowanie własne

Kolejnym szczególnym układem wirów jest odcinek wirowy. Jest to układ niestabilny, który będzie dążył do ułożenia stabilnego. Zaprezentowany przykład

jest wynikiem pracy programu VIR2D. Symulacja dotyczy rozwoju grupy jednakowych 100 wirów o mocach równych 1 w chwili początkowej ułożonych w równych odstępach na odcinku o długości 8 (Rysunek 39). Rysunek 40 pokazuje konfiguracje wirów w kolejnych chwilach czasowych przy braku przepływu globalnego. Łatwo zauważyć, że początkowa konstelacja podzieliła się na dwie części i dąży do konfiguracji stabilnej analogicznej do tej pokazanej na rysunku 37.

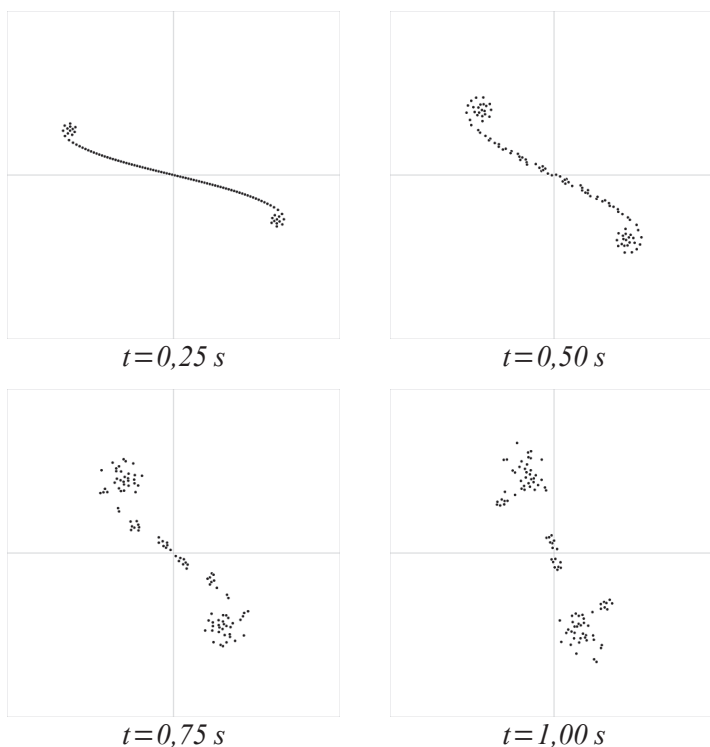


Rysunek 38. Konwekcja układu dwóch wirów dyskretnych izolowanych a) $\Gamma_1 = -\Gamma_2, \Gamma_2 > 0$, b) $\Gamma_3 = -\Gamma_4, \Gamma_4 > 0$



Rysunek 39 Konwekcja linii wirowej – położenie początkowe

Źródło 38-39: opracowanie własne



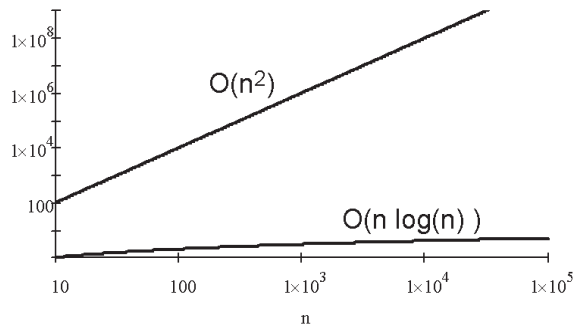
Rysunek 40. Konwekcja linii wirowej – kolejne chwile czasowe

Źródło: opracowanie własne

6.4.10. Problem n ciał i jego rozwiązanie

Wykonanie procedury konwekcji wymaga wyznaczenia prędkości indukowanej w N_p punktach przez $N_p - 1$ wirów. Zagadnienie to nosi nazwę problemu n ciał (n-body problem). Jego złożoność obliczeniowa, przy bezpośrednim wyznaczaniu oddziaływań od każdego wiru, jest rzędu $O(n^2)$, co w przypadku typowych symulacji inżynierskich prowadzi do zbyt długich czasów obliczeń.

W pracy problem n ciał został rozwiązany metodą interakcji grupowej (cell-to-particie interaction), która polega na grupowaniu wirów i następnie obliczaniu indukcji do grupy zamiast od każdego wiru indywidualnie. Niezbędne wzory zostaną wyprowadzone na płaszczyźnie zespolonej.



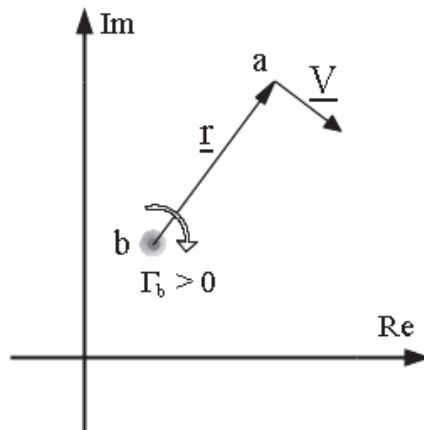
Wykres 7. Porównanie złożoności obliczeniowej rzędu $O(n^2)$ i $O(n \cdot \log(n))$ dla rosnącej liczby n .

Źródło: opracowanie własne

Rozpatrzmy indukcję prędkości w punkcie a płaszczyzny zespolonej od wiru położonego w punkcie b (Rysunek 41.). Wówczas zarówno promień od źródła do celu indukcji \underline{r}_{ab} , jak i prędkość indukowana \underline{V}_a będą wyrażone liczbami zespolonymi:

$$\underline{r}_{ab} = r_{xab} + i r_{yab} \quad (6.48)$$

$$\underline{V}_a = V_{xa} + i V_{ya} \quad (6.49)$$



Rysunek 41. Pojedynczy wir na płaszczyźnie zespolonej

Źródło: opracowanie własne

W myśl powyższych założeń i przy niezmienionej konwencji, że wir dodatni ma cyrkulację zgodną ze wskazówkami zegara, wzór (3.23) możemy zapisać:

$$\underline{V}_a = V_{x_a} - i V_{y_a} = i \frac{\Gamma_b}{2\pi r_{ab}} . \quad (6.50)$$

Rozszerzmy teraz rozważania do grupy n_p wirów znajdującej się w okręgu o promieniu r_{max} (Rysunek 42). Środek tego okręgu jest początkiem płaszczyzny zespolonej. Położenie wiru i o mocy Γ_i opisuje promień zespolony $\underline{r}_i = r_{x_i} + i r_{y_i}$ o długości $r_i = |\underline{r}_i|$. Natomiast położenie punktu a promień: $\underline{r}_a = r_{x_a} + i r_{y_a}$ o długości $r_a = |\underline{r}_a|$.

Zakładamy, że:

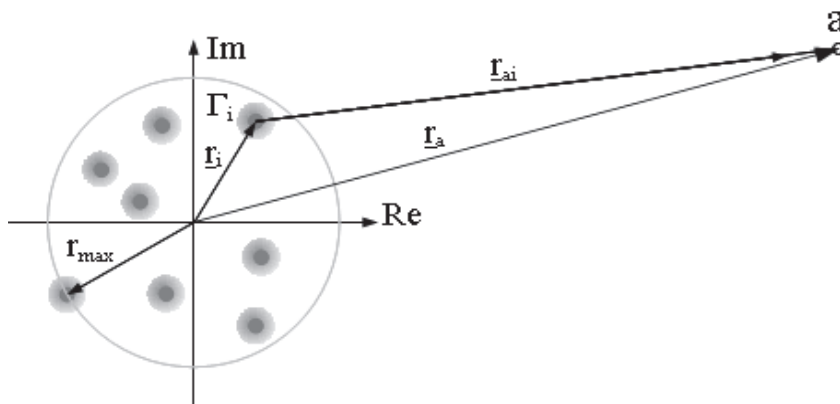
$$r_a > r_{max} . \quad (6.51)$$

Promień zespolony od wiru i do punktu a wynosi:

$$\underline{r}_{ai} = \underline{r}_a - \underline{r}_i . \quad (6.52)$$

Prędkość indukowana w punkcie a od grupy wirów wyznaczona na podstawie (6.50) wynosi:

$$\underline{V}_a = \sum_{i=1}^{n_p} i \frac{\Gamma_i}{2\pi r_{ai}} = \sum_{i=1}^{n_p} i \frac{\Gamma_i}{2\pi r_a (1 - \frac{r_i}{r_a})} = \frac{i}{2\pi r_a} \sum_{i=1}^{n_p} \Gamma_i \frac{1}{1 - \frac{r_i}{r_a}} . \quad (6.53)$$



Rysunek 42. Indukcja grupowa w punkcie A na płaszczyźnie zespolonej

Źródło: opracowanie własne

Na mocy założenia (6.51) zachodzi:

$$\left| \frac{\underline{r}_i}{\underline{r}_a} \right| = z < 1 \quad . \quad (6.54)$$

Zatem wyrażenie (6.53) może być rozwinięte wokół $z=0$ w szereg Taylora według wzoru:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \quad z < 1 \quad . \quad (6.55)$$

Prowadzi to do wzoru przybliżonego na prędkość w punkcie a :

$$\underline{V}_a = \frac{i}{2\pi \underline{r}_a} \sum_{i=1}^{n_p} \Gamma_i \sum_{j=0}^{m_c} \left(\frac{\underline{r}_i}{\underline{r}_a} \right)^j = \frac{i}{2\pi \underline{r}_a} \sum_{j=0}^{m_c} \frac{\sum_{i=1}^{n_p} \Gamma_i \underline{r}_i^j}{\underline{r}_a^j} \quad , \quad (6.56)$$

gdzie m_c można traktować jako rząd dokładności.

Oznaczając sumę mocy wirów w celi przez:

$$\Gamma_0 = \sum_{i=1}^{n_p} \Gamma_i \quad (6.57)$$

oraz definiując moment wirowy rzędu $j \geq 1$ jako:

$$\underline{Z}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} \Gamma_i \underline{r}_i^j}{\Gamma_0} \quad , \quad (6.58)$$

wzór (6.56) może być zapisany w postaci:

$$\underline{V}_a = \frac{i \Gamma_0}{2\pi \underline{r}_a} \left(1 + \sum_{j=1}^{m_c} \frac{\underline{Z}_j}{\underline{r}_a^j} \right) \quad , \quad (6.59)$$

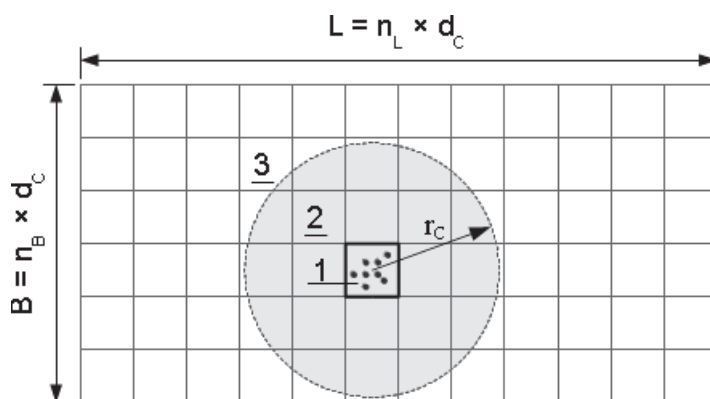
gdzie j w indeksie górnym oznacza potęgę, zaś w dolnym rząd momentu.

Obliczenia wykonane według (6.59) prowadzą do uzyskania wartości zespolonej \underline{V}_a na podstawie, której otrzymuje się składowe wektora prędkości \underline{V}_a w kartezjańskim układzie odniesienia domeny (X, Y) według (6.50):

$$\underline{V}_a = [V_{x a}, V_{y a}] = [Re(\underline{V}_a), -Im(\underline{V}_a)] \quad . \quad (6.60)$$

Praktyczna implementacja wzoru (6.59) sprowadza się do podziału domeny obliczeniowej na $n_b \times n_L$ komórek (Rysunek 43) oraz do obrania promienia

zasięgu indukcji bezpośredniej r_c oraz maksymalnego rzędu momentu wirowego uwzględnianego w obliczeniach m_c .



Rysunek 43. Granica obszarów indukcji bezpośredniej i pośredniej dla wybranej komórki: 1 – wybrana komórka, 2 – obszar indukcji bezpośredniej, 3 – obszar indukcji pośredniej.

Źródło: opracowanie własne

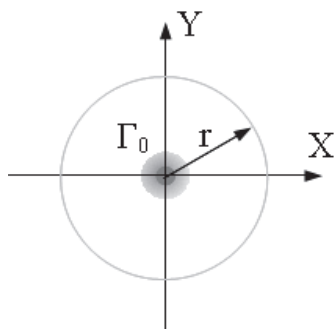
Chmura wirowa znajdująca się w domenie obliczeniowej jest wówczas podzielona na grupy według układu komórek. Prędkość wzbudzona w dowolnym punkcie domeny jest sumą wzbudzeń grup wirów. Jeżeli punkt, w którym obliczana jest indukcja, znajduje się blisko komórki, obliczenia wykonuje się indywidualnie od każdego wiru w tej komórce. Jeżeli punkt ten znajduje się daleko wtedy zastosowanie ma wzór przybliżony. Złożoność obliczeniowa takiej procedury jest rzędu $O(n \cdot \log(n))$. Liczbę podziałów boków domeny obliczeniowej B oraz L dobiera się tak, aby komórki były kwadratami lub były jak najbardziej zbliżone do kwadratów. Wówczas punkty leżące w odległości mniejszej niż r_c od środka celi określamy jako bliskie. Natomiast pozostałe jako dalekie.

6.4.11. Rozwiązanie równania dyfuzji

Część dyfuzyjna równania Naviera–Stokesa w przeciwieństwie do części konwekcyjnej nastęrcza dużo więcej trudności. Realizowana może być różnymi przybliżonymi metodami wyprowadzanymi na podstawie rozwiązania analitycznego dla pojedynczego wiru. W rozdziale zostanie zaprezentowana metoda ruchów losowych oraz metoda uproszczona. Obie metody zostały

zaimplementowane w programie obliczeniowym VIR2D. Użytkownik programu decyduje, która z nich zostanie zastosowana w symulacji komputerowej.

6.4.11.1. Rozwiązanie analityczne równania dyfuzji



Rysunek 44. Wir dyskretny w początku układu współrzędnych

Źródło: opracowanie własne

Zjawisko dyfuzji opisuje równanie (6.10), które zostało tutaj zapisane ponownie:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega ,$$

gdzie ω – pole wirowe, t – czas, ν – lepkość kinematyczna płynu.

Równanie to przedstawione w układzie biegunowym na płaszczyźnie (r, θ) przyjmuje postać:

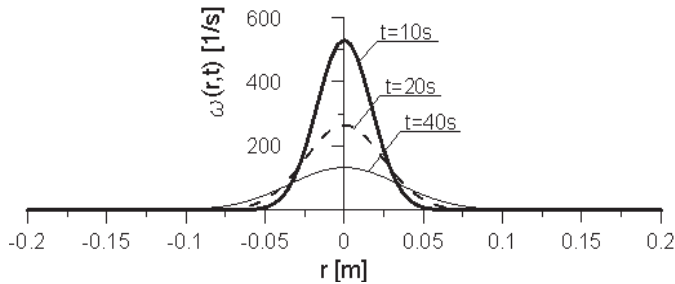
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right\} . \quad (6.61)$$

Interesuje nas rozwiązanie tego równania dla wiru dyskretnego o mocy Γ^0 umiejscowionego w początku układu współrzędnych (Rysunek 44.). Oznacza to przyjęcie warunku brzegowego $\omega(r, 0) = \Gamma^0 \delta(r)$ przy $\theta \in (0, 2\pi)$.

Rozwiązanie tego problemu przedstawia wzór (6.62) [15]. Opisuje on rozkład pola wirowego w chwili czasowej t w odległości r od początku układu współrzędnych. Rozkład ten jest osiowo symetryczny.

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma^0}{4\pi \nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} , \quad t > 0 . \quad (6.62)$$

Rozwiązanie tego równania zostało przedstawione na Wykresie 8. W obliczeniach przyjęto $\Gamma^0 = 1 \text{ m/s}^2$ oraz lepkość kinematyczną powietrza $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Wykresy wykonane zostały dla chwil czasowych $t = 10 \text{ s}, 20 \text{ s}, 40 \text{ s}$ i obrazują „rozmywanie” się wiru wraz z postępem czasu. Największą trudnością jest zrealizowanie tego procesu dla dyskretnego pola wirowego złożonego ze skończonej liczby cząstek, którego rozwój symulowany jest w kolejnych krokach czasowych.

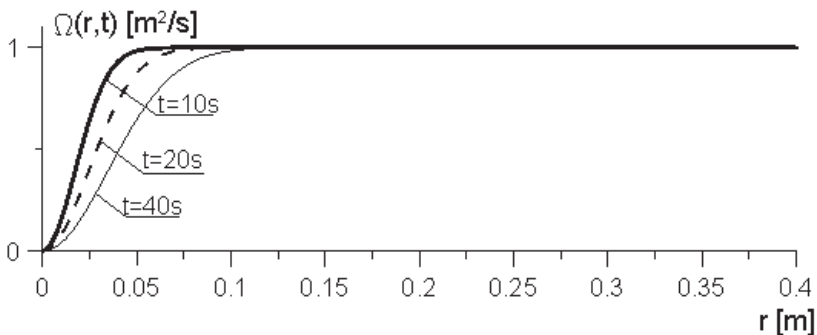


Wykres 8. Graficzne przedstawienie rozwiązania równania (6.61)

Źródło: opracowanie własne

Przydatne w dalszej części rozważań będzie wyprowadzenie wzoru nacalkowitą wirowość Ω w kole o promieniu r . Jest to całka po powierzchni koła o promieniu r z pola wirowego (6.62):

$$\Omega(r, t) = \iint \omega(r, t) dA . \quad (6.63)$$



Wykres 9. Graficzne przedstawienie zmiany dystrybucji wirowości w czasie

Źródło: opracowanie własne

Wykonując całkowanie w układzie biegunowym od 0 do r otrzymujemy rozwiązanie:

$$\Omega(r, t) = \Gamma^0 \left(1 - e^{\frac{-r^2}{4vt}}\right) \cdot \quad (6.64)$$

Wzór opisuje całkowitą wirowość pola w kole o promieniu r w chwili czasowej t . Został on przedstawiony na wykresie 9, z którego możemy prześledzić powiększanie się promienia obszaru całkowitej wirowości. Został on sporządzony dla takich samych danych liczbowych jak poprzedni.

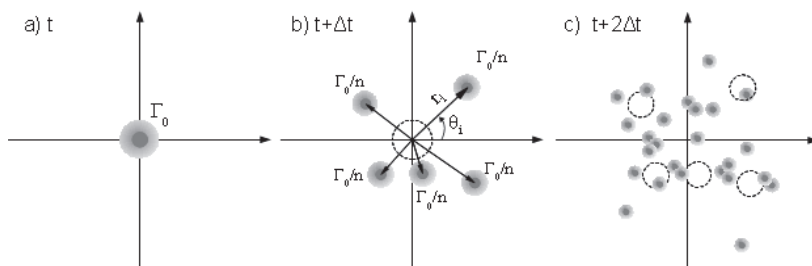
6.4.11.2. Metoda ruchów losowych

Najczęściej wykorzystywaną metodą realizacji kroku dyfuzyjnego jest metoda ruchów losowych (random walk method). Jest to metoda realizująca dyfuzję poprawnie w sensie statystycznym. W niniejszej pracy przedstawiono jedynie koncepcje i interpretacje rozwiązania. Ścisłe dowody oraz symulacje sprawdzające ujęte zostały w pracach [13,15].

Realizacja procesu dyfuzji w kolejnych krokach czasowych polega na podzieleniu wiru dyskretnego na n subwirów o równych wartościach wirowości wynikających z podziału cząstki pierwotnej na n części (6.65) i umieszczeniu ich wokół wiru wyjściowego. W reprezentacji pola wirowego w postaci grupy cząstek procedura ta jest powtarzana w każdym kroku czasowym dla każdej z nich. Prowadzi to oczywiście do zwiększania się ich liczby:

$$\Gamma^{t+\Delta t} = \Gamma^t / n \quad (6.65)$$

Proces ten został schematycznie przedstawiony rysunku 45 dla $n=5$ dla 2 kolejnych kroków czasowych. Procedura ta ma realizować rozwiązanie analityczne opisane wzorem (6.62).



Rysunek 45. Proces dyfuzji pojedynczego wiru dyskretnego

Źródło: opracowanie własne

Określenia wymaga zatem sposób rozmieszczania subwirów dyskretnych wokół położenia wiru pierwotnego. Wiry należy rozmieszczać tak, aby utrzymać rozkład całkowitej wirowości opisanej wzorem (6.64).

Załóżmy, że analizujemy dyfuzję pojedynczego wiru w przedziale czasowym od 0 do Δt . Odpowiada to oczywiście przeprowadzeniu symulacji w czasie jednego kroku. Prowadzi to do rozmieszczenia n subwirów wokół pierwotnego wiru. Rozpatrzy obszar kołowy o promieniu r (Rysunek 46). Przyjmijmy, że n_r subwirów znalazło się w tym obszarze, zaś pozostała część $n - n_r$ poza tym obszarem. Nie wymagamy jednak żadnego sposobu uporządkowania cząstek ani w obszarze koła, ani poza nim.

Całkowita wirowość w kole o promieniu r wynosi zatem:

$$\Omega(r, \Delta t) = n_r \cdot \frac{\Gamma^0}{n} . \quad (6.66)$$

Korzystając z (6.64) dla upływu czasu Δt możemy zapisać:

$$n_r \cdot \frac{\Gamma^0}{n} = \Gamma^0 (1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu\Delta t}}) \quad (6.67)$$

lub po uproszczeniu:

$$\frac{n_r}{n} = 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu\Delta t}} . \quad (6.68)$$

Wobec swobody wyboru promienia r stosunek liczby wirów znajdujących się w kole do całkowitej liczby wirów traktujemy jako liczbę losową:

$$P_r = \frac{n_r}{n}, 0 \leq P_r \leq 1 . \quad (6.69)$$

Przekształcając równanie (6.68) i podstawiając (6.69) otrzymujemy:

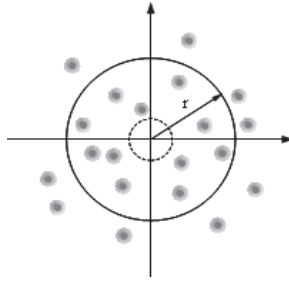
$$r = \sqrt{4\nu\Delta t \ln\left(\frac{1}{Q_r}\right)} , \quad (6.70)$$

gdzie $Q_r = 1 - P_r$ jest również liczbą losową z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Wzór (6.70) określa sposób obliczania pierwszej współrzędnej położenia i -tego subwiru we współrzędnych biegunowych. Określenie drugiej współrzędnej, tzn. kąta, jest dużo łatwiejsze. Rozwiązanie analityczne równania dyfuzji (6.62) jest osiowo symetryczne. Kąt można wybrać losowo z przedziału:

$$\theta = Q_\theta \cdot 2\pi , \quad (6.71)$$

gdzie Q_θ jest liczbą losową z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.



Rysunek 46. Krok dyfuzyjny dla $n=20$.

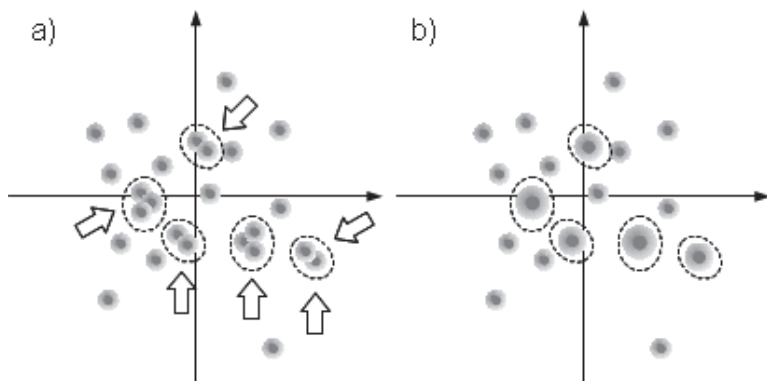
Źródło: opracowanie własne

Zatem, żeby zachować dystrybucję pola wirowego należy dla każdego subwiry wygenerować dwie liczby losowe z przedziału $(0, 1)$, następnie korzystając z (6.70) oraz (6.71) znaleźć jego nowe położenie. W kolejnym kroku czasowym procedurę należy powtórzyć. Niestety wykonanie takiego algorytmu prowadzi do zwiększania się liczby cząstek w sposób wykładniczy. Zakładając, że początkowe pole wirowe w chwili czasowej t składało się z M wirów dyskretnych, wówczas po kroku czasowym k , liczba ta osiąga wartość $M \cdot n^k$:

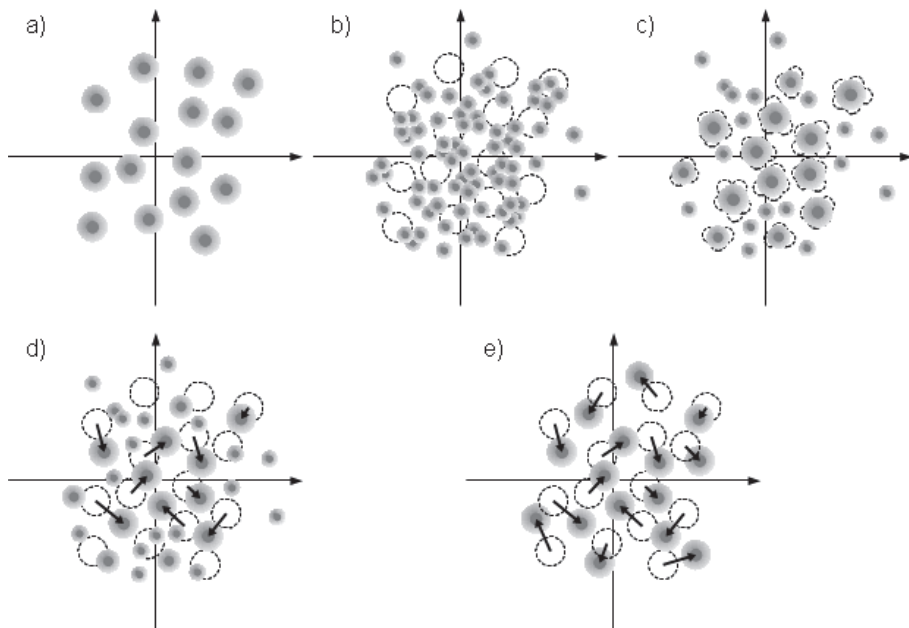
$$\begin{aligned}
 t &\Rightarrow M \\
 t + \Delta t &\Rightarrow M \cdot n \\
 t + 2 \Delta t &\Rightarrow M \cdot n \cdot n \\
 &\dots \\
 t + k \Delta t &\Rightarrow M \cdot n^k .
 \end{aligned}
 \tag{6.72}$$

Typowa symulacja komputerowa metodą wirów dyskretnych składa się z co najmniej kilku tysięcy kroków. Nawet przy przyjęciu tylko $n=2$ liczba cząstek staje się zbyt duża, żeby obliczenia mogły być wykonywane na komputerach klasy PC. Zatem metoda musi być zmodyfikowana. Najprostszym sposobem zmniejszenia liczby cząstek wirowych jest łączenie wirów znajdujących się w bliskim sąsiedztwie (Rysunek 47).

W przypadku dyskretnego pola wirowego złożonego z wielu cząstek (Rysunek 48) łączenie wirów bliskich doprowadza do pojawienia się wirów o wartościach wirowości równej lub zbliżonej do wartości wirów wyjściowych dla danego kroku dyfuzyjnego. Skoro część wirów zregenerowała się w innych miejscach, to możemy przyjąć, że wykonały one ruch w wyniku którego pojawiły się w tych położeniach. Dla implementacji komputerowej najkorzystniejszą sytuacją byłoby, gdyby wszystkie cząstki wirowe zostały odtworzone w innych miejscach. Właśnie taki scenariusz jest narzucany. Wiry nie są dzielone na subwiry, lecz jako całe przemieszczane w nowe położenia wg (6.70) i (6.71).



Rysunek 47. Łączenie wirów znajdujących się w bliskim sąsiedztwie, a) dyskretne pole wirowe przed i b) po połączeniu wirów bliskich



Rysunek 48. Dyfuzja chmury wirowej, a) postać wyjściowa, b) dyfuzja przez podział i przemieszczenie, c) łączenie wirów bliskich po przemieszczeniu d) domniemany ruch wirów połączonych e) dyfuzja bez podziału

Źródło 47-48: opracowanie własne

Zatem realizacja kroku dyfuzyjnego w przedziale czasowym Δt polega na losowym przemieszczeniu każdego wiru dyskretnego. Dla każdego wiru należy wykonać procedurę:

1. Wygenerować dwie liczby losowe Q_r i Q_θ z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$
2. Obliczyć długość wektora przemieszczenia i jego kąt:

$$r = \sqrt{4\nu \Delta t \ln\left(\frac{1}{Q_r}\right)}, \theta = Q_\theta \cdot 2\pi$$

3. Wyznaczyć nowe położenie wiru wg:

$$\begin{aligned} x^{t+\Delta t} &= x^t + r \cdot \cos(\theta) \\ y^{t+\Delta t} &= y^t + r \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \quad (6.73)$$

Złożoność obliczeniowa powyższej procedury wynosi $O(n)$.

6.4.11.3. Rozwiązanie równania dyfuzji – metoda deterministyczna

Zaproponowana metoda jest metodą uproszczoną. Jej koncepcja opiera się na osłabieniu mocy wiru w trakcie przeprowadzanej symulacji komputerowej. Osłabianie to można określić mianem postarzania wiru.

Koncepcja postarzania wiru w metodzie wirów dyskretnych pojawiła się w latach 70 XX wieku. Ling proponował osłabianie mocy wiru w każdym kolejnym kroku czasowym zgodnie ze wzorem [15]:

$$\Gamma^{t+\Delta t} = (1-\lambda) \cdot \Gamma^t, \quad (6.74)$$

gdzie λ jest parametrem, który należy określić drogą eksperymentalną.

Drogą kolejnych eksperymentów określono, że najlepsze wyniki dla symulacji płaskich przepływów uzyskuje się dla wartości $\lambda=0,01$. Konieczność redukcji mocy wirów dyskretnych tłumaczono zjawiskami dysypacji energii, szybkim zanikaniem wirów o przeciwnych cyrkulacjach znajdujących się w bliskim sąsiedztwie oraz zniekształceniami linii wirowych w trójwymiarowym przepływie. Rozwój tej metody zastał zaniechany wraz z rozpowszechnieniem się komputerów o dużych mocach obliczeniowych, co umożliwiała stosowanie metody ruchów losowych, która została uznana za właściwszą.

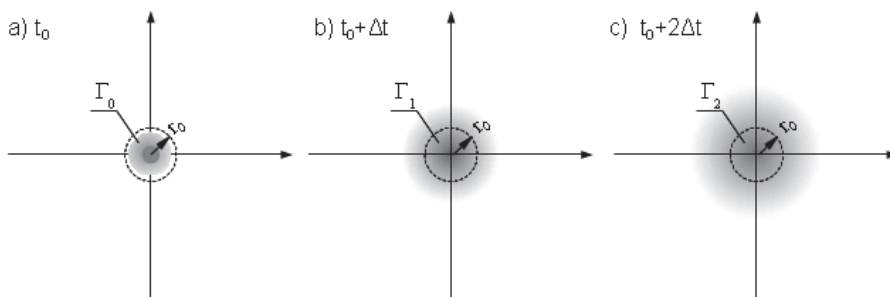
W niniejszej pracy postawiono jednak zaproponować inną formę zmiany mocy wiru dyskretnego. Opierając się na analitycznym rozwiązaniu równania dyfuzji dla pojedynczego wiru (6.62) zauważamy, że wartość pola wirowego jest duża jedynie wokół punktu położenia wiru dyskretnego i ze wzrostem odległości szybko zanika. Naturalnym sposobem uwzględnienia zmiany mocy wiru jest

uwzględnianie w obliczeniach pola wirowego jedynie wewnątrz koła o promieniu r_0 (Rysunek 49).

Na podstawie (6.64) i przy ustalonym parametrze r_0 możemy zapisać wzór opisujący zanik mocy wiru dyskretnego w czasie:

$$\Gamma_i(t) = \Gamma^0 \left(1 - e^{-\frac{r_0^2}{4\nu t}}\right) \quad (6.75)$$

Wykres 10 obrazuje graficznie przebieg postarzania się wiru w czasie dla trzech wartości parametru $r_0 = 5\text{cm}, 10\text{cm}, 20\text{cm}$.



Rysunek 49. Rozmywanie się wiry dyskretnego w trakcie symulacji i część wiru uwzględniana w obliczeniach

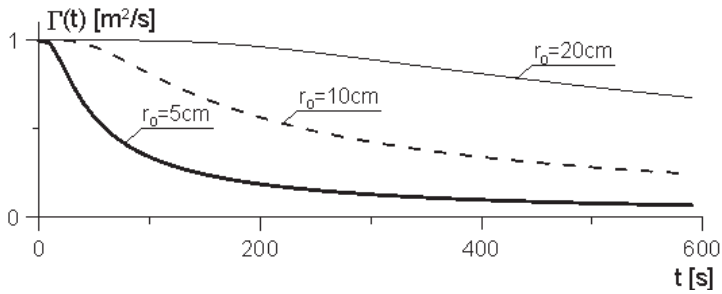
Źródło: opracowanie własne

Realizacja dyfuzji według metody deterministycznej polega na:

1. Ustaleniu parametru r_0
2. Związaniu z każdym wirem momentu czasowego jego powstania t_0 i jego wartości jego wirowości w tym momencie Γ_0 .
3. Dla dowolnego kroku czasowego w obliczeniach używana jest wartość osłabiona według:

$$\Gamma^t = \Gamma^0 \left(1 - e^{-\frac{r_0^2}{4\nu(t-t_0)}}\right) \quad (6.76)$$

Zaletą metody autorskiej jest prostota i naturalny związek z rozwiązaniem analitycznym części dyfuzyjnej równania Naviera–Stokesa. Można w tym przypadku mówić o prawie rozpadu wiru przez analogię do prawa rozpadu naturalnego. Niedogodnością natomiast jest konieczność związania z wirem dyskretnym informacji o czasie jego powstania. Jednak utrudnienie to jest niewielkie. Złożoność obliczeniowa metody jest rzędu $O(n)$.



Wykres 10. Zmiana wartości wiru według (6.75) dla różnych parametrów r_0 .

Źródło: opracowanie własne

6.4.12. Wyznaczenie ciśnień

Po realizacji kroku konwekcyjnego i dyfuzyjnego symulacji równanie Naviera-Stokesa (3.10) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

redukuje się do postaci [15]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p . \quad (6.77)$$

Równanie to stosujemy do warstwy brzegowej przyległej do ciała opisanej za pomocą wirowości paneli γ_i . Zakładamy, że ta wirowość jest równomiernie rozłożona wzdłuż panela. Wielkości γ_i interpretujemy jako prędkości w bardzo cienkiej warstwie brzegowej. Jest ona równoległa do panela. Zatem równanie (6.77) redukuje się do przypadku jednowymiarowego, w którym:

$$\mathbf{u}_i = \gamma_i \mathbf{t}_i , \quad (6.78)$$

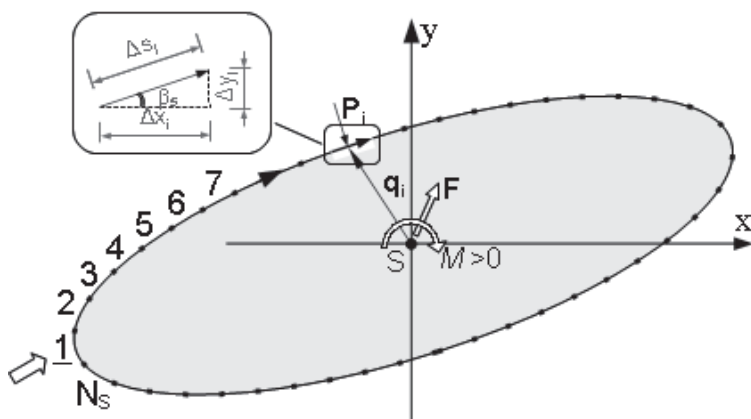
gdzie \mathbf{t}_i jest wektorem jednostkowym stycznym do panela i zgodnie z nim skierowanym.

Zatem równanie (6.77) można zapisać:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\partial \gamma(s)}{\partial t} . \quad (6.79)$$

Pozwala to wyznaczyć zmianę ciśnienia w elemencie i w trakcie kroku czasowego Δt względem ciśnienia odniesienia:

$$\Delta p_i = -\rho \frac{\gamma_i \Delta s_i}{\Delta t} . \quad (6.80)$$



Rysunek 50. Sposób wyznaczania dystrybucji ciśnień na powierzchni ciała (opis w tekście)

Źródło: opracowanie własne

Powyższy wniosek jest podstawą do wyznaczania dystrybucji ciśnień na powierzchni ciała w trakcie symulacji komputerowej. W trakcie symulacji warstwa brzegowa jest regenerowana w każdym kroku, co pozwala na wyznaczenie ciśnień działających na panele ciała poprzez całkowanie wyrażenia (6.79). Całkowanie to zrealizowane w postaci dyskretnej prowadzi do wzoru na ciśnienie w dowolnym panelu ciała:

$$p_i = p_1 + \sum_{i=1}^{N_s} \Delta p_i = p_1 - \frac{\rho}{\Delta t} \sum_{i=1}^{N_i} y_i \Delta s_i \quad (6.81)$$

Ciśnienie to jest wyznaczone z dokładnością do stałej p_1 oraz wymaga wyboru panelu startowego obliczeń (Rysunek 50). W celu wyznaczenia dokładnego rozkładu ciśnień na powierzchni ciała, należy zlokalizować punkt (tutaj cały panel) stagnacji przepływu na powierzchni ciała i rozpocząć obliczenia od tego punktu przyjmując, że ciśnieniem odniesienia jest ciśnienie stagnacji. Natomiast wyznaczenie wypadkowych sił aerodynamicznych działających na ciało nie wymaga podejmowania takich zabiegów ponieważ stały składnik zostanie wyeliminowany w trakcie obliczeń.

6.4.13. Ruch ciała

Ciało sztywne w przepływie płaskim ma 3 stopnie swobody: ruch poziomy w kierunku osi x , ruch pionowy w kierunku y oraz obrót α w płaszczyźnie (x, y) . Stopnie swobody traktowane są niezależnie i opisane niezależnymi

parametrami zawieszenia sztywnością k_i oraz parametrem tłumienia c_i , gdzie $i=x, y, \alpha$. Ruch ciała opisuje układ 3 niezależnych równań (6.7), który tutaj został zapisany ponownie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x &= F_x \\ m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y &= F_y \\ I\ddot{\alpha} + c_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha \alpha &= M \end{aligned}$$

gdzie m – masa, I – moment bezwładności, $\mathbf{F}=[F_x, F_y]$, M – siły wypadkowe wynikające z dystrybucji ciśnień.

Zakładając, że ciśnienie, działające na panele, jest równomiernie rozłożone, siła działająca na panel i wynosi:

$$\mathbf{P}_i = -\Delta s_i p_i \mathbf{n} , \quad (6.82)$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem jednostkowym prostopadłym do panela skierowanym na zewnątrz ciała, Δs_i długością panela, zaś p_i ciśnieniem wyznaczonym ze wzoru (6.81).

Przy założeniu, że moment dodatni działa zgodnie z ruchem wskazówek zegara wypadkowe oddziaływania na ciało wynoszą:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{P}_i , \quad (6.83)$$

$$\mathbf{M} = -\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{q}_i \times \mathbf{P}_i . \quad (6.84)$$

Ponieważ, równania opisujące ruch, są niezależne można je zapisać w sposób ogólny:

$$\hat{m}\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F , \quad (6.85)$$

gdzie \hat{m} należy traktować jako uogólniony parametr bezwładności.

Równanie to rozwiązywane jest metodą Newmarka. Parametry opisujące ruch ciała, tzn. położenie względem punktu równowagi x , prędkość \dot{x} oraz przyspieszenie \ddot{x} uaktualniane są w każdym kroku symulacji komputerowej. Znając wartości tych parametrów z poprzedniego kroku czasowego $x^{t-\Delta t}$, $\dot{x}^{t-\Delta t}$, $\ddot{x}^{t-\Delta t}$ oraz wartość wypadkowej siły w bieżącym kroku F^t określenie aktualnego stanu ruchu ciała sprowadza się do wykonania procedury obliczeniowej [14]:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Wyznaczenie siły efektywnej: } \hat{F}^t &= F^t + \hat{m}(a_0 x^{t-\Delta t} + a_2 \dot{x}^{t-\Delta t} + a_3 \ddot{x}^{t-\Delta t}) \\ &+ c(a_1 x^{t-\Delta t} + a_4 \dot{x}^{t-\Delta t} + a_5 \ddot{x}^{t-\Delta t}) \end{aligned}$$

2. Obliczenie położenia aktualnego: $x^t = \frac{\hat{F}^t}{\hat{k}}$
3. Obliczenie przyspieszenia: $\ddot{x}^t = a_0(x^t - x^{t-\Delta t}) - a_2 \dot{x}^{t-\Delta t} - a_3 \ddot{x}^{t-\Delta t}$
4. Wyznaczenie prędkości: $\dot{x}^t = \dot{x}^{t-\Delta t} + a_6 \ddot{x}^{t-\Delta t} + a_7 \ddot{x}^t$

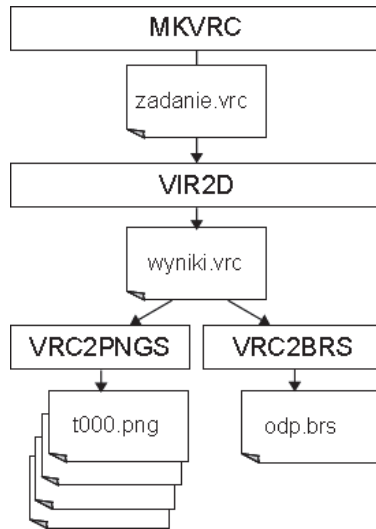
Przed wykonaniem obliczeń należy określić parametry metody α, δ , wyznaczyć stałe całkowania a_i według wzorów:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right), \quad a_6 = \Delta t (1 - \delta), \quad a_7 = \delta \Delta t.$$

oraz obliczyć sztywność efektywną: $\hat{k} = k + a_0 \hat{m} + a_1 c$.

6.4.14. Pozostałe szczegóły implementacji komputerowej



Rysunek 51. Przetwarzanie w systemie VIR2D

Źródło: opracowanie własne

Algorytmy metody wirów dyskretnych zostały zaimplementowane w programie komputerowym VIR2D. Program został napisany w języku C++ przy użyciu środowiska programistycznego Code::Blocks. Kod programu został skompilowany kompilatorem GNU GCC (MinGW) w środowisku systemu

operacyjnego Linux Ubuntu oraz Windows 7. Stwierdzono, że wybór systemu operacyjnego nie wpływa znacząco na czas wykonywania obliczeń. Uzupełnieniem programu komputerowego VIR2D są programy: MKVRC, VRC2PNGS oraz VRC2BRS (Rysunek 51.).

Program MKVRC tworzy binarny plik danych wejściowych z rozszerzeniem *.vrc. Moduł główny VIR2D jest właściwym symulatorem wirowym. Dopisuje on do pliku wejściowego kolejne migawki symulacji obejmujące wiry dyskretne oraz stan ciała. Proces obliczeniowy odbywa się w trybie wsadowym, tzn. użytkownik przygotowuje plik danych następnie uruchamia symulację. W trakcie pracy symulatora wirowego nie następuje interakcja z użytkownikiem. Program VRC2PNGS służy do wizualizacji zapisanych migawek przepływu. Generuje on pliki graficzne w formacie png. Natomiast moduł VRC2BRS wydobywa z binarnego pliku zapis stanu ciała (siły, położenie, prędkość i przyspieszenie) i zapisuje je w pliku tekstowym.

System obliczeniowy realizuje obliczenia dwiema wersjami metody:

- DVM A – tutaj dyfuzja oraz emisja warstwy brzegowej realizowana jest metodą ruchów losowych,
- DVM B – dyfuzja realizowana jest metodą deterministyczną, natomiast emisja warstwy brzegowej następuje wg algorytmu stałych punktów emisji.

Wszystkie przedstawione w rozprawie symulacje komputerowe zostały wykonane obiema metodami.

Poniżej zostały wypunktowane szczegóły implementacyjne nie związane bezpośrednio z merytoryczną stroną metody wirów dyskretnych.

- W celu określenia czy punkt (położenie wiru dyskretnego) znajduje się wewnątrz ciała, zastosowany został algorytm z poziomym promieniem (ray casting algorithm).
- Obliczenia wykonywane są przy użyciu liczb rzeczywistych o podwójnej precyzji long double.
- Obliczenia były wykonywane przy użyciu 32 bitowego mikroprocesora Intel.
- Układ równań liniowych rozwiązywany jest metodą eliminacji Gaussa. Dodatkowo zaprogramowana została procedura sprawdzająca poprawność rozwiązania.

6.5. Porównanie z klasycznymi metodami komputerowymi

Porównując zrealizowaną wersję metody wirów dyskretnych z metodami klasycznymi komputerowej mechaniki płynów zauważyć można następujące zalety DVM:

- brak sztucznych modeli turbulencji,
- brak parametrów kalibrujących,

- brak kłopotliwej siatki,
- brak dużych układów równań,
- możliwość ujęcia szerokiego przedziału turbulencji.

Wymienione cechy metody wirów dyskretnych wyraźnie wskazują na jej odmienność w zestawieniu z klasycznymi metodami obliczeniowymi. Możemy mówić zatem o faktycznej alternatywie w dziedzinie komputerowej mechaniki płynów. Należy jednak zaznaczyć, że metody wirowe są stosowane w inżynierii wiatrowej od relatywnie krótkiego czasu i nie są ostatecznie rozpoznane. Stan ich rozwoju można określić mianem „akademickie”, co oznacza w szczególności brak komercyjnego oprogramowania dostępnego na rynku. Jednakże wymienione zalety potwierdzają, że warto te metody rozwijać, gdyż mają szansę stać się w niedalekiej przyszłości nieodłączną częścią warsztatu inżynierii wiatrowej.

6.6. Weryfikacja działania systemu obliczeniowego

W celu weryfikacji poprawności działania systemu obliczeniowego zostanie przedstawione rozwiązanie numeryczne symulacji opływu cylindra. Zagadnienie to jest dobrze rozpoznane i szeroko opisane w literaturze. Symulacja dotyczy opływu nieskończenie długiego walca kołowego o średnicy $D=0,4\text{ m}$. Napływ powietrza atmosferycznego jest jednorodny i nieturbulentny. Jego prędkość jest stała i od momentu startu symulacji wynosi $u=2\text{ m/s}$, zaś liczba Reynoldsa wyznaczona dla doświadczenia wynosi:

$$Re = \frac{2\text{ m/s} \cdot 0,4\text{ m}}{1,5 \cdot 10^{-5}\text{ m/s}^2} = 5,3 \cdot 10^4 .$$

Oznacza to, że opływ walca przeprowadzany jest w obszarze podkrytycznym $Re < 10^5$.

Symulacja została przeprowadzona w domenie obliczeniowej o rozmiarach $2\text{ m} \times 10\text{ m}$ podzielonej na $10 \times 50 = 500$ kwadratowych komórek $0,2\text{ m} \times 0,2\text{ m}$ (Rysunek 52.). Dystans indukcji grupowej został określony na 1 m , co stanowi pięciokrotność wymiaru komórki. Wszystkie 3 stopnie swobody obiektu zostały zablokowane, tzn. obiekt był nieruchomy. Walec został przybliżony na pomocą wieloboku foremego o liczbie boków równej 120. Każdy bok składał się z 2 paneli o długości $0,0052\text{ m}$. Zatem liczba paneli wynosiła 240 i był to rozmiar układu równań liniowych. Symulacja pokrywała przedział czasowy o długości 15 s z krokiem czasowym $\Delta t = 0,01\text{ s}$. Oznaczało to przeprowadzenie 1500 kroków symulacji. Czas trwania symulacji komputerowych wynosił ok. 8 godzin. Liczba wirów dyskretnych ustabilizowała się na poziomie ok. 32 000 sztuk (Wykres 11.). Symulację przeprowadzono obiema metodami: DVM A oraz DVM B. Zastosowaną dokładność konwekcji rzędu 2.

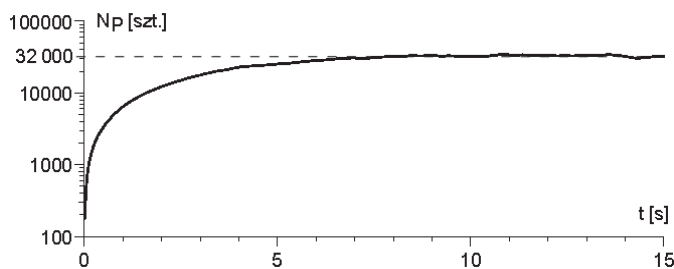
Rysunki od 53 do 56 przedstawiają kolejne stany symulowanego systemu aerodynamicznego wykonane metodą DVM A. Natomiast ilustracje od 57 do 60 dotyczą wersji DVM B. Migawki symulacji komputerowych w obu przypadkach dotyczą jednakowych chwil czasowych: $1s$, $5s$, $10s$, $15s$. Kolor zielony oznacza wiry dodatnie (o cyrkulacji zgodnej z ruchem wskazówek zegara). Natomiast kolor czerwony wiry ujemne.

Analizując przedstawione wizualizacje można stwierdzić, że obie wersje metody w sposób bardzo zbliżony realizują przedmiotowy przepływ. Na przedstawionych wizualizacjach brak jest istotnych szczegółów mogących zidentyfikować metodę. Należy jednak zaznaczyć, że symulacja realizowana metodą DVM A ze względu na zastosowanie generatora liczb losowych za każdym razem będzie przebiegała trochę odmiennie. Jednak wyniki symulacji w ujęciu statystycznym zawsze powinny być takie same. Natomiast obliczenia przeprowadzane według metody uproszczonej DVM B powinny przebiegać tak samo.



Rysunek 52. Domena obliczeniowa symulacji komputerowych w chwili czasowej 0s

Źródło: opracowanie własne

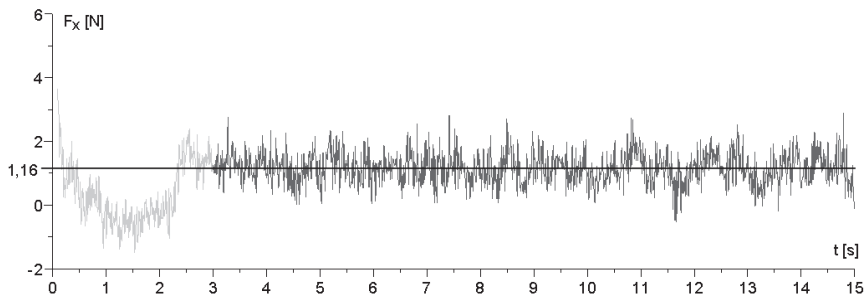


Wykres 11. Liczba wirów dyskretnych w symulacji (obie wersje)

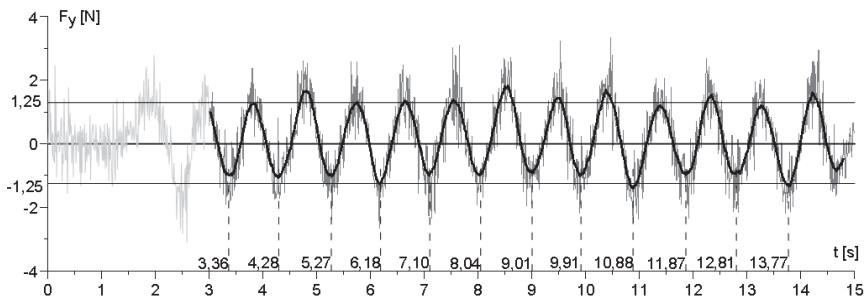
Źródło: opracowanie własne

Kolejne wykresy od 12 do 15 przedstawiają wypadkowe oddziaływanie przepływu na cylinder: parcie F_x oraz siłę boczną F_y . Ze względu na płaski charakter przepływu wyniki te oczywiście należy odnieść do jednostki długości prostopadłej do płaszczyzny symulacji.

Jak widać na przedstawionych przebiegach zarejestrowany sygnał stabilizuje się po upływie $3s$ symulacji. Ponadto łatwo zauważyć, że sygnał jest szybko zmienny i wymaga przefiltrowania. Metodą zalecaną [15] jest zastosowanie średniej kroczącej. Filtrowanie takie o zasięgu $12+1+12$ próbek zostało zastosowane do przebiegów siły bocznej od chwili czasowej $3s$. Wynik filtrowania przedstawiony jest za pomocą grubej linii. Obliczone zostały również wartości średnie siły parcia oraz średnie amplitudy siły bocznej.



Wykres 12. Parcie wiatru – wynik DVM A



Wykres 13. Siła boczna – wynik wersji DVM A

Źródło 12-13: opracowanie własne



Rysunek 53. Migawka symulacji DVM A w chwili czasowej 1s



Rysunek 54. Migawka symulacji DVM A w chwili czasowej 5s



Rysunek 55. Migawka symulacji DVM A w chwili czasowej 10s



Rysunek 56. Migawka symulacji DVM A w chwili czasowej 15s

Źródło 53-56: opracowanie własne



Rysunek 57. Migawka symulacji DVM B w chwili czasowej 1s



Rysunek 58. Migawka symulacji DVM B w chwili czasowej 5s

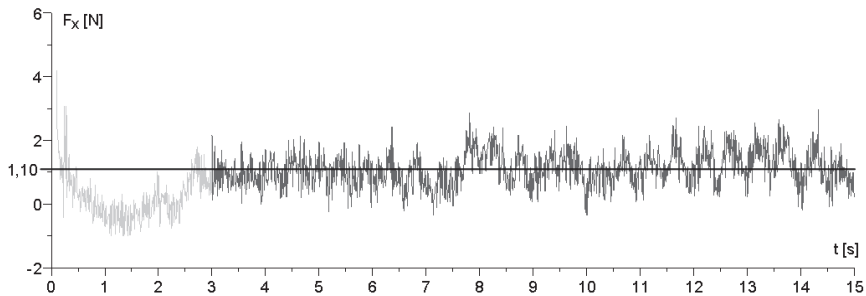


Rysunek 59. Migawka symulacji DVM B w chwili czasowej 10s

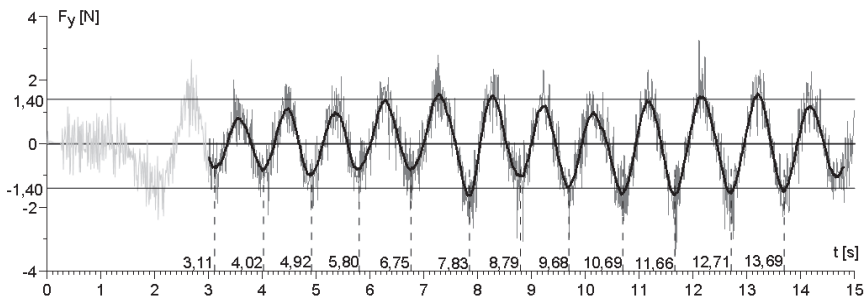


Rysunek 60. Migawka symulacji DVM B w chwili czasowej 15s

Źródło 57-60: opracowanie własne



Wykres 14. Parcie wiatru – wynik wersji DVM B



Wykres 15. Przebieg siły bocznej – wynik wersji DVM B

Źródło 14-15: opracowanie własne

Na podstawie uzyskanych wyników można obliczyć współczynniki oporu aerodynamicznego C_x i siły bocznej C_y dla obu wersji metody:

$$C_{x,DVM A} = \frac{P_x}{qS} = \frac{1,16 \text{ N}}{2,420 \text{ Pa} \cdot 0,4 \text{ m}^2} = 1,198 \text{ ,}$$

$$C_{x,DVM B} = \frac{P_x}{qS} = \frac{1,10 \text{ N}}{2,420 \text{ Pa} \cdot 0,4 \text{ m}^2} = 1,136 \text{ ,}$$

$$C_{y,DVM A} = \frac{P_y}{qS} = \frac{1,25 \text{ N}}{2,420 \text{ Pa} \cdot 0,4 \text{ m}^2} = 1,291 \text{ ,}$$

$$C_{y,DVM B} = \frac{P_y}{qS} = \frac{1,40 \text{ N}}{2,420 \text{ Pa} \cdot 0,4 \text{ m}^2} = 1,446 \text{ ,}$$

gdzie

$$S = 1m \cdot 0,4m = 0,4m^2 \text{ – powierzchnia referencyjna,}$$

$$q = \frac{\rho u^2}{2} = \frac{1,21 \text{ kg/m}^3 \cdot (2 \text{ m/s})^2}{2} = 2,420 \text{ Pa} \text{ – ciśnienie prędkości}$$

w przepływie niezaburzonym.

Podawane w literaturze [1, 23] wartości empiryczne współczynników aerodynamicznych dla walca kołowego nieskończenie długiego w zakresie podkrytycznym wynoszą odpowiednio: $C_x = 1,2$, $C_y = 0,6 \div 1,3$. Stwierdzić można zatem zgodność wyników komputerowych z doświadczeniem. Przy czym w przypadku siły bocznej uzyskano wartości nieznacznie zawyżone.

Zarejestrowane przebiegi siły bocznej dają możliwość wyznaczenia liczby Strouhala. W przypadku wyników uzyskanych metodą DVM A średni okres siły bocznej wynosił $T = 0,946 \text{ s}$, zaś w przypadku wersji B $T = 0,962 \text{ s}$. Zatem:

$$St_{DVM A} = \frac{D}{Tu} = \frac{0,4 \text{ m}}{0,946 \text{ s} \cdot 0,2 \text{ m/s}} = 2,11 \text{ ,}$$

$$St_{DVM B} = \frac{D}{Tu} = \frac{0,4 \text{ m}}{0,962 \text{ s} \cdot 0,2 \text{ m/s}} = 2,08 \text{ .}$$

Uzyskane wyniki są zbieżne z eksperymentalnymi.

Dodatkowo stwierdzamy jakościową zgodność wyników z doświadczeniem. Wizualizacje przepływu wyraźnie pokazują regularną ścieżkę wirów Karmana. Okresowe odrywanie się wirów powoduje okresowe zmiany ciśnień na walcu. W rezultacie powstają pulsacje oporu aerodynamicznego wokół wartości średniej oraz pojawia się okresowa siła boczna z wartością średnią wynoszącą 0. Częstotliwość zmian pulsacji oporu jest w przybliżeniu dwa razy większa od częstotliwości odrywania się wirów, która jest równa częstotliwości zmian siły bocznej. Amplituda zmian oporu jest o rząd wielkości mniejsza od amplitudy siły bocznej.

7. Badania autorskie – eksperyment laboratoryjny

Rozdział opisuje autorskie badania doświadczalne przeprowadzone w tunelu aerodynamicznym. Przedstawiono metodykę prac badawczych, ich przebieg, wyniki oraz komentarz. Zaproponowano również uproszczony wzór na prędkość startową flatteru i jego częstotliwość.

7.1. Przekroje pomostów

7.1.1. Obiekty rzeczywiste

Ponieważ jednym z celów rozprawy jest zbadanie wpływu kształtu przekroju poprzecznego pomostu na jego odpowiedź aeroelastyczną, badania eksperymentalne rozpoczęły się od studiów konstrukcji współczesnych pomostów. Głównym ich celem było określenie najczęściej spotykanych kształtów przekroi poprzecznych. Pozwoliło to zbudować modele aerodynamiczne o kształtach zbliżonych do praktycznych, co przełożyło się ostatecznie na możliwość sformułowania wniosków wartościowych z punktu widzenia praktyki inżynierskiej. W pracy ograniczono się do pomostów pojedynczych.

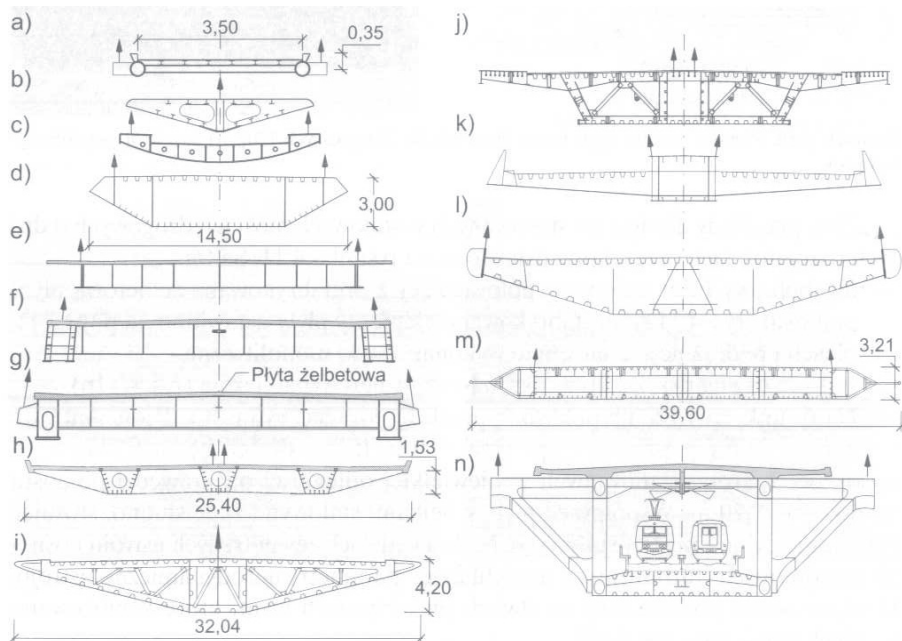
Sposób konstrukcji pomostów zależy od wielu czynników, takich jak:

- przeznaczenie obiektu (most drogowy, kolejowy),
- liczba płaszczyzn podwieszenie,
- rodzaj materiału (stal, beton, zespolone),
- technologia budowy.

Na Rysunku 61 przedstawione są podstawowe przekroje poprzeczne pomostów stalowych. Rozwiązania oznaczone a ÷ d stosuje się w przypadku małych mostów np. kładek dla pieszych. Schematy e ÷ h pokazują ustroje płytowo-belkowe z płytą żelbetową. Mają one zastosowanie w mostach drogowych. Natomiast dźwigary skrzynkowe zostały zaprezentowane w punktach i ÷ m. Z kolei pozycja n na rysunku 61 demonstruje możliwości funkcjonalne tego typu struktur, tj. wielopoziomowość.

Współcześnie stalowe ustroje nośne pomostów wykonuje się jako spawane. W przypadku mniejszych konstrukcji wykorzystuje się typowe profile walcowane: rury, dwuteowniki, itp. W przypadku większych obiektów pomosty wykonuje się z blach stalowych o grubości dochodzącej do 100mm . Moduły pomostów wykonywane są jako prefabrykowane, a styki montażowe wykonywane są jako spawane lub skręcane na śruby sprężające. Podstawowym schematem statycznym pomostów e ÷ g jest ruszt. Stanowią go główne podłużne

belki (podłużnice) oraz wsparte na nich mniejsze belki zwane poprzecznkami. W takim układzie ciężna podwieszająca mocowane są do podłużnic brzegowych. Przekroje skrzynekowe i ÷ m realizowane są w układzie poprzecznych kratownic lub tarcz połączonych sztywnym zamkniętym przekrojem stanowiącym podłużną strukturę nośną do której mocuje się ciężna. Konstrukcja w obu przypadkach uzupełniana jest najczęściej płytą żelbetową stanowiącą podstawę jezdni.

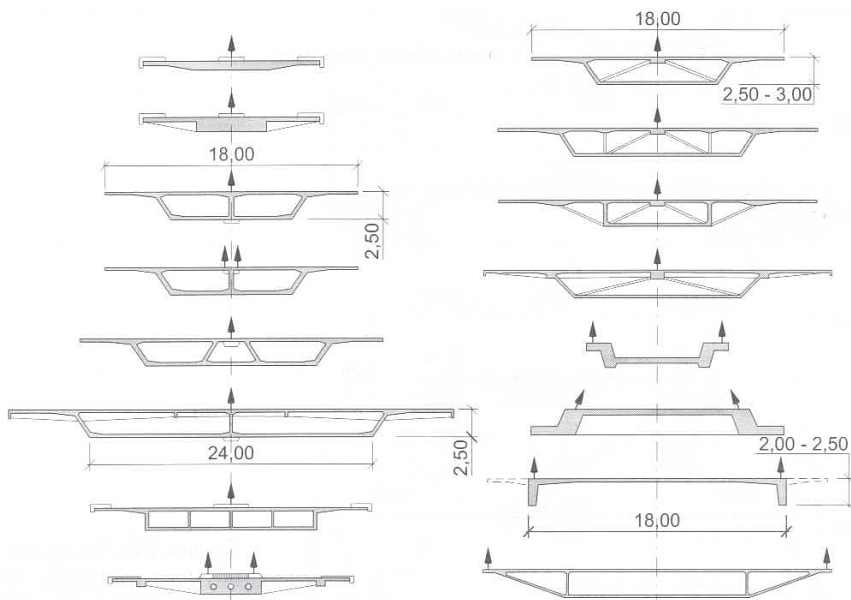


Rysunek 61. Przekroje poprzeczne pomostów stalowych. Strzałki wskazują płaszczyzny podwieszenia.

Źródło: [4]

Pomosty mostów podwieszonych mogą być również wykonane w całości z betonu. Właściwe zastosowanie tego materiału pozwala uzyskać korzystniejsze cechy dynamiczne konstrukcji. Jest też właściwe w przypadku układów podwieszeń, które wprowadzają do pomostu duże ściskające siły osiowe. Stosowane są konstrukcje żelbetowe lub sprężone (Rysunek 62 i 63). W małych obiektach mogą być stosowane przekroje płytowe lub płytowo-żebrowe, natomiast w obiektach dużych ustroje płytowo-żebrowe i skrzynekowe. Zastosowanie mają również ustroje zespolone stalowo-betonowe. W przypadku dużych rozstawów średników konieczne okazuje się sprężenie pomostu.

Kolejne ilustracje prezentują wybrane istniejące obiekty mostowe oraz przekroje poprzeczne pomostów w części podwieszanej. Za każdym razem jest to przeszło najdłuższe. Dodatkowo podano rozpiętości całkowitej obiektów oraz rozpiętości podwieszanej, czyli najbardziej podatnej aerodynamicznie.

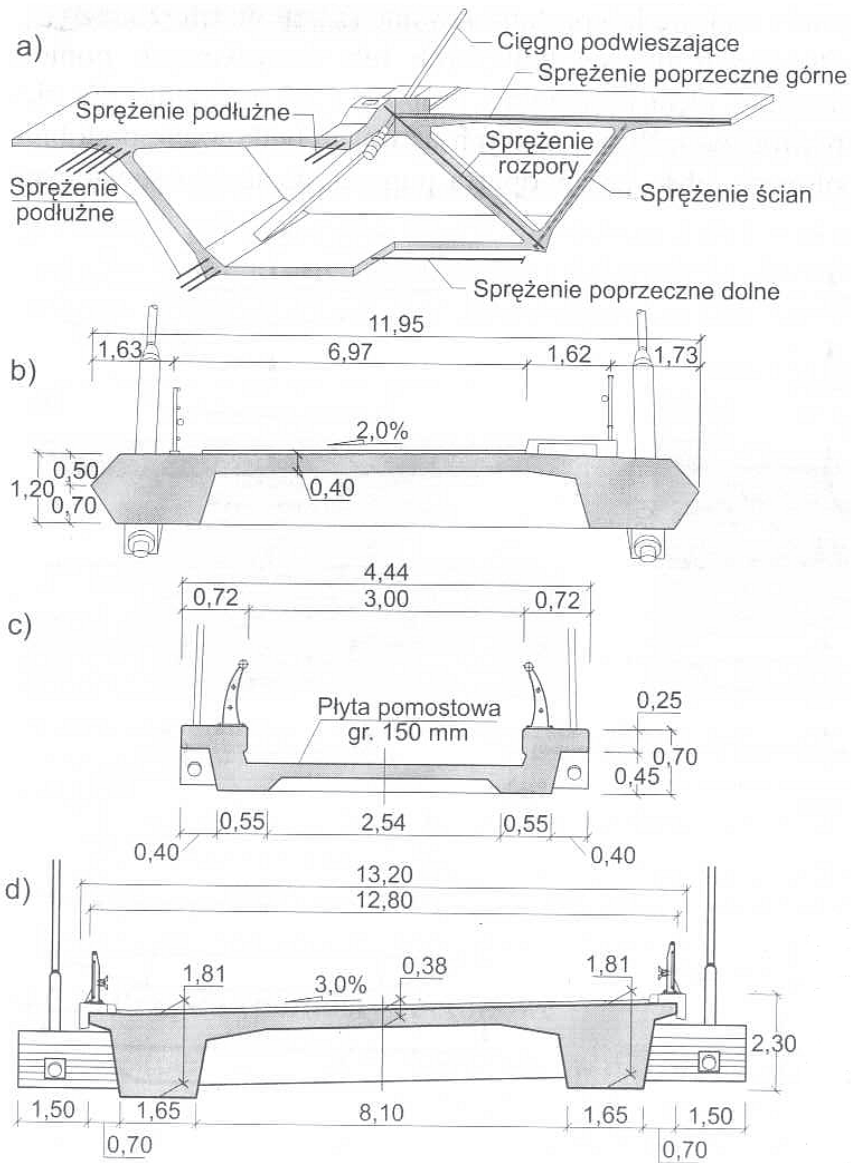


Rysunek 62. Przekroje poprzeczne pomostów z betonu. Strzałki wskazują płaszczyzny podwieszania.

Źródło: [4]

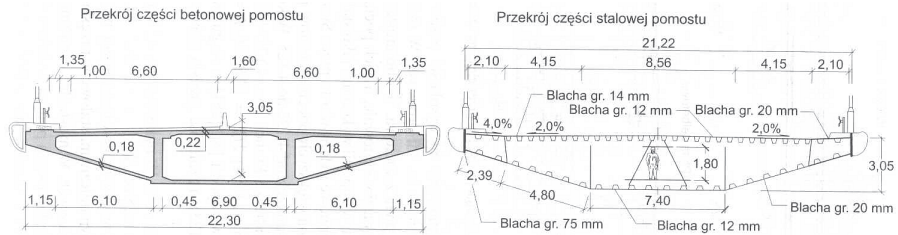
Wnioski wynikające z przytoczonych przykładów pomostów są następujące:

- Konstrukcje pomostów wynikają bezpośrednio z mechaniki pracy konstrukcji, więc stosowanie dowolnych kształtów jest niemożliwe lub nieracjonalne.
- Można wyróżnić grupy kształtów: zbliżone do prostokątów, prostokątne z wystającymi podłużnicami, skrzynkowe pojedyncze, skrzynkowe podwójne lub z obudowanymi podłużnicami.
- Stosunek rozpiętości przekroju poprzecznego pomostu do jego wysokości waha się w szerokich granicach od 5,1 do 26,4 z medianą wynoszącą 8,2 w przypadku przytoczonych przykładów.
- W przypadku przekroji skrzynkowych wymiar poziomy dolny stanowi od 35% do 65% szerokości pomostu.
- Pomosty zawsze są uzupełniane dodatkowym wyposażeniem takim jak: bariery, latarnie, krawężniki i nawierzchnie o różnych właściwościach.



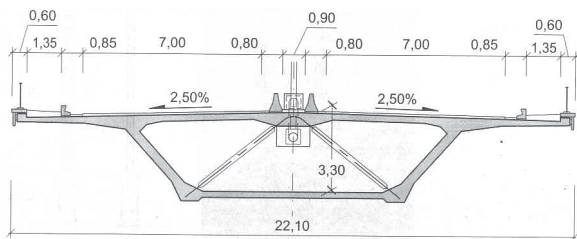
Rysunek 63. Szczegółowe przekroje poprzeczne pomostów z betonu: a) most Brottone (Francja), b) most drogowy, c) kładka dla pieszych Krzywy Kij, d) wiadukt WD22 nad autostradą A4

Źródło: [4]



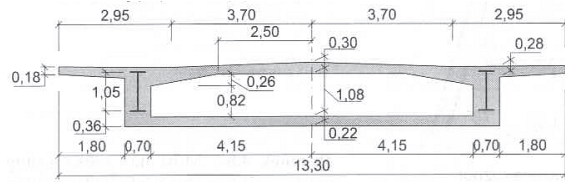
Rysunek 64. Most Normandie we Francji 1995, rozpiętość całkowita 2141m, rozpiętość podwieszona 856m

Źródło: <http://en.structurae.de/> [4]



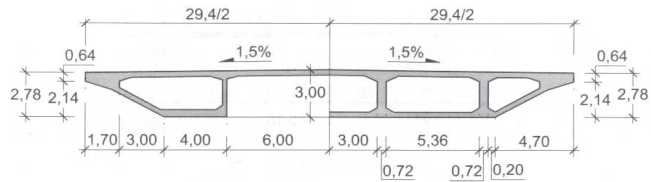
Rysunek 65. Most drogowy w Wandre w Belgii, 1989, rozpiętość całkowita 527m, rozpiętość podwieszona 411m

Źródło: <http://en.structurae.de/> [4]



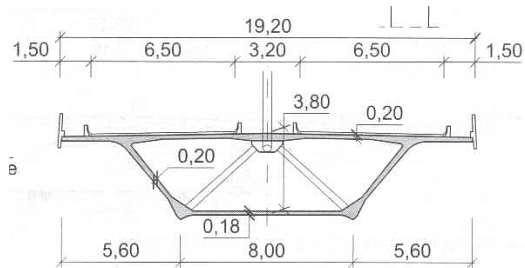
Rysunek 66. Most drogowy Lanaye w Belgii, 1980–1982, rozpiętość całkowita 232m, rozpiętość podwieszona 177m

Źródło: <http://en.structurae.de/> [4]



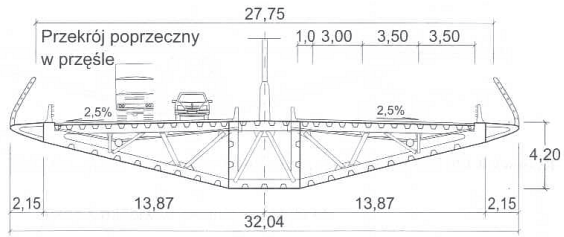
Rysunek 67. Drugi most Wuhan na rzece Jangcy w Chinach, 1995, rozpiętość całkowita 4678m, rozpiętość podwieszona 400m

Źródło: Wikipedia [4]



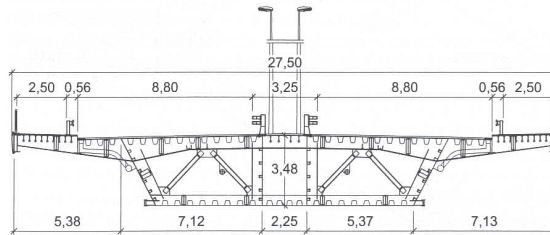
Rysunek 68. Most Brotonne we Francji, 1977, rozpiętość całkowita 1278m, rozpiętość podwieszona 320m

Źródło: <http://en.structurae.de/> [4]



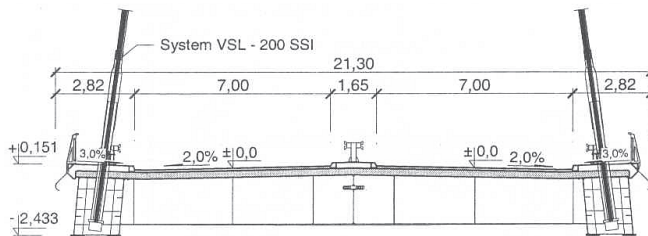
Rysunek 69. Wiadukt Milau we Francji, rozpiętość całkowita 2460m, rozpiętość podwieszona 342m

Źródło: <http://en.structurae.de/> [4]



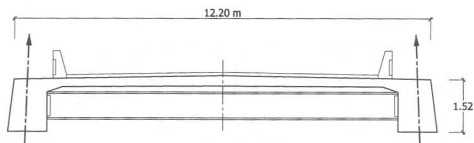
Rysunek 70. Most Solidarności w Płocku, 2007, rozpiętość całkowita 1200m, rozpiętość podwieszona 375m

Źródło: <http://mostwplocku.blogspot.com/> [4]



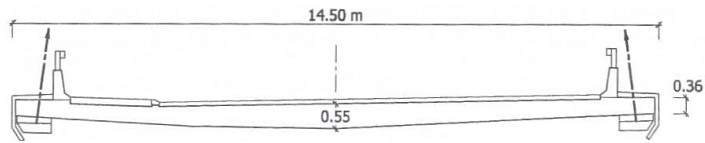
Rysunek 71. Most III Tysiąclecia im. Jana Pawła II w Gdańsku 2001, rozpiętość całkowita 380m, rozpiętość podwieszona 230m

Źródło: <http://www.mostypolskie.pl/> [4]



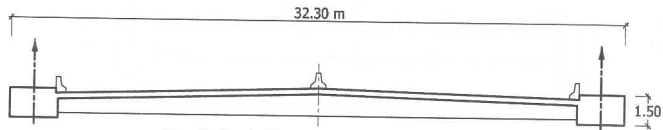
Rysunek 72. Most East Huntington Bridge w USA, 1985, rozpiętość całkowita 551m, rozpiętość podwieszona 274m

Źródło: <http://en.structurae.de> / [5]



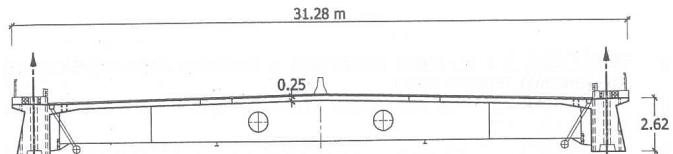
Rysunek 73. Most w Diepoldsau, 1985, rozpiętość całkowita 250m, rozpiętość podwieszona 97m

Źródło: WorldFlicks (wiki.worldflicks.org) / [5]



Rysunek 74. Most w Dame Point w USA, 1989, rozpiętość całkowita 3218m, rozpiętość podwieszona 396m

Źródło: <http://en.structurae.de> / [5]

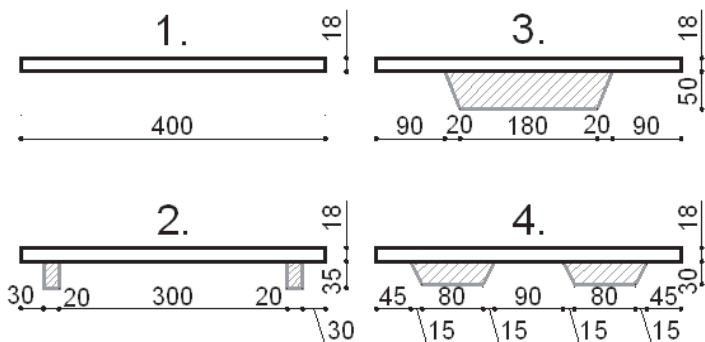


Rysunek 75. Most Vasco da Gama w Portugalii, 1998, rozpiętość całkowita 17185m, rozpiętość podwieszona 420m

Źródło: Wikipedia / [5]

7.1.2. Przekroje użyte w analizach

W pracy badawczej zastosowano 4 różne kształty przekroji poprzecznych modeli pomostów (Rysunek 76.).



Rysunek 76. Przekroje poprzeczne modeli zastosowanych w badaniach eksperymentalnych i numerycznych (wymiarzy w mm)

Źródło: opracowanie własne

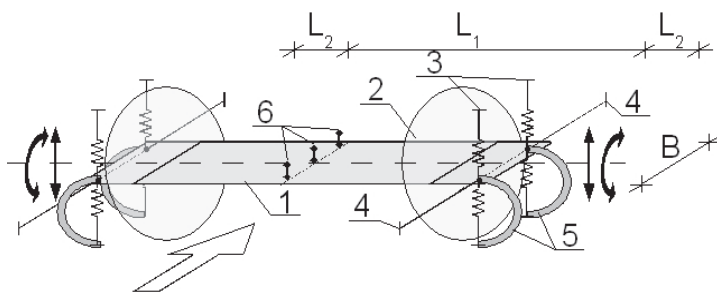
Wszystkie zastosowane przekroje były symetryczne. Profil nr 1 był profilem podstawowym stanowiącym wyjście do konstrukcji pozostałych. Kształt przekroju poprzecznego nr 2 występuje w konstrukcjach, w których stosuje się układ niezabudowanych podłużnic. Forma nr 3 jest typowa dla konstrukcji z betonu (strunobeton, kablobeton, rzadziej żelbet) lub obudowanych konstrukcji kratowych. Przekrój poprzeczny nr 4 powstaje najczęściej jako rozwinięcie koncepcji nr 2 lub nr 3. Stosunek długości do całkowitej wysokości wynosił wg numeracji: 22,2; 5,9; 7,5; 8,3. Więc był zbliżony do wartości ustalonych dla obiektów rzeczywistych. W przypadku modelu skrzynki wymiar poziomy dolny stanowił 45% wymiaru górnego, co można uważać za średnią wartość spotykaną w obiektach rzeczywistych.

Podsumowując, zastosowane kształty przekroji poprzecznych, mimo że wynikały z ograniczonych możliwości materiałowych, dobrze korespondowały z formami współcześnie projektowanych pomostów. W badaniach pominięto elementy drugoplanowe montowane do pomostów.

7.2. Eksperyment w tunelu aerodynamicznym

7.2.1. Model do badań

7.2.1.1. Opis ogólny



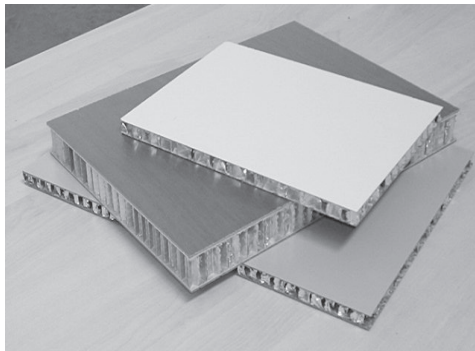
Rysunek 77. Schemat modelu aeroelastycznego, 1 – płyta nośna, 2 – tarcze ograniczające, 3 – sprężyny, 4 – ciągną, 5 – pasy gumowe, 6 – akcelerometry, wymiary: $L_1=2,12m$, $L_2=0,14m$, $B=0,40m$, strzałki na na końcach modelu wskazują wolne stopnie swobody, strzałka przed modelem wskazuje kierunek strumienia powietrza

Źródło: opracowanie własne

Obiektem badań tunelowych był system aeroelastyczny (Rysunek 77) umieszczany w przepływie powietrza. Model ten odpowiadał centralnej sekcji długiego pomostu (Rysunek 1), lecz nie powstał w oparciu o żaden istniejący obiekt mostowy. Powodem tego jest fakt, że istniejące konstrukcje nie są (lub nie powinny być) podatne na wzbudzenie aerodynamiczne. Natomiast celem eksperymentu było kontrolowane wywołanie takich zjawisk i zbadanie ich. Model został zaprojektowany i wykonany w taki sposób, aby była możliwa szybka zmiana parametrów zawieszenia (stosunku sztywności skrętnej do giętej, poziomemu tłumienia) oraz kształtu poprzecznego przy minimalnym wpływie na pozostałe charakterystyki.

Skonstruowany model był symetryczny. Element nośny stanowiła płyta o wymiarach $0,4m \times 2,4m$ i grubości $0,018m$. Wykonana została z kompozytowego panela ESACORE-ST produkowanego przez włoską firmę Metalleid Componets (Ilustracja 7.). Panel ten tworzy wewnętrzna aluminiowa struktura w kształcie plastra miodu obustronnie zamknięta laminatem HPL. Płyta ta charakteryzuje się wysoką sztywnością oraz niedużą masą. Po obu stronach płyty nośnej, w odległości $0,14m$ od jej końców, przymocowane zostały okrągłe tarcze o średnicy $0,4m$ wykonane z przezroczystego szkła

akrylowego. Zadaniem tarcz było ograniczenie zaburzeń przepływu powietrza na końcach modelu. Wydzielały one centralną część o długości $2,12\text{ m}$, która była obszarem interakcji ze strumieniem powietrza. Zawieszenie modelu stanowiło sprężyny stalowe, gumowe tłumiki oraz ciężna. Zawieszenie modelu było wysunięte poza przestrzeń pomiarową tunelu (Ilustracja 8.).



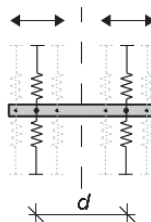
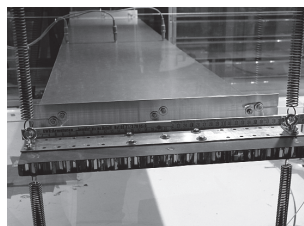
Ilustracja 7. Plyta ESACORE-ST

Źródło: broszura informacyjna producenta

Zawieszenie sprężyste skonstruowane było z 4 par przeciwstawnie naciągniętych sprężyn stalowych, mocowanych po 2 pary z każdego końca modelu. Zastosowane były sprężyny o sztywności rozciągania 360 N/m . Końce płyty modelu wyposażone były w uchwyty sprężyn, które umożliwiały zmianę ich rozstawu. Możliwe było zastosowanie 6 symetrycznych konfiguracji w rozstawach sprężyn: $0,18; 0,22; 0,26; 0,30; 0,38\text{ m}$. Zmiana rozstawu sprężyn regulowała sztywność skrętną zawieszenia przy niewielkim wpływie na jego sztywność giętną (pionową). Wolne końce sprężyn zamocowane były do ram stalowych (stanowiących stałe wyposażenie tunelu), znajdujących się poza przestrzenią pomiarową. Ruchome rygle ram pozwalały na naciąg sprężyn zawieszenia. Każdorazowo ustawienie ruchomego rygla było kontrolowane za pomocą poziomicy i taśmy mierniczej. Zabieg ten wykonywany był po obu stronach modelu. Dodatkowo pozycja modelu była również sprawdzana za pomocą poziomicy i taśmy mierniczej.

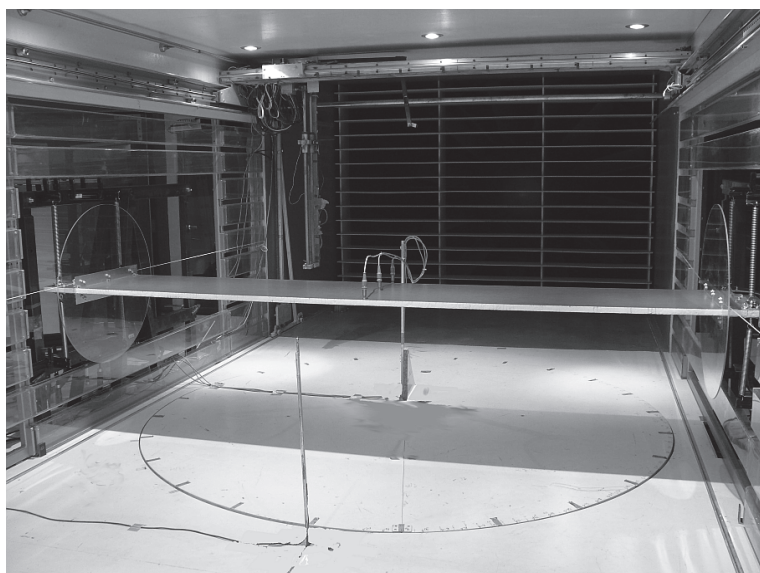
Zadaniem gumowych pasów było zwiększenie tłumienia ruchu modelu. Pasy te wykonane były z 2 warstw gumy połączonej obustronnie klejącą gąbką, co zwiększało ich możliwości dysypacji energii. Gумы były mocowane do modelu w miejscach uchwytu sprężyn po 2 sztuki z każdej strony oraz do ram stalowych tunelu. Pasy gum po zamontowaniu znajdowały się pod modelem i tworzyły kształt litery „C”. Taki układ sprawiał, że zwiększały one

tłumienie zawieszenia przy niewielkim wpływie na jego sztywności. W dalszej części pracy określone są mianem tłumików C. Stanowiły one opcjonalny element zawieszenia wynikiem czego były możliwe 2 ustawienia poziomów tłumienia.



Ilustracja 8. Sposób regulacji sztywności zawieszenia modelu zawieszenia modelu, d – rozstaw sprężyn zawieszenia

Źródło: opracowanie własne



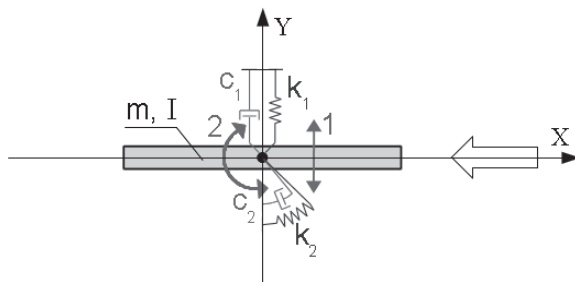
Ilustracja 9. Model aeroelastyczny umieszczony w przestrzeni pomiarowej tunelu aerodynamicznego

Źródło: fotografia własna

Cięgna o długościach $1,3\text{ m}$ mocowane do zaczepów sprężyn i stałych elementów tunelu blokowały ruch poziomy modelu. Nie wpływały przy tym istotnie na ruch poziomy i obrotowy w badanym zakresie. Elementy modelu były połączone przy zastosowaniu prefabrykowanych aluminiowych profili i stalowych śrub. Końce modelu zostały dodatkowo wzmocnione na wypadek utraty kontroli nad modelem w trakcie testów wiatrowych, co mogło spowodować uderzenie modelu o ramę stalową. Kolejne przekroje poprzeczne (Rysunek 77.) uzyskiwano poprzez przyklejenie do płyty nośnej bloków ze sztywnego spienionego polistyrenu EPS-100.

7.2.1.2. Symplifikacja modelu

Wykonany model był symetryczny oraz był umieszczony symetrycznie względem pionowej środkowej płaszczyzny przestrzeni pomiarowej. Symetria modelu dotyczyła jego kształtu, rozkładu masy oraz systemu zawieszenia. Porównując częstotliwości drgań własnych płyty nośnej z częstotliwościami drgań własnych systemu uznano, że może być ona traktowana jako sztywna w zakresie badanego zjawiska. Proporcje aerodynamicznie aktywnej części modelu do jego szerokości wynosiły: $L_1/B=5,3$. Elementy zawieszenia modelu znajdowały się poza przestrzenią pomiarową i były zasłonięte tarczami kołowymi. Tarcze kołowe licowały się z powierzchnią ścian szczelinowych. Cięgna blokowały poziomy stopień swobody. Pomiary średniej prędkości strumienia powietrza oraz przyspieszenia modelu mierzone były w płaszczyźnie symetrii przestrzeni pomiarowej.



Rysunek 78. Uproszczenie systemu do przypadku dwuwymiarowego (symbole objaśnione w tekście)

Źródło: opracowanie własne

Wszystkie opisane powyżej zabiegi zostały zastosowane w celu traktowania rzeczywistego modelu aeroelastycznego (Ilustracja 9.) jako układu płaskiego o 2 stopniach swobody: pionowym $l-y$ oraz obrotowym $2-\alpha$ (Rysunek 78).

Wypadkowe charakterystyki takiego systemu to: k_y , c_y – sztywność i parametr tłumienia związana z pionowym (giętnym) stopniem swobody, k_α , c_α – sztywność i parametr tłumienia związana z obrotowym (skrętnym) stopniem swobody oraz parametry bezwładności: m – masa oraz I – moment bezwładności względem środka przekroju. Postanowiono przyjąć założenie, że w zakresie przemieszczeń pionowych i obrotów osiągniętych przez model parametry zawieszenia pozostają stałe.


W myśl powyższych założeń ruch modelu opisany jest za pomocą równań (7.1) przy zablokowanym poziomym stopniu swobody:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ m \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y &= F_y, \\ I \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha &= M, \end{aligned} \quad (7.1)$$

gdzie y, \dot{y}, \ddot{y} przemieszczenie pionowe, prędkość i przyspieszenie w ruchu pionowym, zaś $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ oznaczają obrót, prędkość i przyspieszenie obrotowe.

Natomiast wypadkowe siły działające na model F_y oraz M wynikają z dystrybucji ciśnień na obwodzie ciała i z całą pewnością zależą od kształtu jego przekroju poprzecznego. W przypadku przepływu turbulentnego oraz ciała, które może poruszać się w przepływie, wyznaczenie tych sił w sposób dokładny metodami analitycznymi wydaje się być nieosiągalne. W niniejszej pracy została podjęta próba wyznaczenia tych oddziaływań drogą bezpośredniej symulacji komputerowej metodą wirów dyskretnych.

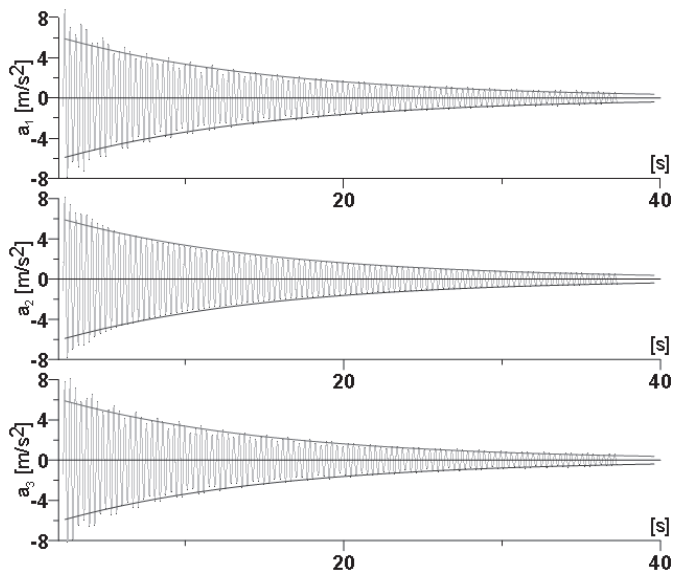
Zrealizowany model pozwalał na zmianę konfiguracji parametrów zawieszenia i zmianę przekroju poprzecznego. Zmiana sztywności zawieszenia następowała poprzez wybranie l z 6 możliwych ustawień sprężyn (Ilustracja 8.). Prowadziło to do modyfikacji sztywności skrętnej k_α przy (teoretycznym) braku wpływu na sztywność giętną k_y . Skutkowało to w konsekwencji zmianą stosunku jednego parametru względem drugiego. Użycie lub brak użycia tłumików gumowych powodowało zmianę parametrów tłumienia układu c_y, c_α . Zatem 2 poziomy tłumienia mogły być zastosowane. Badania zostały przeprowadzone dla 4 różnych kształtów przekroji poprzecznych. W konsekwencji zostało wykonanych $4 \times 2 \times 6 = 48$ różnych konfiguracji.

W dalszej części pracy szczegółowe przebiegi testów zostały omówione dla profilu nr 3  przy rozstawie sprężyn $d = 0,34 m$ w opcji braku tłumików C. Wybór przykładu podyktowany został względami prezentacyjnymi. Przy braku tłumików gumowych i przy szeroko rozstawionych sprężynach model jest dobrze widoczny na zdjęciach od strony profilu. Dla wybranego

kształtu przekroju poprzecznego bloki polistyrenowe mogą być zauważone na zdjęciach i filmach, ponieważ są dłuższe niż elementy aluminiowe.

7.2.1.3. Identyfikacja parametrów modelu

Każdorazowo po przyklejeniu bloków styropianowych model był ważony. Natomiast wartość momentu bezwładności była wyznaczana na podstawie znanej geometrii i mas jego komponentów. Uwzględnione zostały również drobne elementy takie jak akcelerometry i śruby. Następnie model był zawieszany do ramy stalowej. Przed wykonaniem testów aerodynamicznych następowała identyfikacja parametrów zawieszenia metodą eksperymentalną. Możliwość taka wynika wprost z równań (7.2). W tym celu system był wprowadzany w drgania poprzez wychylenie z położenia równowagi na wysokość $0,2m$ albo obracany o kąt 20° w zależności od aktualnie badanego stopnia swobody. Wychylenie to było realizowane za pomocą dwóch poziomic aluminiowych o długości $2m$, które umożliwiały równomierne na całej długości przemieszczenie płyty obiektu. Po zwolnieniu płyta modelu wykonywała swobodne drgania gasnące, których przyspieszenia były rejestrowane. Zarejestrowane przebiegi były podstawą do dalszych obliczeń.



Wykres 16. Drgania giętne układu bez tłumików C , dopasowanie krzywej o równaniu $a(t) = \pm 6,032 e^{-0,073t}$

Źródło: opracowanie własne

W trakcie drgań gasnących układ przeciwstawnie naciągniętych sprężyn równoważył siłę ciężkości w każdym z przyjmowanych przez model położeń. Zaś małe prędkości osiągnane przez model pozwalają pominąć opór aerodynamiczny. Zatem taki ruch układu może być opisany układem równań:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y &= 0 \quad . \\ I \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Powyższe równania są niezależne i mają taką samą strukturę. Dalsze rozważania dotyczą pierwszego z nich. Wychylenie układu z pozycji równowagi może być wyrażone w formie warunków brzegowych: $y(0)=y_0 \neq 0$, $\dot{y}(0)=0$, $\ddot{y}(0)=0$. Natomiast rozwiązanie analityczne może być przedstawione w postaci:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\frac{c_y t}{2m}} \sin(2\pi \bar{f}_y \cdot t + \phi_{0y}) \quad , \quad (7.3)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{c_y t}{2m}} \sin(2\pi \bar{f}_y \cdot t + \phi_{0v}) \quad , \quad (7.4)$$

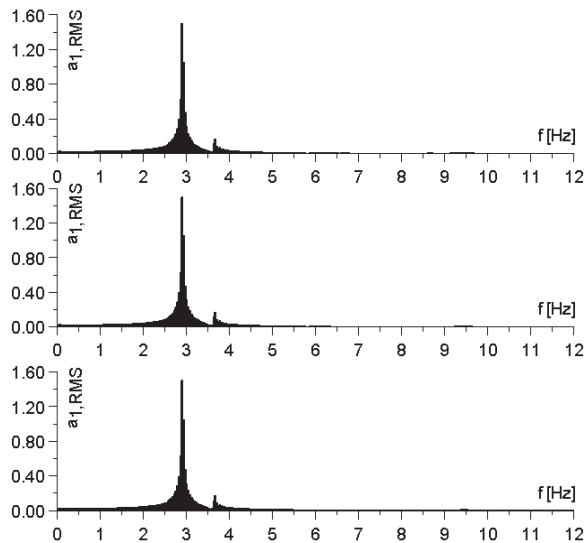
$$\ddot{y}(t) = a(t) = a_0 \cdot e^{-\frac{c_y t}{2m}} \sin(2\pi \bar{f}_y \cdot t + \phi_{0a}) \quad , \quad (7.5)$$

gdzie $\bar{f}_y = \sqrt{f_y^2 - \left(\frac{c_y}{4\pi m}\right)^2}$, $f_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$ częstotliwość drgań gasnących i własnych odpowiednio, $y_0, v_0, a_0, \phi_{0y}, \phi_{0v}, \phi_{0a}$ – amplitudy i fazy początkowe przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia odpowiednio.

W zagadnieniach mechanicznych często zakłada się, że częstotliwość drgań gasnących jest równa częstotliwości drgań własnych $\bar{f} \simeq f$, tzn. przyjmuje się, że $c_y / 4\pi m \simeq 0$. W przeprowadzonym eksperymencie średnia wartość tego wyrażenia, obliczona na podstawie późniejszych wyników, dla modelu bez tłumików wynosiła $0,013 \text{ Hz}$ dla oscylacji giętych (tj. pionowych) oraz $0,028 \text{ Hz}$ dla skrętnych. Porównując te liczby z oszacowanymi częstotliwościami drgań własnych stwierdzamy, że są one o 2 rzędy wielkości niższe niż oszacowane wartości częstotliwości drgań własnych. Zatem przyjęcie tego założenia pozwala szybką identyfikację wypadkowej sztywności zawieszenia bez wprowadzania znaczącego błędu:

$$k_y = m \cdot (2\pi f_y)^2 \simeq m \cdot (2\pi \bar{f}_y)^2 \quad . \quad (7.6)$$

Równania (7.3) (7.4) (7.5) zostały przytoczone w celu pokazania, że szybkość zaniku amplitudy przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń postępuje w taki sam sposób i przy ustalonej bezwładności zależy wyłącznie od współczynnika tłumienia c_y . W związku z tym zarejestrowany sygnał przyspieszeń modelu o znanej bezwładności jest wystarczający do wyznaczenia jego wartości.



Wykres 17. Analiza modalna sygnału z Wykresu 16

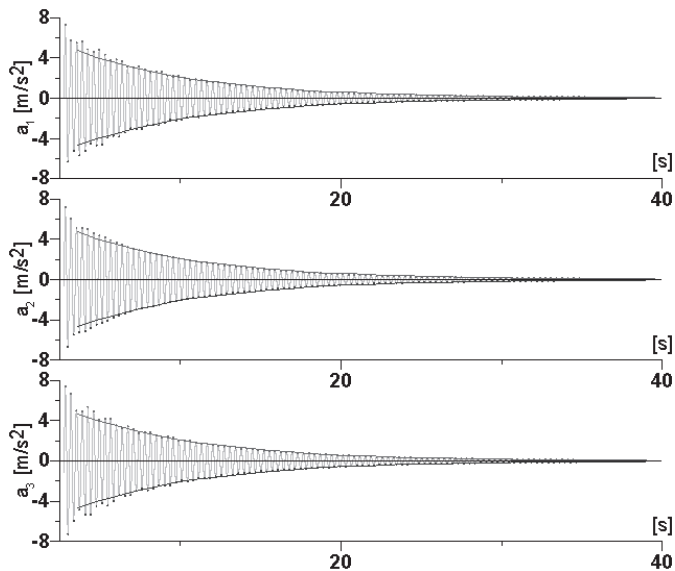
Źródło: opracowanie własne

Zatem identyfikacja wypadkowych parametrów zawieszenia polegała na przeprowadzeniu następującej procedury:

1. Wykonanie montażu zawieszenia bez tłumików C.
2. Wywołaniu drgań gasnących i zarejestrowaniu przebiegu ich przyśpieszeń.
3. Wykonaniu analizy modalnej zarejestrowanego sygnału w celu określenia częstotliwości drgań własnych.
4. Dopasowaniu do zarejestrowanych przebiegów czasowych przyśpieszeń (z punktu 2) krzywych $+A \cdot e^B$ oraz $-A \cdot e^B$ i wyznaczenie parametru tłumienia c .
5. Zamocowanie tłumików C.
6. Wywołaniu drgań gasnących i zarejestrowaniu przebiegu ich przyśpieszeń.
7. Dopasowaniu do zarejestrowanych przebiegów czasowych przyśpieszeń (z punktu 5) krzywych $+A \cdot e^B$ oraz $-A \cdot e^B$ i wyznaczenie parametru tłumienia c .

Procedura ta była powtarzana dla każdej konfiguracji trzykrotnie. Trzy pomiary każdorazowo prowadziły do identycznych wyników. Poniższe wykresy przedstawiają zarejestrowany sygnał dla wybranej konfiguracji modelu dla drgań giętnych. Numeracja akcelerometrów była zgodna ze zwrotem napływu powietrza. W przypadku drgań skrętnych procedura przebiegała tak

samo z tą różnicą, że nie uwzględniano sygnału zarejestrowanego przez akcelerometr środkowy. Wartości te były bliskie zero. Analiza modalna wykonywana była przy użyciu oprogramowania komercyjnego HMN Catman, natomiast aproksymacja zaniku sygnału, tj. dopasowywanie krzywej $\pm A \cdot e^B$, programem autorskim.



Wykres 18. Drgania giętnie układu z tłumikami C, dopasowanie krzywej o równaniu $a(t) = \pm 5,783 e^{-0,126t}$





Źródło: opracowanie własne

7.2.1.4. Parametry modelu

Rozdział ten zestawia wypadkowe i uśrednione charakterystyki modelu zidentyfikowane według procedur opisanych w poprzednim rozdziale. Zaprezentowane wartości mają charakter poglądowy. Obliczenia wykonywane w dalszej części pracy opierają się na charakterystykach indywidualnie wyznaczonych dla każdej konfiguracji.

Tabela 1. zawiera wyniki pomiarów i obliczeń dotyczących parametrów bezwładności modelu w 4 wariantach przekroju poprzecznego. Jak łatwo zauważyć różnice w masie nie przekraczały 6%, natomiast różnice w momencie bezwładności 2% modelu bazowego.

Tabela 1. Parametry bezwładnościowe modeli

Kształt przekroju poprzedniego	Masa m		Moment bezwładności I	
	[kg]	[%]	[kg·m ²]	[%]
1 	7,44	100,0	0,1983	100,0
2 	7,50	100,8	0,1998	100,8
3 	7,87	105,7	0,2003	101,8
4 	7,69	103,2	0,2010	101,4
Wartości średnie	7,63	-	0,1999	-

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. zestawia uśrednione wyniki sztywności zawieszenia dla 4 wariantów przekroi poprzecznych. Sztywność związana z ruchem pionowym była stała, natomiast sztywność skrętna rosła wraz ze zwiększaniem się dystansu pomiędzy sprężynami zawieszenia. W zakresie możliwych nastaw zmiana ta może być traktowana w przybliżeniu jako liniowa (Wykres 19).

Tabela 2. Uśrednione sztywności zawieszenia

Rozstaw sprężyn d	Sztywność giętna k_y	Sztywność skrętna k_α
[m]	[N/m]	[N·m/rad]
0,18		48,6
0,22		59,6
0,26	2610	73,1
0,30	(stała wartość)	87,7
0,34		107
0,38		128

Źródło: opracowanie własne

Natomiast uśrednione parametry tłumienia przedstawia Tabela 3. Zastosowanie tłumików C zwiększyło tłumienie ponad dwa razy.

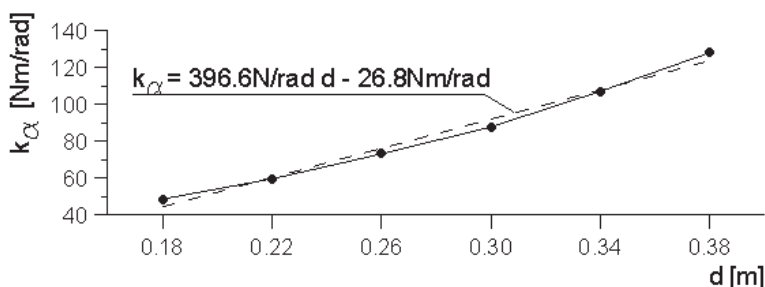
Wszystkie przedstawione powyżej charakterystyki dotyczą zawieszenia modelu. Dodatkowo została określona sztywność płyty bazowej modelu

w układzie belki swobodnie podpartej (Rysunek 79) przy zastosowaniu tych samych procedur. Zmierzona częstotliwość pierwszej postaci drgań własnych wynosiła: $f_{PLYTA} = 6,9 \text{ Hz}$. Natomiast obliczona na tej podstawie sztywność pionowa płyty była równa: $k_{y PLYTA} = 13\,983 \text{ N/m}$. Uzyskany wynik jest o rząd wielkości większy od pionowej sztywności zawieszenia. Usprawiedliwi to traktowanie modelu jako ciała sztywnego.

Tabela 3. Uśrednione parametry tłumienia

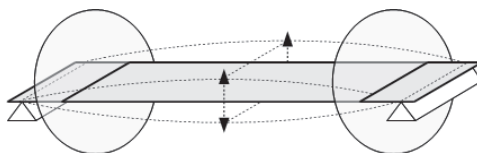
Poziom tłumienia	Tłumienie giętnie c_y		Tłumienie skrętne c_α	
	[kg/s]	[%]	[kg·m ² /s]	[%]
-	1,21	100	0,0273	100
Tłumiki C	2,66	220	0,0833	306

Źródło: opracowanie własne



Wykres 19. Zależność sztywności skrętnej od nastawy sprężyn

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 79 Pierwsza postać drgań własnych płyty modelu

Źródło: opracowanie własne

7.2.2. Analiza wymiarowa zagadnienia

Na początek przyjmijmy, że w obrębie zainteresowań pozostają następujące wielkości:

- prędkość krytyczna (startowa) flutteru $V_c^f = V_1$,
- prędkość wygaszenia flutteru V_2 ,
- prędkość zaniku oscylacji V_3 ,
- dominująca częstotliwość flutteru f_f .

Wielkości te zależą od następujących parametrów, które mogą być zestawione w 2 grupy:

- parametry opisujące ciało stałe (tutaj: model pomostu) w przepływie: m – masa, I – moment bezwładności, f_y, f_α – giętna i skrętna częstotliwość drgań własnych, c_y, c_α – współczynnik tłumienia na kierunku swobody giętym i skrętnym, D, B – charakterystyczne wymiary ciała: wysokość, szerokość, Λ – parametr opisujący kształt,
- Parametry opisujące przepływ: ρ – gęstość, μ – lepkość kinematyczna, I_v – intensywność turbulencji, a – prędkość dźwięku (sposób opisu ściśłości ośrodka), g – przyspieszenie ziemskie.

Prędkość krytyczna przepływu powietrza oraz dominująca częstotliwość flutteru są funkcjami wszystkich powyżej wymienionych parametrów:

$$V_i = f_{V_i}(m, I, f_y, f_\alpha, c_y, c_\alpha, D, B, \Lambda, \rho, \mu, I_v, a, g), \quad i=1,2,3 \quad (7.7)$$

$$f_f = f_F(m, I, f_y, f_\alpha, c_y, c_\alpha, D, B, \Lambda, \rho, \mu, I_v, a, g) \quad (7.8)$$

Jako bazę wymiarową obiera się 3 następujące wielkości: B – szerokość modelu (wymiar równoległy od strumienia), f_y – częstotliwość drgań własnych giętych, ρ – gęstość płynu. Pozostałe wielkości jako zależne mogą zostać przedstawione w bezwymiarowej formie:

- charakterystyczna prędkość przepływu:
$$\bar{V}_i = \frac{V_i}{f_y \cdot B} \quad (7.9)$$

- dominująca częstotliwość flutteru:
$$\bar{f}_f = \frac{f_f}{f_y} \quad (7.10)$$

- bezwymiarowa masa:
$$\bar{m} = \frac{m}{\rho B^3} \quad (7.11)$$

- bezwymiarowy moment bezwładności:
$$\bar{I} = \frac{I}{\rho B^5} \quad (7.12)$$

- opis sztywności zawieszenia:
$$\bar{k} = \frac{f_\alpha}{f_y} \quad (7.13)$$

- bezwymiarowe tłumienie giętkie:
$$\bar{c}_y = \frac{c_y}{\rho f_y B^3} \quad (7.14)$$

- bezwymiarowe tłumienie skrętne:
$$\bar{c}_\alpha = \frac{c_\alpha}{\rho f_y B^5} \quad (7.15)$$

- efektywna wysokość profilu:
$$K_B = \frac{D}{B} \quad (7.16)$$

- bezwymiarowy parametr R :
$$R = \frac{\rho B^2 f_y}{\mu} \quad (7.17)$$

- bezwymiarowa liczba M :
$$M = \frac{B \cdot f_y}{a} \quad (7.18)$$

- bezwymiarowa liczba F :
$$F = \frac{B \cdot f_y^2}{g} \quad (7.19)$$

Bezwymiarowe liczby R , M oraz F stanowią analogię do liczb Reynoldsa, Macha i Frouda. Klasyczne liczby podobieństwa nie mogą zostać użyte w analizowanym przypadku, ponieważ prędkość przepływu nie jest stała w czasie.

Opierając się na twierdzeniu Π zależności (7.7) oraz (7.8) mogą być zapisane w formie bezwymiarowej:

$$\bar{V}_i = \bar{f}_{V_i}(\bar{m}, \bar{I}, \bar{k}, \bar{c}_y, \bar{c}_\alpha, K_B, \Lambda, R, I_v, M, F) \quad (7.20)$$

$$\bar{f}_f = \bar{f}_F(\bar{m}, \bar{I}, \bar{k}, \bar{c}_y, \bar{c}_\alpha, K_B, \Lambda, R, I_v, M, F) \quad (7.21)$$

W trakcie testów tunelowych intensywność turbulencji pozostawała na stałym poziomie i wynosiła 5%. W zakresie analizowanych zagadnień ściślność powietrza może być pominięta, liczba M może być traktowana jako stała. System zawieszenia złożony z par przeciwstawnie napiętych sprężyn, małe obroty modelu i wartości prędkości przepływu pozwalają uznać, że liczba F nie zmienia swojej wartości. Implementacja tych spostrzeżeń prowadzi do uproszczenia wzorów (7.20) oraz (7.21) do postaci:

$$\bar{V}_i = \bar{f}_{V_i}(\bar{m}, \bar{I}, \bar{k}, \bar{c}_y, \bar{c}_\alpha, K_B, \Lambda) |_{R, I_v, M, F = const} \quad (7.22)$$

$$\bar{f}_f = \bar{f}_F(\bar{m}, \bar{I}, \bar{k}, \bar{c}_y, \bar{c}_\alpha, K_B, \Lambda) |_{R, I_v, M, F = const} \quad (7.23)$$

Eksperymenty były przeprowadzane niezależnie dla każdego kształtu przekroju poprzecznego. Zatem wielkości będące przedmiotem zainteresowania wyznaczone będą niezależnie dla każdego profilu. Oznacza to kolejne uproszczenie zależności (7.22) i (7.23):

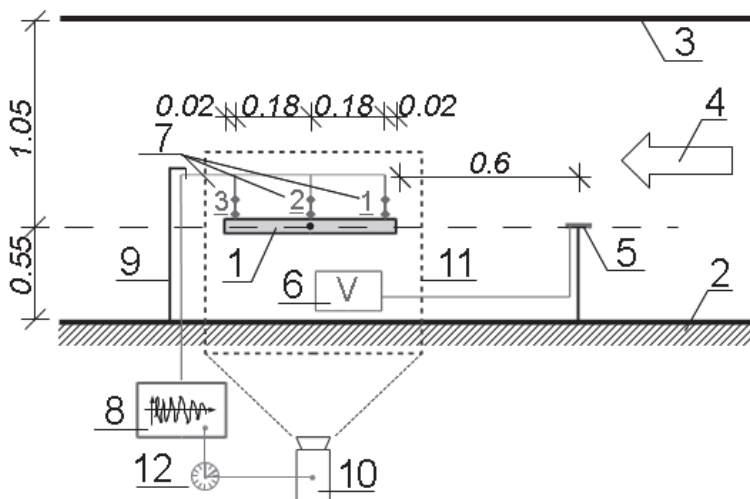
$$\bar{V}_i = \bar{f}_{V_i}(\bar{k}, \bar{c}_y, \bar{c}_\alpha) |_{R, I_v, M, F, \bar{m}, \bar{I}, K_B, \Lambda = const} \quad (7.24)$$

$$\bar{f}_f = \bar{f}_F(\bar{k}, \bar{c}_y, \bar{c}_\alpha) |_{R, I_v, M, F, \bar{m}, \bar{I}, K_B, \Lambda = const} \quad (7.25)$$

Wzory (7.24) oraz (7.25) stanowią ostateczną formę wyrażen na wielkości poszukiwane. Są one podstawę do wyznaczania zależności empirycznych .

7.2.3. Tor pomiarowy

Model aeroelastyczny został umieszczony w poprzek przestrzeni pomiarowej tunelu aerodynamicznego (Ilustracja 9, Rysunek 80) w odległości $0,55\text{ m}$ od podłogi. Odległość od sufitu wynosiła $1,05\text{ m}$. Przebieg testów był rejestrowany za pomocą kamery cyfrowej obejmującej swoim kadrem model w widoku profilu. W trakcie badań prędkość napływającego strumienia powietrza mierzona była przy użyciu anemometru elektronicznego ANT 2000, którego czujnik umieszczony został na poziomie płyty modelu w odległości $0,6\text{ m}$ przed nim. Urządzenie wyposażone było w duży i czytelny wyświetlacz łatwy do sfilmowania, który został zamontowany w obszarze kadru kamery.

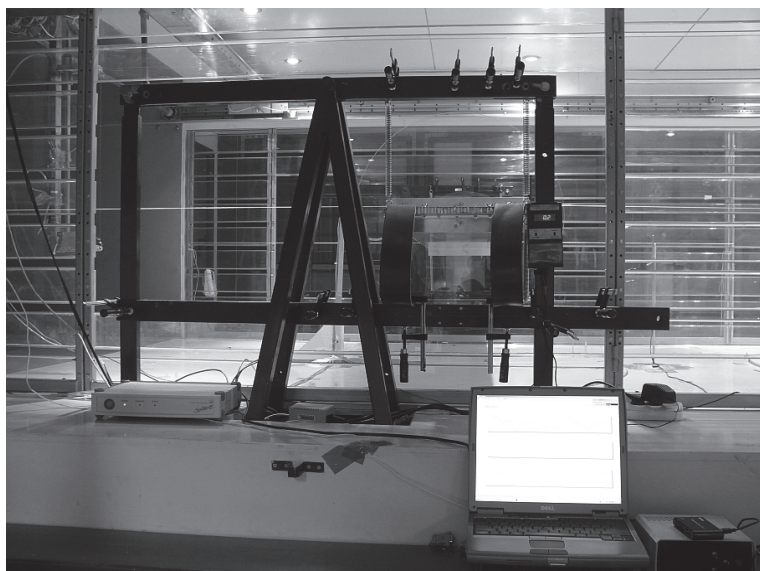


Rysunek 80. Zestaw pomiarowy zastosowany w eksperymencie: 1–model, 2, 3–podłoga i sufit przestrzeni pomiarowej, 4–strumień powietrza, 5 - sensor termooanemometru, 6 – wyświetlacz termo-anemometru, 7, 8 – akcelerometry wraz z przetwornikiem A/D i komputerem, 9 – wsparcie przewodów sygnałowych, 10 – kamera cyfrowa, 12 – synchronizacja czasu

Źródło: opracowanie własne

Przyśpieszenia modelu były mierzone przy użyciu jednoosiowych akcelerometrów HBN B12/200 podłączonych do przetwornika analogowo–cyfrowo Spider 8, który był sterowany za pomocą komputera PC z zainstalowanym programem Catman. Pomiar przyśpieszeń wykonano w płaszczyźnie symetrii tunelu w 3 punktach: w osi obrotu płyty modelu oraz na końcach w odległości $0,02\text{ m}$ od brzości. Masa akcelerometrów wynosiła

$3 \times 0,025 \text{ kg} = 0,075 \text{ kg}$ co stanowiło nie więcej niż 1% masy najlżejszej konfiguracji modelu. Przewody sygnałowe czujników umieszczone zostały po stronie zewnętrznej modelu i wsparte za pomocą pionowego wspornika tak, aby nie blokowały swobody ruchu modelu. Pomiary przyspieszenia wykonano z częstotliwością próbkowania wynoszącą 1200 Hz . Zakres ten został później zawężony w trakcie przetwarzania sygnału.



Ilustracja 10. Laboracyjne stanowisko pomiarowe. Na fotografii przedstawiono podstawowy model bazowy (przekrój poprzeczny nr 1) z zamontowanymi tłumikami C.

Źródło: opracowanie własne

W zakresie oddzielnych badań została wyznaczona intensywność turbulencji na wysokości modelu przy braku jego obecności w przestrzeni pomiarowej oraz został skalibrowany anemometr elektroniczny. W tym celu użyto skanera ciśnień oraz zestawu termooanemometrów stanowiących stałe wyposażenie laboratorium.

Zbudowany tor pomiarowy pozwalał na:

- zapis zmian prędkości średniej napływającego strumienia powietrza,
- rejestracje zachowania się modelu na filmie video,
- zapis przyspieszeń modelu.

Synchronizacja czasu pomiędzy filmem video i zapisem przyspieszeń modelu osiągnięta została poprzez rejestrowanie wskazań licznika czasu toru akcelerometrów na początku i końcu filmu. Ponieważ kamera cyfrowa pracowała ze stałą szybkością zapisu klatek na sekundę, możliwe było

odniesienie czasu obu torów pomiarowych w sposób ciągły w dalszych pracach związanych z obróbką zebranych sygnałów. W trakcie prac badawczych dodatkowo kontrolowano temperaturę powietrza roboczego w przestrzeni pomiarowej. W tym celu termoanemometr elektroniczny był przełączny w tryb pomiaru temperatury. Oprócz tego na bieżąco sprawdzany był odczyt termometru cieczowego umieszczonego w przestrzeni pomiarowej. Temperatura zawsze mieściła się w przedziale od 20 do 22°C . W trakcie badań tunel pracował w obiegu zamkniętym przepływu powietrza. W dalszej części pracy stosowana jest numeracja akcelerometrów 1, 2, 3 zgodna ze zwrotem napływu powietrza (Rysunek. 80.).

7.2.4. Przebieg badań



Ilustracja 11. Model z zamontowanymi tłumikami C

Źródło: fotografia własna


W trakcie badań nie były używane elementy turbulizujące przepływ, tzn. klocki, iglice, itp., stanowiące wyposażenie tunelu. Eksperymenty przeprowadzone były przy możliwie najmniejszej turbulencji przepływu. Intensywność turbulencji na poziomie modelu wynosiła 5% .

Dla każdego wariantu przekroju poprzecznego powtórzono taką samą procedurę polegającą na powtórzeniu kolejnych czynności:

1. Ustawienie sprężyn zawieszenia w 1 z 6 możliwych położań.
2. Wywołanie drgań pionowych i zarejestrowanie przyspieszeń (3 testy)
3. Wywołanie drgań skrętnych i zarejestrowanie przyspieszeń (3 testy)
4. Wykonanie 3 testów odpowiedzi aerodynamicznej w przepływie powietrza, sfilmowanie zachowania się modelu wraz ze wskazaniem anemometru i zarejestrowanie przyspieszeń modelu.
5. Zamocowanie tłumików gumowych.
6. Wywołanie drgań pionowych i zarejestrowanie przyspieszeń (powtórzenie procedury nr 2).
7. Wywołanie drgań skrętnych i zarejestrowanie przyspieszeń (powtórzenie procedury nr 3).
8. Wykonanie 3 testów odpowiedzi aerodynamicznej w przepływie powietrza, sfilmowanie zachowania się modelu wraz ze wskazaniem anemometru i zarejestrowanie przyspieszeń modelu, tj. powtórzenie procedury nr 4 .

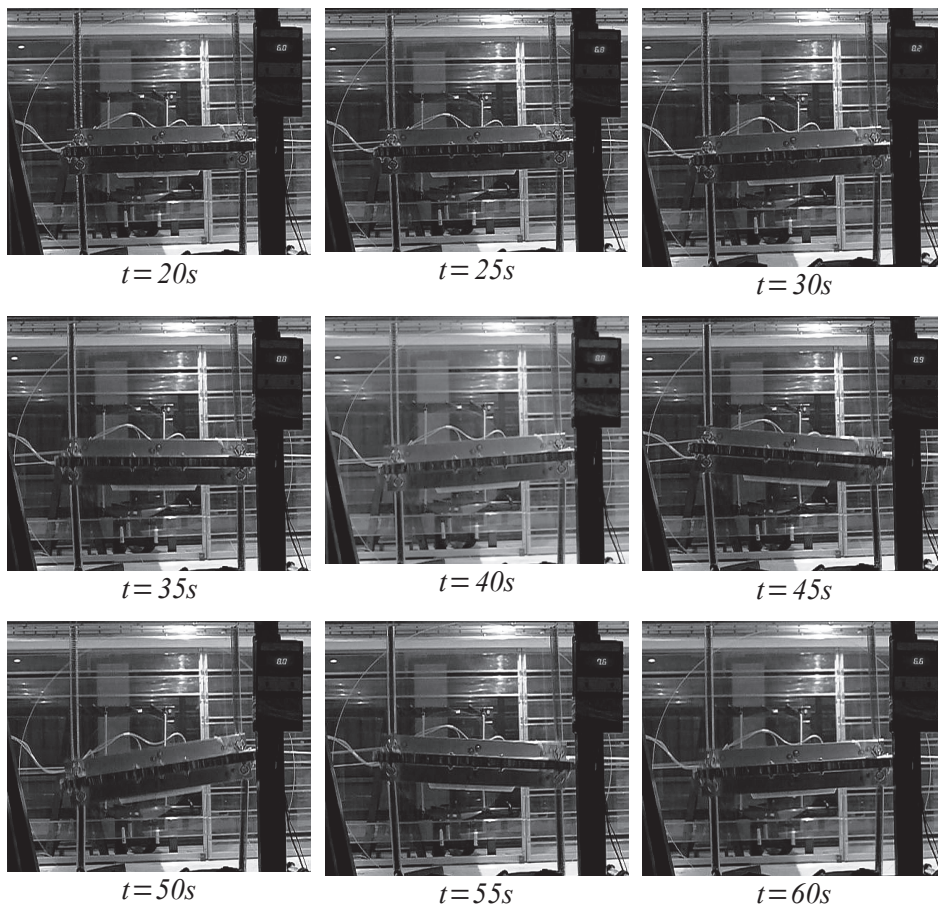
Ostatecznie przeprowadzono testy dla 48 różnych ustawień modelu. Samowzbudny flatter wystąpił w 43 konfiguracjach. Pomimo zachowania szczególnej uwagi, w 3 przypadkach zjawisko rozwinęło się zbyt gwałtownie skutkiem czego była utrata kontroli nad modelem. Zbyt duże przemieszczenia modelu powodowały zwolnienie zawieszenia. Metalowe okucia zabezpieczyły model przed uszkodzeniem przy uderzeniu o stalową ramę. W tych przypadkach wykonywany był dodatkowy test aerodynamiczny.

7.2.5. Typowy przebieg testu aerodynamicznego

Typowy przebieg doświadczenia zostanie szczegółowo omówiony dla profilu nr 3  przy rozstawie sprężyn $d = 0,34 m$ przy braku tłumików C. W omawianym przykładzie test wiatrowy trwał 80s i była to typowa długość badania.

Badanie polegała na sprawdzeniu odpowiedzi aerodynamicznej modelu umieszczonego w przepływającym strumieniu powietrza. Poprzez odpowiedź modelu rozumiemy jego ruch (lub brak ruchu), którego przyspieszenia były mierzone i rejestrowane. Program prędkości oraz przyspieszenia dla omawianego przypadku przedstawia wykres 20. Prędkość przepływu we wszystkich testach była stopniowo zwiększany z przyspieszeniem ok. $0,2 m/s^2$ aż do momentu wystąpienia flatteru jako zjawiska samowzbudnego. Następnie prędkość przepływu była utrzymywana na stałym poziomie o wartości różnej dla różnych konfiguracji modelu. W omawianym przypadku była to wartość $7,1 m/s$. W tym czasie rejestrowane przyspieszenia modelu narastały, a wraz

z nimi prędkości i przemieszczenia. Stała prędkość przepływu była utrzymywana do chwili, kiedy nie istniało ryzyko uszkodzenia modelu. Następnie była stopniowo zmniejszana również z przyspieszeniem ok. $0,2\text{m/s}^2$, co powodowało zanikanie drgań.

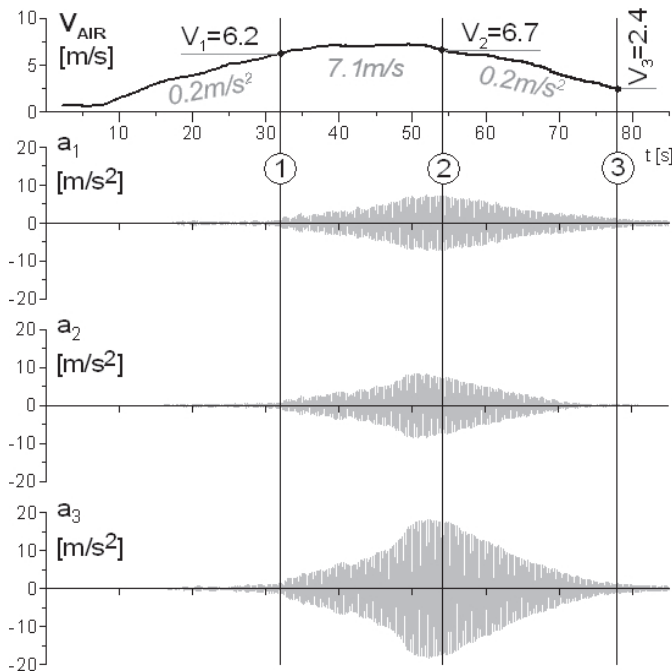


Ilustracja 12. Migawki z zarejestrowanego filmu w różnych chwilach czasowych

Źródło: opracowanie własne

Zarejestrowane wartości przyspieszeń modelu umożliwiły wskazanie 3 charakterystycznych punktów w trakcie przebiegu każdego doświadczenia (Wykres 20.). Uznano, że zjawisko flatteru rozpoczynało się w punkcie ①, w którym wartości zarejestrowanych przyspieszeń zaczynały narastać. Natomiast w punkcie ② wartość amplitudy zaczynały się zmniejszać, aż za-

niwały w punkcie ③. Wartości prędkości przepływu odnoszące się do tych punktów nazwano odpowiednio: prędkością krytyczną flatteru $V_c^f = V_1$, prędkością wygaszenia flatteru V_2 oraz prędkością zaniku oscylacji V_3 . Pierwsze 2 wartości związane są bezpośrednio z badanym zjawiskiem aerodynamicznym. Natomiast trzecia określa możliwości tłumienia drgań w obecności zanikającego przepływu.

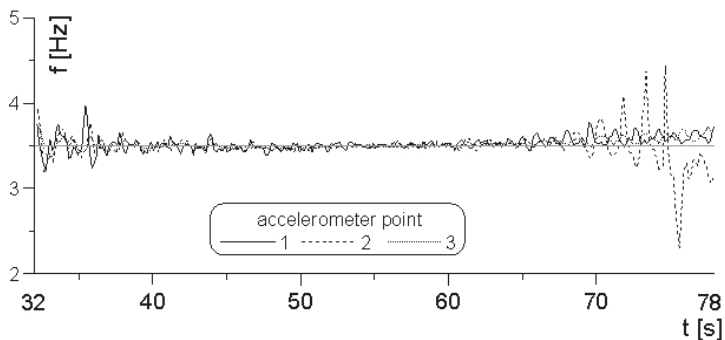


Wykres 20. Program prędkości przepływu i zarejestrowane przyspieszenia

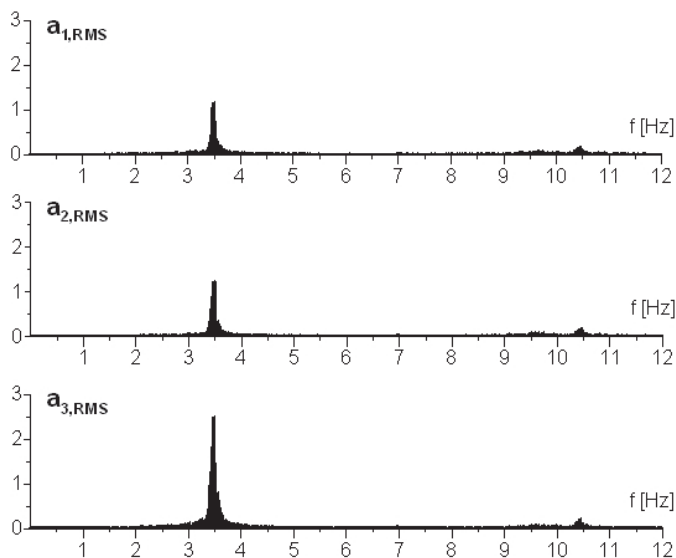
Źródło: opracowanie własne

Częstotliwość zmian amplitudy przyspieszeń zmieniała się w trackie badana. Jednak za każdym razem stabilizowała się w momencie zaistnienia zjawiska flatteru. Zjawisko to zostało zilustrowane na wykresie 21. przedstawiającym zmianę częstotliwości zarejestrowanego sygnału w czasie. Wykres ten został sporządzony jako wynik analizy sygnału w dziedzinie czasu przy użyciu autorskiego programu komputerowego, który identyfikował kolejne przejścia przez zero sygnału i na tej podstawie określał okres i częstotliwość. W omawianej konfiguracji modelu stabilizacja nastąpiła dla wartości $3,49 \text{ Hz}$. Wartość ta została określona mianem dominującej częstotliwości flatteru f_f .

Wyznaczana była poprzez analizę modalną zarejestrowanego sygnału (Wykres 22). Była to za każdym razem pierwsza dominująca wartość. Wartości te były w przybliżeniu dwukrotnie niższe niż najniższa częstotliwość drgań własnych płyty modelu.



Wykres 21. Stabilizowanie się częstotliwości flutteru w trakcie rozwoju zjawiska (wycinek czasowy Wykresu 20)



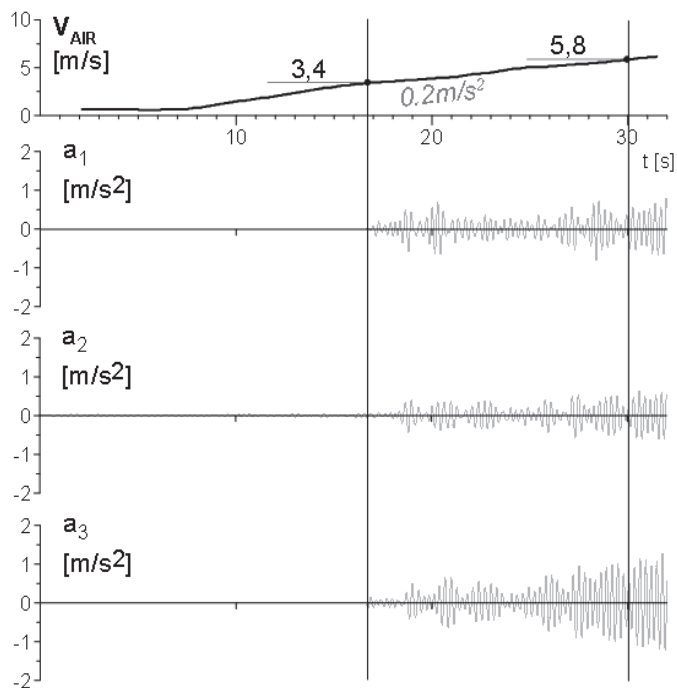
Wykres 22. Analiza modalna sygnału z wykresu 20

Źródło 21-22: opracowanie własne

Wystąpienie zjawiska flutteru było poprzedzone wzbudzeniem turbulentnym, które również zostało zarejestrowane przez sprzęt pomiarowy. Odpowiedź

modelu w tym zakresie była znacznie mniejsza. W szczególności oznaczało to, że zarejestrowane wartości przyspieszeń były o rząd wielkości mniejsze od pomierzonych w trakcie flatteru. W przytoczonym przykładzie wzbudzenie turbulentne przypadło na przedział prędkości przepływu strumienia powietrza od $3,4\text{ m/s}$ do $5,8\text{ m/s}$, co trwało ok. 14 s (Wykres 23). Natomiast nie udało się uchwycić zakresu wzbudzenia wirowego. Wzbudzenie takie jest bowiem możliwe w wolnym przepływie o niskiej turbulencji. Regularne odrywanie się wirów rozwija się, jeżeli prędkość przepływu jest stała w długim okresie czasu. W trakcie prac badawczych prędkość strumienia narastała, co uniemożliwiało wykształcenie się regularności odrywania wirów.

7.2.6. Filtrowanie sygnału

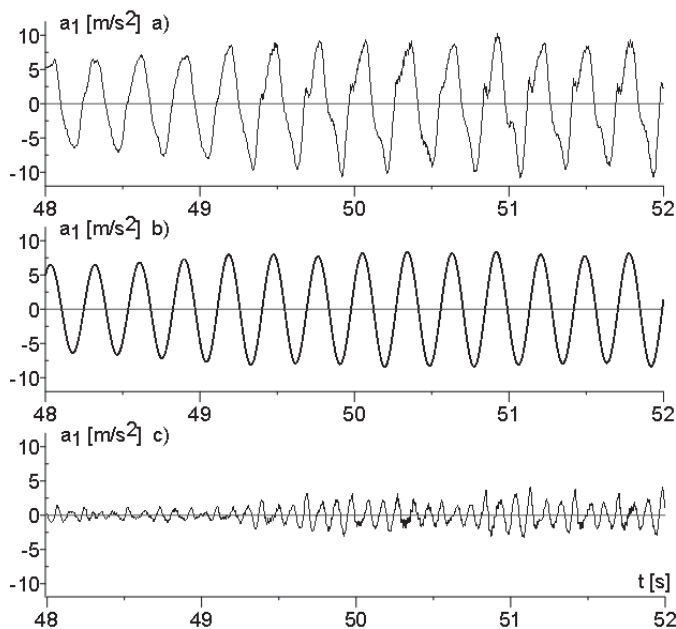


Wykres 23. Fragment sygnału z Wykresu 20 – zakres wzbudzenia turbulentnego

Źródło: opracowanie własne

Przebiegi przedstawione na wykresach 22 oraz 23 nie są sygnałami bezpośrednio zarejestrowanymi w trakcie doświadczenia, lecz stanowią wynik filtrowania cyfrowego. W tym celu został zaprojektowany i realizowany

w postaci programu komputerowego filtr numeryczny według [45]. Zdecydowano się na zastosowanie filtru nierekursywnego o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR – Finite Impulse Response Filter). Główną zaletą tego typu filtrów jest liniowa charakterystyka fazowa, zaś wadą wysoki rząd. Zaprojektowany filtr przepuszczał pasmo $0,5 \div 6,5 \text{ Hz}$ z $SBA=100\text{dB}$ (stop band attenuation). Oparty był na oknie Kaisera, zaś jego rząd wynosił 1283. Filtr taki w dyskretniej dziedzinie czasu działa podobnie jak średnia krocząca, więc wysoki rząd oznaczał utratę 641 początkowych i końcowych próbek sygnału, co przekładało się na przedział czasu $0,53 \text{ s}$ i ze względu na długości zarejestrowanych problemów nie powodowało żadnych komplikacji. Wykres 24 przedstawia sygnał „surowy”, wynik działania filtru oraz usunięte szumy. Sygnał pochodzi z przykładu omówionego w rozdz. 7.2.5..



Wykres 24. Fragment sygnału z wykresu 20; a) sygnał zarejestrowany; b) wyniki działania filtru; c) odfiltrowane zanieczyszczenie $c = a - b$


Źródło: opracowanie własne




7.2.7. Wyniki badań

Poniższe tabele i wykresy przedstawiają uzyskane w całości eksperymentu wyniki: charakterystyczne dla zjawiska prędkości przepływu strumienia powietrza V_1, V_2 – startową i wygaszenia flatteru, V_3 – prędkość zaniku oscylacji oraz dominującą częstotliwość flatteru f_f . Rezultaty te zostały skorelowane z charakterystykami dynamicznymi układu, tj. pomierzonymi częstotliwościami drgań gasnących układu, które w przybliżeniu mogą być utożsamiane z częstotliwościami drgań własnych (rozdz. 7.2.1.3.). Uznano, że najważniejszym parametrem opisującym zawieszenie (rozdz. 7.2.2.) jest bezwymiarowy stosunek częstości drgań skrętnych do giętnych f_α/f_y . Dominująca częstotliwość flatteru również została odniesiona do częstotliwości oscylacji pionowych f_f/f_y . Oba parametry bezwymiarowe każdorazowo oparte były na wynikach bieżących pomiarów. Przedstawione wyniki stanowią rezultat uśrednienia trzech testów aerodynamicznych.

Tabele od 4 do 77 zestawiają wyniki testów aerodynamicznych oddzielnie dla każdego z 4 wariantów przekroju poprzecznego modelu. Wyniki podzielone są na 2 grupy dla konfiguracji bez tłumików C oraz z tymi tłumikami. W obrębie każdej grupy podano rezultaty pomiarów dla 6 ustawień sprężyn zawieszenia. Ostatnia kolumna zawiera wartość kinematycznej liczby Strouhala obliczoną dla startowej prędkości flatteru wg:

$$St = \frac{f_f B}{V_1}, B = 0,4 m \quad (7.26)$$

W przypadku przekroju poprzecznego nr 1  zjawisko flatteru udało się uzyskać tylko w połowie wariantów konfiguracji zawieszenia. Dla rozstawów sprężyn $d = 0,18; 0,22; 0,26 m$ zjawisko nie wystąpiło przy prędkości przepływu powietrza do $15 m/s$. Testów nie kontynuowano przy większej prędkości ze względu na ryzyko zniszczenia modelu. W konfiguracji rozstawu sprężyn $d = 0,26 m$ przy braku tłumików C w trakcie jednego testu model wykonywał nagle pionowe jednorazowe ale powtarzalne skoki, po których wracał do położenia równowagi. Nie zaobserwowano podobnego zachowania w innych konfiguracjach modelu.

Profil nr 2  okazał się niestabilny aerodynamicznie w każdej sprawdzonej konfiguracji zawieszenia. Dla najniższej oraz trzech najwyższych wartości parametru f_α/f_y zaobserwowano ruch z dominacją obrotu. Natomiast dla pozostałych wartości miała miejsce dominacja ruchu pionowego. W przypadku profili nr 3  oraz nr 4  również udało się uzyskać samowzbudzenie. Tutaj również zaobserwowano podobne przejście zmiany charakteru ruchu.

Wyniki zestawione w tabelach zostały również przedstawione na wykresach od 25 do 30. W tym przypadku na jednym wykresie przedstawiono wszystkie warianty profili przekrojów poprzecznych. Oddzielne wykresy sporządzone dla dwóch poziomów tłumienia.

Tabela 4. Wyniki testów aerodynamicznych – profil 1 —

	d	f_y	f_α	f_α/f_y	f_f	f_f/f_y	V_1	V_2	V_3	St
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[-]
	0,18	2,97	2,42	0,81	×	×	×	×	×	×
	0,22	2,97	2,73	0,92	×	×	×	×	×	×
	0,26	2,97	3,04	1,02	×	×	<u>13,90</u>	×	×	×
	0,30	2,97	3,37	1,14	3,24	1,09	7,40	7,37	4,82	0,18
	0,34	2,97	3,74	1,26	3,50	1,18	7,24	7,56	6,11	0,19
	0,38	2,97	3,96	1,33	3,69	1,25	8,39	8,12	5,87	0,18
Tłumiki C	0,18	2,88	2,59	0,90	×	×	×	×	×	×
	0,22	2,88	2,85	0,99	×	×	×	×	×	×
	0,26	2,88	3,11	1,08	×	×	×	×	×	×
	0,30	2,89	3,37	1,16	3,18	1,10	7,64	8,20	5,75	0,17
	0,34	2,89	3,70	1,28	3,50	1,21	8,44	8,24	6,87	0,17
	0,38	2,86	3,88	1,36	3,69	1,29	8,31	8,71	6,70	0,18

Źródło: opracowanie własne

Należy zwrócić uwagę na autorskie przedstawienie wyników w funkcji bezwymiarowego parametru sztywności zawieszenia f_α/f_y . Zabieg ten pozwala dostrzec wyraźnie jak zmienia się wpływ przekroju poprzecznego na uzyskiwane wyniki w różnych wariantach konfiguracyjnych.

Na przedstawionych wykresach łatwo dostrzec istnienie dwóch charakterystycznych obszarów $f_\alpha/f_y < 1,15$ oraz $f_\alpha/f_y > 1,15$. W pierwszym z nich wpływ kształtu przekroju poprzecznego na uzyskiwane wyniki jest znaczny. Natomiast po przekroczeniu granicy stosunku częstotliwości drgań skrętnych do giętnych wynoszącej $1,15$ wpływ ten staje się dużo mniejszy, tzn. uzyskane różnice w wynikach dla różnych kształtów są wyraźnie mniejsze. Ponadto wykresy pokazują, że wartości charakterystycznych prędkości

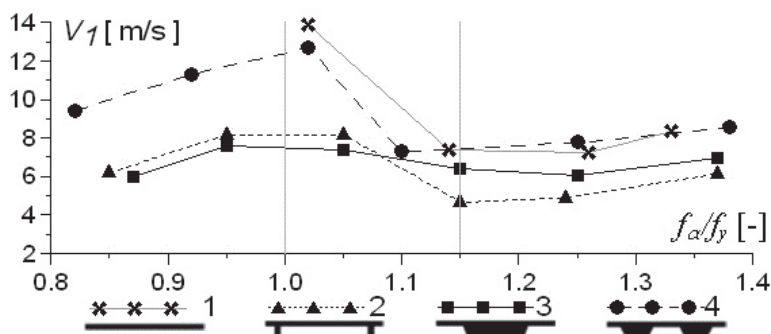
związanych ze zjawiskiem osiągają minima na granicy obu obszarów. W obszarze pierwszym wielkości te przyjmują wartości maksymalne w przedziale $0,9 < f_\alpha / f_y < 1,0$, co może stanowić pewne zaskoczenie. Z określonymi regionami wiążą się również postacie ruchu modelu. W pierwszym obserwowano dominację ruchu pionowego, zaś w drugim obrotowego. Stopniowe przejście formy następowało w przedziale $1,0 < f_\alpha / f_y < 1,15$.

Wykresy 31, 32 dominującej częstości flatteru w formie bezwymiarowej potwierdzają istnienie dwóch obszarów w dziedzinie stosunku częstotliwości drgań skrętnych do giętnych. Ponownie zauważamy, że dla $f_\alpha / f_y > 1,15$ wpływ kształtu poprzecznego na wyzyskiwane wyniki zanika. Przy czym dla przypadku niższego tłumienia granice tę można obniżyć do wartości $1,00$. Wykres 33 liczby Strouhala łączącej prędkość startową flatteru jak jego częstotliwość pokazuje, że wpływ przekroju poprzecznego na oba parametry jest jednolity.

Tabela 5. Wyniki testów aerodynamicznych – profil 2

	d	f_y	f_α	f_α / f_y	f_f	f_f / f_y	V_1	V_2	V_3	St
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[-]
	0,18	2,97	2,53	0,85	2,35	0,79	6,22	7,05	3,75	0,15
	0,22	2,97	2,82	0,95	2,60	0,88	8,15	9,33	7,58	0,13
	0,26	2,97	3,11	1,05	3,10	1,04	8,17	9,73	5,71	0,15
	0,30	2,97	3,41	1,15	3,36	1,13	4,66	4,50	2,49	0,29
	0,34	3,00	3,74	1,24	3,56	1,18	4,90	4,78	3,70	0,29
	0,38	3,00	4,10	1,37	3,94	1,31	6,15	6,06	3,22	0,26
Tłumiki C	0,18	2,97	2,71	0,91	2,32	0,78	7,77	9,46	7,18	0,12
	0,22	2,93	2,93	1,00	2,56	0,87	8,92	9,76	9,14	0,11
	0,26	2,86	3,15	1,10	3,09	1,08	6,11	6,32	3,48	0,20
	0,30	2,93	3,44	1,17	3,31	1,13	5,52	5,87	3,56	0,24
	0,34	2,93	3,70	1,26	3,55	1,21	6,99	6,99	5,23	0,20
	0,38	2,93	4,03	1,37	3,85	1,31	7,29	7,56	4,23	0,21

Źródło: opracowanie własne



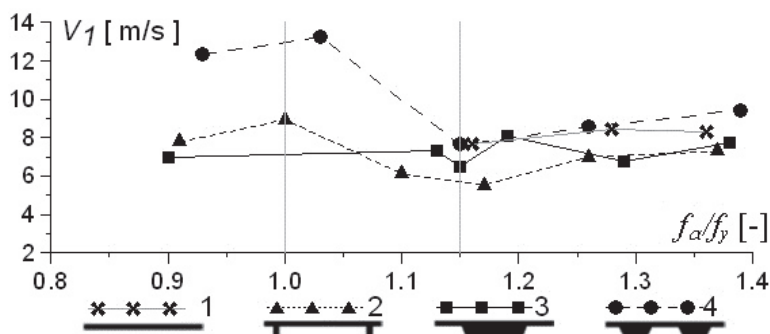
Wykres 25. Prędkość startowa flutteru – modele bez tłumików C

Źródło: opracowanie własne

Tabela 6. Wyniki testów aerodynamicznych – profil 3 

	d	f_y	f_α	f_α/f_y	f_f	f_f/f_y	V_1	V_2	V_3	St
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[-]
	0,18	2,93	2,56	0,87	2,28	0,78	5,99	8,76	4,98	0,15
	0,22	2,89	2,75	0,95	2,57	0,89	7,56	9,17	6,03	0,14
	0,26	2,89	3,04	1,05	3,03	1,05	7,40	7,44	2,97	0,16
	0,30	2,89	3,33	1,15	3,25	1,12	6,38	7,10	2,92	0,20
	0,34	2,89	3,63	1,25	3,49	1,21	6,08	6,54	2,68	0,23
	0,38	2,89	3,96	1,37	3,76	1,30	6,94	7,61	3,03	0,22
Tłumiki C	0,18	2,93	2,64	0,90	2,40	0,82	6,99	9,51	5,95	0,14
	0,22	2,86	3,22	1,13	2,86	1,00	7,34	8,39	4,96	0,16
	0,26	2,93	3,37	1,15	3,07	1,05	6,46	7,96	3,67	0,19
	0,30	2,82	3,37	1,19	3,19	1,13	8,12	8,88	6,03	0,16
	0,34	2,82	3,63	1,29	3,50	1,24	6,73	7,85	3,43	0,21
	0,38	2,82	3,88	1,38	3,48	1,23	7,72	9,46	6,00	0,18

Źródło: opracowanie własne



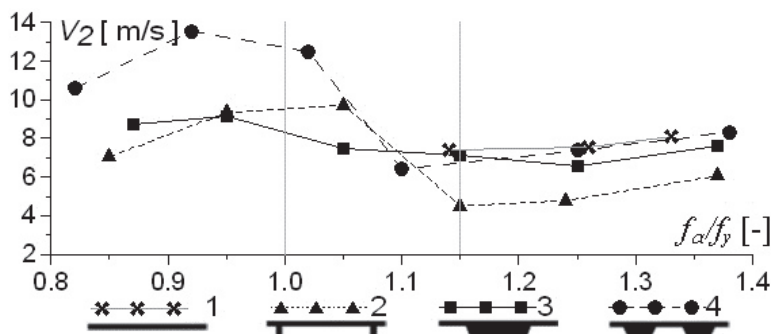
Wykres 26. Prędkość startowa flutteru – modele z tłumikami C

Źródło: opracowanie własne

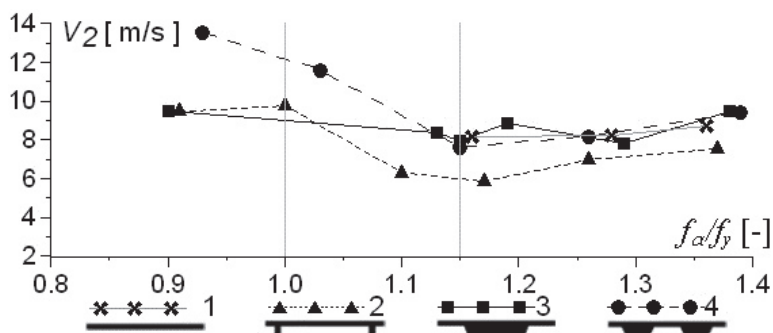
Tabela 7. Wyniki testów aerodynamicznych – profil 4 

	d	f_y	f_α	f_α/f_y	f_f	f_f/f_y	V_1	V_2	V_3	St
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[-]
	0,18	2,93	2,42	0,82	1,75	0,60	9,43	10,59	8,17	0,07
	0,22	2,93	2,70	0,92	2,15	0,73	11,31	13,56	10,29	0,08
	0,26	2,93	2,98	1,02	3,03	1,03	12,70	12,50	7,56	0,10
	0,30	2,93	3,22	1,10	3,18	1,08	7,29	6,43	3,27	0,17
	0,34	2,93	3,66	1,25	3,44	1,17	7,77	7,37	3,89	0,18
	0,38	2,97	4,10	1,38	3,82	1,29	8,55	8,31	5,82	0,18
Tłumiki C	0,18	2,86	2,44	0,85	1,89	0,66	*	*	*	*
	0,22	2,83	2,64	0,93	2,28	0,80	12,33	13,53	9,97	0,07
	0,26	2,86	2,93	1,03	2,92	1,02	13,24	11,60	8,58	0,09
	0,30	2,86	3,30	1,15	3,14	1,10	7,64	7,64	3,54	0,16
	0,34	2,86	3,60	1,26	3,36	1,18	8,55	8,20	5,95	0,16
	0,38	2,86	3,97	1,39	3,61	1,26	9,43	9,41	6,73	0,15

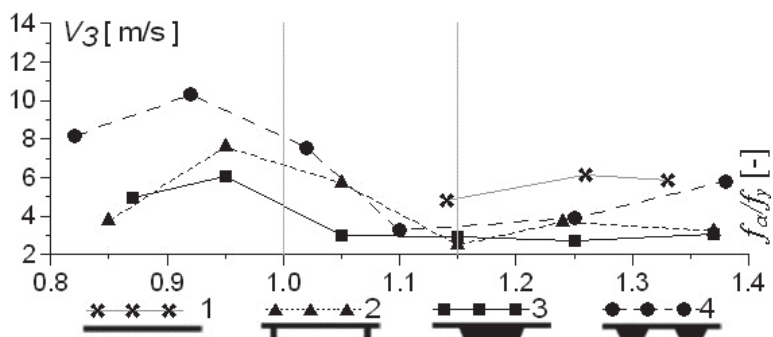
* wyniki utracone z powodu awarii pamięci masowej kamery



Wykres 27. Prędkość wygaszenia flutteru – modele bez tłumików C

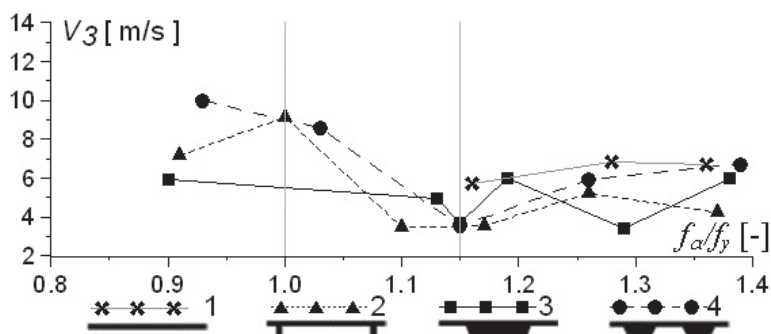


Wykres 28. Prędkość wygaszenia flutteru – modele z tłumikami C

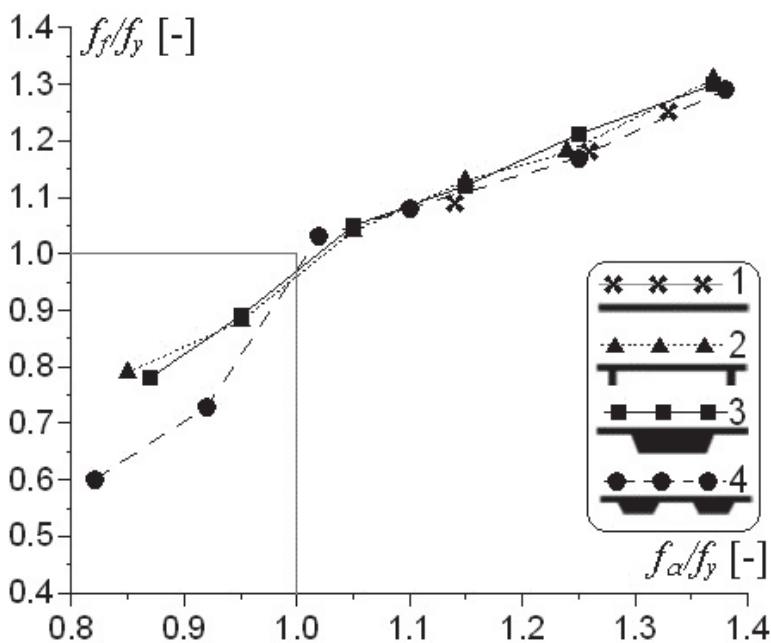


Wykres 29. Prędkość zaniku oscylacji – modele bez tłumików C

Źródło 27-29: opracowanie własne

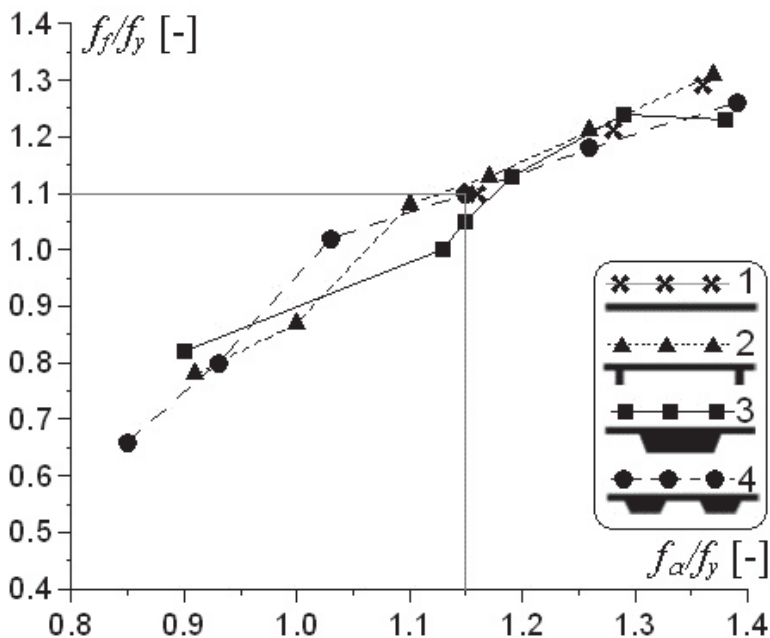


Wykres 30. Prędkość zaniku oscylacji – modele z tłumikami C

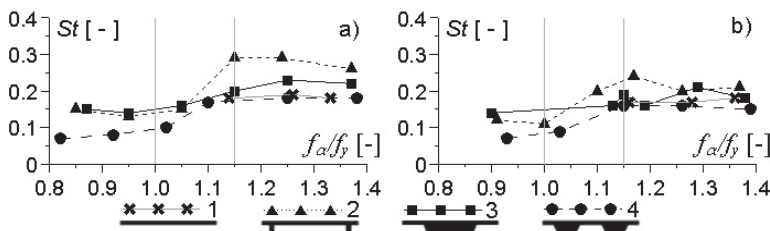


Wykres 31. Bezwymiarowa częstotliwość flutteru – model bez tłumików

Źródło 30-31: opracowanie własne



Wykres 32. Bezwymiarowa częstotliwość flutteru – model z tłumikami C



Wykres 33. Liczba Strouhala a) modele bez tłumików C, b) z tłumikami C

Źródło 32-33: opracowanie własne

7.2.8. Weryfikacja wyników według wzorów teoretycznych

W celu weryfikacji uzyskanych wyników, prędkość krytyczna flutteru dla wykonanych modeli została oszacowana według wzorów przybliżonych innych badaczy. Ponieważ większość wzorów używa bezwymiarowej liczby Theodorsena, jej wartości zostały wyznaczone dla każdego wariantu zastosowanego profilu. Wzory przybliżone formułowane są zazwyczaj przy użyciu częstości kołowych ω drgań giętych i skrętnych. W niniejszej pracy

zdecydowano się na zastosowanie częstotliwości f . Z tego powodu wszystkie wyrażenia zostały przekształcone. Wszystkie poniższe wzory powstały w oparciu o model płaski. Większość modeli przybliżonych opiera się na współczynnikach empirycznych i jest dobierana eksperymentalnie dla typowych kształtów przekroji poprzecznych. Przy stosowaniu tych metod przyjęto zasadę, że jeżeli jest dostępny w literaturze współczynnik, to jest on stosowany. Natomiast jeżeli dla danego kształtu nie można odnaleźć w literaturze wartości, wówczas jest on wyznaczany na podstawie wyników badań własnych.

7.2.8.1. Liczba Theodorsena





Liczba Theodorsena jest bezwymiarowym parametrem opisującym bezwładność ciała płaskiego o 2 stopniach swobody. Łączy ona masę i moment bezwładności obiektu wraz z odniesieniem tych wielkości do gęstości ośrodka:

$$Th = 2,5 \sqrt{\frac{m \cdot r}{\pi \rho b^3}}, \quad (7.27)$$

gdzie m – masa obiektu na jednostkę długości, r – promień bezwładności przekroju poprzecznego obiektu, $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$ – gęstość objętościowa powietrza, $b = B/2 = 0,2 \text{ m}$ – połowa szerokości obiektu.

Wartości liczby Theodorsena wyznaczone dla wykonanych modeli zestawia tabela 8.

Tabela 8. Wartości liczby Theodorsena dla wariantów modeli

Profil	$m = m/2,12 \text{ m}$	$r = \sqrt{I/m}$	Th	
	[kg/m]	[cm]	[-]	[%]
1 	3,511	16,3	10,852	100,0
2 	3,539	16,3	10,895	100,4
3 	3,711	16,0	11,031	101,6
4 	3,625	16,2	10,977	101,2

Źródło: opracowanie własne

Jak widać z powyższego zestawienia wartości liczby Theodorsena dla wykonanych wariantów modeli są bardzo bliskie. Różnice nie przekraczają 2%. Wynika to z faktu, że modele były zaprojektowane tak, aby różniły się istotnie kształtem przy niedużych zmianach w charakterystykach bezwładności i przy

zachowaniu szerokości pomostu B . Na podstawie tego wnioskujemy, że liczba Th nie uwzględnia kształtu przekroju poprzecznego. Uwzględnienie kształtu pomostu realizowane jest natomiast poprzez współczynniki kalibrujące modele.

7.2.8.2. Wzór Selberga (1965)

Wzór przybliżony Selberga (1965) jest słuszny dla przekroji prostokątnych:

$$V_S^f = 0,21 B \sqrt{(\omega_\alpha)^2 - (\omega_y)^2} Th, \quad \omega_\alpha > \omega_y, \quad (7.28)$$

gdzie B jest szerokością obiektu (pomostu), zaś $\omega_\alpha = 2\pi f_y$, $\omega_y = 2\pi f_y$ - częstotliwości kołowe drgań giętych i skrętnych odpowiednio.

Wzór (7.28) może być zapisany w alternatywnej postaci:

$$V_S^f = 1,32 B \sqrt{f_\alpha^2 - f_y^2} Th, \quad f_\alpha > f_y \quad (7.29)$$

7.2.8.3. Wzór Bachmanna (1991)





Formuła Bachmanna wyrażona przy użyciu częstotliwości kołowych przybiera postać:

$$V_B^f = \eta_1 B \omega_y \left[1 + \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_y} - 0,5 \right) 0,12 Th \right] \quad (7.30)$$

lub alternatywnie przy zastosowaniu częstotliwości:

$$V_B^f = 2\pi \eta_1 B f_y \left[1 + \left(\frac{f_\alpha}{f_y} - 0,5 \right) 0,12 Th \right]. \quad (7.31)$$

Tabela 9. Wartości parametru η_1

Profil	h/B	n .
1 	18mm/400mm=0,05	1,0 ¹⁾
2 	(18mm+35mm)/400mm=0,13	0,5 ¹⁾
3 	(18mm+50mm)/400mm=0,17	0,3 ¹⁾
4 	(18mm+30mm)/400mm=0,12	0,5 ²⁾

¹⁾ na podstawie [1], ²⁾ dobrane na podstawie badań własnych

Źródło: opracowanie własne

Wzór obowiązuje dla $\omega_\alpha/\omega_y = f_\alpha/f_y > 1,2$. W rozprawie jednak został zastosowany od wartości 1,15. Zawiera on parametr kalibrujący η_1 , który musi być dobrany empirycznie dla każdego kształtu przekroju poprzecznego pomostu. Tabela 9. zestawia wartość tego parametru. Dla profili nr 1, 2, 3 zastosowano wartości współczynnika podane przez autora wzoru. Natomiast dla profilu nr 4, ze względu na barak takiego wariantu kształtu, wartość została wyznaczona na podstawie eksperymentu własnego z analogiczną dokładnością.

7.2.8.4. Wzór Xianga (1997, 1998)

Oszacowanie Xianga uwzględnia wyłącznie częstość kołową drgań własnych układu ω_α :





$$V_X^f = \eta_2 B \omega_\alpha Th \quad (7.32)$$

lub alternatywnie częstoćliwość:

$$V_X^f = 2 \pi \eta_2 B f_\alpha Th \quad (7.33)$$

Parametr η_1 musi być określony empirycznie. Jego wartości zestawia tabela 10. Podobnie jak poprzednio źródła nie podają wartości tego współczynnika dla kształtu profilu nr 4.

Tabela 10. Wartości parametru η_2

Profil	η_1
1 	0,159 ¹⁾
2 	0,051 ¹⁾
3 	0,108 ¹⁾
4 	0,086 ²⁾

¹⁾ na podstawie [1], ²⁾ dobrane na podstawie badań własnych

7.2.8.5. Wzór Debreceny (1985)

Formuła podobnie jak poprzednia bierze pod uwagę jedynie częstość kołową drgań własnych:

$$V_D^f = 0,082 B \sqrt{\frac{B}{r}} \omega_\alpha Th \quad (7.34)$$

lub alternatywnie:

$$V_D^f = 0,515 B \sqrt{\frac{B}{r}} f_\alpha Th \quad (7.35)$$

gdzie oznaczenia jak poprzednio.

W tym modelu nie ma zastosowania żaden parametr kształtu przekroju poprzecznego.

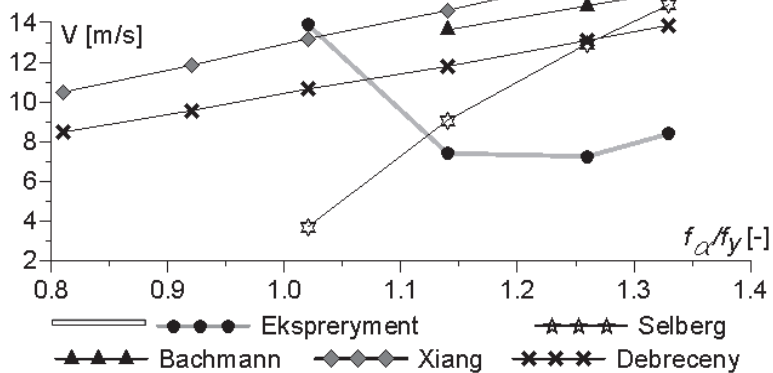
7.2.8.6. Wyniki obliczeń według wzorów przybliżonych

Tabele 11–14 oraz wykresy od 34 do 41 prezentują wartości krytycznej prędkości flatteru oszacowane na podstawie wzorów przybliżonych. Wyniki te zostały zestawione z prędkością startowa flatteru określoną w eksperymencie autorskim. Znak „×” oznacza, że dla danej konfiguracji modelu wzór nie może być zastosowany. Natomiast „-” mówi, że w tym przypadku nie uzyskano flatteru w warunkach laboratoryjnych.

Tabela 11. Oszacowanie prędkości krytycznej flatteru dla profilu nr 1 

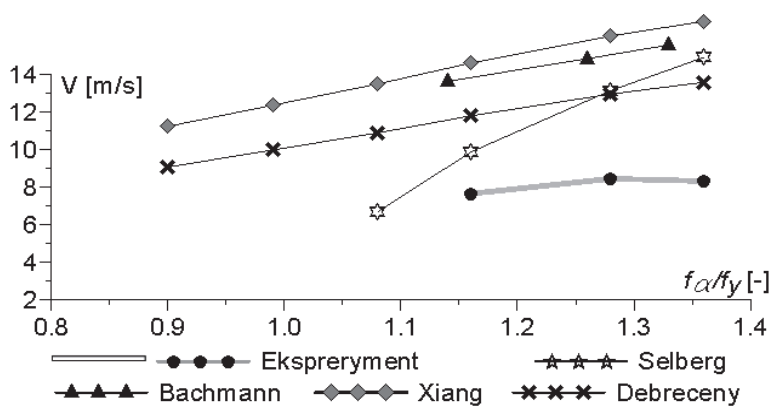
	d	f_y	f_α	α/f_y	V_1	V_S^f	V_B^f	V_X^f	V_D^f
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]
	0,18	2,97	2,42	0,81	-	×	×	10,49	8,47
	0,22	2,97	2,73	0,92	-	×	×	11,84	9,55
	0,26	2,97	3,04	1,02	13,90	3,69	×	13,18	10,64
	0,30	2,97	3,37	1,14	7,40	9,06	13,63	14,61	11,79
	0,34	2,97	3,74	1,26	7,24	12,93	14,84	16,22	13,09
	0,38	2,97	3,96	1,33	8,39	14,89	15,57	17,17	13,86
Tłumiki C	0,18	2,88	2,59	0,90	-	×	×	11,23	9,06
	0,22	2,88	2,85	0,99	-	×	×	12,36	9,97
	0,26	2,88	3,11	1,08	-	6,67	×	13,49	10,88
	0,30	2,89	3,37	1,16	7,64	9,86	13,56	14,61	11,79
	0,34	2,89	3,70	1,28	8,44	13,14	14,64	16,05	12,95
	0,38	2,86	3,88	1,36	8,31	14,91	15,21	16,83	13,50

Źródło: opracowanie własne



Wykres 34. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 1 w wariancie bez tłumików C

Źródło: opracowanie własne



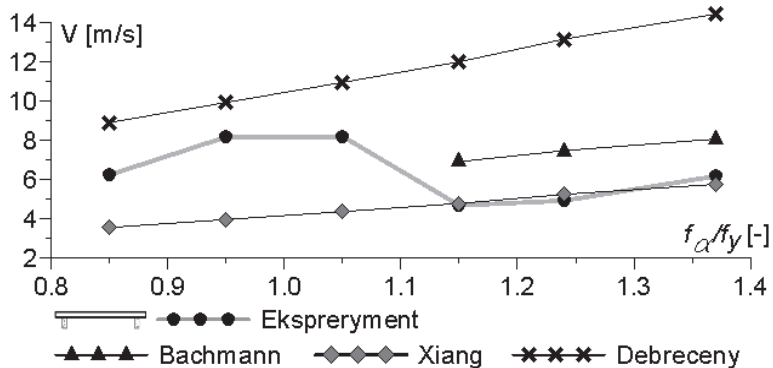
Wykres 35. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 1 w wariancie z tłumikami C

Źródło: opracowanie własne

Tabela 12. Oszacowanie prędkości krytycznej flatteru dla profilu nr 2 

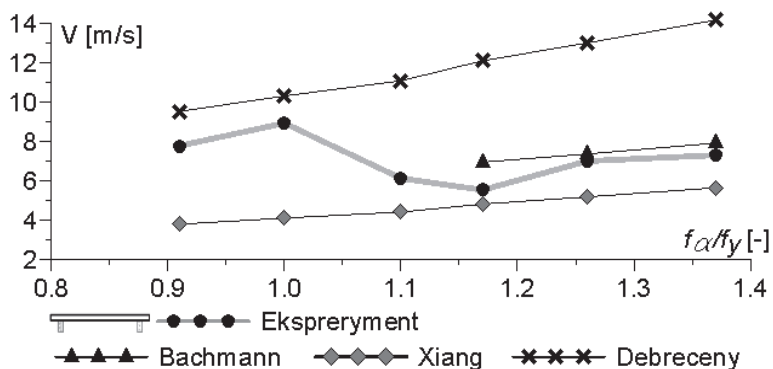
d	f_y	f_α	f_α/f_y	V_1	V_S^f	V_B^f	V_X^f	V_D^f	
[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	
0,18	2,97	2,53	0,85	6,22	×	×	3,53	8,89	
0,22	2,97	2,82	0,95	8,15	×	×	3,94	9,91	
0,26	2,97	3,11	1,05	8,17	×	×	4,34	10,93	
0,30	2,97	3,41	1,15	4,66	×	6,89	4,76	11,98	
0,34	3,00	3,74	1,24	4,90	×	7,45	5,22	13,14	
0,38	3,00	4,10	1,37	6,15	×	8,04	5,73	14,41	
Tłumiki C	0,18	2,97	2,71	0,91	7,77	×	×	3,78	9,52
	0,22	2,93	2,93	1,00	8,92	×	×	4,09	10,30
	0,26	2,86	3,15	1,10	6,11	×	×	4,40	11,07
	0,30	2,93	3,44	1,17	5,52	×	6,93	4,80	12,09
	0,34	2,93	3,70	1,26	6,99	×	7,35	5,17	13,00
	0,38	2,93	4,03	1,37	7,29	×	7,90	5,63	14,16

Źródło: opracowanie własne



Wykres 36. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 2 w wariancie bez tłumików C

Źródło: opracowanie własne



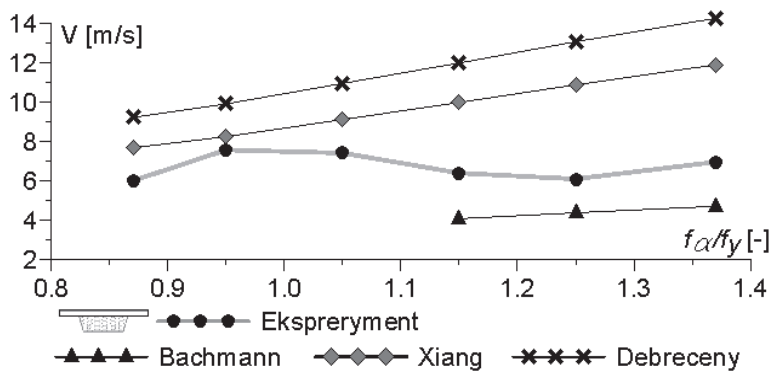
Wykres 37. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 2 w wariancie z tłumikami C

Źródło: opracowanie własne

Tabela 13. Oszacowanie prędkości krytycznej flutteru dla profilu nr 3 

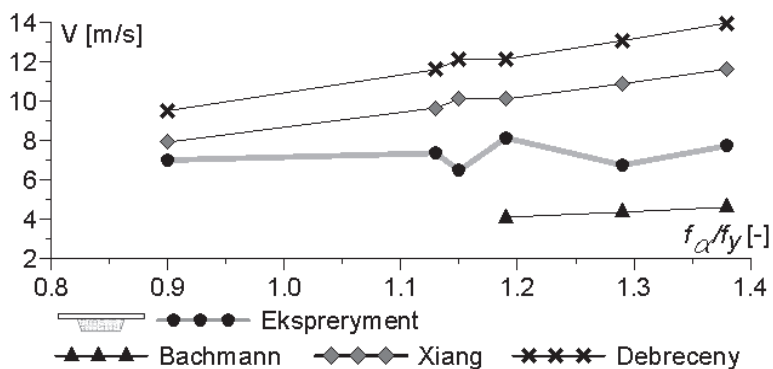
	d	f_y	f_α	f_α/f_y	V_1	V_S^f	V_B^f	V_X^f	V_D^f
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]
Tłumiki C	0,18	2,93	2,56	0,87	5,99	×	×	7,67	9,21
	0,22	2,89	2,75	0,95	7,56	×	×	8,23	9,90
	0,26	2,89	3,04	1,05	7,40	×	×	9,10	10,94
	0,30	2,89	3,33	1,15	6,38	×	4,06	9,97	11,98
	0,34	2,89	3,63	1,25	6,08	×	4,36	10,87	13,06
	0,38	2,89	3,96	1,37	6,94	×	4,69	11,89	14,25
	0,18	2,93	2,64	0,90	6,99	×	×	7,90	9,50
	0,22	2,86	3,22	1,13	7,34	×	×	9,64	11,59
	0,26	2,93	3,37	1,15	6,46	×	×	10,09	12,13
	0,30	2,82	3,37	1,19	8,12	×	4,08	10,09	12,13
	0,34	2,82	3,63	1,29	6,73	×	4,34	10,87	13,06
	0,38	2,82	3,88	1,38	7,72	×	4,59	11,62	13,96

Źródło: opracowanie własne



Wykres 38. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 3 w wariancie bez tłumików C

Źródło: opracowanie własne



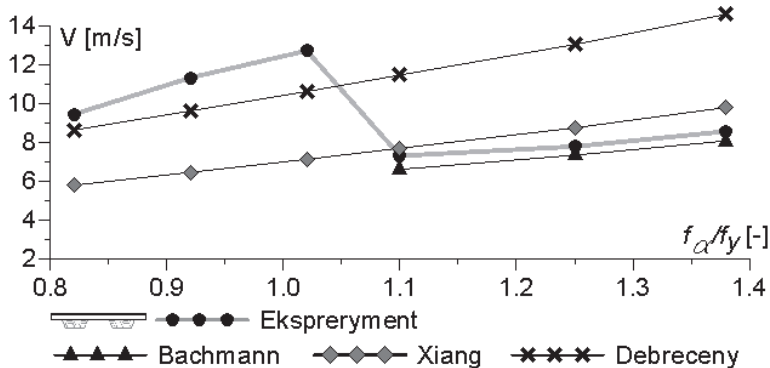
Wykres 39. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 3 w wariancie z tłumikami C

Źródło: opracowanie własne

Tabela 14. Oszacowanie prędkości krytycznej flatteru dla profilu nr 4 

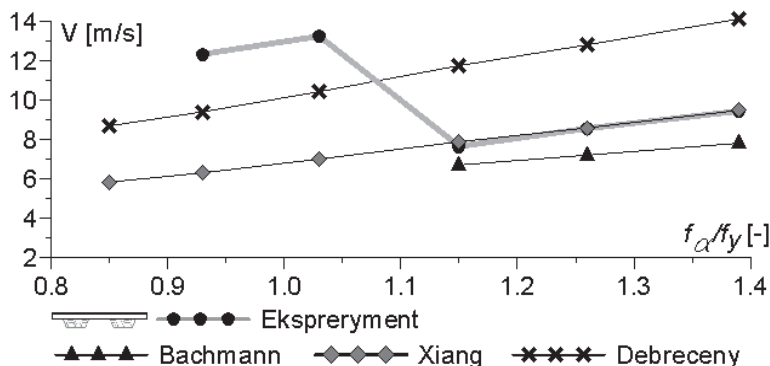
	d	f_y	f_α	f_α/f_y	V_1	V_S^f	V_B^f	V_X^f	V_D^f
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]
	0,18	2,93	2,42	0,82	9,43	×	×	5,77	8,61
	0,22	2,93	2,70	0,92	11,31	×	×	6,44	9,60
	0,26	2,93	2,98	1,02	12,70	×	×	7,11	10,60
	0,30	2,93	3,22	1,10	7,29	×	6,59	7,68	11,45
	0,34	2,93	3,66	1,25	7,77	×	7,32	8,73	13,02
	0,38	2,97	4,10	1,38	8,55	×	8,06	9,78	14,58
Tłumiki C	0,18	2,86	2,44	0,85	*	×	×	5,82	8,68
	0,22	2,83	2,64	0,93	12,33	×	×	6,29	9,39
	0,26	2,86	2,93	1,03	13,24	×	×	6,99	10,42
	0,30	2,86	3,30	1,15	7,64	×	6,69	7,87	11,74
	0,34	2,86	3,60	1,26	8,55	×	7,19	8,58	12,80
	0,38	2,86	3,97	1,39	9,43	×	7,80	9,47	14,12

Źródło: opracowanie własne



Wykres 40. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 4 w wariancie bez tłumików C

Źródło: opracowanie własne



Wykres 41. Zestawienie oszacowań wzorów empirycznych z wynikami eksperymentalnymi dla profilu nr 4 w wariancie z tłumikami C

Źródło: opracowanie własne

7.2.9. Komentarz do wzorów przybliżonych




Cechami wspólnymi wzorów przybliżonych na prędkość krytyczną flatteru jest:

- sprowadzenie zagadnienia do przypadku płaskiego,
- stosowanie liczby Theodorsena,
- uzależnienie wyniku od częstotliwości drgań własnych giętych i skrętnych,
- wprowadzenie współczynnika kształtu przekroju poprzecznego,
- brak bezpośredniego uwzględnienia wpływu tłumienia zawieszenia.

Stosowanie wzorów przybliżonych wymaga znajomości empirycznych współczynników kształtu. W przypadku nietypowych kształtów przekroji poprzecznych, konieczne jest identyfikowanie tych wartości w tunelu aerodynamicznym. Oczywiście w trakcie takiego eksperymentu można określić prędkość krytyczną flatteru w sposób dokładny. Ponadto zauważyć można, że wyniki otrzymywane przy użyciu różnych wzorów dla tej samej konfiguracji modelu znacznie się od siebie różnią.

Porównując oszacowania z wynikami eksperymentalnymi można stwierdzić:

- W przypadku profilu nr 1 — wszystkie wzory przybliżone podały większe wartości prędkości krytycznej. Przeszacowanie było w przybliżeniu dwukrotne i dotyczyło drugiego przedziału $f_\alpha/f_y > 1,15$. Natomiast w przedziale pierwszym $f_\alpha/f_y < 1,15$ flatteru nie uzyskano, mimo że wg oszacowań powinien wystąpić przy prędkościach przepływu mniejszych od 15 m/s .

- W przypadku profilu nr 2  najdokładniejszy okazał się wzór Bachmanna i Xiang, ale tylko w przedziale drugim. Natomiast na początku przedziału pierwszego wyniki laboratoryjne zbliżyły się do oszacowań wg wzoru Debreceny.
- W przypadku profilu nr 3  w przedziale drugim stosować można wzór Bachmanna dający bezpieczne oszacowanie od dołu. Pozostałe wzory przeszacowują wartość prędkości krytycznej.
- Dla profilu nr 4  współczynniki kształtu wzorów Bachmanna oraz Xiang zostały dobrane w przedziale drugim na podstawie własnych badań. Z tego powodu tutaj uzyskane wyniki są zbieżne z eksperymentem. Jednak mimo to formuły nie mogą być stosowane w przedziale pierwszym. Natomiast zastosowanie wzoru Debreceny nie prowadzi do zadowalających rezultatów.

Podsumowując należy stwierdzić, że oszacowanie prędkości krytycznej flatteru za pomocą znanych z literatury branżowej formuł przybliżonych wiąże się z ryzykiem popełnienia dużego błędu i z tego powodu powinno być odradzane.

7.2.10. Wzory własne

Na podstawie wyników własnych oraz po wykonaniu analizy wzorów empirycznych można zauważyć, że podanie prostych wzorów empirycznych na prędkość krytyczną flatteru jest możliwe jedynie dla $f_\alpha/f_y > 1,15$. Zauważyć można także, że w obszarze tym zależności:

$$V_c^f = f_v \left(\frac{f_\alpha}{f_y} \right), \quad (7.36)$$

$$f_f = f_f \left(\frac{f_\alpha}{f_y} \right) \quad (7.37)$$

mogą być traktowane w przybliżeniu jako liniowe przy ustalonym poziomie tłumienia. Ponadto wpływ kształtu w tym przedziale staje się mniej znaczący, co przekłada się na możliwość zastosowanie jednego parametru do jego opisu.

Natomiast w obszarze $0 < f_\alpha/f_y < 1,15$ podanie formuły przybliżonej jest o wiele trudniejsze. Na pewno nie są to zależności liniowe i wydaje się, że wpływ kształtu nie może być tutaj opisany za pomocą jednego parametru. Uznano, że zebrany materiał badawczy jest zbyt skromny, aby na jego podstawie szukać takich zależności.

Podstawą do poszukiwań wzorów empirycznych na prędkość krytyczną flatteru oraz na jego dominującą częstotliwość jest analiza wymiarowa, której wynikiem są związki (7.24) oraz (7.25). Zależności te w przedziale

$f_\alpha / f_y > 1,15$, przy ustalonym poziomie tłumienia, będą poszukiwane w postaci bezwymiarowej jako liniowe:

$$\bar{V}_1 = \alpha_V \frac{f_\alpha}{f_y} + \beta_V, \quad (7.38)$$

$$\frac{f_f}{f_y} = \alpha_f \frac{f_\alpha}{f_y} + \beta_f, \quad (7.39)$$

gdzie jak poprzednio $\bar{V}_1 = \frac{V_1}{f_y \cdot B}$ jest bezwymiarową prędkością krytyczną flatteru, zaś $\alpha_V, \beta_V, \alpha_f, \beta_f$ to poszukiwane parametry funkcji liniowych.

Uznano, że współczynniki $\alpha_V, \alpha_f, \beta_f$ mogą zostać uniezależnione od kształtu poprzecznego przekroju i poziomu tłumienia. Natomiast parametr β_V będzie opisywał kształt oraz będzie zależał od poziomu tłumienia. Współczynniki zostały wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów. Ostatecznie otrzymano wyniki:

$$\bar{V}_1 = 5,4 \frac{f_\alpha}{f_y} + A, \quad (7.40)$$

$$\frac{f_f}{f_y} = 0,74 \frac{f_\alpha}{f_y} + 0,27, \quad (7.41)$$

gdzie wartość parametru A podaje tabela 15.

Proponuje się zapisanie wzoru (7.41) w bardziej atrakcyjnej formie i nazwanie go „wzorem trzech czwartych”:





$$f_f = \frac{3}{4} f_\alpha + \frac{1}{4} f_y. \quad (7.42)$$

Zaś formuła (7.40) może być podana również w formie wymiarowej:

$$V_1 = (5,4 \cdot f_\alpha + A \cdot f_y) B, \quad (7.43)$$

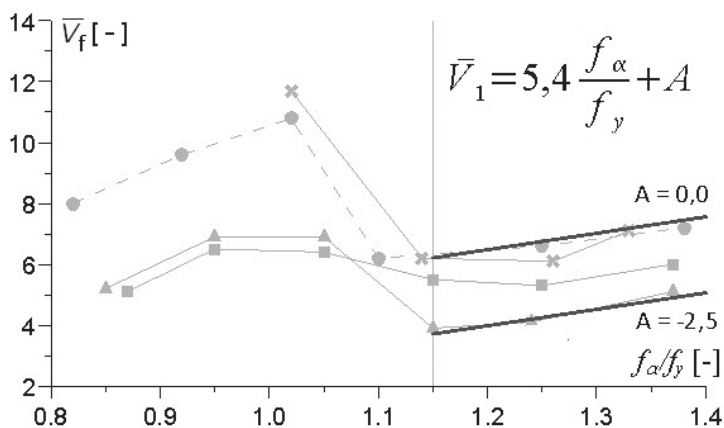
gdzie B jest szerokością pomostu.

Tabela 15. Wartość parametru A dla wzoru (7.40)

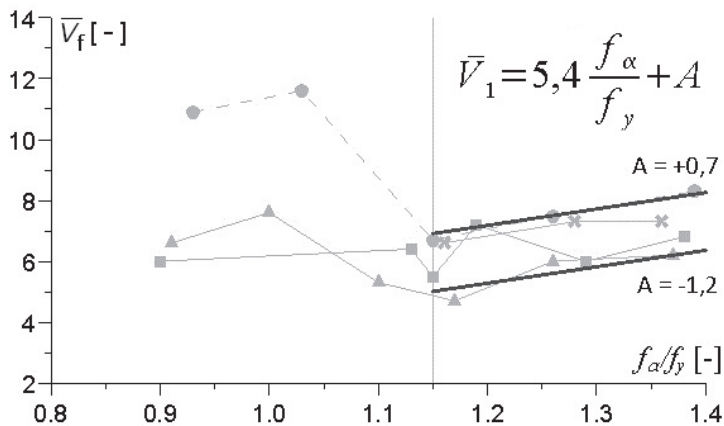
Poziom tłumienia	1 	2 	3 	4 
-	- 0,3	- 2,5	- 1,2	0,0
Tłumiki C	+ 0,3	- 1,2	- 0,1	+ 0,7

Źródło: opracowanie własne

Zaproponowane wzory mają prostą budowę. Częstotliwość flatteru określona jest jedynie na podstawie charakterystyk zawieszenia. Natomiast działanie parametry A jest wyjątkowo oczywiste, tzn. większa wartość tego parametry prowadzi do większej wartości wyniku w sposób liniowy. Wykresy od 42 do 45 weryfikują w czytelny sposób dokładność zaproponowanych wzorów przybliżonych.

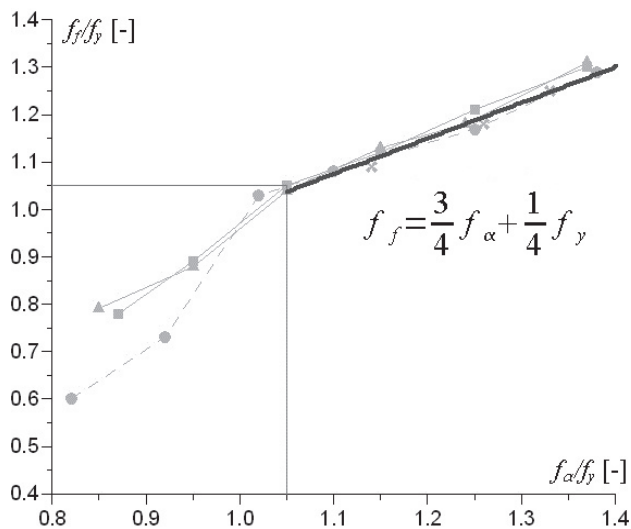


Wykres 42. Wzór przybliżony na bezwymiarową prędkość krytyczną flatteru skonfrontowany z wynikami eksperymentalnymi uzyskanymi na modelach bez tłumików C

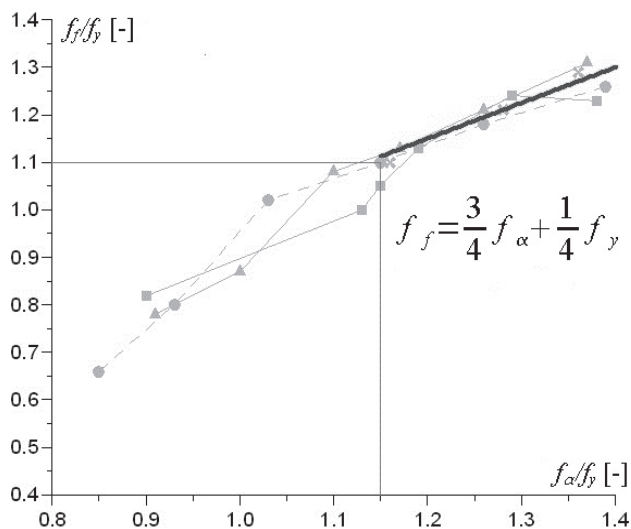


Wykres 43. Wzór przybliżony na bezwymiarową prędkość krytyczną flatteru skonfrontowany z wynikami eksperymentalnymi uzyskanymi na modelach z tłumikami C

Źródło 42-43: opracowanie własne



Wykres 44. Wzór przybliżony na dominującą częstotliwość flatteru skonfrontowany z wynikami eksperymentalnymi uzyskanymi na modelach bez tłumików C

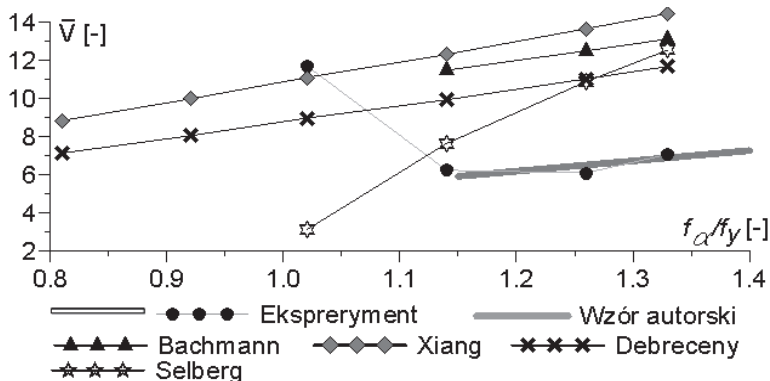


Wykres 45. Wzór przybliżony na dominującą częstotliwość flatteru skonfrontowany z wynikami eksperymentalnymi uzyskanymi na modelach z tłumikami C

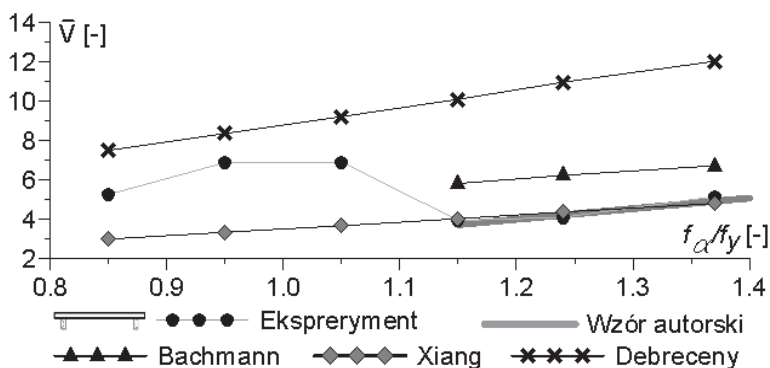
Źródło: opracowanie własne

7.2.11. Porównanie wzorów przybliżonych

Wykresy od 46 do 53 porównują w formie bezwymiarowej rezultaty formuły autorskiej z wzorami innych autorów. Zestawienie takie podkreśla trafność zaproponowanego rozwiązania.

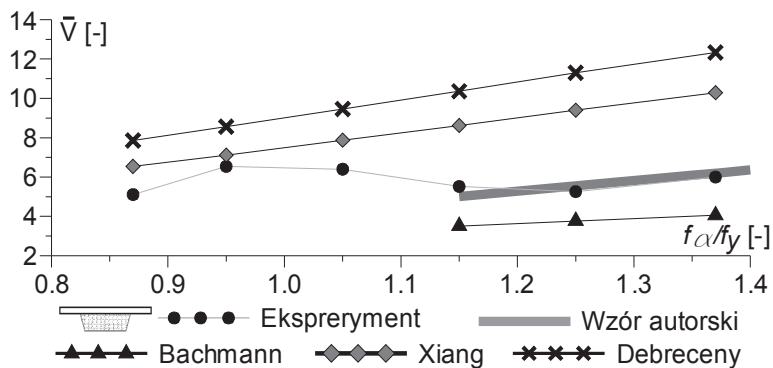


Wykres 46. Profil nr 1 – wariant bez tłumików C

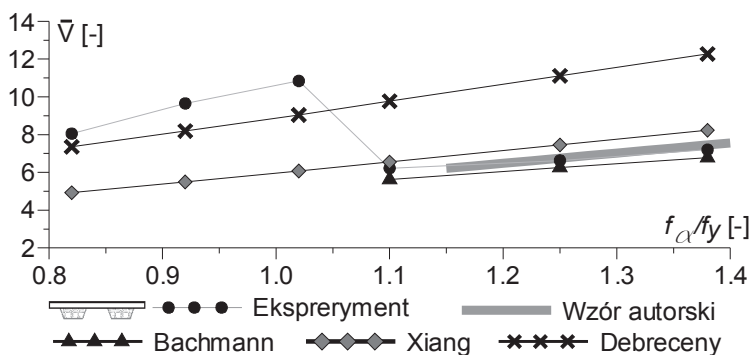


Wykres 47. Profil nr 2 – wariant bez tłumików C

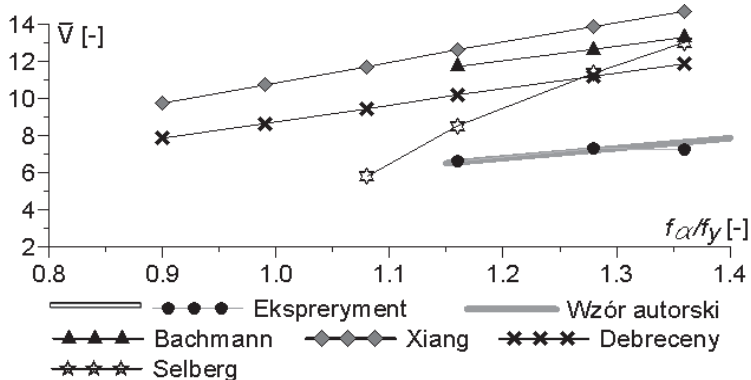
Źródło 46-47: opracowanie własne



Wykres 48. Profil nr 3 – wariant bez tłumików C

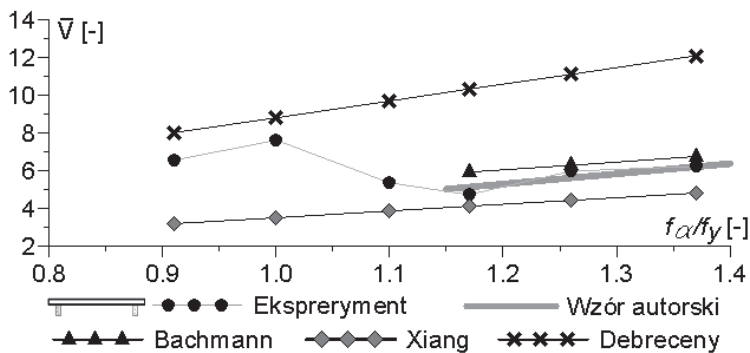


Wykres 49. Profil nr 4 – wariant bez tłumików C

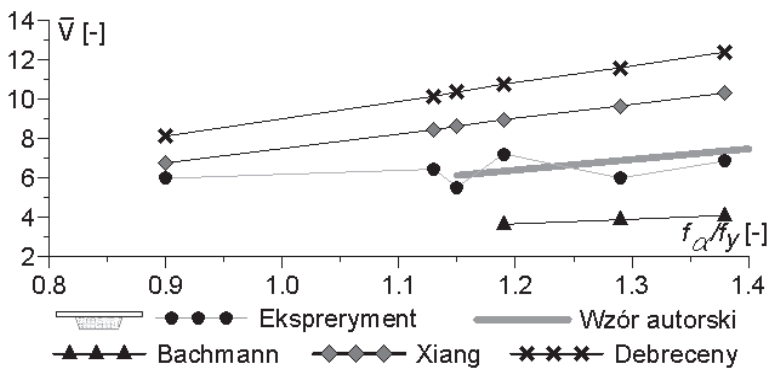


Wykres 50. Profil nr 1 – wariant z tłumikami C

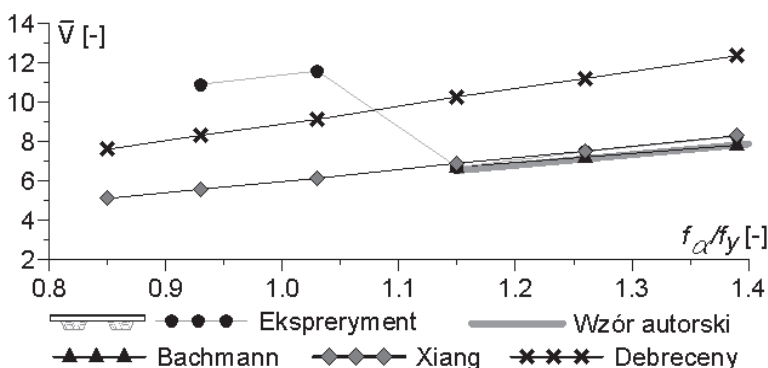
Źródło: 48-50: opracowanie własne



Wykres 51. Profil nr 2 – wariant z tłumikami C



Wykres 52. Profil nr 3 – wariant z tłumikami C



Wykres 53. Profil nr 4 – wariant z tłumikami C

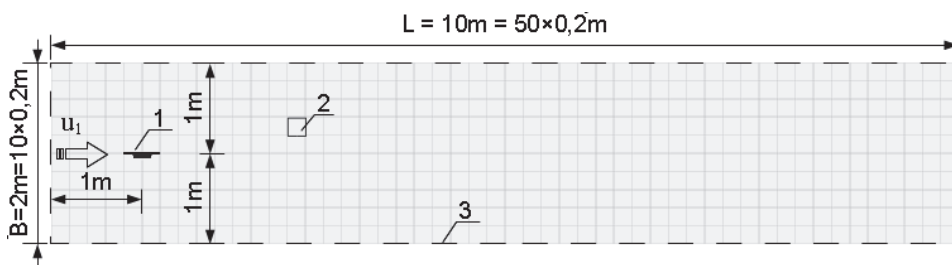
Źródło 51-53: opracowanie własne

8. Badania autorskie – symulacje komputerowe

Rozdział dotyczy symulacji komputerowych przeprowadzonych metodą wirów dyskretnych przy użyciu własnego programu komputerowego VIR2D. Obliczenia numeryczne zostały wykonane w 2 wariantach metody: DVM A oraz DVM B. Metoda A to wersja metody wirów dyskretnych najczęściej opisywana w literaturze przedmiotu. Natomiast wersja B to realizacja wariantu uproszczonego. W obliczeniach odtworzono wszystkie konfiguracje modelu laboratoryjnego w obu wariantach. Wyniki eksperymentu w tunelu aerodynamicznym posłużyły do weryfikacji rezultatów obliczeń numerycznych.

8.1. Scenariusz obliczeniowy

8.1.1. Konfiguracja programu obliczeniowego



Rysunek 81. Domena obliczeniowa: 1 – model komputerowy; 2 – przykładowa komórka; 3 – otwarte granice domeny; u_1 – prędkość strumienia globalnego

Źródło: opracowanie własne

Wszystkie symulacje komputerowe zostały przeprowadzone w jednolity sposób. Prostokątna domena obliczeniowa o wymiarach $L=10m$, $B=2m$ została podzielona na 500 kwadratowych komórek o bokach $0,2m \times 0,2m$ (Rysunek 81). Oznaczało to podział długości domeny na 50 odcinków, zaś wysokości na 10. Globalny strumień napływu powietrza był jednakowy w całej domenie. Przepływ „komputerowy” przebiegał od lewej do prawej strony. Środek modelu w chwili początkowej położony był w połowie wysokości obszaru obliczeniowego, tzn. w odległości $1m$ od każdego boku poziomego oraz w odległości $1m$ od krawędzi napływu. Boki domeny nie były ograniczone, co oznaczało, że wiry dyskretne mogły opuścić obszar przekraczając dowolną krawędź.

Symulacje pokrywała czas przepływu $30s$ w trakcie którego prędkość strumienia globalnego u_1 narastała z przyspieszeniem $0,2m/s^2$ od wartości początkowej $2m/s$ aż do $8m/s$. W związku z tym przepływy charakteryzowały wartości liczby Reynoldsa z przedziału $Re=(5,3 \div 21,3) \cdot 10^4$. Przyjęto krok czasowy $\Delta t=0,01s$, co oznaczało konieczność przeprowadzenia 3000 kroków obliczeniowych. W obliczeniach użyto następujących wartości parametrów powietrza: gęstość $\rho=1,21kg/m^3$, lepkość kinematyczna $\nu=1,5 \cdot 10^{-5}m^2/s$, lepkość dynamiczna $\mu=\nu \cdot \rho=1,8 \cdot 10^{-5}Pa \cdot s$. Wartość przyspieszenia ziemskiego wynosiła $g=9,81m/s^2$. Nie wpływała ona jednak na przebieg symulacji, ponieważ w początkowym położeniu modelu siła ciężkości była zrównoważona, podobnie jak w modelu laboratoryjnym. Długość paneli rozłożonych na obwodzie ciała wynosiła $\Delta s=0,005m$. Oznaczało to, że użyto odpowiednio $168, 176, 182, 184$ paneli do opisu profili $1, 2, 3, 4$.

Bezwymiarowy parametr kroku wynosił:

$$S_D = \frac{\Delta t \cdot u_1}{\Delta s} = \frac{0,01s \cdot (2 \div 8)m/s}{0,005m} = 4 \div 16 \quad (8.1)$$

i mieścił się w zalecanych granicach, tj. od 1 do 20 .

Zastosowano jądro Rankine-a o rozmiarze $\varepsilon=0,001m$, co oznaczało, że w obrębie panela zawsze zmieści się jądro wiru:

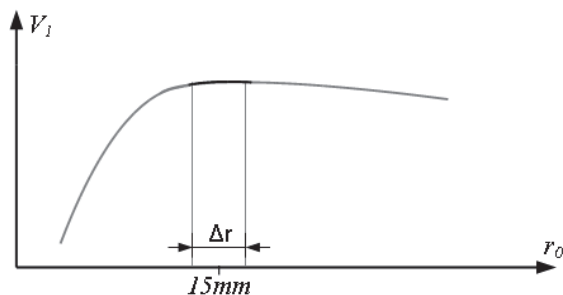
$$\frac{\Delta s}{\varepsilon} = \frac{0,005m}{0,001m} = 5.$$

Krok konwekcyjny wykonywany był z dokładnością rzędu 2 . Przyjęto, że dystans indukcji grupowej wynosi $1m$, co wynosiło pięciokrotność wymiaru celi. Zastosowano pierwszych 7 wartości momentów wirowych.

8.1.2. Kalibracja modelu dyfuzji

W celu zrealizowania dyfuzji metodą ruchów losowych użyty został standardowy generator standardowo dostępny w standardowej bibliotece języka C++. Natomiast model autorski dyfuzji musiał zostać skalibrowany w drodze testów. Wpływ parametru metody r_0 na uzyskiwany wynik został schematycznie przedstawiony na wykresie 45.

Przeprowadzone testy wykazały, że zmiana wartości parametru r_0 wpływa na uzyskiwaną wartość startową prędkości V_1 . Ustalono, że najwyższe wartości tej prędkości uzyskuje się dla $r_0 \approx 15mm$. Ponieważ w otoczeniu punktu ekstremalnego istniał zawsze odcinek płaski krzywej o szerokości Δr od $10mm$ do $25mm$, uznano że nie jest celowe wyznaczanie za każdym razem wartości dokładnej. We wszystkich symulacjach zastosowaną jedną wartość $r_0=15mm$.



Wykres 45. Wpływ zmiany parametru r_0 metody deterministycznej na uzyskiwany wynik prędkości startowej flatteru

Źródło: opracowanie własne

Komentarza wymaga kształt krzywej z wykresu 45. Uzyskiwanie wartości V_1 mniejszych dla $r_0 < 15\text{mm} - \Delta r/2$ wiązało się z wystąpieniem większych sił działających na ciało. Siły te wyznaczone były bezpośrednio z dystrybucji ciśnień, które wynikały z dystrybucji wirowości. Dla małych wartości parametru r_0 wirowość w przepływie w niedużej odległości od ciała zanikała szybko, co w konsekwencji prowadziło do generacji dużych wirów na powierzchni ciała, które musiały „znosić” przepływ globalny. Innymi słowy ciało nie było „osłonięte” przez chmurę wirową. Uzyskiwanie wartości mniejszych po przekroczeniu wartości optymalnej parametru $r_0 > 15\text{mm} + \Delta r/2$ wiązało się większym oddziaływaniem wirów dalszych z powodu niedostatecznej dyfuzji.

8.1.3. Program symulacji komputerowych

Celem symulacji komputerowych było odtworzenie sytuacji eksperymentu wykonanego w tunelu aerodynamicznym. Modele obliczeniowe miały takie same kształty i rozmiary jak modele laboratoryjne. Każdorazowo używane były dokładne parametry konfiguracji. Parametry podane w tabeli 2 oraz tabeli 3 należy traktować jako poglądowe, ponieważ nie zostały użyte w obliczeniach. Obliczenia przeprowadzone dla 48 konfiguracji opisanych w rozdziale 7. Dla każdej konfiguracji przeprowadzono dwie symulacje: DVM A oraz DVM B. Czas potrzebny do wykonania 1 symulacji komputerowej wynosił ok. 20 godzin. Oznaczało to, że wykonanie właściwej części badań oznaczało 80 *dób* pracy komputera PC. W większości przypadku konfiguracyjnych udało się w eksperymencie numerycznym uzyskać flatter. Zjawisko nie wystąpiło w przypadku profilu nr 1 w 3 pierwszych konfiguracjach. Wynik ten był zgodny z doświadczeniem w tunelu aerodynamicznym.

Komentarza wymaga również sposób przeniesienia parametrów zidentyfikowanych dla modelu przestrzennego o długości roboczej $L_r = 2,12\text{ m}$ (Rysunek 77) do przypadku ciała dwuwymiarowego w symulacjach komputerowych. W modelu płaskim metody wirów dyskretnych obliczenia wykonuje się w odniesieniu do jednostki długości ciała płaskiego. Wypadkowe siły działające na ciało również dotyczą długości jednostkowej. Konieczne jest zatem „dostrojenie” parametrów zawieszenia do sytuacji obliczeniowej. Możliwe jest sprowadzenie parametrów zawieszenia do jednostkowej długości roboczej modelu. Jednak w pracy przeliczono uzyskane siły wypadkowe tak, aby odpowiadały długości roboczej modelu rzeczywistego. Oznaczało to potraktowanie rozmiaru modelu rzeczywistego jako „jednostki długości”.

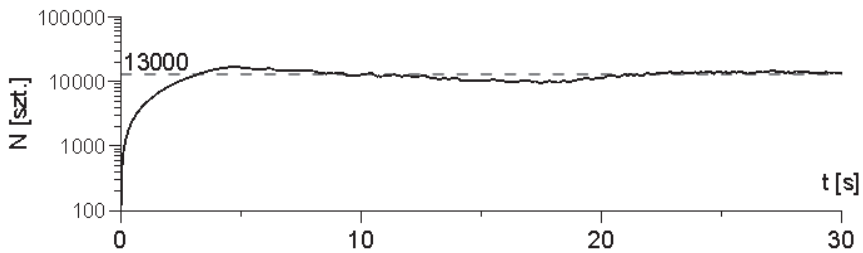
W symulacjach komputerowych nie udało się odtworzyć pełnego programu prędkości strumienia powietrza realizowanego w tunelu aerodynamicznym. Powodem był czas obliczeń. O ile 30s symulacji komputerowej zajmowało 20 godzin, to wydłużenie symulacji o kolejne 20s wymagało dodatkowo ponad 70 godzin. Przyrost ten był nieliniowy. Drugim problemem było zatrzymanie wzrostu prędkości strumienia powietrza. W tunelu punkt ten był określany wzrokowo, co nie było możliwe w programie komputerowym. W wyniku przeprowadzenia symulacji komputerowej otrzymano:

- rozkład dyskretnego pola wirowego,
- parametry ruchu ciała dla pionowego stopnia swobody: przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie oraz siłę wypadkową,
- parametry obrotowego ruchu ciała: przemieszczenie kątowe, prędkość i przyspieszenie kątowe oraz moment wypadkowy.

Analiza uzyskanych przebiegów pozwoliła zidentyfikować prędkość startową flatteru. Uznano, że start zjawiska będzie identyfikowany w jednolity sposób dla wszystkich konfiguracji z rozdzielczością do 1s według osi czasu. Uznano, że analizowane będą przebiegi przyspieszeń w ruchu pionowym, ponieważ takie kryterium zostało zastosowane w przypadku modelu laboratoryjnego. Ponadto zarejestrowane przebiegi pozwoliły na wyznaczenie dominującej częstotliwości flatteru.

8.2. Przebieg symulacji komputerowej

Omówiony tutaj przebieg symulacji komputerowej dotyczy tej samej konfiguracji modelu, która była szczegółowo omawiana w rozdziale 7.2.5. w odniesieniu do prac w tunelu aerodynamicznym. W tym przypadku zjawisko flatteru wystąpiło w 17s według czasu obliczeniowego. Oznaczało to osiągnięcie przez strumień globalny prędkości o wartości 5,4m/s wobec 6,08m/s otrzymanym w tunelu aerodynamicznym. W symulacji liczba wirów dyskretnych ustabilizowała się na poziomie ok. 13000 (Wykres 46.).

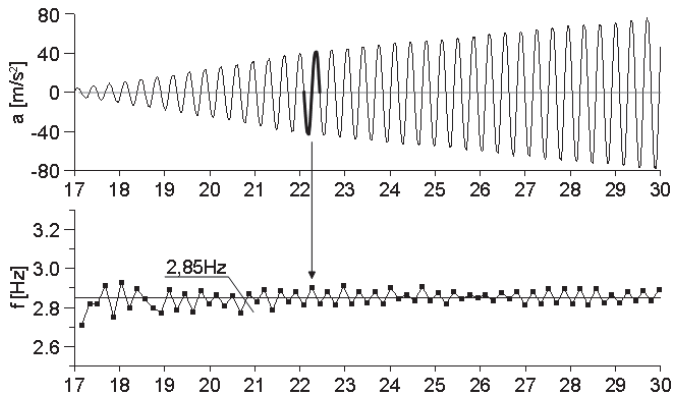


Wykres 46. Liczba wirów w trakcie symulacji

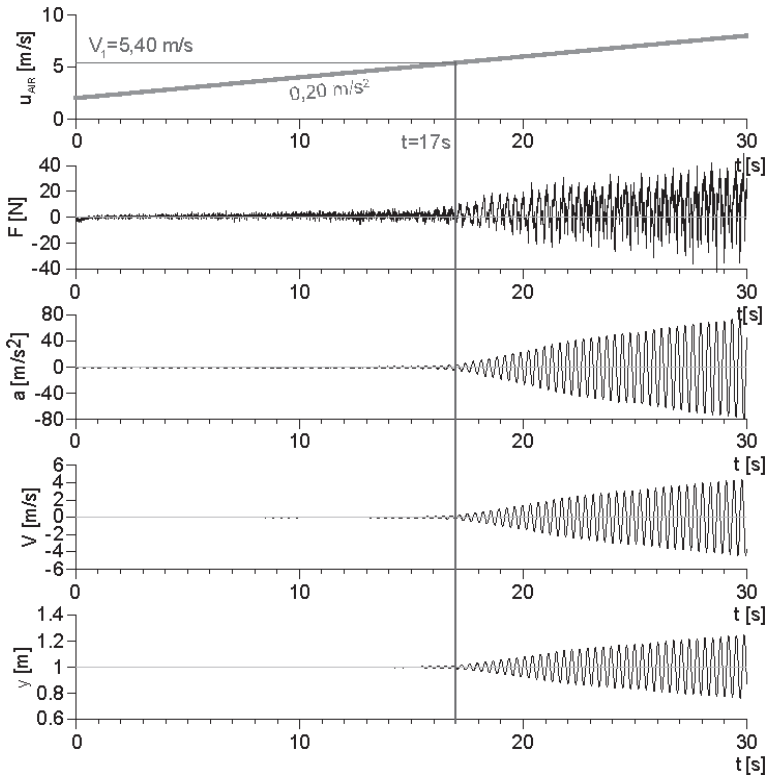
Źródło: opracowanie własne

Wykres 48 przedstawia odpowiedź aerodynamiczną modelu na pierwszym stopniu swobody (ruch pionowy). Amplituda siły wypadkowej działającej na model (o długości $2,12\text{ m}$) w tym przypadku dochodziła do wartości 40 N . Amplituda przyspieszeń osiągała wartości do 80 m/s^2 , prędkości do 5 m/s , a przemieszczenia dochodziły do $0,3\text{ m}$. W porównaniu z eksperymentem laboratoryjnym wartości przyspieszeń uzyskane w symulacjach komputerowych były ok. 2 razy większe. Wykres 49. pokazuje początkowy fragment sygnału w powiększonej skali. Wykresy 50. dotyczy obrotowego stopnia swobody. Wartość amplitudy wypadkowego momenty siły działającego na ciało dochodziła do wartości 7 Nm . Amplituda przyspieszenia kąowego osiągała wartość 40 rad/s^2 , a prędkości kąowa 2 rad/s . Maksymalne obroty modelu wokół położenia równowagi wynosiły $0,1\text{ rad} = 5,7^\circ$. Wykres 51. stanowi zbliżenie na początkowy fragment sygnału.

Przebiegi przyspieszenia w ruchu giętnym posłużyły do wyznaczenia dominującej częstotliwości flatteru. Częstotliwość tego sygnału stabilizowała się od chwili startu flatteru. Obliczenia częstotliwości wykonano w dziedzinie czasu (Wykres 47.). Natomiast rysunku 82 przedstawiono wizualizację przepływu w kolejnych chwilach czasowych. Kolorem zielonym oznaczone są wiry o cyrkulacji dodatniej (zgodnej z ruchem wskazówek zegara), natomiast czerwonym ujemne.

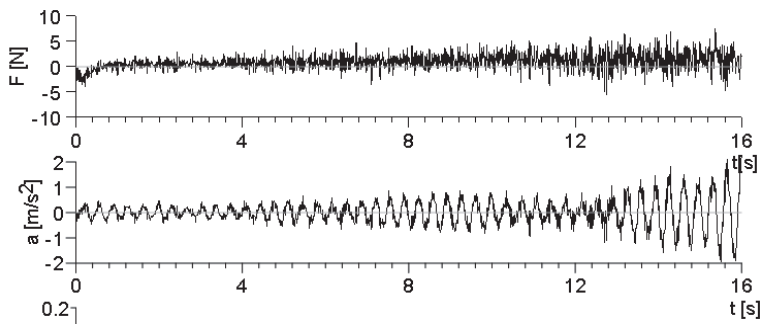


Wykres 47. Stabilizacja wartości dominującej częstotliwości flatteru

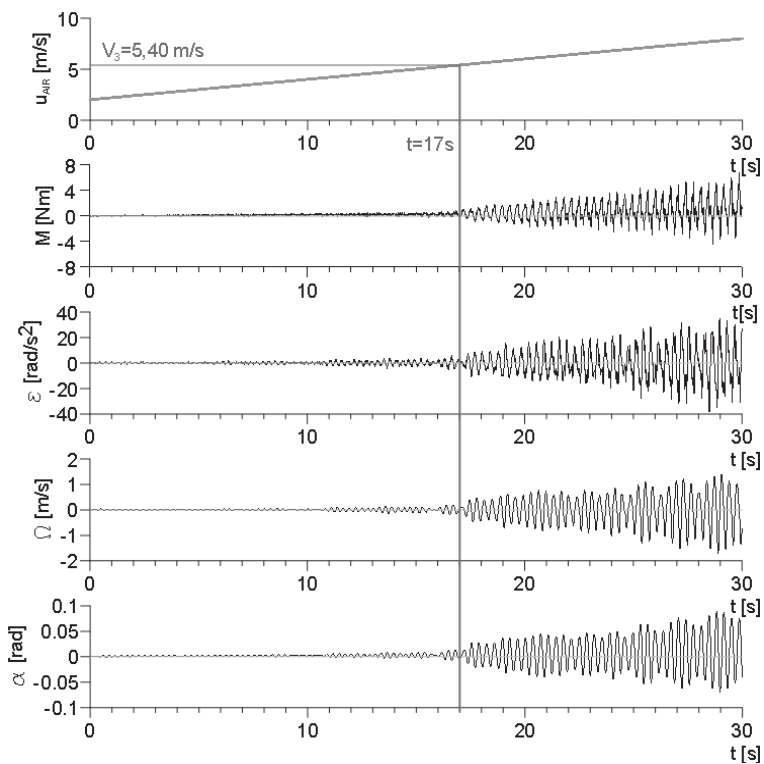


Wykres 48. Pełen przebieg symulacji komputerowej – ruch pionowy modelu

Źródło 47-48: opracowanie własne

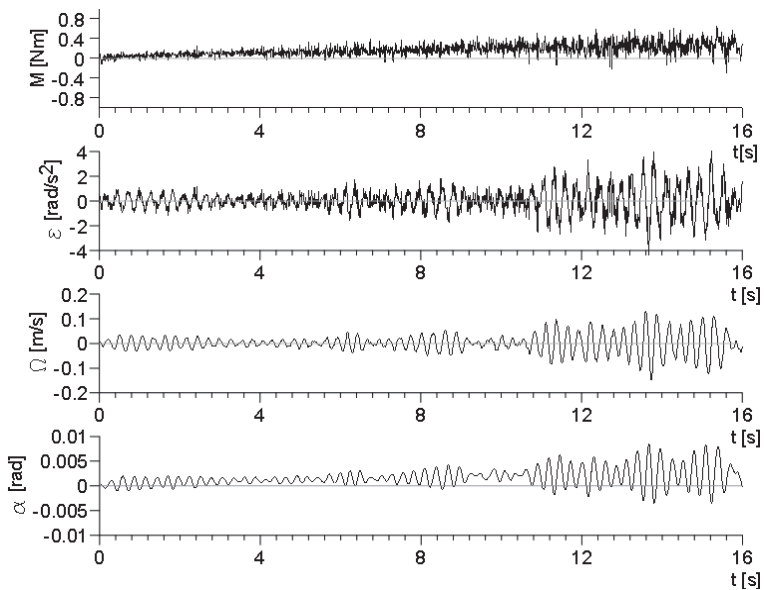


Wykres 49. Zbliżenie sygnału z wykresu 48.



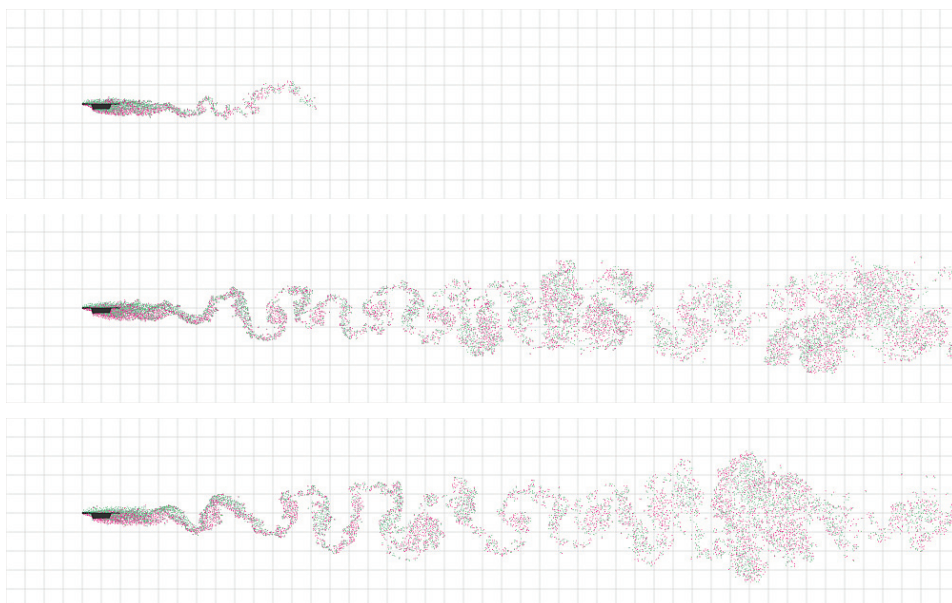
Wykres 50. Pełen przebieg symulacji komputerowej – obrót modelu

Źródło 49-50: opracowanie własne

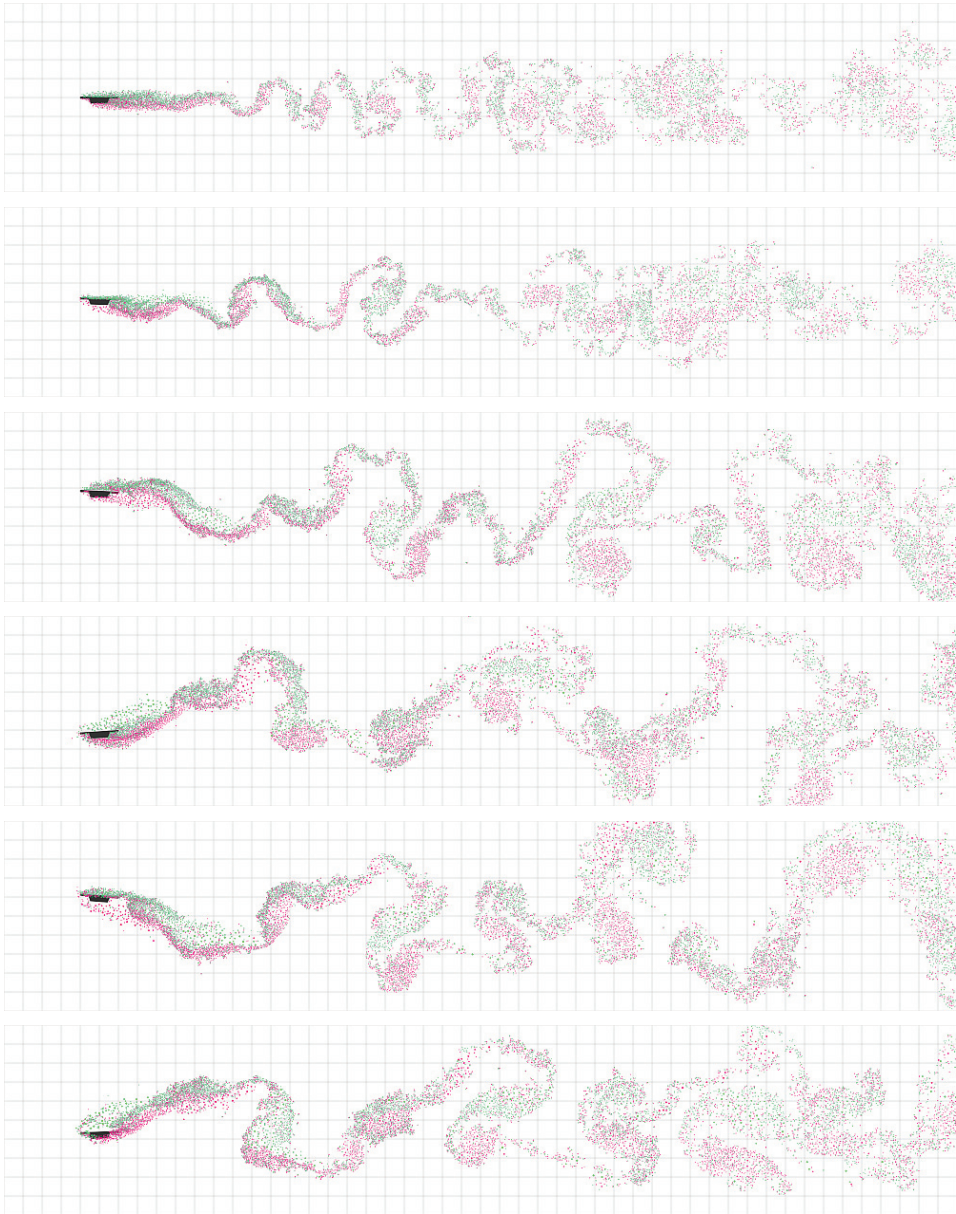


Wykres 51. Zbliżenie sygnału z wykresu 50

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 82. Ciąg dalszy na następnej stronie



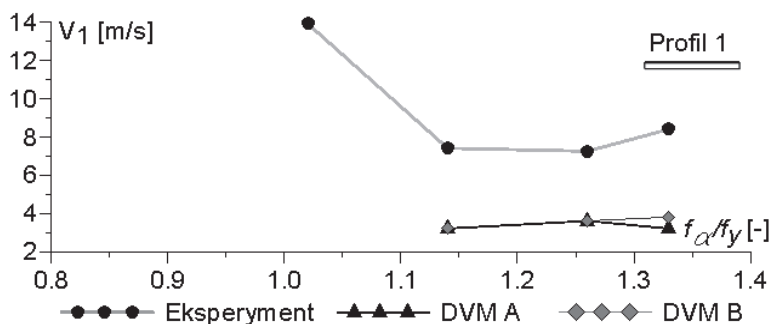
Rysunek 82 c.d. Wizualizacja przepływu w kolejnych chwilach czasowych: 1; 5; 10; 15; 20; 25; 29; 29,5; 30 sekund

Źródło: opracowanie własne

8.3. Wyniki symulacji komputerowych

Tabele od 16 do 19 oraz wykresy na od 52 do 59 zestawiają wyniki wszystkich przeprowadzonych symulacji komputerowych.

Konfrontacja wyników symulacji komputerowych z testami przeprowadzonymi w tunelu aerodynamicznym dotyczą prędkości startowej V_1 oraz dominującej częstotliwości flatteru f_f . Tak jak poprzednio wykresy sporządzono w dziedzinie f_α/f_y . Można stwierdzić, że w przypadku profilu nr 2 oraz przekroju nr 3 rezultaty numeryczne pokrywają się z laboratoryjnymi. Natomiast w przypadku profilu nr 1 oraz nr 2 wartości „komputerowe” są znacznie niższe. Pomimo to kształty krzywych numerycznej i eksperymentalnej są zbliżone do siebie. Na wykresach wyraźnie widać występowanie ekstremum w pierwszym obszarze flatteru, co jest zgodne z krzywymi eksperymentalnymi. Stwierdzamy również, że wyniki wersji metody DVM A i DVM B pokrywają się. Ponadto przebiegi odpowiedzi pomostu zobrazowany na wykresach 50 i 51 wyraźnie wykazują zakres drgań turbulentnych poprzedzający flatter. Koresponduje to z wiedzą ogólną na temat odpowiedzi aeroelastycznej pomostów. Nie udało się natomiast uzyskać poprawnych wartości dominującej częstotliwości flatteru. W symulacjach komputerowych częstotliwość zjawiska we wszystkich konfiguracjach była zbliżona do częstotliwości drgań własnych giętych. Próba wyjaśnienia tych rozbieżności jest tematem kolejnego rozdziału.



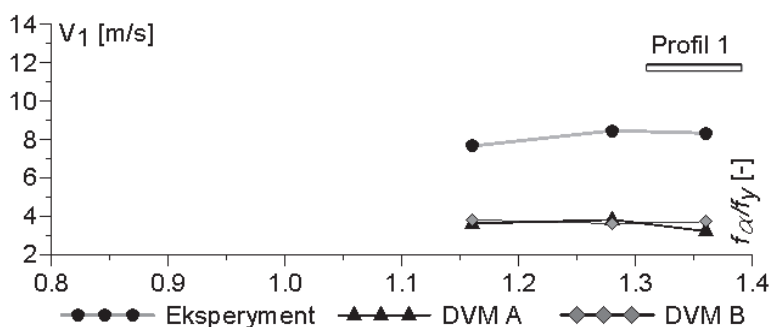
Wykres 52. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 1 bez tłumików C

Źródło: opracowanie własne

Tabela 16. Wyniki symulacji komputerowych - profil nr 1

Konfiguracja modelu	Eksperyment						DVM A			DVM B			
	d	f_y	f_α	$\frac{f_\alpha}{f_y}$	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]
	0,18	2,97	2,42	0,81	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	0,22	2,97	2,73	0,92	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	0,26	2,97	3,04	1,02	×	×	13,90	×	×	×	×	×	×
	0,30	2,97	3,37	1,14	3,24	1,09	7,40	2,91	0,98	3,20	2,92	0,98	3,20
	0,34	2,97	3,74	1,26	3,50	1,18	7,24	2,92	0,98	3,60	2,93	0,99	3,60
	0,38	2,97	3,96	1,33	3,69	1,25	8,39	2,92	0,98	3,20	2,93	0,99	3,80
Tłumiki C	0,18	2,88	2,59	0,90	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	0,22	2,88	2,85	0,99	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	0,26	2,88	3,11	1,08	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	0,30	2,89	3,37	1,16	3,18	1,10	7,64	2,91	1,01	3,60	2,92	1,01	3,80
	0,34	2,89	3,70	1,28	3,50	1,21	8,44	2,92	1,01	3,80	2,92	1,01	3,60
	0,38	2,86	3,88	1,36	3,69	1,29	8,31	2,92	1,02	3,20	2,92	1,02	3,70

Źródło: opracowanie własne



Wykres 53. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 1 z tłumikami C

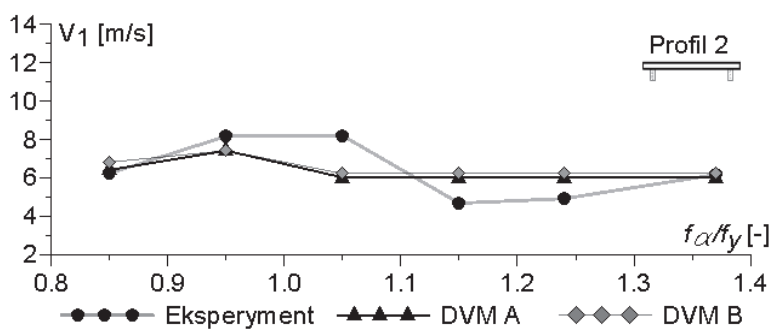
Źródło: opracowanie własne

Tabela 17: Wyniki symulacji komputerowych - profil nr 2

Konfiguracja modelu		Eksperyment					DVM A			DVM B		
d	f_y	f_α	$\frac{f_\alpha}{f_y}$	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1
[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]
0,18	2,97	2,53	0,85	2,35	0,79	6,22	2,94	0,99	6,40	2,94	0,99	6,80
0,22	2,97	2,82	0,95	2,60	0,88	8,15	2,91	0,98	7,40	2,95	0,99	7,40
0,26	2,97	3,11	1,05	3,10	1,04	8,17	2,85	0,96	6,00	2,86	0,96	6,20
0,30	2,97	3,41	1,15	3,36	1,13	4,66	2,89	0,97	6,00	2,91	0,98	6,20
0,34	3,00	3,74	1,24	3,56	1,18	4,90	2,94	0,98	6,00	2,95	0,98	6,20
0,38	3,00	4,10	1,37	3,94	1,31	6,15	2,94	0,98	6,00	2,95	0,98	6,20
0,18	2,97	2,71	0,91	2,32	0,78	7,77	2,94	0,99	6,80	2,92	0,98	7,00
0,22	2,93	2,93	1,00	2,56	0,87	8,92	2,90	0,99	7,60	2,90	0,99	7,40
0,26	2,86	3,15	1,10	3,09	1,08	6,11	2,83	0,99	6,40	2,85	1,00	6,40
0,30	2,93	3,44	1,17	3,31	1,13	5,52	2,89	0,99	6,60	2,90	0,99	6,80
0,34	2,93	3,70	1,26	3,55	1,21	6,99	2,93	1,00	6,20	2,94	1,00	6,40
0,38	2,93	4,03	1,37	3,85	1,31	7,29	2,93	1,00	6,20	2,95	1,01	6,40

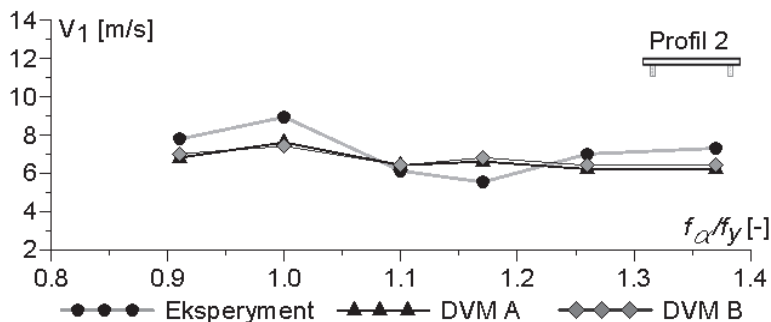
Tłumiki C

Źródło: opracowanie własne



Wykres 54. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 2 bez tłumików C

Źródło: opracowanie własne



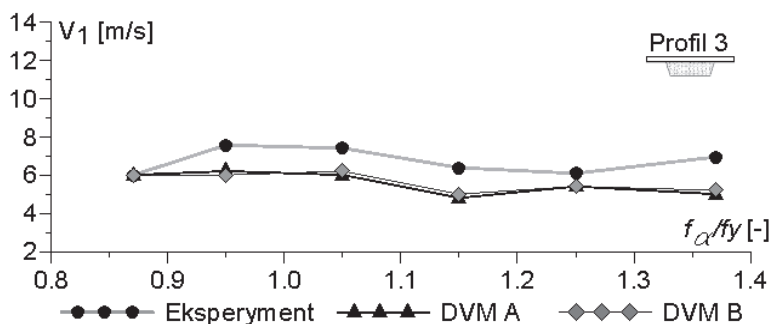
Wykres 55. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 2 z tłumikami C

Źródło: opracowanie własne

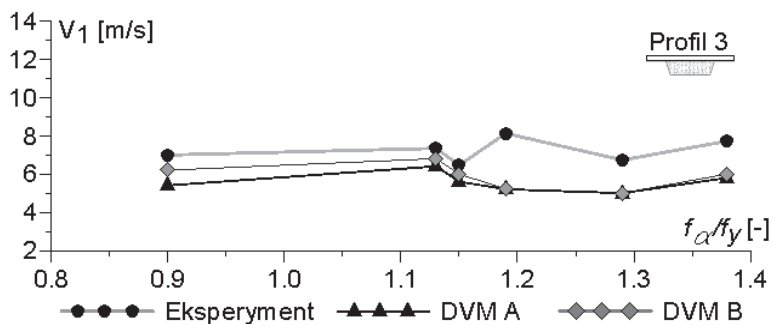
Tabela 18. Wyniki symulacji komputerowych - profil nr 3

	Konfiguracja modelu			Eksperyment			DVM A			DVM B			
	d	f_y	f_α	$\frac{f_\alpha}{f_y}$	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]
	0,18	2,93	2,56	0,87	2,28	0,78	5,99	2,89	0,99	6,00	2,91	0,99	6,00
	0,22	2,89	2,75	0,95	2,57	0,89	7,56	2,58	0,89	6,20	2,60	0,90	6,00
	0,26	2,89	3,04	1,05	3,03	1,05	7,40	2,80	0,97	6,00	2,79	0,97	6,20
	0,30	2,89	3,33	1,15	3,25	1,12	6,38	2,85	0,99	4,80	2,85	0,99	5,00
	0,34	2,89	3,63	1,25	3,49	1,21	6,08	2,85	0,99	5,40	2,86	0,99	5,40
	0,38	2,89	3,96	1,37	3,76	1,30	6,94	2,86	0,99	5,00	2,86	0,99	5,20
Tłumiki C	0,18	2,93	2,64	0,90	2,40	0,82	6,99	2,88	0,98	5,40	2,91	0,99	6,20
	0,22	2,86	3,22	1,13	2,86	1,00	7,34	2,58	0,90	6,40	2,57	0,90	6,80
	0,26	2,93	3,37	1,15	3,07	1,05	6,46	2,78	0,95	5,60	2,79	0,95	6,00
	0,30	2,82	3,37	1,19	3,19	1,13	8,12	2,84	1,01	5,20	2,85	1,01	5,20
	0,34	2,82	3,63	1,29	3,50	1,24	6,73	2,85	1,01	5,00	2,85	1,01	5,00
	0,38	2,82	3,88	1,38	3,48	1,23	7,72	2,86	1,10	5,80	2,86	1,01	6,00

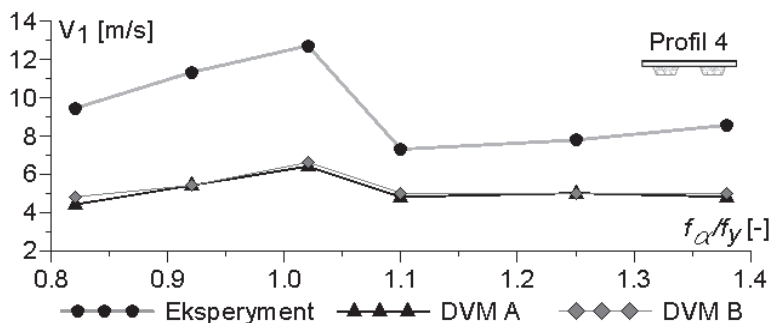
Źródło: opracowanie własne



Wykres 56. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 3 bez tłumików C



Wykres 57. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 3 z tłumikami C



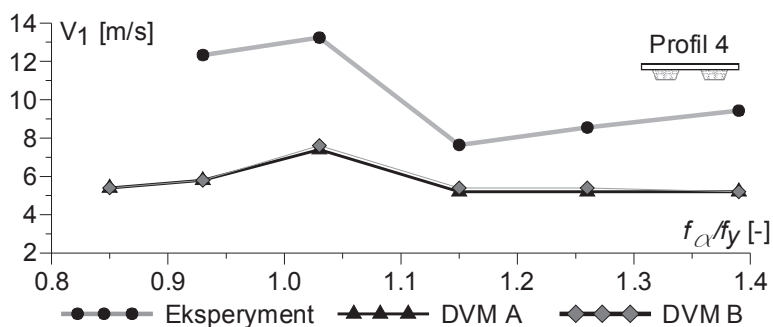
Wykres 58. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 4 bez tłumików C

Źródło 56-58: opracowanie własne

Tabela 19. Wyniki symulacji komputerowych - profil nr 4 

	Konfiguracja modelu			Eksperyment			DVM A			DVM B			
	d	f_y	f_α	$\frac{f_\alpha}{f_y}$	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1	f_f	$\frac{f_f}{f_y}$	V_1
	[m]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]	[Hz]	[-]	[m/s]
	0,18	2,93	2,42	0,82	1,75	0,60	9,43	2,89	0,99	4,40	2,89	0,99	4,80
	0,22	2,93	2,70	0,92	2,15	0,73	11,31	2,90	0,99	5,40	2,90	0,99	5,40
	0,26	2,93	2,98	1,02	3,03	1,03	12,70	2,78	0,95	6,40	2,77	0,95	6,60
	0,30	2,93	3,22	1,10	3,18	1,08	7,29	2,86	0,98	4,80	2,88	0,98	5,00
	0,34	2,93	3,66	1,25	3,44	1,17	7,77	2,88	0,98	5,00	2,89	0,99	5,00
	0,38	2,97	4,10	1,38	3,82	1,29	8,55	2,92	0,98	4,80	2,93	0,99	5,00
Tłumiki C	0,18	2,86	2,44	0,85	1,89	0,66	*	2,88	1,01	5,40	2,88	1,01	5,40
	0,22	2,83	2,64	0,93	2,28	0,80	12,33	2,89	1,02	5,80	2,89	1,02	5,80
	0,26	2,86	2,93	1,03	2,92	1,02	13,24	2,75	0,96	7,40	2,76	0,97	7,60
	0,30	2,86	3,30	1,15	3,14	1,10	7,64	2,85	1,00	5,20	2,86	1,00	5,40
	0,34	2,86	3,60	1,26	3,36	1,18	8,55	2,87	1,00	5,20	2,87	1,00	5,40
	0,38	2,86	3,97	1,39	3,61	1,26	9,43	2,91	1,02	5,20	2,91	1,02	5,20





Źródło: opracowanie własne



Wykres 59. Zestawienie wyników symulacji komputerowych z wynikami eksperymentu dla profilu nr 3 z tłumikami C



Źródło: opracowanie własne

8.4. Komentarz do badań komputerowych

Rezultaty symulacji komputerowych mogą być oceniane jako zadowalające. Jednak świadczą również o niedoskonałościach metody wirów dyskretnych. Dobrą zbieżność wyników otrzymano dla przekroi poprzecznych nr 2  oraz nr 3 . Natomiast w przypadku profili nr 1  oraz nr 4  wyniki obliczeń nie są odpowiednie. Sytuację taką z punktu widzenia badacza metody wirów dyskretnych można określić jako inspirującą, ponieważ zachęca do dalszych prac. Świadczy bowiem o tym, że metoda ma duże możliwości ujęcia turbulencji przepływu i jest bardzo atrakcyjna w porównaniu z metodami klasycznymi. Jednak dowiadujemy się również, że nie jest do końca poznana, więc otwiera szerokie pole do dalszych prac badawczych. Wobec tego dobór zestawu kształtów profili można uznać za udany. Na obecnym etapie badań nad metodą wirów dyskretnych autor może jedynie postawić hipotezy dotyczące rozbieżności wyników eksperymentalnych i numerycznych.

Jedną z możliwych przyczyn różnicy wyników jest sposób emisji warstwy brzegowej do przepływu. Możliwe jest, że oba modele emisji nie są odpowiednie dla ciał poruszających się. Domniemanie to jest oparte na obserwacji, że zjawisko flatteru w symulacjach komputerowych przebiega odmiennie niż w tunelu aerodynamicznym. Uzyskuje się wyższe wartości przyspieszeń modelu oraz nie stwierdza się zmiany częstotliwości flatteru przy zmianie konfiguracji modelu. Natomiast w przypadku modelu nieruchomego stwierdzono dobrą zgodność z eksperymentem.

Niezgodność uzyskanych rezultatów może być również wynikiem braku uwzględniania w symulacjach komputerowych turbulencji przepływu oraz ograniczeń domeny przepływu, co również przekłada się na zwiększenie turbulencji. W symulacjach komputerowych napływ nie jest turbulentny, natomiast w tunelu aerodynamicznym stwierdzono w pomiarach intensywność turbulencji na poziomie 5%. Ponadto przestrzeń robocza tunelu była ograniczona poprzez podłogę i sufit, co nie zostało odtworzone w modelu numerycznym.

W przypadku profilu nr 4  dolne bloki znajdują się w odległości porównywalnej z ich szerokością. Z całą pewnością zachodzi między nimi interferencja aerodynamiczna. Sytuacja taka nie ma miejsca w przypadku profilu nr 2 . Wskazuje to na potrzebę przeprowadzenia serii testów na odpowiednio dobranych przykładach w celu określenia czy w metodzie wirów dyskretnych zjawisko interferencji aerodynamicznej może być uzyskane w sposób poprawny.

Należy też rozważyć możliwość zwiększenia dokładności obliczeń poprzez zastosowanie paneli o większym rzędzie dokładności. W zrealizowanym programie komputerowym założono, że wirowość panel jest stała na ich długości. Natomiast możliwe jest zrealizowanie wersji z rozkładem liniowym lub kwadratowym.

Wymienione pomysły wymagają opracowania nowych modeli matematycznych symulowanych zjawisk, implementacji ich do programu komputerowego oraz wykonanie czasochłonnych testów. W ten sposób wyznaczają kierunki dalszych prac badawczych. Podsumowując można stwierdzić, że zrealizowana praca wnosi duży wkład w rozwój metody wirów dyskretnych, lecz z całą pewnością nie zamyka tego zagadnienia.

9. Wnioski końcowe

9.1. Podsumowanie

Zamiarem rozprawy było określenie wpływu warunków brzegowych na odpowiedź aeroelastyczną pomostów. W tym celu wykonano badania na modelach zarówno laboratoryjnych, jak i komputerowych. Wiązało się to z koniecznością zaprojektowania i przeprowadzenia eksperymentu w tunelu laboratoryjnym oraz opracowaniu autorskiego programu komputerowego. Obliczenia numeryczne wykonano w oparciu o nowatorską metodę wirów dyskretnych, która również stała się przedmiotem badań.

Wyniki prac laboratoryjnych wykazały, że kształt przekroju poprzecznego pomostu wpływa na jego odpowiedź aeroelastyczną. Udało się również wskazać obszar, w którym ten wpływ jest największy. Wyniki testów w tunelu aerodynamicznym wykazały, że najbardziej odpowiednim opisem zawieszenia pomostu w przepływie jest stosunek częstotliwości drgań własnych skrętnych do giętnych. Dla wartości tego parametru poniżej $1,15$ wpływ kształtu przekroju poprzecznego jest duży, natomiast powyżej tej wartości jego znacznie jest ograniczone. Odkrycie to stało się podstawą do zaproponowania autorskich wzorów empirycznych na prędkość startową oraz dominującą częstotliwość flatteru. Wzory te sformułowano w obszarze, w którym znaczenie kształtu profilu pomostu jest mniejsze. Natomiast w zakresie dużego wpływu kształtu przekroju poprzecznego przeprowadzone badania wykazały, że nieduże zmiany warunków brzegowych, tj. kształtu bądź parametrów zawieszenia, mogą prowadzić do dużej, a zatem trudnej do przewidzenia, zmiany w odpowiedzi aeroelastycznej obiektu.

Badania dotyczące metody wirów dyskretnych skupiały się głównie na wpływie sposobu realizacji emisji warstwy brzegowej na otrzymanywane wyniki symulacji komputerowych. Ponieważ realizacja warunku brzegowego w metodzie wirów dyskretnych jest ściśle związana z modelem dyfuzji, oba te zagadnienia potraktowano łącznie. W pracy zdecydowano się na implementację komputerową metody wirów dyskretnych bez użycia siatki. Zawężyło to zakres możliwych modeli emisji warstwy brzegowej. Ostatecznie zrealizowany został model losowy dyfuzji wraz z losowym modelem emisji warstwy brzegowej oraz uproszczony model deterministyczny obu zjawisk. Wyniki przeprowadzonych symulacji komputerowych wykazały, że w przypadku obu rozwiązań uzyskuje się podobne rezultaty. Można więc stwierdzić, że w obrębie rozpatrywanych zagadnień wpływ sposobu realizacji warunku brzegowego nie odgrywa istotnej roli. Dodatkowo stwierdzono, że obliczenia wykonywane metodą wirów dyskretnych są w stanie odtworzyć wpływ kształtu przekroju poprzecznego

i parametrów zawieszenia na odpowiedź aeroelastyczną pomostu. Pomimo braku pełnej zbieżności wyników obliczeń z rezultatami eksperymentalnymi, stwierdzić można, że model numeryczny potwierdził część obserwacji dokonanych w podczas prac eksperymentalnych.

Reasumując, udało się udowodnić prawdziwość tez postawionych w rozprawie. Natomiast uzyskane wyniki badań zarówno eksperymentalnych, jak i numerycznych z całą pewnością będą źródłem inspiracji kolejnych badań podejmowanych w podjętym temacie.

9.2. Potencjalne zastosowania praktyczne

Rozpatrzmy możliwość zastosowania wyprowadzonych wzorów empirycznych na prędkość startową oraz na dominującą częstotliwość flatteru. Wzory te mogą być stosowane w przypadku $f_{\alpha}/f_y > 1,15$. Tabela 20 przedstawia typowe obiekty mostowe zrealizowane w Polsce. Przyporządkowanie typu profilu do obiektu jest przybliżone.

Z przytoczonych przykładów wynika, że typowe obiekty mostowe znajdują się w drugim obszarze flatteru lub na granicy obszarów, gdzie mogą być stosowane zaproponowane wzory przybliżone (7.40) (7.42) (7.43). Wyniki obliczeń według tych wzorów zostały zestawione w tabeli 21. Wartości parametry A - wobec braku wartości dokładnych - zostały przyjęte według tabeli 15, więc ich użycie jest raczej dyskusyjne. Otrzymane wartości prędkości startowych flatteru V_1 należy uważać za niedokładne. Jednak pomimo tego wartości otrzymane dla obiektów nr 2, 3 oraz 4 wydają się być racjonalne. Niestety autor nie dysponuje innym materiałem weryfikacyjnym niż informacja, że omawiane obiekty jak dotąd nie rozwinęły zjawiska flatteru. Wykonane obliczenia mają na celu jedynie ilustracje wykorzystania zaproponowanych wzorów na charakterystyki związane z flatterem. Nie zaleca posługiwać się nimi bezpośrednio w praktyce inżynierskiej zanim zostaną wykonane właściwe testy weryfikacyjne.







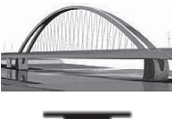
Natomiast inne wnioski ogólne mogą mieć natychmiastowe zastosowanie w praktyce. Analizując wykresy od 25 do 30 i uznając za najlepszy ten profil, dla którego flatter występuje przy największych wartościach prędkości strumienia powietrza, odradza się stosowanie kształtu nr 2 , a zaleca profil nr 4 . Warto zauważyć, że zalecenie to jest łatwe do zrealizowania praktycznego poprzez odpowiednią obudowę podłużnic znajdujących się pod pomostem. Tutaj należy również podkreślić fakt, że pozornie nieduża zmiana w kształcie przekroju poprzecznego, może znacznie zmieniać odpowiedź aerodynamiczną pomostu.

Tabela 20. Zestawienie częstotliwości drgań własnych rzeczywistych obiektów mostowych

Obiekt / Typ pomostu		B [m]	f_{α} [Hz]	f_y [Hz]	f_{α}/f_y [-]
1	Most dla pieszych w Piwnicznej 	1,6	0,68	0,59	1,15
2	Most dla pieszych w Tylmanowej 	3,5	2,14	1,47	1,46
3	Most Siekierkowski w Warszawie 	33,4	0,49	0,43	1,14
4	Most Jan Pawła II w Gdańsku 	20,3	0,66	0,41	1,61
5	Most Krasieńskiego w Warszawie 	42,0	0,49	0,43	1,14

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [6]





Kolejnym ważnym wnioskiem wynikającym z eksperymentu jest stwierdzenie, że nie zaleca się ekstrapolacji i interpolacji wyników odpowiedzi aeroelastycznej. W badaniach laboratoryjnych okazało się, że w przypadku profili nr 2  i nr 3  nastąpiło przecięcie się krzywych wykresów prędkości startowej flutteru. Oznacza to, że jeżeli dla ustalonych parametrów zawieszania jeden przekrój zostanie określony jako właściwszy, to przy innych wartościach tych parametrów wniosek ten może nie być prawdziwy. Warto też zwrócić uwagę, że przekroje nr 1  oraz nr 3 , pomimo łatwo dostrzegalnych różnic w kształcie wykazują podobne właściwości aeroelastyczne w drugim przedziale flutteru. Natomiast pozornie niewiele różniące się kształtem profile nr 1 oraz nr 2 wykazują zupełnie inne właściwości.

Tabela 21. Prędkość krytyczna i dominująca częstotliwość flutteru – oszacowanie wg empirycznych wzorów autorskich

Obiekt	A [-]	\bar{V}_1 [-]	V_1 [m/s]	V_1 [km/h]	f_f [Hz]
1	-0,3	5,9	5,6	20,1	0,66
2	-0,3	7,6	38,9	140,0	1,97
3	-2,5	3,7	52,5	188,9	0,48
4	-2,5	6,2	51,5	185,6	0,60
5	-1,2	5,0	89,5	322,1	0,48

Źródło: opracowanie własne

Analiza dostępnych przybliżonych wzorów na prędkość krytyczną flutteru, dostępnych w literaturze branżowej, i zestawienie ich wyników z rezultatami eksperymentu prowadzi do konkluzji, że powinny być one używane z dużą ostrożnością. Bowiern, żaden z nich nie został oceniony jako wiarygodny.

Metoda wirów dyskretnych na obecnym etapie rozwoju może być określana jako obiecujące narzędzie inżynierii wiatrowej. Wydaje się możliwe, że w przyszłości może ona wyprzeć metody klasyczne w pewnej grupie problemów inżynierskich. Obecnie jednak nie zaleca się, aby wynik symulacji komputerowych DVM stanowiły główne narzędzie analiz inżynierskich. Natomiast z całą pewnością można rekomendować tą metodę do dalszych prac akademickich. Praktycznym wnioskiem dla osób programujących wynikającym z rozprawy jest wskazówka, że w metodzie wirów dyskretnych sposób emisji warstwy brzegowej jak i sposób realizacji kroku dyfuzyjnego nie wpływa w istotny sposób na wyniki symulacji.

Bibliografia

Pozycje książkowe polskojęzyczne

- [1] Flaga A., *Inżynieria wiatrowa podstawy i zastosowania*, Arkady, Warszawa 2008
- [2] Brown D. J., *Mosty trzy tysiące lat zmagają z naturą*, Arkady, Warszawa 2007
- [3] Gumuła S., Knap T., Strzelczyk P., Szczerba Z., *Energetyka wiatrowa*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo–Dydaktyczne, Kraków 2006
- [4] Biliszczuk J., *Mosty podwieszane. Projektowanie i realizacja*, Arkady, Warszawa 2005
- [5] Materiały Seminaryjne, *Wrocławskie dni mostowe. Mosty podwieszane i wiszące*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2005
- [6] Flaga A. Błazik–Borowa E. Podgórski J., *Aerodynamika Smukłych budowli i konstrukcji prętowo–ciągnowych*, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 2004
- [7] Jarominiak A., *Mosty podwieszane*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1997
- [8] Bukowski J., Kijkowski P., *Kurs mechaniki płynów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980
- [9] Karaśkiewicz E., *Zarys teorii wektorów i tensorów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976
- [10] Prosnak W. J., *Mechanika płynów tom II. Dynamika gazów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971
- [11] Prosnak W. J., *Mechanika płynów tom I. Statyka płynów i dynamika cieczy*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970
- [12] Scanlan R., Rosenbaum R., *Drgania i flatter samolotów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964

Pozycje książkowe anglojęzyczne

- [13] Cottet G.H. Koumoutsakos P.D., *Vortex Methods Theory and Practice*, Cambridge University Press, Cambridge 2000
- [14] Bathe K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 1996
- [15] Lewis R.I., *Vortex element methods for fluid dynamic*, Cambridge University Press, Cambridge 1991
- [16] Anderson J. D., *Computational Fluid Dynamics. The Basics with Applications*, McGraw Hill, Inc., New York 1995
- [17] Anderson J. D., *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw Hill Book Company, New York 1988
- [18] Kuethe A. M., *Foundations of Aerodynamics*, John Wiley & Sons, Inc.,

New York 1988

- [19] Fletcher C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1. Fundamental and General Techniques*, Springer – Verlag, New York 1988
- [20] Fletcher C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2. Specific Techniques for Different Flow Categories*, Springer – Verlag, New York 1988
- [21] Vertes G., *Structural Dynamics*, Akademiai Kiado , Budapest 1985
- [22] Hockney R. W., Eastwood J. W., *Computer Simulation Using Particles*, McGraw-Hill International Book Co., 1981
- [23] Simiu E., Scanlan R., H., *Wind Effects on Structures: an Introduction to Wind Engineering*, A Wiley – Interscience Publication John Wiley & Sons, New York 1978

Artykuły w czasopismach anglojęzyczne

- [24] Nowicki T., Flaga A., *Relation between shape and the phenomenon of flutter for bridge deck-like bluff bodies*, Archives of Mechanics, Vol 63, No 2 (2011), 201 – 220
- [25] Nowicki T., Flaga A., *Empirical formulae frequency and onset velocity of flutter for typical bridge decks cross-sections*, Recent Advances in Research on Environmental Effects on Buildings and People, Polish Association for Wind Engineering, Cracow 2010
- [26] Nowicki T., *Survey of Applications of Discrete Vortex Method in Civil Engineering*, Budownictwo i Architektura, 5 (2) 2009, 29–38
- [27] T.Nowicki, J.Podgórski, S.Grzegórski, *Application of Low Cost Clusters to Overcome the n-body Problem in Discrete Vortex Method*, Environmental Effects on Buildings Structures, Materials and People, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2007
- [28] Larsen A., *Aerodynamics of the Tacoma Narrows Bridge – 60 Years Later*, Structural Engineering International 4/2000 (2000)
- [29] Taylor I.J., Vezza M., *Computation of Unsteady Wind Loading on Bluff Bodies Using a Discrete Vortex Method*, Wind and Structures, Vol. 2, No. 4 (1999) 285–303
- [30] Taylor I., Vezza M., *Prediction of Unsteady Flow Around Square and Rectangular Section Cylinders Using a Discrete Vortex Method*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 82 (1999) 247–269
- [31] Taylor I., Vezza M., *Calculation of the Flow Field Around a Square Section Cylinder Undergoing Forced Transverse Oscillations Using a Discrete Vortex Method*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 82 (1999) 271–291
- [32] Larsen A., Walther J. H., *Discrete Vortex Simulation of Flow Around Five Generic Bridge Deck Sections*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 77&78 (1998) 591–602
- [33] Beith J. G., *Rapid Interpretation of Aerodynamic Response for Long Span*

- Structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 77&78 (1998) 349–356
- [34] Larsen A., *Advances in Aeroelastic Analyses of Suspension and Cable–Stayed Bridges*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 74–76 (1998) 73–90
- [35] Steggel N., Rockliff N., *Simulation of the Effects of Body Shape on Lock–In characteristics in pulsating flow by the discrete vortex method*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 69–71 (1997) 217 – 329
- [36] Larsen A., Walther J. H., *Aeroelastic Analysis of Bridge Girder Sections Based on Discrete Vortex Simulations*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 67&68 (1997) 253– 265
- [37] Nagao F., Utsunomiya H., Murata S., *Improvement of Pitching Moment Estimation of an Oscillating Body by Discrete Vortex Method*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 67&68 (1997) 337 – 347
- [38] Walther J. H., Larsen A., *Two Dimensional Discrete Vortex Method for Application to Bluff Body Aerodynamics*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 67&68 (1997) 183–193
- [39] Bergstrom D. J., Wang J., *Discrete Vortex Model of Flow Over a Square Cylinder*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 67&68 (1997) 37– 49
- [40] Cottet G. H., *Artificial Viscosity Models for Vortex and Particle Methods*, Journal of Computational Physics 127, 299 – 308 (1996)
- [41] Shankar S. Dommelen L. , *A New Diffusion Procedure for Vortex Methods*, Journal of Computational Physics 127, 88 – 109 (1996)
- [42] Turkiyyah G., Reed D., Yang J., *Fast Vortex Methods for Predicting Wind–Induced Pressures on Buildings*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 58 (1995) 51 – 79
- [43] Larsen A., *A Generalized Model for Assessment of Vortex – Induced Vibrations of Flexible Structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 57 (1995) 281 – 294
- [44] Kim T., Flynn M. R., *Numerical Simulation of Air Flow Around Multiple Objects Using the Discrete Vortex Method*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 56 (1995) 213 – 234
- [45] Milivojević Z., *Digital Filter Design*, MikroElektronika Online Books [dostęp 1 października 2011], Dostępny w World Wide Web: www.mikroe.com