



Zintegrowany
Program
Rozwoju
Politechniki
Lubelskiej

Biurowisko Projektu:
ul. Nadbystrzycka 38H
20-618 Lublin

STEROWANIE W UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Workbook

Jacek Caban

Lublin, 2021

PROGRAM WIEDZA EDUKACJA ROZWÓJ



Rzeczpospolita
Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny





Zintegrowany
Program
Rozwoju
Politechniki
Lubelskiej

Biuro Projektu:
ul. Nadbystrzycka 38H
20 - 618 Lublin

Spis treści

1 Wprowadzenie	2
2 Reprezentacja ruchu w przestrzeni	2
2.1 Translacja i obrót	3
2.2 Zmiana układu współrzędnych, macierz translacji	9
2.2.1 Przekształcenie współrzędnych pary kinematycznej	12
2.2.2 Macierz Denavita-Hartenberga	14
2.3 Pytania kontrolne	19
3 Zapis dynamiki układu w przestrzeni 3D	20
4 Stabilność, obserwowalność i sterowalność	23
4.1 Stabilność układów sterowania, teoria Lapunowa	23
4.2 Obserwowalność	25
4.3 Sterowalność	26
4.4 Pytania kontrolne	26
5 Wybrane zagadnienia sterowania	27
5.1 Sterowanie optymalne	27
5.2 Sterowanie w przestrzeni kartezjańskiej	30
5.3 Sterowanie modelem ślizgowym	32
5.4 Pytania kontrolne	33
6 Nieliniowe układy dynamiczne	34
6.1 Układy nieliniowe	34
6.2 Sterowanie nieliniowe manipulatora	35
7 Opis matematyczny, równania Newtona-Eurela i Lagrange'a	37
7.1 Równania Newtona-Eurela i Lagrange'a	37
7.2 Podsumowanie	39
7.3 Pytania kontrolne	39
8 Literatura	40

1 Wprowadzenie

Niniejsze opracowanie powstało z myślą o studentach kierunku Robotyzacja Procesów Wytwórczych realizowanego na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lubelskiej. Główne treści przedmiotu dotyczą technicznej realizacji ruchu w mechanizmach przestrzennych o strukturze łańcuchów kinematycznych otwartych, struktury, kinematyki i dynamiki manipulatorów i robotów przemysłowych. Ponadto zawiera wiedzę z zakresu współczesnych problemów teorii sterowania, matematycznego opisu kinematyki i dynamiki układów oraz ich transformacji. Struktura manipulatorów bada właściwości geometryczne mechanizmów. W kinematyce rozpatrywany jest ruch manipulatora, robota bez jego związku z siłami, natomiast dynamika opisuje ruch pod działaniem sił i obejmuje metody określania tych sił.

Głównym celem przedmiotu jest przekazanie wiedzy na temat wybranych współczesnych problemów teorii sterowania oraz doskonalenie umiejętności prowadzenia obliczeń numerycznych, w tym macierzowych w wybranym pakiecie obliczeniowym (Matlab lub Scilab) w ramach prowadzonych zajęć laboratoryjnych.

Workbook powstał w oparciu o odpowiednio dobraną literaturę zagadnień teorii mechanizmów i manipulatorów oraz sterowania, do zapoznania której zachęca jego Autor.

2 Reprezentacja ruchu w przestrzeni

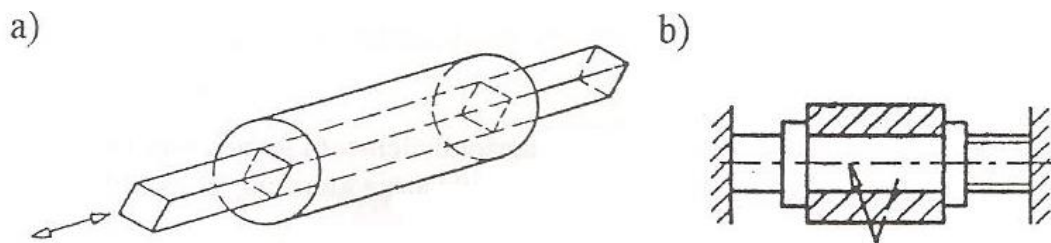
Człowiek jest powiązany przestrzennie, czasowo i funkcjonalnie z obiektem technicznym i tworzy element tegoż układu. W procesie użytkowania między środkiem technicznym a człowiekiem tworzą się więzi, dzięki którym powstaje układ antropotechniczny [19]. Układ antropotechniczny nie jest tylko prostym złożeniem człowieka i obiektu technicznego, lecz powstaje w wyniku celowego oddziaływania człowieka na środek techniczny [19]. Takim układem może być linia technologiczna na której maszyny i operatorzy maszyn, pracownicy realizują proces produkcyjny. Większość procesów technologicznych odbywa się w sposób zautomatyzowany i zrobotyzowany [3], człowiek odgrywa w nim rolę nadrzędną programując wszystkie funkcje maszyny i nadzorując ich pracę. Aby proces ten przebiegał prawidłowo musimy określić założenia i potrzeby oraz we właściwy sposób zidentyfikować obiekty w przestrzeni.

Przestrzeń i tory ruchu jednostki kinematycznej określa się w układzie osi współrzędnych zwanych układem odniesienia [18]. Układ osi współrzędnych związany ze strukturą jednostki kinematycznej stanowi układ maszyny. Podstawowy układ osi współrzędnych manipulatora to układ prostokątny o osiach x i z , leżących w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez ostatni zespół ruchu regionalnego, przy czym oś x jest równoległą do płaszczyzny podstawy mechanizmu. Zwroty ruchu dla ruchu liniowego i obrotowego przyjmuje się odpowiednio do kierunku na zewnątrz mechanizmu i w kierunku prawoskrętnym. Pozostałe układy osi współrzędnych są identyczne [18].

2.1 Translacja i obrót

W przestrzeni trójwymiarowej położenie ciała stałego jest określane przez podanie tzw. pozycji, czyli jego miejsca (położenia) w przestrzeni, określonego względem przyjętego układu współrzędnych, opisującego przestrzeń wokół robota [11]. Z mechaniki ciała stałego wiemy, że każde ciało ma sześć stopni swobody. Przemieszczenie ciała z jednego dowolnego położenia do drugiego może być zrealizowane za pomocą trzech przemieszczeń i trzech obrotów. Odpowiada to złożonemu ruchowi wzdłuż tzw. osi przesuwnych, charakteryzujących się ruchem posuwisto-zwrotnym (zwanym inaczej przesuwym) i osi rotacyjnych, realizujących ruch obrotowy [11]. Odpowiednio do tego, w zależności od rozwiązań mechanicznych, wyróżnia się osie łańcucha kinematycznego maszyny (manipulatora, robota) o możliwości realizowania ruchu (patrz rys. 1):

- liniowego (translacyjne) oznaczane jako P,
- obrotowego (rotacyjne) oznaczane jako O.

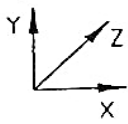
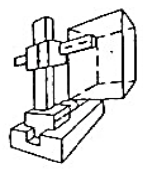
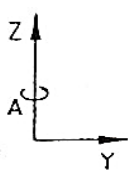
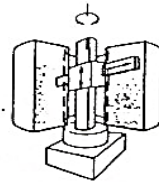
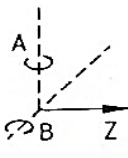
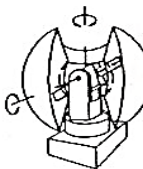
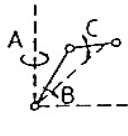
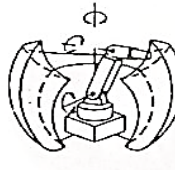
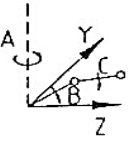
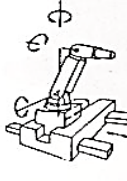


Rys. 1. Węzły łańcucha kinematycznego manipulatora: a – posuwisty (P), b – obrotowy (O) [11].

Kombinacja osi, realizujących te ruchy, umożliwia osiągnięcie dowolnych możliwości ruchowych robotów przemysłowych. Począwszy od pierwszego elementu mechanizmu łańcucha kinematycznego robota, tzn. podstawy stałej (określonej od podłoża), ruchy kolejnych ogniw łańcucha kinematycznego umożliwiają jego przemieszczenie w przestrzeni. Zmianie ulegać może liczba i typ (rodzaj) sterowanych osi robota. Właściwości kinematyczne robota zmieniają się wraz z kombinacją liczby i rodzaju osi (P – O), co w konsekwencji zmienia również rodzaj i kształt jego przestrzeni roboczej. Przestrzeń ruchu robota jest to przestrzeń wokół robota, w której może on realizować ruchy końcówki łańcucha kinematycznego nieuzbrojonej (tj. kiści) lub uzbrojonej (w narzędzie technologiczne lub chwytak). Podstawowym układem współrzędnych, opisujących tę przestrzeń, jest najczęściej prawoskrętny układ kartezjański. Układ taki, ze względów praktycznych, jest również podstawowym układem służącym do opisu ruchu robota w jego programie pracy [11]. Przykłady rodzajów przestrzeni roboczej przedstawiono w Tabeli 1.

Ruch robota w przestrzeni ruchu składa się z dwóch składników: przemieszczenia i orientacji. Przemieszczenie i orientowanie się robota w przestrzeni odbywa się poprzez podział łańcucha kinematycznego na część pozycjonującą, w skład której wchodzi trzy pierwsze - licząc od podstawy - osie robota [10, 14] i orientującą realizowaną przez kolejne dwie lub trzy osie ruchu łańcucha kinematycznego. Na końcu odcinka orientującego łańcucha kinematycznego robota znajduje się tzw. punkt charakterystyczny, zwany też punktem pracy robota (rys. 2).

Tabela 1. Związek pomiędzy rodzajem osi łańcucha kinematycznego robota a jego własnościami ruchowymi [14].

Rodzaje osi	Oznaczenie współrzędnych	Przestrzeń robocza	Typ
3 osie typu T	prostokątne 	prostopadłościenna 	T ⊥ T ⊥ T
2 osie typu T 1 oś typu R	walcowe 	walcowa 	T R ⊥ T
1 oś typu T 2 osie typu R	kuliste 	sferyczna 	R ⊥ R ⊥ T
3 osie rotacyjne	antropomorficzne 	o kształcie torusa 	R ⊥ R R
m osi typu T n osi typu R	np. połączenia współrzędnych prostokątnych i biegunowych obróconych o 90° 	kinematycznie nadokreślona 	T R R

⊥ - ruch prostopadły, || - ruch równoległy, R i T - jak wyżej.

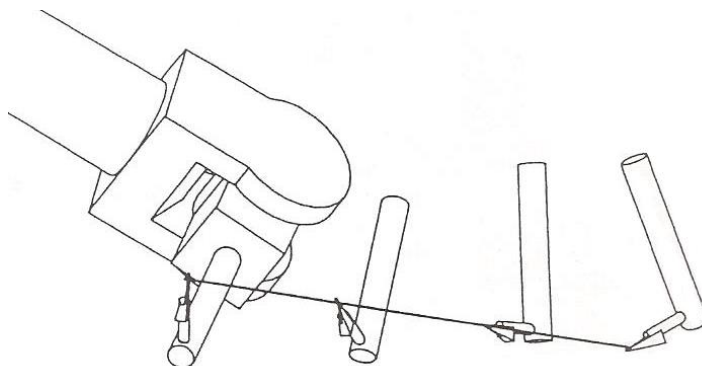


Rys. 2. Położenie punktu charakterystycznego robota: na kiści dla robota nieuzbrojonego i z chwytakiem.

Sterowanie ruchem robota można realizować dwoma sposobami:

- zadając kolejno poszczególnym ogniwom łańcucha kinematycznego robota wartości przemieszczeń, tworzące tzw. wektory położenia q – sytuacja taka zachodzi podczas programowania robota przez uczenie, gdzie programista zadaje położenia każdej osi osobno, uzyskując w punkcie pracy położenie będące wynikiem sumy wektorów położenia każdej z osi łańcucha kinematycznego,
- podając położenie przestrzenne (przemieszczenie i orientację) punktu pracy na ostatnim elemencie ostatniego ogniwa łańcucha kinematycznego robota. W konsekwencji układ sterowania robotem „sam” musi uzyskać wektory położenia poszczególnych osi łańcucha kinematycznego – sam musi określić wektor q . Taki stan występuje podczas programowania robota w tzw. współrzędnych zewnętrznych, przez podanie wartości współrzędnych położenia miejsca docelowego trajektorii, np. we współrzędnych kartezjańskich programowanie off-line, za pomocą sztucznego języka programowania zewnętrznego.

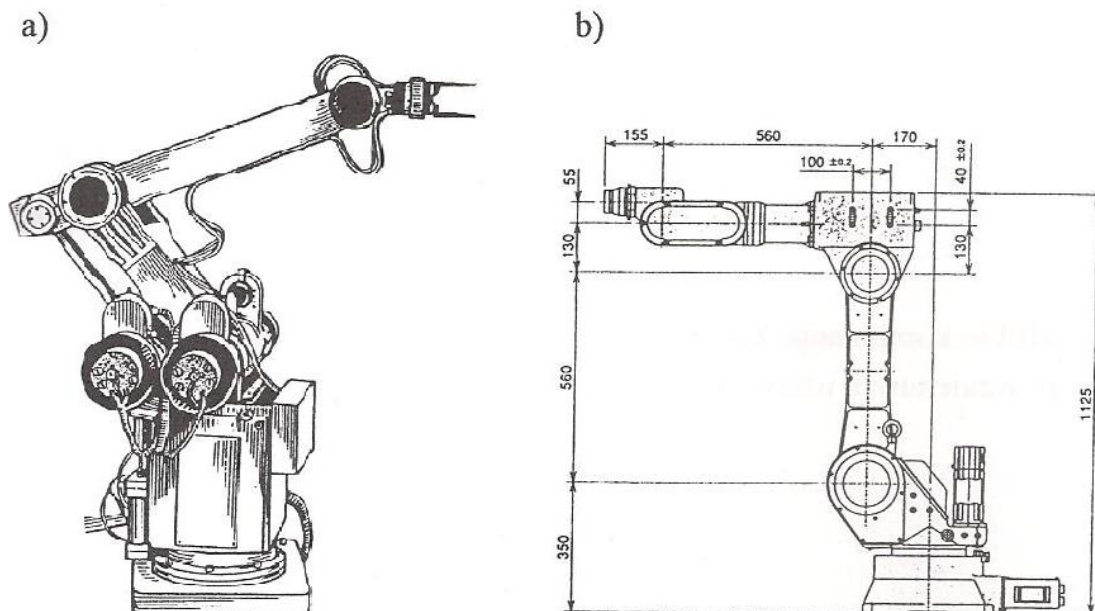
Położenie końcówki robota w przestrzeni opisane jest przez sześć współrzędnych: trzy liniowe współrzędne położenia X, Y, Z i trzy kąty orientacji a, b, c , będące obrotami wokół odpowiednich osi układu współrzędnych. Wartości te są zadawane jako stałe w miejscu docelowym trajektorii lub jako wartości zmienne, gdy związane są z ruchem po trajektorii, (rys. 3).



Rys. 3. Przykład zmiany orientacji końcówki robota [11].

Pełny zestaw współrzędnych końcówki robota niezbędny jest w przypadku ogólnym. W sytuacji, kiedy do czynienia mamy z elementem osiowosymetrycznym (takim jest np. typowy chwytak robota, elektronarzędzie, palnik spawalniczy, elektroda spawalnicza itp.), do poprawnego wykorzystania narzędzia wystarczy mniej kątów orientujących, np. dwa. Ustalenie to wynika z konkretnego przypadku pozycjonowania. Liczbę kątów orientujących końcówkę robota limituje także dostępna liczba stopni swobody manipulatora robota, tzw. ruchliwość. Jeżeli przyjmiemy, że pierwsze trzy kąty licząc od podstawy mechanizmu manipulatora przyjmuje się jako decydujące o położeniu robota, a trzy następne o orientacji końcówki robota (przy założeniu, że osie trzech ostatnich przegubów przecinają się w jednym punkcie [4, 10]), co daje razem 6 stopni swobody robota, to do pełnego określenia jego położenia niezbędne jest podanie 3 współrzędnych kartezjańskich związanych z położeniem robota (X, Y, Z) i trzech kątów orientujących (a, b, c), czyli razem 6 współrzędnych. Natomiast dla manipulatora robota o ruchliwości mniejszej niż 6, do określenia wszystkich danych dotyczących parametrów geometrycznych pozycji docelowej niezbędna jest taka liczba danych, ile stopni swobody ma robot, np. dla 5-osiowego 5 współrzędnych, 6 współrzędna jest nieoznaczona.

Ustalenie, która ze współrzędnych jest „niepotrzebna”, jest zadaniem trudnym. Problem ten próbuje rozwiązać zadanie kinematyki prostej i odwrotnej. Trudność wynika z tego, że w łańcuchach kinematycznych przestrzennych zachodzi wpływ położenia jednej osi na pozostałe osie łańcucha kinematycznego. Przemieszczenie jednej osi powoduje przemieszczenie wszystkich ogniw łańcucha kinematycznego robota, znajdujących się za nią w kierunku kiści robota. Ze względu na to, że typowe narzędzie technologiczne robota ma najczęściej znamiona narzędzia osiowosymetrycznego, jego orientacja w jednym kierunku jest nieistotna i przyjmuje się, że tą „zbędną” współrzędną jest jeden z kątów orientacji - o tym decyduje struktura łańcucha kinematycznego robota i jego możliwości kinematyczne. Ponieważ w praktyce przemysłowej najczęściej wykorzystuje się roboty mające 5 lub 6 stopni swobody [11], stąd też problem eliminacji 6 współrzędnej sprowadza się do wyeliminowania jednego z kątów orientujących końcówkę robota. Z kolei w robotach specjalizowanych (o wyspecjalizowanych zastosowaniach), o istotności współrzędnych do sterowania mchem decyduje układ struktury kinematycznej robota (rys. 4).



Rys. 4. Przykłady robotów a) 5-osiowego, b) 6-osiowego [11].

Liczba możliwych kombinacji struktur łańcucha kinematycznego robota jest bardzo duża i wynosi [14]:

$$V_p = 6^n$$

gdzie:

V_p - liczba kombinacji struktur łańcucha kinematycznego robota,
 n - liczba stopni swobody łańcucha kinematycznego robota.

W związku z tym dla robotów uniwersalnych posiadających 5 stopni swobody liczba możliwych struktur łańcucha kinematycznego wynosi $V_p = 7\,776$, a dla 6 stopni swobody $V_p = 46\,656$. Znaczenie tych kombinacji w praktyce jest znacznie ograniczone. Liczbę możliwych struktur, mających znaczenie praktyczne, warunkują ograniczenia konstrukcyjne określające możliwość wzajemnego ustawienia osi robota. Przy podziale łańcucha kinematycznego na część pozycjonującą i orientującą, to ograniczenia te dotyczą możliwości osiągnięcia wzajemnej prostopadłości bądź równoległości osi poszczególnych części łańcucha kinematycznego (patrz: Tabela 1). W tej sytuacji z rozważań teoretycznych wynika, że dla układu trzech osi możliwych jest 8 kombinacji ich wzajemnych ustawień. Są to kolejno [14]:

1. OOO – kombinacja o trzech ruchach rotacyjnych (O) ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{O} & \perp & \text{O} & \perp & \text{O} & & \\ \text{O} & \perp & \text{O} & \parallel & \text{O} & & \\ \text{O} & \parallel & \text{O} & \perp & \text{O} & & \\ \text{O} & \parallel & \text{O} & \parallel & \text{O} & (-) & \end{array}$$

2. OOP – kombinacja o dwóch ruchach rotacyjnych (O) i jednym przesuwным (P) ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{O \perp O \perp P} \\ \mathbf{O \perp O \parallel P (-)} \\ \mathbf{O \parallel O \perp P (-)} \\ \mathbf{O \parallel O \parallel P (-)} \end{array}$$

3. OPO - kombinacja o ruchu rotacyjnym (O), przesuwным (P) i rotacyjnym (O) ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{O \perp P \perp O} \\ \mathbf{O \perp P \parallel O} \\ \mathbf{O \parallel P \perp O} \\ \mathbf{O \parallel P \parallel O} \end{array}$$

4. OPP - kombinacja o ruchu rotacyjnym i dwóch przesuwnych, ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{O \perp P \perp P (-)} \\ \mathbf{O \perp P \parallel P (-)} \\ \mathbf{O \parallel P \perp P} \\ \mathbf{O \parallel P \parallel P (-)} \end{array}$$

5. POO - kombinacja o ruchu przesuwным i dwóch ruchach rotacyjnych, ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{P \perp O \perp O} \\ \mathbf{P \perp O \parallel O (-)} \\ \mathbf{P \parallel O \perp O (-)} \\ \mathbf{P \parallel O \parallel O (-)} \end{array}$$

6. POP - kombinacja o ruchu przesuwным (P), rotacyjnym (O) i przesuwным (P) ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{P \perp O \perp P (-)} \\ \mathbf{P \perp O \parallel P (-)} \\ \mathbf{P \parallel O \perp P (-)} \\ \mathbf{P \parallel O \parallel P (-)} \end{array}$$

7. PPO - kombinacja o ruchu przesuwным (P), rotacyjnym (O) i przesuwным (P) ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{P \perp P \perp O (-)} \\ \mathbf{P \perp P \parallel O} \\ \mathbf{P \parallel P \perp O (-)} \\ \mathbf{P \parallel P \parallel O (-)} \end{array}$$

8. PPP - kombinacja o trzech ruchach przesuwnych (T) ze wzajemnym ustawieniem osi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{P \perp P \perp P} \\ \mathbf{P \perp P \parallel P (-)} \\ \mathbf{P \parallel P \perp P (-)} \\ \mathbf{P \parallel P \parallel P (-)} \end{array}$$

(-) – oznacza, że ten rodzaj kombinacji ruchu łańcucha kinematycznego robota nie znalazł praktycznego znaczenia, pozostałe kombinacje są uprzywilejowane [14].

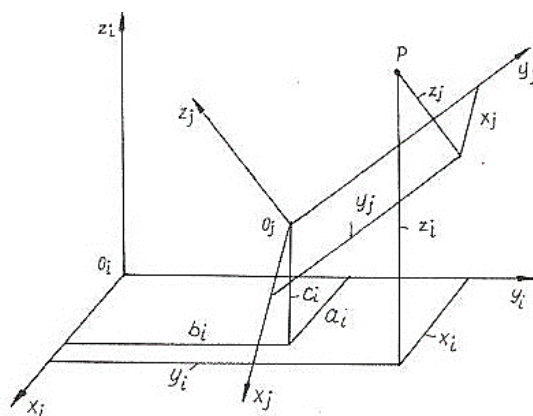
Z przedstawionych powyżej możliwych 32 kombinacji nie wszystkie mają znaczenie praktyczne. 12 z nich to tzw. kombinacje zdegenerowane, gdyż mają jeden lub dwa stopnie swobody (np. $\mathbf{P} \parallel \mathbf{P} \parallel \mathbf{P}$) oraz 8, które są zredukowane do układu płaskiego (np. $\mathbf{O} \perp \mathbf{P} \perp \mathbf{P}$). W rezultacie praktyczne znaczenie ma tylko 12 pozostałych kombinacji. Z tej grupy najczęściej realizowane są te, które mają układ ruchu trzech osi wzajemnie prostopadłych ($\mathbf{O}_1 \perp \mathbf{O}_2 \perp \mathbf{O}_3$) oraz $\mathbf{O}_1 \parallel \mathbf{O}_3$ i $\mathbf{O}_1 \perp \mathbf{O}_3$ (porównaj Tabela 1).

2.2 Zmiana układu współrzędnych, macierz translacji

Określenie położenia, orientacji a także prędkości i przyspieszeń punktów manipulatorów stanowiących przestrzenne łańcuchy otwarte, wymaga stosowania określonych układów współrzędnych związanych z jego członami [1, 17, 18]. Do analizy kinematycznej stosowane są metody macierzowa lub wektorowa. Metoda macierzowa może być stosowana z wykorzystaniem macierzy o wymiarze głównie 4×4 czy 3×3 , ale mogą wystąpić też warianty 6×6 i 2×2 . Opis macierzowy analizy otrzymamy w wyniku przekształceń elementarnych układów. Mogą to być:

- układy kartezjańskie $Oxyz$,
- układy biegunowe-cylindryczne,
- układy sferyczne-kuliste oraz
- układy kątowe.

Układy współrzędnych można przesunąć równolegle ze starego układu do nowego, dokonać obrotu układu o tym samym początku i tej samej skali. Zależności opisujące przejście z jednego układu do drugiego nazywa się transformacją układu. W praktyce stosowane są układy prawoskrętne i lewoskrętne. W celu wyjaśnienia zasad transformacji przyjmujemy dwa człony, i oraz j , z którymi związane są, układ prostokątny $O_i x_i y_i z_i$ oraz układ $O_j x_j y_j z_j$ obrócony i przesunięty, rys. 5.



Rys. 5. Układy współrzędnych prostokątnych, układów i oraz j ilustrujących przekształcenia: przesunięcie i obrót [18].

Współrzędne punktu P w układzie i będą $x_i y_i z_i$, w układzie j odpowiednio $x_j y_j z_j$. Przesunięcie początków układów określono współrzędnymi $a_i b_i c_i$. Cosinusy kierunkowe oznaczone będą przykładowo $\cos \alpha_i = \cos(x_i y_j)$, $\cos \beta_i = \cos(y_i x_j)$, $\cos \gamma_i = \cos(z_i x_j)$, itd. Położenie punktu P w układzie $0_i x_i y_i z_i$ będzie określone następująco:

$$x_i = \cos(x_i x_j) x_j + \cos(y_i x_j) y_j + \cos(z_i x_j) z_j + a_i$$

$$y_i = \cos(x_i y_j) x_j + \cos(y_i y_j) y_j + \cos(z_i y_j) z_j + b_i$$

$$z_i = \cos(x_i z_j) x_j + \cos(y_i z_j) y_j + \cos(z_i z_j) z_j + c_i$$

Przekształcenie opisane równaniami powyżej można przedstawić w postaci równania macierzowego, w którym występuje macierz przekształcenia 4×4 oraz dwa wektory czteroelementowe:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_i x_j) & \cos(y_i x_j) & \cos(z_i x_j) & a_i \\ \cos(x_i y_j) & \cos(y_i y_j) & \cos(z_i y_j) & b_i \\ \cos(x_i z_j) & \cos(y_i z_j) & \cos(z_i z_j) & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

W postaci symbolicznej równanie macierzowe można zapisać jako:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{T}_{ij} \mathbf{w}_j$$

gdzie \mathbf{T}_{ij} jest macierzą przekształcenia współrzędnych punktu P z układu j do układu i . Wyznacznik macierzy \mathbf{T}_{ij} jest równy 1, jeżeli oba układy są prawoskrętne. W przypadku, gdy jeden układ jest prawo a drugi lewoskrętny wyznacznik macierzy jest równy -1. Można dokonać zapisu odwrotnego powyższego równania w układzie $0_j x_j y_j z_j$ przy przejściu z układu i , jest więc:

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{T}_{ij}^{-1} \mathbf{w}_i$$

macierz odwrotna:

$$\mathbf{T}_{ji} = \mathbf{T}_{ij}^{-1} \quad \text{przy czym:} \quad \mathbf{T}_{ij} \mathbf{T}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}$$

Gdzie \mathbf{E} jest macierzą jednostkową.

Macierz \mathbf{T}_{ij} przekształcenia złożonego z translacji i obrotu można przedstawić w postaci iloczynu macierzy $\mathbf{A}_{ij,o}$ obrotu i $\mathbf{A}_{ij,p}$ translacji:

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{A}_{ij,o} \mathbf{A}_{ij,p}$$

Macierze te mają postać:

$$\mathbf{A}_{ij,o} = \begin{bmatrix} \cos(x_i x_j) & \cos(y_i x_j) & \cos(z_i x_j) & 0 \\ \cos(x_i y_j) & \cos(y_i y_j) & \cos(z_i y_j) & 0 \\ \cos(x_i z_j) & \cos(y_i z_j) & \cos(z_i z_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ij,p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz \mathbf{T}_{ij} jest macierzą 4×4 co pozwala w zwartej formie zapisać translację i obrót oraz ułatwia mnożenie macierzy. Macierz $\mathbf{A}_{ij,o}$ ma następujące własności: zawiera dziesięć zmiennych wyrazów cosinusów kierunkowych, z których trzy są niezależne, pozostałe muszą spełniać warunki:

$$\cos^2(x_i x_j) + \cos^2(x_i y_j) + \cos^2(x_i z_j) = 1$$

$$\cos^2(y_i x_j) + \cos^2(y_i y_j) + \cos^2(y_i z_j) = 1$$

$$\cos^2(z_i x_j) + \cos^2(z_i y_j) + \cos^2(z_i z_j) = 1$$

oraz

$$\cos(x_i x_j) \cos(y_i x_j) + \cos(x_i y_j) \cos(y_i y_j) + \cos(x_i z_j) \cos(y_i z_j) = 0$$

$$\cos(x_i y_j) \cos(x_i z_j) - \cos(x_i z_j) \cos(y_i y_j) = \cos(z_i x_j)$$

$$\cos(x_i z_j) \cos(z_i x_j) - \cos(x_i x_j) \cos(y_i z_j) = \cos(z_i y_j)$$

Z równań kwadratowych wynika, że cosinusy kierunkowe osi układów współrzędnych są równe odpowiednim współrzędnym wektorów osi o długości równej 1. Pozostałe trzy równania wynikają z warunków prostokątowości wektorów osi układów współrzędnych. Bardziej pożyteczny może stać się zapis macierzy przekształcenia T jeżeli cosinusy kierunkowe zostaną zastąpione składowymi wektorów [18]. Przyjmijmy następujące oznaczenia składowych wektorów \mathbf{a} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , $\mathbf{a}[a_x a_y a_z]$, $\mathbf{m}[m_x m_y m_z]$, $\mathbf{n}[n_x n_y n_z]$ oraz współrzędne $\mathbf{p}[p_x p_y p_z]$ początku O_j układu j w układzie i .

Macierz T_{ij} przybierze postać:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} a_x & m_x & n_x & p_x \\ a_y & m_y & n_y & p_y \\ a_z & m_z & n_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jej macierz odwrotna T_{ij}^{-1} jest następująca:

$$T_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} a_z & a_y & a_x & -\mathbf{p}\mathbf{a} \\ m_x & m_y & m_z & -\mathbf{p}\mathbf{m} \\ n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p}\mathbf{n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\mathbf{p}\mathbf{a} = p_x a_x + p_y a_y + p_z a_z$$

$$\mathbf{p}\mathbf{m} = p_x m_x + p_y m_y + p_z m_z$$

$$\mathbf{p}\mathbf{n} = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z$$

Równania kwadratowe mogą być przedstawione w postaci zależności składowych wektorów:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \quad a_x m_x + a_y m_y + a_z m_z = 0$$

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1 \quad a_y m_z - a_z m_y = n_z$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad a_z m_x - a_x m_z = n_y$$

Z warunku prostokątowości wektorów przy wykorzystaniu wyznacznika symbolicznego w postaci:

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix}$$

otrzymamy trzy kolejne warunki:

$$m_y n_z - m_z n_y = a_x$$

$$m_z n_x - m_x n_z = a_y$$

$$m_x n_y - m_y n_x = a_z$$

Przykładowo, gdy dane są wartości współrzędnych m_x , m_y , n_x wówczas pozostałe składowe wektorów \mathbf{m} , \mathbf{n} oblicza się następująco:

składowe m_z :

$$m_z = \pm \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}$$

składowe n_y i n_z oblicza się z wzorów:

$$n_y = \frac{-m_x (m_y n_x \pm m_z \sqrt{1 - m_x^2 - n_x^2})}{(1 - m_x^2)}$$

oraz

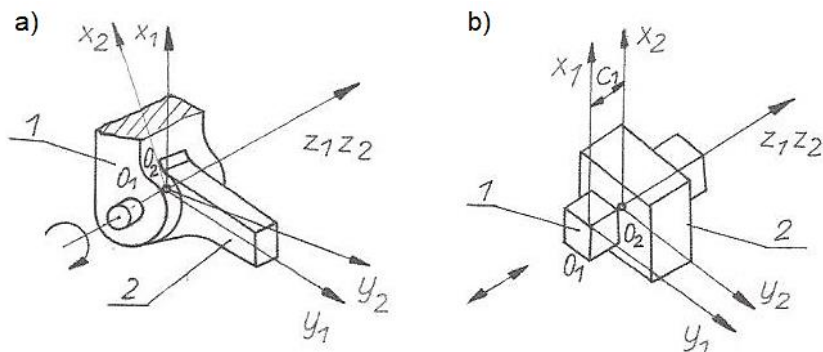
$$n_z = \pm \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2}$$

W ostatnich wzorach występują podwójne znaki \pm co oznacza możliwość wystąpienia ośmiu różnych rozwiązań, z których wybiera się te, które spełniają warunki dotyczące zwrotu wektorów \mathbf{m} i \mathbf{n} , czyli przy zwrotach przeciwnych znak minus.

2.2.1 Przekształcenie współrzędnych pary kinematycznej

W zależności od rodzaju pary kinematycznej macierz \mathbf{T}_{ij} przekształca się [18]. Rozpatrzmy zmiany macierzy \mathbf{T}_{ij} kolejno tak, aby dotyczyły one opisu pary kinematycznej obrotowej O klasy 1, translacyjnej P klasy 1, pary rotacyjno - translacyjnej (cylindrycznej) C klasy 2, pary kulistej (sferycznej) ze sworzniem K_p klasy 2, oraz pary kulistej K klasy 3. W przypadku pary obrotowej o członach 1 i 2, rys. 6, współrzędne a_1 , b_1 , c_1 są równe zero, macierz przekształcenia ma postać:

$$\mathbf{T}_{12O} = \begin{bmatrix} \cos(x_i x_j) & \cos(y_i y_j) & 0 & 0 \\ \cos(x_i y_j) & \cos(y_i y_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 6. a) model pary rotacyjnej – O, b) model pary translacyjnej – P [18].

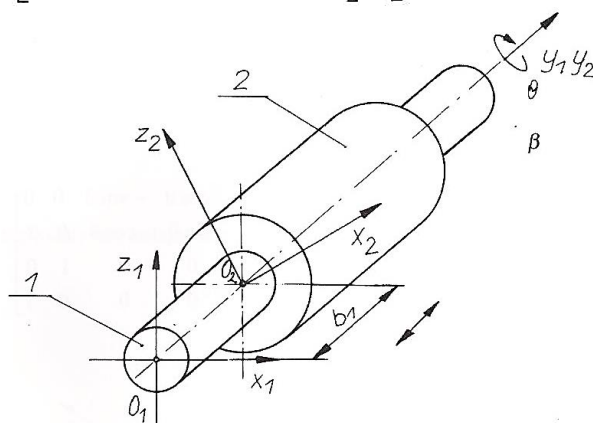
W przypadku pary translacyjnej P, rys. 6b), współrzędne \$a_1, b_1\$ są równe zero, kąty między osiami równoległymi są równe zero.

Macierz przekształcenia ma postać:

$$T_{12P} = \begin{bmatrix} \cos(x_1x_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(y_1y_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(z_1z_2) & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku pary rotacyjno-translacyjnej (cylindrycznej), rys. 7, macierz przekształcenia przy założeniu że osie \$y_1\$ i \$y_2\$ pokrywają się ma postać:

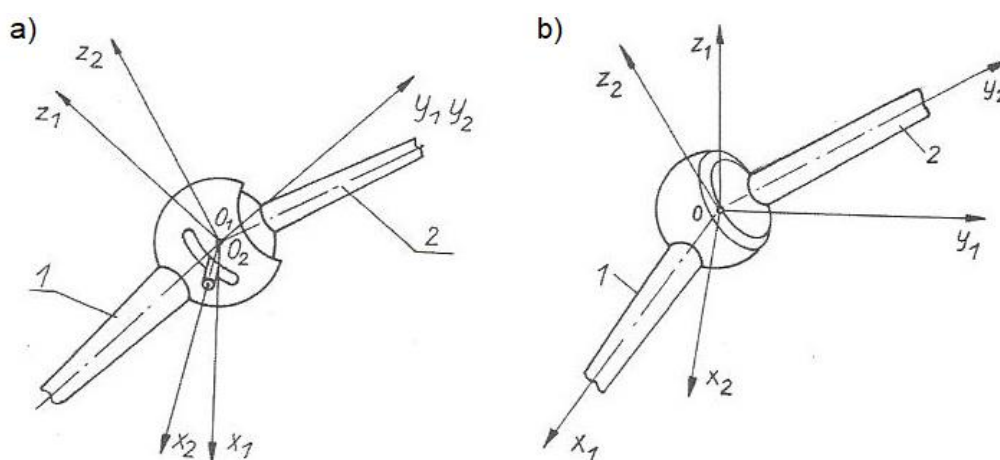
$$T_{12C} = \begin{bmatrix} \cos(x_1x_2) & 0 & \cos(z_1x_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ \cos(x_1z_2) & 0 & \cos(z_1z_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 7. Model pary cylindrycznej C [18].

W układzie pary sferycznej K_p oś O_2x_2 , pokrywa się z kierunkiem sworznia zaś osie O_1y_1, O_2y_2 są wspólne dla obu układów, jak pokazano na rys. 8a). Macierz przekształcenia ma postać:

$$\mathbf{T}_{12K_p} = \begin{bmatrix} \cos(x_1x_2) & 0 & \cos(z_1z_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(x_1z_2) & 0 & \cos(z_1z_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 8. a) model pary kulistej ze sworzniem – K_p b) model pary kulistej [18].

Dla pary kulistej K jak na rys. 8b) macierz przekształcenia ma postać:

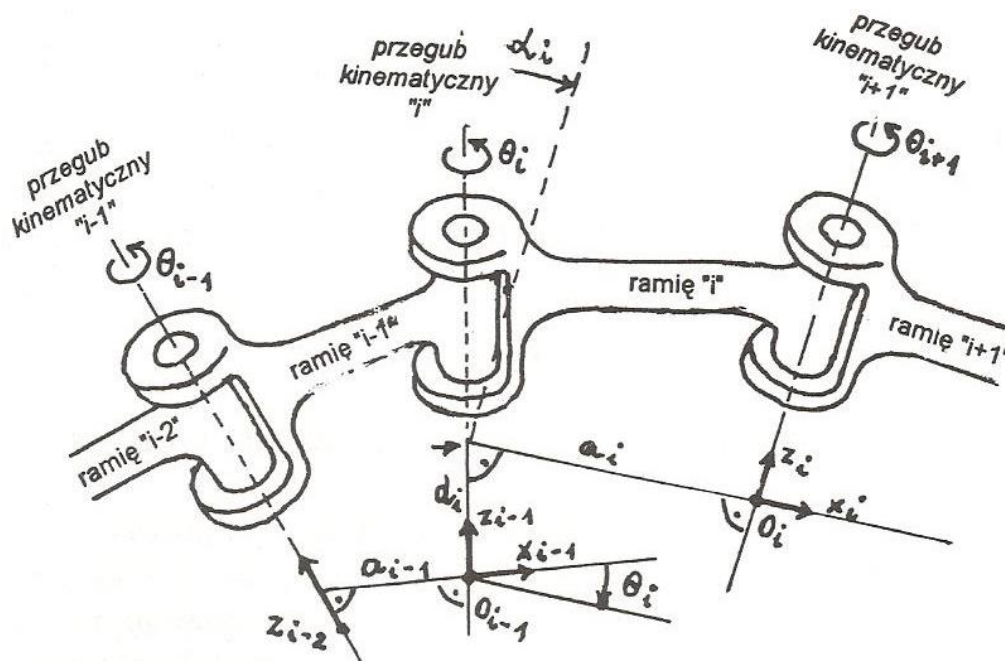
$$\mathbf{T}_{12K} = \begin{bmatrix} \cos(x_1x_2) & \cos(y_1x_2) & \cos(z_1x_2) & 0 \\ \cos(x_1y_2) & \cos(y_1y_2) & \cos(z_1y_2) & 0 \\ \cos(x_1z_2) & \cos(y_1z_2) & \cos(z_1z_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Macierz Denavita-Hartenberga

Analiza przestrzennego łańcucha kinematycznego złożonego z większej liczby członów niż rozpatrywane dotychczas wymaga wprowadzenia specjalnie usytuowanych układów współrzędnych poszczególnych członów [18]. Przyjmuje się to w celu uproszczeń, które powodują że liczba parametrów wchodzących do macierzy przekształceń jest minimalna, a postać macierzy pod względem wymiaru, staje się jednakowa, dla pary obrotowej i translacyjnej. Denavit i Hartenberg usystematyzowali sposób tworzenia modelu łańcucha kinematycznego [4]. Model ten nosi nazwiska swoich twórców, a parametry w nim występujące nazwano parametrami strukturalnymi D-H lub parametrami kinematycznymi [6], przedstawiono go na rys. 9.

Dla wyjaśnienia zapisu przyjmujemy łańcuchy czteroczłonowe o parach OOO oraz OPO pochodzącymi z pracy [18]. Oznaczmy człony symbolami i oraz $i-1$ a pozostałe człony $i+1$, $i+2$. Odległości zaś l oraz h , kąty położenia osi α , natomiast kąty obrotu układu θ . Układy osi współrzędnych związanych z członami i $O_i x_i y_i z_i$, z członem $i-1$, $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$, są prawoskrętne. Powiązania poszczególnych osi z członami są następujące: wszystkie osie $z_i, z_{i-1}, z_{i+1}, z_{i+2}$ pokrywają się z osiami geometrycznymi węzłów. Przyjmuje się ponadto, że oś z leży na wspólnej prostopadłej do osi pary obrotowej członu $i-1$, oś z_{i-1} leży na osi pary obrotowej łączącej człony $i-1$ z i . Oś y_{i-1} nie pokazana na rysunku, stanowi uzupełnienie prawoskrętnego układu współrzędnych $i-1$. Układ współrzędnych związany jest z członem i w podobny sposób, tzn. oś x_i leży na wspólnej prostopadłej do osi par obrotowych członu i , oś z_j leży na osi pary obrotowej łączącej człon i z członem $i+1$. Zaletą takiego usytuowania układów współrzędnych jest to, że tylko cztery parametry określają względne usytuowanie dwóch sąsiednich układów, przy czym dwa z nich tzn. l_i i α są zawsze stałe a jeden z pozostałych jest zmienny w zależności od typu pary kinematycznej [18]. W przypadku pary obrotowej zmiennym będzie kąt θ_i a w przypadku pary przesuwnej, przesunięcie h_i . Dwa sąsiednie układy współrzędnych i oraz $i-1$, jak na rys. 9 mogą być przekształcone przez sprowadzenie do układu i za pomocą obrotu, dwóch przesunięć i jeszcze jednego obrotu w następującej kolejności:

- obrót wokół osi z_{i-1} o kąt θ_i , aż oś x_{i-1} stanie się równoległa do osi x_i w płaszczyźnie,
- przesunięcie wzdłuż osi z_{i-1} , o wielkość h_i tak, aby oś x_{i-1} pokryła się z osią x_i ,
- przesunięcie wzdłuż osi x_i o wielkość l_i tak, aby początki obu układów pokryły się,
- obrót wokół osi x_i o kąt α_i , aż wszystkie osie będą się pokrywać.



Rys. 9. Parametry kinematyczne D-H, z parami obrotowymi [6].

Każdemu z tych elementarnych ruchów odpowiada macierz przekształcenia oznaczona jako \mathbf{A}_i , przy czym kolejnym przekształceniom odpowiadają macierze \mathbf{A}_a , \mathbf{A}_b , \mathbf{A}_c , \mathbf{A}_d . Wprowadzono uproszczenia w zapisie funkcji trygonometrycznych będących wyrazami macierzy:

$$c\theta_i = \cos \theta_i$$

$$s\theta_i = \sin \theta_i$$

Macierze kolejnych przekształceń mają więc postać:

$$\mathbf{A}_{ia} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ib} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ic} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz \mathbf{T}_i opisująca przekształcenie układów łańcucha kinematycznego będzie równa iloczynowi powyższych macierzy i będzie miała postać:

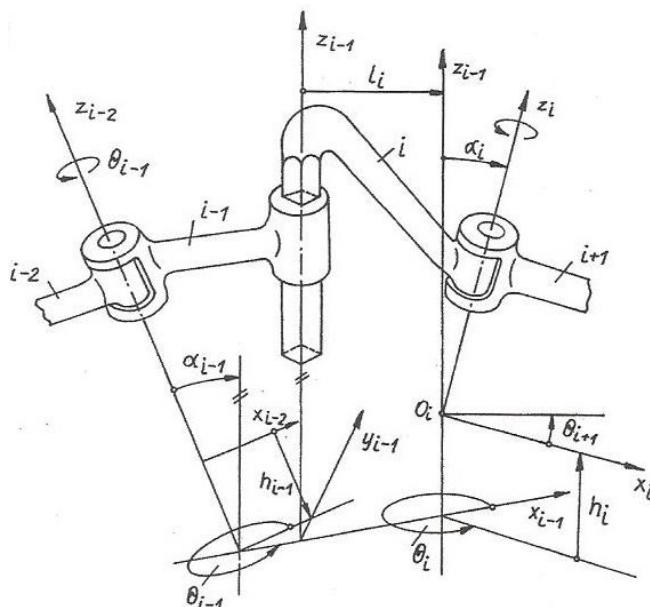
$$\mathbf{T}_i = \mathbf{A}_{ia} \mathbf{A}_{ib} \mathbf{A}_{ic} \mathbf{A}_{id}$$

Wykonując mnożenia macierzy kolejno od prawej strony otrzymuje się macierz Denavita-Hartenberga postaci:

$$\mathbf{A}_{ic} \mathbf{A}_{id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ib} (\mathbf{A}_{ic} \mathbf{A}_{id}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & l_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & l_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie: l_i to odległość, α_i kąt między osiami par obrotowych i są one stałe. Odległość osi h_i oraz kąt obrotu θ_i . W przypadku pary obrotowej kąt θ_i jest zmienny podobnie jak odległość h_i . Wyjaśnienia wymaga przekształcenie układu współrzędnych łańcucha z parą przesuwną rys. 10.



Rys. 10. Łańcuch kinematyczny z parami obrotowymi i jedną parą przestrzenną [18].

Przekształcenie układu członów $i-1$ oraz i następuje w wyniku dwóch przesunięć i dwóch obrotów w kolejności:

- przesunięcie układu wzdłuż osi x_{i-1} , tak aby oś z_{i-1} , znalazła nowe położenie w początku θ_i układu,
- przesunięcie osi z_{i-1} o odległość h_i wzdłuż osi z_{i-1} ,
- obrót osi z_{i-1} , o kąt θ_i , tak aby osie x_i oraz x_{i-1} , stały się równoległe w jednej płaszczyźnie,
- obrót układu osi z_{i-1} o kąt α_i wokół osi x .

W przypadku pary przesuwnej zmienna jest odległość h_i , natomiast kąt θ_i jest stały. Każdemu z tych ruchów odpowiadają macierze:

$$\hat{\mathbf{A}}_{ia} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}}_{ib} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{ic} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}}_{id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz $\hat{\mathbf{T}}_i$ opisująca przekształcenie układu będzie równa iloczynowi w postaci:

$$\hat{\mathbf{T}}_i = \hat{\mathbf{A}}_{ia} \hat{\mathbf{A}}_{ib} \hat{\mathbf{A}}_{ic} \hat{\mathbf{A}}_{id}$$

Zatem po wykonaniu mnożenia macierzy zaczynając od prawej strony otrzymuje się:

$$\hat{\mathbf{T}}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & l_i \\ s\theta_i & c\theta_i (-c\alpha_i) & -c\theta_i s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

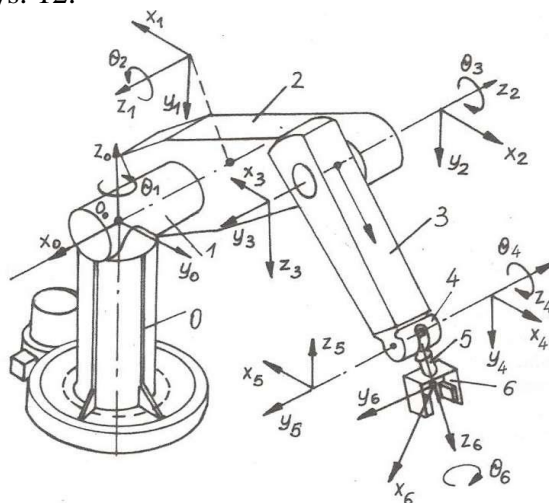
przekształcenie odwrotne macierzy \mathbf{T}_i będzie miało postać:

$$\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{T}_i = \mathbf{E}$$

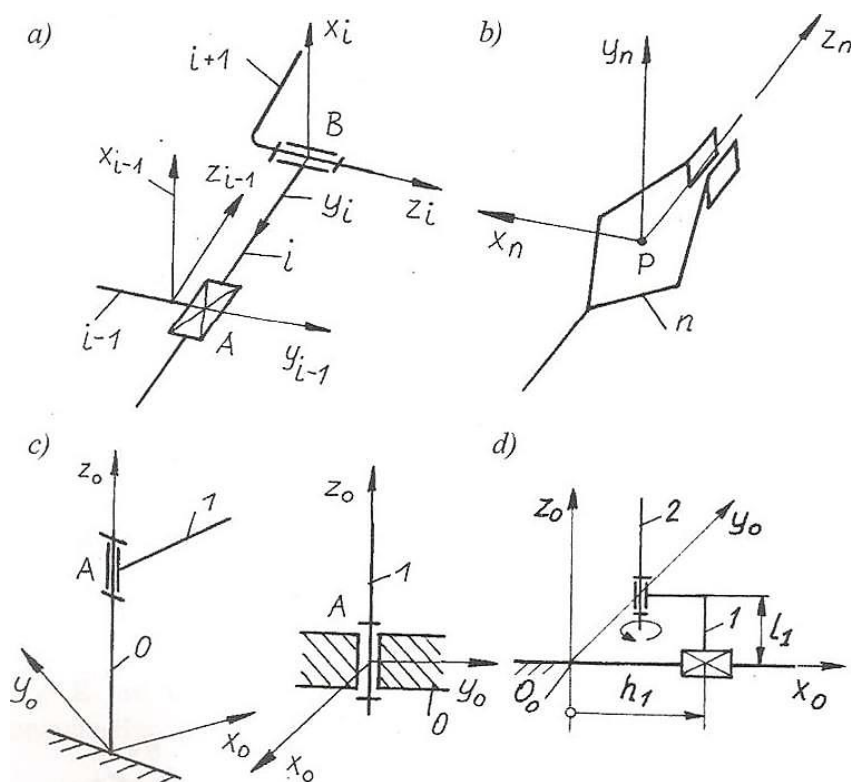
gdzie \mathbf{E} jest macierzą jednostkową. Macierz odwrotna macierzy Denavita-Hartenberga przybiera postać:

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & s\theta_i & -l \\ -s\theta_i c\alpha_i & c\theta_i c\alpha_i & s\alpha_i & -h_i s\alpha_i \\ s\theta_i s\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & c\alpha_i & -h_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze przekształceń \mathbf{T}_i lub $\hat{\mathbf{T}}_i$ mogą być stosowane jeśli przyjęte układy współrzędnych odpowiadające członom manipulatora będą przekształcane zgodnie z zasadą Denavita-Hartenberga. W przypadku łańcucha kinematycznego jak manipulator czy robot przemysłowy rozwiązuje się zwykle zadanie o położeniach, prędkościach i przyspieszeniach. Wtedy wykorzystane może być tzw. zadanie proste lub zadanie odwrotne kinematyki. Zadanie proste polega na określeniu parametrów punktu P związanego z mechanizmem chwytaka przy zadanych położeniach poszczególnych członów łańcucha, zadanie odwrotne zaś ma na celu ustalenie parametrów członów łańcucha przy zadanych wartościach parametrów punktu mechanizmów chwytaka [18]. Możliwe jest wtedy przyjęcie układu współrzędnych, jak na rys. 11, a do jego rozwiązania zaleca się wykorzystanie zasady zaproponowanej na rys. 12.



Rys. 11. Schemat bryłowy manipulatora z układami współrzędnych [18].



Rys. 12. Zalecane sposoby łączenia układów współrzędnych z członami manipulatora [18].

Z każdym członem manipulatora, zawierającego pary OP klasy 1, związany jest sztywno układ współrzędnych w taki sposób, że oś z pokrywa się z osią obrotu lub przesuwu par kinematycznych.

2.3 Pytania kontrolne

1. Wyjaśnij pojęcie układu odniesienia i układu współrzędnych.
2. W jaki sposób można realizować sterowanie ruchem robota.
3. Wymień stosowane układy współrzędnych i podaj odpowiednie przykłady.
4. Podaj macierzowy zapis translacji i obrotu układu współrzędnych.
5. Co to jest macierz Denavita-Hartenberga.

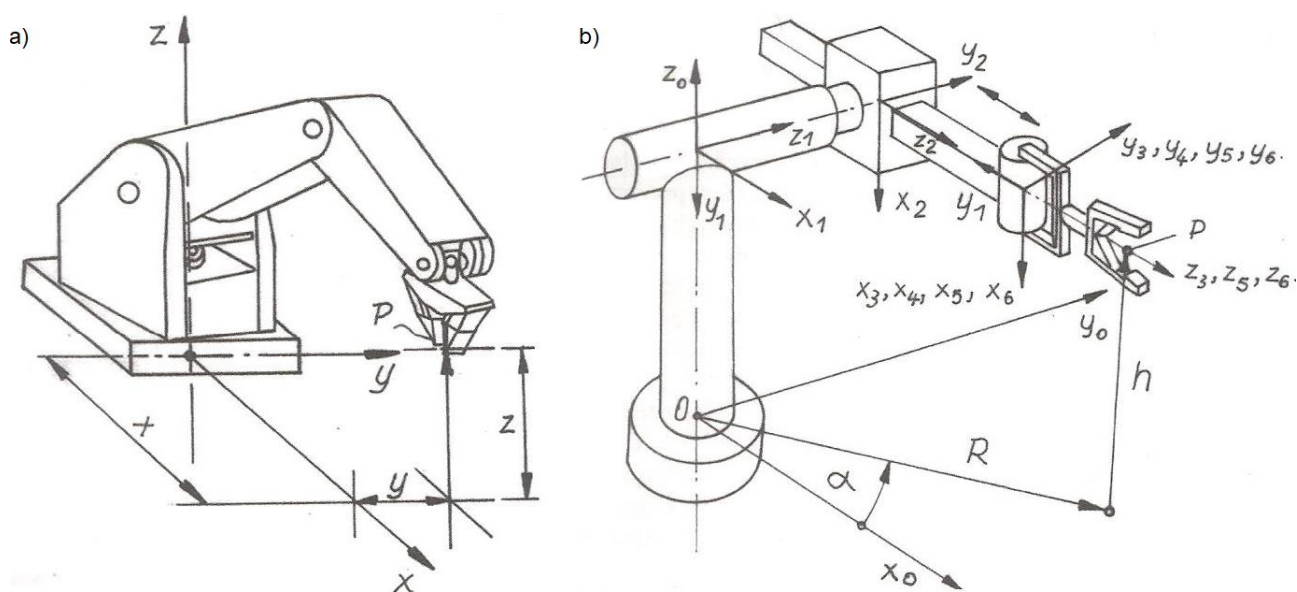
3 Zapis dynamiki układu w przestrzeni 3D

W Tabelicy 2 zestawiono przykłady różnych układów współrzędnych dla wybranych mechanizmów manipulatorów trójczłonowych.

Tablica 2. Układy współrzędnych manipulatorów trójczłonowych [18].

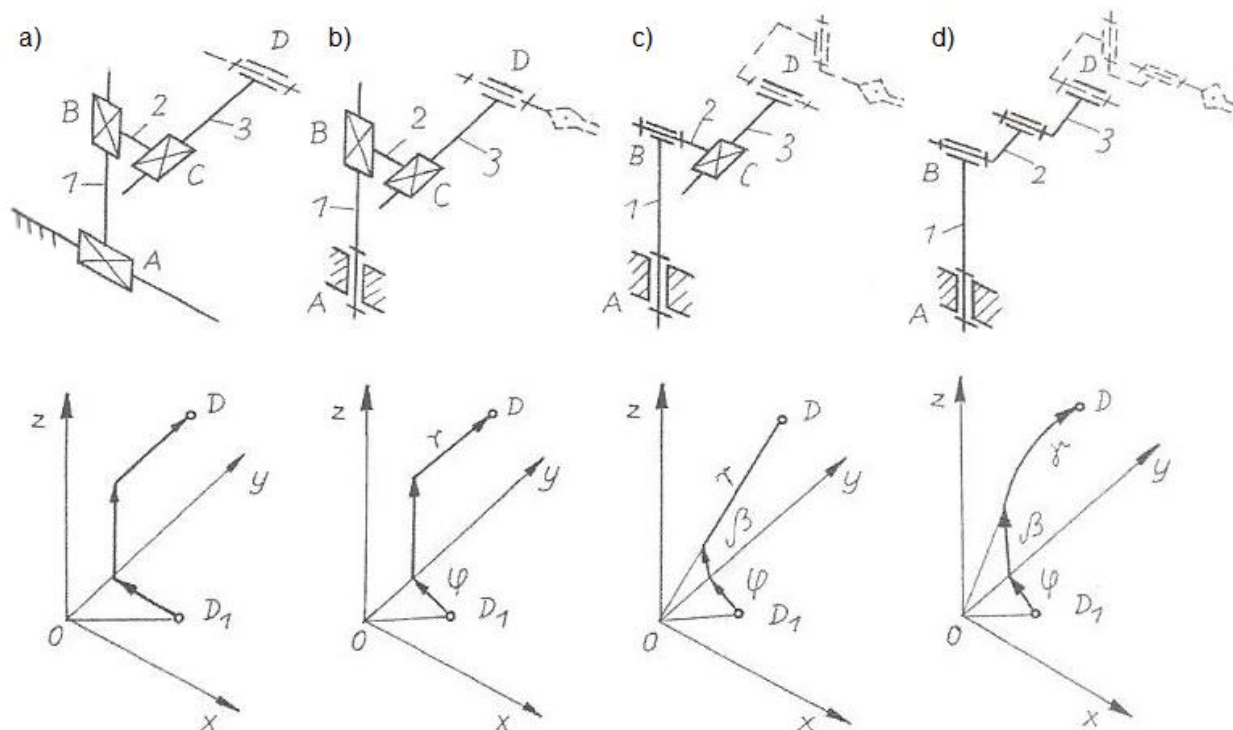
Nazwa współrzędnych	Wykres przestrzenny współrzędnych punktu P	Schemat kinematyczny manipulatora
Współrzędne cylindryczne (θ, R, H) punktu P		
Współrzędne sferyczne (α, θ, R) punktu P		
Współrzędne kątowe (α, β, θ) punktu P		
Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) punktu P		

Dla określenia pozycji ciała wystarczy znać położenie jednego punktu P należącego do tego ciała [6, 12]. Możemy zatem powiedzieć, że znamy wektor pozycji w postaci uporządkowanej trójki liczb $p = [p_x, p_y, p_z]$ lub $p = [0, 0, 0]$. Jednak to nie wystarczy, brakuje informacji o kierunku ustawienia się ciała, musimy znać relacje między osiami układów współrzędnych $\{A\}$ i $\{B\}$. Aby układ $\{A\}$ nałożył się na układ $\{B\}$, trzeba go przesunąć wzdłuż promienia wodzącego i obrócić wokół kolejnych osi x, y, z [6]. Określenie położenia punktu P oznacza ustalenie współrzędnych środka chwytaka lub przedmiotu manipulacji. Innym przykładem jest mechanizm transportujący manipulatorów cztero- czy sześćo-członowych stosowanych w robotach przemysłowych, rys. 13. Wszystkie pary kinematyczne są klasy 1 obrotowe R lub liniowe postępowe T .



Rys. 13. Układy współrzędnych w przypadku a) manipulatora czteroczłonowego, b) manipulatora sześcioczłonowego [18].

W innych manipulatorach mogą być stosowane układy cylindryczne C lub kuliste K . Na rys. 14 przedstawiono wybrane przykłady układów współrzędnych.



Rys. 14. Przykłady układów współrzędnych a) kartezjańskiego, b) cylindrycznego, c) sferycznego, d) kąтового [18].

W mechanizmie z trzema parami postępowymi ruch punktu D członu 3 określony został w prostokątnym układzie współrzędnych, rys. 14a). Dla manipulatora z jedną parą obrotową i dwiema parami przesuwными stosuje się układ cylindryczny, rys. 14b). W mechanizmie posiadającym dwie pary obrotowe i jedną parę przesuwną przyjęto układ sferyczny, rys. 14c). Dla wszystkich par obrotowych (manipulator antropomorficzny) ruch punktu D można określić w układzie kątowym, rys. 14d). Ruchome człony o numerach 1, 2, 3 łącznie z podstawą 0 stanowią zespół manipulatora zwany mechanizmem transportującym, który złożony jest tylko z par przesuwnych i obrotowych lub wyłącznie obrotowych. Linia przerywaną zaznaczono tzw. mechanizm orientujący złożony wyłącznie z par obrotowych [18]. Mechanizm transportujący jest układem o trzech stopniach swobody.

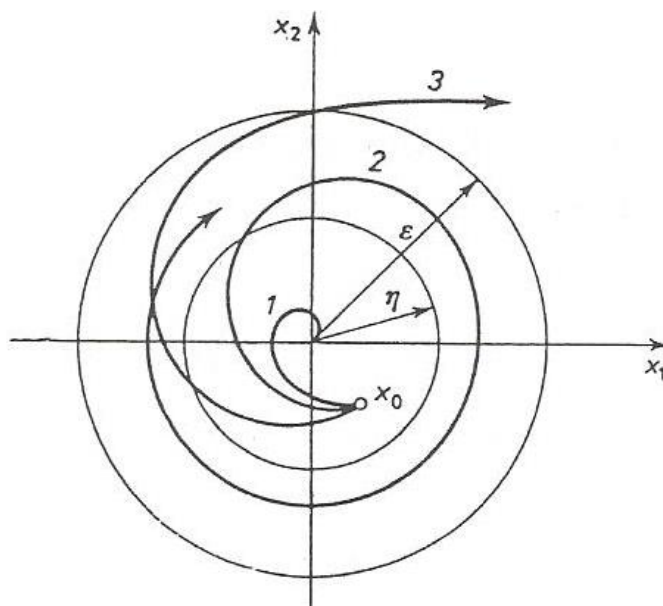
4 Stabilność, obserwowalność i sterowalność

4.1 Stabilność układów sterowania, teoria Lapunowa

Dla danego układu sterowania pierwszym i najważniejszym pytaniem jest, czy dany układ jest stabilny. Jakościowo układ jest uważany za stabilny, jeżeli po starcie z punktu pracy będzie pozostawać on w pobliżu tego punktu [9]. W każdym układzie sterowania (liniowym, nieliniowym) występuje problem stabilności i powinien być on uważnie przestudiowany.

Jedną z podstawowych metod badania stabilności układów sterowania w robotyce jest metoda Lapunowa (metoda prosta) [11]. Stosowana jest do badania stabilności zachowania się układów sterowania zarówno liniowych, jak i nieliniowych. W celu uproszczenia rozważań układy nieliniowe zostały zlinearyzowane.

Istotą zagadnienia stabilności układu jest występowanie w nim tzw. punktów równowagi. Oznacza to, że dla równania ruchu robota, warunkiem stabilności jest wystąpienie w rozwiązaniu jego równania ruchu pierwiastków, dla których układ pozostaje w stanie równowagi. Obowiązuje tutaj definicja [8], która mówi, że punkt równowagi układu nazywamy stabilnym, jeżeli dla każdej liczby dodatniej χ można dobrać taką liczbę η , że trajektoria układu rozpoczynająca się w punkcie x_0 leżącym wewnątrz kuli o promieniu η pozostanie wewnątrz kuli o promieniu ε dla dowolnej chwili t . Sytuację tę przedstawiono na rys. 15. Zatem stabilność oznacza tu pewien dopuszczalny obszar zmienności parametrów pracy układu, występujący po wytrąceniu go ze stanu równowagi (np. poprzez gwałtowny start lub zatrzymanie robota, zmianę obciążenia itp.), w którym w dalszym ciągu obowiązuje opracowane prawo sterowania dla układu sterowanego.



Rys. 15. Interpretacja graficzna definicji stabilności [8].

Dla najbardziej podstawowych układów sterowania rozróżnia się stabilność asymptotyczną i nieasymptotyczną. W dużym uproszczeniu możemy powiedzieć, że:

- w układzie stabilnym asymptotycznie, dla czasu $t \rightarrow \infty$ układ powraca „asymptotycznie” do punktu równowagi, z którego został wytrącony (krzywa 1 na rys. 15),
- w układach stabilnych nieasymptotycznie, po wytrąceniu z punktu równowagi, układ oscyluje wokół położenia równowagi (krzywa 2 na rys. 15),
- w układach niestabilnych obszar zmienności stanu układu przy $t \rightarrow \infty$ może dążyć do nieskończoności (krzywa 3, na rys. 15).

Dla typowych liniowych układów sterowania robotów charakterystyczna jest stabilność tzw. asymptotyczna, która odpowiada tłumieniu krytycznemu. Warunkiem równowagi układów jest posiadanie, przez równanie opisujące je, pierwiastków o niedodatniej części rzeczywistej, zaś warunkiem wystąpienia pożądanej stabilności asymptotycznej jest, by część rzeczywista tych pierwiastków była ujemna [8]. A zatem powróćmy do naszego ogólnego równania ruchu modelowego układu mechanicznego opisanego zależnością:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

Z mechanicznego punktu widzenia układ taki posiada dwa rodzaje energii:

- a) energię kinetyczną, której źródłem jest ruch masy m z prędkością v wyrażoną znanym równaniem:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

- b) energię potencjalną, której źródłem jest element sprężysty w układzie. Przyjmijmy dla przypadku ogólnego, że energia potencjalna sprężyny jest równa dla uproszczenia:

- dla układów liniowych:

$$E_p = kx$$

- dla układów nieliniowych:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Możemy zatem powiedzieć, że całkowita energia układu jest równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej układów:

- liniowych:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + kx$$

- nieliniowych:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + kx^2$$

Dla naszego układu różniczkując po czasie równanie energii układu możemy określić prędkość zmiany energii całkowitej tego układu jako:

- dla układów liniowych:

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}$$

- dla układów nieliniowych:

$$\dot{E} = m \dot{x} \ddot{x} + kx \dot{x}$$

podstawiając: $\ddot{x} = a$ i $\dot{x} = v$ otrzymujemy, odpowiednio:

$$\dot{E} = m \dot{v} a + k v$$

$$\dot{E} = m \dot{v} a + k x v$$

kolejne podstawienie wyznaczmy:

$$m a = -\mu v - k x$$

i otrzymamy:

- dla układów liniowych:

$$\dot{E} = -\mu v^2 - k x v + k v = \mu v^2 - (x+1)k v$$

- dla układów nieliniowych:

$$\dot{E} = -\mu v^2$$

Łatwo zauważyć, że niezależnie od wartości współczynnika tarcia ślizgowego μ i wartości x , v , k (zawsze mają wartość dodatnią) prędkość zmiany energii jest zawsze ujemna. Oznacza to, że układ zawsze będzie tracił energię niezależnie od wartości początkowego wzbudzenia, aż do stanu równowagi, gdy się zatrzyma, tzn. gdy $E = 0$. Zatem stan ten osiągnie dla:

$$x = 0$$

bowiem wtedy pierwsza pochodna z przemieszczenia x po czasie, czyli $v = 0$. Jednak analiza ta nie wskazuje na sposób, w jakim nastąpi tłumienie układu, tzn. czy będzie nadkrytyczne, czy podkrytyczne i jak długo będzie to trwało. Oznacza to, że stabilność a funkcjonowanie układu są to dwie różne jego właściwości, gdyż osiągnięcie stabilności nie gwarantuje, że tłumienie będzie następować w pożądanym czasie.

4.2 Obserwowalność

Obok stabilności obserwowalność jest jednym z podstawowych pojęć teorii i inżynierii sterowania. Najprościej obserwowalność można określić jako własność układu sterowania mówiąca, czy na podstawie odczytu sygnału sterującego i sygnału wyjściowego możliwe jest określenie wewnętrznego stanu obiektu. Obserwowalność odnosi się do możliwości przeprowadzenia obserwacji (mierząc wielkości na wyjściach układu). Jeśli stan układu nie jest obserwowalny, to regulator nigdy nie będzie w stanie określić zachowania takiego stanu i dlatego nie można go wykorzystać do stabilizacji układu. Jednakże podobnie jak w przypadku warunków stabilności (dla sterowalności), jeśli stan wewnętrzny nie jest obserwowalny, to jednak może być wykrywalny.

Z definicji przedstawionej w [9] można powiedzieć, że układ nazywamy obserwowalnym, jeżeli istnieje chwila $t_k > 0$ taka, że na podstawie danych wymuszenia $u(t)$ i odpowiedzi $y(t)$ dla $t \in [0, t_k]$ można jednoznacznie wyznaczyć dowolny stan początkowy x_0 tego układu.

4.3 Sterowalność

Najprościej ujmując sterowalność to możliwość wpływania na stan badanego obiektu. Sterowalność to taka własność układu sterowania, że istnieje sterowanie przeprowadzające układ w pewnym skończonym przedziale czasu do zadanego stanu (np. położenia, prędkości, przyspieszenia itp.), przy spełnieniu zadanych warunków początkowych. koncepcja sterowalności oznacza zdolność poruszania układem po całej jego przestrzeni konfiguracji z użyciem tylko pewnych dopuszczalnych czynności. Dokładna definicja różnicuje się nieco zależnie od typu stosowanego modelu. W literaturze przedmiotu [2, 5, 9] spotyka się między innymi takie pojęcia jak: sterowalność stanu, sterowalność wyjść, sterowalność w kontekście zachowania.

Liniowy układ sterowania jest sterowalny, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego x_0 możemy zastosować takie sterowanie $u(t)$ które w skończonym czasie t_f spowoduje sprowadzenie do dowolnego końcowego stanu $x(t_f)$. Jeśli każdy stan systemu $x(0)$ jest sterowalny, system nazywamy całkowicie sterowalnym [5].

Problemy związane z brakiem sterowalności lub obserwowalności mogą być rozwiązane między innymi przez dodanie urządzeń wykonawczych lub odpowiednich czujników.

4.4 Pytania kontrolne

1. Wyjaśnij pojęcie sterowalności.
2. Wyjaśnij pojęcie stabilności układu sterowania.
3. Wyjaśnij pojęcie sterowalności.
4. Jakie są metody badania stabilności układów sterowania w robotyce?

Miejsce na notatki

5 Wybrane zagadnienia sterowania

Ze względu na rodzaje zadań realizowanych przez robota, najważniejsza jest możliwość zapewnienia poprawnej realizacji ruchu, a w jego ramach bardzo ważnym problemem poprawiającym jakość sterowania manipulatorem jest optymalność tego ruchu. W sytuacji, kiedy o wyborze sposobu zrealizowania przemieszczenia decyduje maszyna (wynik przeliczeń geometrycznych współrzędnych ruchu wg algorytmu kinematyki prostej i odwrotnej), sposób zrealizowania tego przemieszczenia nie zawsze jest najlepszy. Nadrzędnym zadaniem jest ruch robota z miejsca początkowego do miejsca końca pożądanego trajektorii.

5.1 Sterowanie optymalne

Optymalność ruchu manipulatora może być związana z wieloma kryteriami, od których zależy ocena realizowanego przemieszczenia robota. Do grupy takich kryteriów można zaliczyć:

- dokładność pozycjonowania z uwagi na dynamikę ruchu,
- szybkość przemieszczenia - czas realizacji przemieszczenia,
- długość drogi (odległość pomiędzy wyznaczonymi położeniami początku i końca trajektorii nie jest wyznacznikiem jej długości – robot w środowisku przemysłowym musi omijać przeszkody i dlatego też sposób, w jaki to robi, może bardzo wyraźnie wpływać na długość drogi, a przy wyznaczonym czasie przejazdu wpływa to istotnie na dynamikę ruchu i w konsekwencji na dokładność – precyzję przejazdu robota),
- jakość odwzorowania trajektorii interpolowanej.

Generalnie kryteria te można zakwalifikować do dwóch grup [7, 13]:

- czasowo-optymalne,
- energetycznie optymalne.

Oczywiście, wszystkie te kryteria są bardzo szczegółowe i w rezultacie wszystkie decydują o jakości realizowanego ruchu przez robota. Problem polega więc na wyborze parametru, który w danym zadaniu będzie decydujący przy kształtowaniu parametrów ruchu robota. Należy tu jednak dodać, że ze względu na złożoność tych zagadnień we współczesnych realizacjach algorytmów sterowania problem optymalizacji ruchu robota praktycznie nie istnieje. Wynika to z trzech faktów:

- po pierwsze dlatego, że algorytmy sterowania robotami są bardzo proste i nie prowadzą tego typu analiz przy kreowaniu współrzędnych ruchu zgodnie z wybranym mechanizmem interpolacyjnym,
- po drugie, to programista decyduje o wszystkich parametrach działania robota: określa kształt trajektorii, wyznacza współrzędne początku i końca drogi, parametry czasowo-prędkościowe, nie pozostawiając układowi sterowania żadnego marginesu korekty tych parametrów,
- po trzecie, tego typu działania na poziomie sterowania robotem mógłby podjąć układ sterowania w sytuacji, kiedy dysponowałby odpowiednimi mechanizmami pozwalającymi na przystosowanie proponowanego przez programistę planu działania do rzeczywistych (zmieniających się wraz z rozwojem akcji realizowanej przez robota w procesie obsługi)

warunków panujących w otoczeniu robota. Realizację takiego zadania można zakwalifikować jako pewien proces adaptacji, najlepszej względem przyjętych – narzuconych przez programistę kryteriów – zachowania się robota podczas realizacji zadania w zmieniających się warunkach otoczenia. Fakt ten wymaga od robota oceny bieżącej sytuacji, np. poprzez stałą obserwację tego otoczenia (sensory zewnętrzne) i znajomości zasad zachowania się w tym otoczeniu.

Jak widać, problem optymalizowania ruchu jest zagadnieniem wielce złożonym i trudnym w realizacji. Trudności te pogłębia dodatkowo fakt, że wskazane kryteria optymalizacji:

- a) nie są jednoznaczne, każde może prowadzić do uzyskania innych rozwiązań optymalnych ruchu robota,
- b) brak jednoznacznych wyznaczników wskazujących na „wyższość” jednego kryterium nad innym,
- c) w trakcie całego zaprogramowanego zadania obsługi kryteria mogą ulegać zmianie (maksymalna prędkość, najkrótsza droga, maksymalna dokładność, najkrótszy czas itp.).

Oznacza to, że stosowanie kryteriów rozwiązań zadania sterowania robotem można:

- a) narzucić (na etapie programowania), o wyborze rozwiązania będzie decydował programista, co nigdy nie da optymalnych rozwiązań w kontekście całego zadania (w sensie globalnym), a dodatkowo nie gwarantuje poprawnego ich zastosowania – będzie podlegać subiektywnej ocenie operatora,
- b) określić jednoznacznie w algorytmie sterowania i będzie ono obowiązywać bezwzględnie w każdym zadaniu, co daje takie same efekty jak powyżej,
- c) stosować mechanizmy doboru kryteriów zależnie od potrzeb, co z kolei wymusza opracowanie kryteriów ich „przydziału” do określonego przypadku – potrzeb działania robota, co znacznie utrudnia realizację tego zadania.

Wracając do ogólnie sformułowanego problemu optymalności ruchu robota, trzeba powiedzieć, że w większości zastosowań przemysłowych da się zauważyć następujące relacje pomiędzy optymalizacją ruchu a jego złożonością:

- a) przy realizacji ruchów prostych, nie wymagających dużej precyzji pozycjonowania, podstawowym kryterium jest czas jego realizacji,
- b) dla ruchów złożonych ważną rolę, oprócz czasu, odgrywa również precyzja ruchu.

Ponieważ całe zadanie robota składa się zarówno z ruchów prostych (przejazdy z miejsca na miejsce, omijanie przeszkód), jak i złożonych (odłożenie/założenie detalu przy zachowaniu wymaganej orientacji, przemieszczenie z określoną orientacją itp.), zatem dla uniknięcia wieloznaczności rozwiązania takich problemów w trakcie sterowania manipulatorem stosuje się kryterium tzw. jakości ruchu, które ogólnie w sposób formalny można zapisać jako [11]:

$$Q(\varphi, U) = \alpha |\varphi - \varphi_o| + \beta \int_0^T dt + \gamma E$$

gdzie:

α , β , γ – współczynniki wagowe dobierane subiektywnie w zależności od konstrukcji manipulatora,

φ – wektor współrzędnych opisujących położenie robota w chwili t ,
 φ_0 – wektor współrzędnych opisujący położenie końcowe ruchu,
 U – wektor sygnałów sterujących robota q określony do realizacji φ ,
 E – suma energii potrzebna do zrealizowania zadanego ruchu przez robota,
 T – zadany czas trwania programowanego przemieszczenia.

W zależności tej zawarte są trzy podstawowe parametry określające jakość realizowanego przemieszczenia, które mogą stanowić – jak już wcześniej wskazano – kryteria optymalizujące:

- dokładność ruchu, czyli minimalny uchyb w chwili osiągnięcia przez robota zadanego położenia,
- minimum czasu potrzebnego na zrealizowanie zaprogramowanego przemieszczenia,
- minimum energii zużytej przez robota do zrealizowania zaprogramowanego ruchu.

Zależność powyższa jest, niestety, zależnością typowo teoretyczną. Nie można jej stosować do realizacji zadania sterowania robotem ze względu na wielokryterialne podejście do zagadnienia optymalności działania robota, co z punktu widzenia konieczności opracowania specjalnych algorytmów sterowania robotem jest zadaniem niesamowicie złożonym (podobnie jak optymalizacja matematyczna wielokryterialna – w sensie globalnym). Dodatkowo nie wszystkie parametry zależności określającej $Q(\varphi, U)$ są znane. O ile zakres przemieszczenia robota $|\varphi - \varphi_0|$ jest znany, czas jego realizacji $\int_0^T dt$, o tyle pozostałe składniki tej zależności są trudne do określenia, a czasami są wręcz nieznanne. Tak jest z parametrem E , czyli energią potrzebną do realizacji ruchu, a współczynniki wagowe α, β, γ są całkowicie niezmiennie i wymagają doświadczonego określenia [11], co w praktyce sprawia, że przydatność tego podejścia jest znikoma.

Robot przemysłowy obsługujący proces technologiczny zawsze wykonuje swoje zadanie obsługi w sposób cykliczny, powtarzając swoje czynności w pętli programowej. Przy wielokrotnych powtórzeniach problem optymalności ruchu robota może stać się bardzo istotny, gdyż może prowadzić do znacznych oszczędności, skrócenia całkowitego czasu trwania cyklu obsługi, mniejszego zużycia energii. Jednak z punktu widzenia rozwiązania problemu sterowania optymalnego zadanie to jest wyjątkowo złożone. Sprowadza się ono do znalezienia takiego sterowania dopuszczalnego, które zminimalizuje wartość funkcji celu, czyli przyjętego kryterium. Do wyznaczenia szczegółowego algorytmu sterowania optymalnego wykorzystuje się alternatywnie dwa formalizmy [7]:

- zasadę maksimum Pontriagina,
- równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana.

Rozwiązanie tych problemów jest bardzo złożone i oscyluje wokół wyspecjalizowanych zagadnień teorii sterowania. Ze względu na formalizm ww. metod, problem sterowania optymalnego może mieć praktyczne zastosowanie jedynie dla sterowania nieliniowego. Formalizmy wymienione powyżej wymagają dla sterowania minimalno-energetycznego i minimalno-czasowego stosowania:

- układów sterowania ciągłych,
- rozwiązywania złożonych funkcji równań sterujących,
- rozwiązania problemów pojawiających się sterowań osobliwych, tzn. niemożliwych do rozwiązania przy zastosowaniu standardowych technik obliczeniowych dla równań

różniczkowych i ww. formalizmów.

Zagadnienie te ulegają nieznacznemu uproszczeniu, gdy do problemu optymalności sterowania wprowadzi się ograniczenia, tzw. geometryczne wynikające z „narzucenia” kształtu pożądanej trajektorii robota.

5.2 Sterowanie w przestrzeni kartezyjskiej

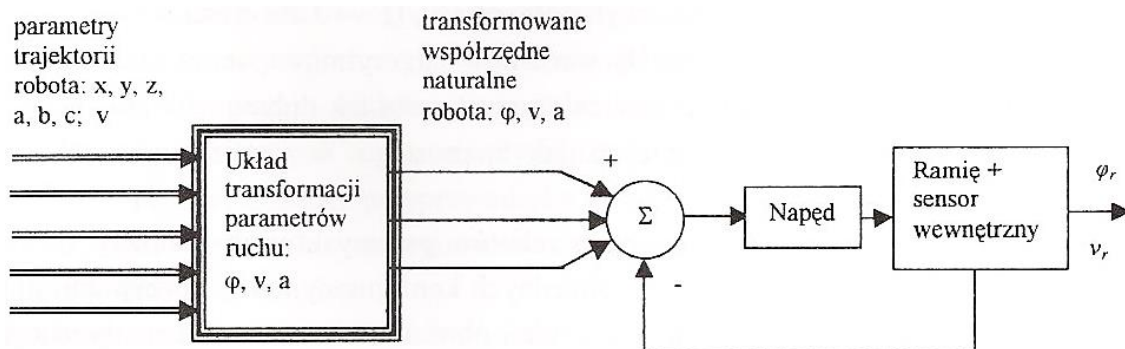
W ogólnym przypadku współrzędne początku i końca trajektorii manipulatora oznaczone są przez sześć współrzędnych. W praktyce orientacja narzędzia podczas ruchu nie jest tak istotna jak osiągnięcie dokładnego położenia (przez co 3 kąty orientacji punktu roboczego, związanego z ostatnim elementem ostatniego ogniwa łańcucha kinematycznego robota, tracą na ważności) przez co rozwiązanie problemu sterowania można w uproszczeniu realizować dla wektora 3 współrzędnych położenia [11]. Położenie początku P_p i końca P_k trajektorii znajdują się w obszarze przestrzeni roboczej robota, istnieją rozwiązania kinematyki prostej i odwrotnej, co oznacza, że pozycje te mają swoje reprezentacje w przestrzeni wewnętrznej manipulatora [7] – tzn. są możliwe do osiągnięcia przez robota, czyli możemy dla nich wyznaczyć wektor sterowania q . Rozwiązując zatem zadanie sterowania i uzyskując poszukiwany wektor sterowania q , dla którego istnieją pierwsza pochodna, tzn. prędkość v i druga tj. przyspieszenie a , uzyskujemy gwarancję osiągnięcia pożądanej trajektorii. Oznacza to, że rzeczywista trajektoria robota (będąca wynikiem realizacji równania sterowania) prowadzi asymptotycznie (tzn. druga pochodna uchybu zanika – zdąża do zera) do osiągnięcia zaprogramowanego celu, czyli położenia P_k ($E \rightarrow 0$ dla czasu $t \rightarrow \infty$).

W praktyce przemysłowej programista operatora robota bardzo rzadko korzysta z możliwości bezpośredniego programowania robota we współrzędnych konfiguracyjnych, operując np. liczbą impulsów silnika krokowego na danej osi, bądź wartością kąta φ lub przemieszczenia liniowego l , na jaki robot powinien się ustawić [11]. Działania takie są bardzo rzadkie i związane raczej z sytuacjami wymagającymi bardzo dużej precyzji pozycjonowania robota. Programowanie robota we współrzędnych kartezyjskich (x, y, z) z punktu widzenia sterowania robotem jest bardziej złożone. O ile z punktu widzenia operatora programowanie robota we współrzędnych kartezyjskich nie stanowi większego problemu - układ taki najlepiej oddziałuje na naszą wyobraźnię i jest to układ, w którym mamy najlepiej wyrobioną orientację przestrzenną – o tyle dla układu sterowania współrzędne liniowe położenia i kąty orientacji zadawanych pozycji w przestrzeni, czyli współrzędne zewnętrzne robota, są z natury niezrozumiałe [11]. Wymagają zatem „przetłumaczenia z języka operatora na język wewnętrzny układu sterowania”. Zagadnienie to ilustruje rys. 16.

Zadanie transformacji współrzędnych ze współrzędnych operatora (zewnętrznych) na współrzędne konfiguracyjne jest nazywane czasami „procesem przekształcania trajektorii”. Danymi do tego procesu są [11]:

- 1) φ_d – wektor współrzędnych trajektorii określony we współrzędnych kartezyjskich, przeliczony na przemieszczenia cząstkowe osi (wektor n współrzędnych wewnętrznych robota) metodą kinematyki odwrotnej,
- 2) v_d – wektor prędkości poszczególnych ogniw manipulatora,

3) a_d – wektor przyspieszeń w połączeniach ruchowych.



Rys. 16. Zasada transformacji współrzędnych zewnętrznych na wewnętrzne układu sterowania. φ_r – rzeczywiste przemieszczenie robota w przestrzeni programowania, v_r – rzeczywista prędkość osiągnięta przez robota [11].

Powyższe wartości (oparte na kinematyce odwrotnej, obliczeniach jacobianów prędkości i ich różniczkowaniu celem znalezienia przyspieszeń w węzłach łańcucha kinematycznego robota) obliczane są w układzie sterowania technikami numerycznymi. Prowadzi do to wzmacniania błędów obliczeń (zaokrąglenia) i wprowadza opóźnienia w działaniu układu sterowania. Z tego powodu dąży się do znalezienia innej zasady działania układu sterowania zdolnego do sterowania robotem w przestrzeni kartezyjskiej. Polega on na tym, że w pętli sprzężenia zwrotnego od położenia następuje natychmiastowe przekształcenie zmierzonych wartości na wartości współrzędnych kartezyjskich i porównanie ich z wartościami zadanymi [11]. Wyznacza się przez to rzeczywisty uchyb położenia w przestrzeni kartezyjskiej. Metoda ta polega na przekształceniu wartości zmierzonych – rzeczywistych, a nie wartości zadanych. Wielokrotnie dokonywane przekształcenia powodują obniżenie częstotliwości pracy układu, jednak w mniejszym stopniu niż przy zastosowaniu algorytmu pierwotnego. Dla takiego układu, przez analogię, możemy otrzymać równanie dynamiki manipulatora w układzie kartezyjskim jako [4]:

$$\Psi = M_x(\varphi)a_x + V_x(\varphi, v) + G_x(\varphi)$$

Wszystkie wartości w równaniu odnoszą się do przestrzeni kartezyjskiej oznaczonej indeksem x : Ψ – wektor sił i momentów, M_x – macierz momentów bezwładności, V_x – macierz prędkości, G_x – macierz sił grawitacji. Układ sterowania robota pracuje w układzie współrzędnych wewnętrznych, a równanie powyższe wyrażone jest w układzie współrzędnych zewnętrznych, zatem też w praktyce do ogniwa robota, aby wprawić go w ruch, nie możemy użyć momentu określonego tym równaniem. Moment ten musimy skorygować transponowanym jacobianem prędkości $J^T(\varphi)$, który pozwala na przeniesienie parametrów ruchu z układu kartezyjskiego do układu wewnętrznego, a tym samym na skorygowanie rzeczywistego momentu poruszającego ogniwo robota (blok ten wyróżniono na rysunku poniżej podwójną kreską). Układ taki przedstawia rys. 17.

- c) zdolne zapewnić poprawność cyklu sterowania przy niepełnej znajomości parametrów manipulatora.

Sterowanie modelem ślizgowym opiera się na przypadku nieznajomości pełnego modelu manipulatora. Dodatkowo dopuszcza się fakt występowania w węzłach łańcucha kinematycznego manipulatora rzeczywistego pewnych zakłóceń, których wpływ na jego działanie jest zależny od czasu (tzn. jest funkcją czasu). W metodzie tej nieznajomość parametrów modelu i występujących zakłóceń, jest obwarowana warunkiem, że mogą się one zmieniać tylko w pewnym przedziale wartości dopuszczalnych, czyli zakłócenie A_i (jako nieznaną parametr) nie może przekraczać wartości granicznej a . Algorytm modelem ślizgowym nie zawiera:

- 1) procesu oceny nieznaną parametrów;
- 2) algorytmu adaptacji, czyli przystosowania do zmieniających się warunków.

Zakłada z góry, że proces generowania parametrów sterujących jest z natury swej nieciągły. Poza tym metoda ta polega na śledzeniu zadanej trajektorii w przestrzeni wewnętrznej manipulatora. Algorytm sterowania modelem ślizgowym wyróżnia się prostotą i jest niewrażliwy na zmiany parametrów modelu manipulatora i zewnętrzne zakłócenia mechaniczne w manipulatorze (tarcie, falowanie momentów napędowych [4, 7], itp.), oczywiście przy bezwzględny przestrzeganiu warunku, że przedziały dopuszczalnych zmian nieznaną parametrów są znane.

5.4 Pytania kontrolne

1. Jakie są kryteria optymalizacji ruchu manipulatora.
2. Na czym polega sterowanie optymalne.
3. Na czym polega sterowanie modelem ślizgowym.
4. Wymienić zalety sterowania modelem ślizgowym.

Miejsce na notatki

6 Nieliniowe układy dynamiczne

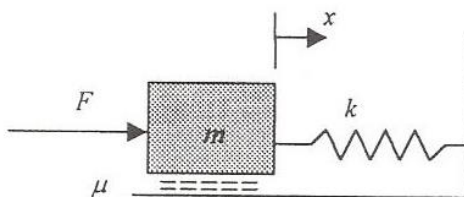
Zagadnienia sterowania układów liniowych, były przeprowadzone przy założeniach „liniowości”, czyli wzajemnej niezależności poszczególnych ogniw łańcucha kinematycznego robota, a tym samym przy istnieniu n niezależnych równań opisujących ruch manipulatora, związanych każde z odpowiednim ogniwem jego łańcucha kinematycznego. W rzeczywistości uzyskujemy dwie możliwości. Z jednej strony ułatwia to dokonywanie modelowania i opracowanie zasad sterowania robotem, z drugiej zaś powoduje powstawanie nieścisłości obliczeń parametrów sterowniczych, takich jak nierównomierność warunków tłumienia krytycznego, nierównomierność generowanego momentu obrotowego [11]. Dlatego też prowadzi się prace nad układami, które w większym stopniu odpowiadałyby rzeczywistym zjawiskom zachodzącym w manipulatorach robotów przemysłowych. Takimi układami są układy nieliniowe, przy opracowywaniu których pomija się podstawowe założenia modelowania liniowego, czyli rozdzielności poszczególnych ogniw łańcucha kinematycznego robota, ich modeli, oraz wykorzystuje się istniejące współzależności pomiędzy równaniami dynamiki opisującymi manipulator jako jedną współzależną całość (odpowiadającą zjawiskom względności ruchu ogniw) [11].

6.1 Układy nieliniowe

Dla układu nieliniowego, można wykorzystać nieliniowe wektorowe równania różniczkowe ruchu. Podstawowy schemat modelujący ogniwa robota składa się z masy m , sprężystości k i tarcia ślizgowego μ . W układzie tym (rys. 18) poddanym działaniu siły F dla sterowników liniowych założyliśmy, że sprężyna ma liniową charakterystykę, co oznacza, że napięcie sprężyny jest wprost proporcjonalne do jej naciągu i co mogliśmy zapisać jako [11]:

$$E_p = kx$$

gdzie: E_p – energia potencjalna sprężyny,
 x – przemieszczenie sprężyny (naciąg),
 k – stała sprężystości sprężyny.



Rys. 18. Model układu mechanicznego ramienia robota [11].

Jeżeli zaś w rzeczywistości owa sprężyna, jako nośnik energii dla układu, nie jest elementem liniowym, to układ przedstawiony na rys. 18 jest układem „quasi-statyczny” [4]. Oznacza to, że układ ten można z pewnym przybliżeniem traktować jako statyczny, czyli zrównoważony, ale tylko w pewnym nieskończenie małym przedziale czasowym i musi on podlegać analizie dynamicznej

[11]. To oznacza, że wraz z upływem czasu zmieniałyby rozwiązania równania równowagi tego układu (np. dla tłumienia krytycznego), co powodowałoby zmiany rozwiązań (pierwiastków) równania opisującego ten układ, odpowiednio do zmiany położenia ogniwa robota w przestrzeni. Stan taki sprawia, że dla jednego pełnego przemieszczenia robota z pozycji P_p do P_k nie można by wyznaczyć stałych wartości współczynników wzmocnienia k_p i k_v oraz k gwarantujących odpowiednie zachowanie się układu [11]. Aby takiemu zadaniu sprostać, konieczne staje się dostosowanie współczynnika k_p do nieliniowości elementu sprężystego (którego energia też zależy bezpośrednio od x). Działanie takie, dostosowujące prawo sterowania do nieliniowości jednego z elementów układu, nosi nazwę w teorii sterowania „sterowania linearyzującego” lub „linearyzacją prawa sterowania” [4, 7, 8]. Dzięki temu układ uzyska znamiona układu liniowego. Nieliniowość wpłynie na część modelową prawa sterowania i będzie zawierać element nieliniowości, zaś część sprzężeniowa pozostanie bez zmian, gdyż działanie układu sterowania powinno w dalszym ciągu spełniać podstawowe cele określone dla układów liniowych, tzn. dla zadanej pozycji docelowej trajektorii należy znaleźć wektor Q wymaganych sił i momentów napędowych, zdolnych przestawić robot do tego położenia, a dla danego wektora sił i momentów Q należy wyznaczyć przemieszczenie robota w przestrzeni i jego parametry (prędkość, przyspieszenie) [11]. Dla znanych w mechanice typowych elementów sprężystych ich charakterystyka może być opisana zależnością nieliniową, np. [4, 15]:

$$E_p = kx^3$$

Zatem część modelowa podobnie jak dla układów liniowych przyjmuje postać:

$$F = \alpha F' + \beta$$

gdzie: α – odpowiada masie jednostkowej m ,

β – zawiera składniki nieliniowy ($\mu v + kx^3$).

Część sprzężeniowa jest równa:

$$F' = a_r + k_v v_r + k_p E$$

Przy projektowaniu nieliniowych układów sterowania posługujemy się metodą, której warunkiem powodzenia jest pełna znajomość parametrów i właściwości modelowanego układu nieliniowego, a poszczególne etapy są następujące [4]:

- określić nieliniową modelową część prawa sterowania, usuwając nieliniowość rzeczywistego układu mechanicznego (największą trudność sprawia wyznaczenie nieliniowej charakterystyki i parametrów tak elementu nieliniowego, jak i całego układu),
- zredukować układ do układu liniowego, dzięki czemu może on być sterowany za pomocą prostej sprzężonej części prawa sterowania znanej dla masy jednostkowej.

6.2 Sterowanie nieliniowe manipulatora

Rzeczywisty układ sterowania, jest układem typu MIMO (wiele wejść + wiele wyjść), gdyż zawsze przy programowaniu ustalamy warunki realizacji przemieszczenia: przemieszczenie prędkość v , przyspieszenie a , zaś prawo sterowania wykorzystywane jest do obliczania sygnałów sterujących (nastaw) dla napędu robota. Podstawowa różnica, wynikająca z nieliniowości układu i ustalenia

koniecznych do zachowania parametrów ruchu polega na tym, że w rozdzielonym prawie sterowania składniki: F , F' i β przyjmują postać wektorów o wymiarze n , gdyż dotyczą całego układu mechanicznego robota o n stopniach swobody, zaś składnik α , to również macierz o wymiarach $n \times n$. Jest to zatem układ wielowymiarowy [11]. Zatem nowa postać (macierzowo-wektorowa prawa sterowania [4]) wynosi:

$$\Gamma = \alpha_M \Gamma' + \beta_w$$

Równanie na określenia momentów sił działających na ciało sztywne przyjmie teraz postać:

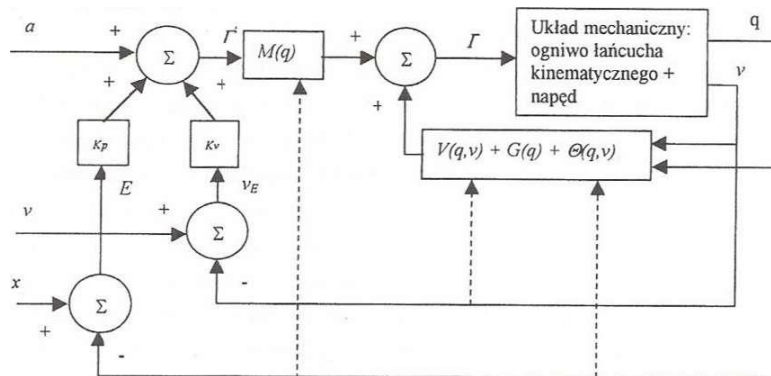
$$M_F = M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q)$$

gdzie: q – macierz położenia ogniów o wymiarach $n \times n$ (analogicznie do wektora przemieszczenia),
 $M(q)$ – macierz mas ogniów manipulatora, o wymiarze $n \times n$ (n – liczba ogniów manipulatora),
 $V(q, \dot{q})$ – wektor sił (momentów) odśrodkowych i Coriolisa o wymiarze n ,
 $G(q)$ – wektor sił grawitacji o wymiarze n , działających na ogniwa robota.

W schemacie modelu poruszającego się ciała sztywnego mamy jeszcze jeden element wpływający na przebieg przemieszczenia manipulatora, którym jest tarcie μ . W modelu rzeczywistym manipulatora ten element występuje w połączeniach ruchowych węzłów łańcucha kinematycznego. Siła tarcia zależy zarówno od przemieszczenia x jak i od prędkości v przemieszczania ciała, co możemy zapisać za pomocą złożonej funkcji $\theta(q, \dot{q})$. Otrzymujemy uzupełniony nowy model ruchu w następującej postaci [4]:

$$M_F = M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) + \theta(q, \dot{q})$$

Schemat blokowy układu realizującego powyższe prawo sterowania przedstawia rys. 19.



Rys. 19. Nieliniowy układ sterowania [4].

Niestety w praktyce układ sterowania robota, którego działanie w pełni opierałoby się na opracowanym rozwiązaniu, nie może istnieć. Wynika to z różnych przyczyn, do których w głównej mierze należy [11]:

- niemożność osiągnięcia pełnej ciągłości obliczeń komputerowych (prawo sterowania wykazuje właściwości idealnie ciągłe),
- niedokładności w modelu dynamicznym manipulatora, w którym uwzględnia się tylko składniki: $V(q, \dot{q})$, $G(q)$, $\theta(q, \dot{q})$ jako najbardziej istotne, zaś pomija wiele innych.

7 Opis matematyczny – równania

7.1 Równania Newtona-Eurela i Lagrange’a

Dynamiczne właściwości manipulatora, robota najprościej można określić jako zmiany jego położenia w czasie, w zależności od występującej siły i momentów napędowych. Zależności te opisuje się za pomocą układu równań różniczkowych ruchu [12]. Do osiągnięcia tego celu najczęściej wykorzystuje się dwie metody: Newtona-Eurela oraz Lagrange’a. Równania Newtona-Eurela opisują dynamikę poszczególnych członów, natomiast równania Lagrange’a wyprowadza się z zależności energii kinetycznej i potencjalnej manipulatora od jego współrzędnych konfiguracyjnych i ich pochodnych względem czasu [12].

Sterowanie manipulatorem, robotem polega na kolejnych zmianach konfiguracji ramienia w celu bezkolizyjnego przemieszczania efektora wzdłuż zaplanowanej trajektorii i aby pochwycił obiekt z właściwą orientacją. Sterowanie napędem odbywa się we współrzędnych konfiguracyjnych na podstawie informacji z czujników umieszczonych na ruchomych częściach manipulatora [11]. Równania Newtona-Eulera pozwalają na kompleksową analizę dynamiczną dowolnego układu mechanicznego [16]. Stosując formalizm matematyczny Newtona-Eulera do opisu dynamiki manipulatorów, należy na początku dokonać dekompozycji układu na podukłady związane z poszczególnymi członami układu. Kiedy i -te ramię jest swobodnym ciałem sztywnym, odpowiednie siły i momenty napędowe, przewyższając bezwładność ramienia, wprawiają go w ruch z pewnym przyspieszeniem lub opóźnieniem [6].

Jeśli są znane położenie środka masy i tensor bezwładności członu, to rozkład masy członu jest w pełni określony. Siła \mathbf{F} , która działa w środku masy członu i wywołuje ruch z przyspieszeniem $\mathbf{a}_s = \dot{\mathbf{v}}_s$ jest określona równaniem Newtona:

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}_s$$

Moment sił \mathbf{M} , który jest wywierany na członu, aby wywołać jego ruch obrotowy z przyspieszeniem kątowym $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ jest określony równaniem Eulera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}$$

gdzie: \mathbf{I}_S – tensor bezwładności członu, określony w układzie $\{S\}$ o początku w środku masy członu.

Jeden ze sposobów tworzenia modelu dynamiki, zalecamy zwłaszcza dla układów o niejednorodnej strukturze zawierających elementy mechaniczne, elektryczne, pneumatyczne i hydrauliczne, opiera się na zasadzie Hamiltona – nieujemnego działania [6]. Hamilton udowodnił, że każdy proces fizyczny zachodzący w przyrodzie minimalizuje funkcjonal przemiany energii:

$$\min \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$$

gdzie:

$$L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = E_K - E_P$$

E_K – energia kinetyczna układu,
 E_P – energia potencjalna układu,

$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t) \dots q_N(t)]$ – wektor wzajemnie niezależnych współrzędnych uogólnionych,
 $\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t) \dots \dot{q}_N(t)]^T$ – wektor prędkości.

W przypadku gdy struktura mechaniczna manipulatora określona jest za pomocą parametrów D-H jako współrzędne uogólnione przyjmujemy współrzędne konfiguracyjne, tzn. kąt konfiguracji θ lub przesunięcie członu q_i , w kolejnych parach kinematycznych, oraz ich zmianę w czasie, czyli prędkość zmiany kąta lub wsunięcia. Równanie Lagrange'a dla i -tej współrzędnej uogólnionej jest równe:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial y}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{gdzie: } i = 1, \dots, n$$

W równaniu Q_i oznacza siłę uogólnioną, wymuszenie działające w kierunku i -tej współrzędnej (przy ruchu obrotowym jest to moment, przy ruchu postępowym – siła). Do opisu dynamiki układu o n współrzędnych potrzeba n takich równań. W przypadku struktur mechanicznych manipulatorów przemysłowych odpowiada to ilości osi ruchu o jednym stopniu swobody, z niezależnym napędem dla każdej osi [6]. Siła ta może być określona metodą prac przygotowanych, które wykonują siły czynne działające na układ.

Energia kinetyczna członu i jest opisana przez wyrażenie:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{Si}^T \cdot \mathbf{v}_{Si} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_{Si} \cdot \boldsymbol{\omega}_i$$

gdzie:

m_i – masa członu,

\mathbf{I}_{Si} – macierz (3x3) tensora bezwładności, określona względem środka masy i wyrażona w układzie podstawy.

Pochodne energii kinetycznej, występujące w równaniu Lagrange'a przy uwzględnieniu prędkości liniowej i kątowej są następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dE_k}{d\dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n d_{ij} \ddot{q}_j + \frac{dd_{ij}}{dt} \sum_{j=1}^n \dot{q}_j$$

przy czym:

$$\frac{d}{dt} (d_{ij}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Pochodną energii potencjalnej otrzymamy w postaci:

$$G_i = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{vj}$$

ponieważ pochodna cząstkowa wektora \mathbf{p}_{Si} względem q_i jest taka sama jak j -ty wektor kolumnowy macierzy \mathbf{J}_{vi} .

Po podstawieniu ostatnich 3 zależności otrzymamy:

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i = Q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

gdzie:

$$c_{ijk} = \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_i}$$

Pierwszy wyraz równania reprezentuje momenty sił bezwładności. Drugi wyraz wynika z sił Coriolisa i sił odśrodkowych, a trzeci – z sił ciężkości. Zauważmy, że momenty sił oddziaływania członów, przedstawione jako składnik $d_{ij} \ddot{q}_j$ ($j \neq 1$), są opisane za pomocą elementów nie znajdujących się na przekątnej macierzy bezwładności manipulatora, natomiast siły Coriolisa i siły odśrodkowe wynikają z zależności macierzy bezwładności manipulatora od jego położenia [12].

7.2 Podsumowanie

Równania Lagrange'a choć bardziej złożone dają lepszy wgląd w całość problemu dynamiki manipulatora. Za ich pomocą można obliczyć interakcje między zmiennymi i widzieć wzajemny wpływ jednej wielkości na drugą, nawet gdy rozpatrujemy różne części manipulatora. Równania Lagrange'a są niezastąpione w przypadku współdziałania ramienia sztywnego z ramieniem elastycznym. Iteracyjny algorytm Newtona-Eulera jest prostszy, korzystając z niego łatwo wyznaczyć siły i momenty sił działające na poszczególne ramiona, ale trudno zobaczyć relacje kinematyczne między różnymi częściami manipulatora, ponieważ nie występują one w sposób jawny [6]. Niekiedy zastosowanie formalizmu Newtona-Eulera ma jednak tę wadę, że w równaniach występują wewnętrzne siły i momenty sił wynikające ze wzajemnego oddziaływania na siebie poszczególnych brył układu [16]. Natomiast praktycznie jest podejście używania obu modeli i korzystanie z nich wymiennie w zależności od potrzeb, zwłaszcza że dzięki wyrażeniom strukturalnym łatwo eliminować obliczenia powtarzalne lub zbędne.

Bardziej szczegółowe wyprowadzenia zależności przedstawionych w niniejszym rozdziale można znaleźć w następującej literaturze [1, 2, 4, 5, 6, 12, 18].

7.3 Pytania kontrolne

1. Co to jest jacobian i do czego go wykorzystujemy?
2. Podaj równania Newtona-Eulera.
3. Podaj równanie Lagrange'a dla i -tej współrzędnej uogólnionej.
4. Objasnij różnice pomiędzy metodą Newtona-Eulera a Lagrange'a.



Biuro Projektu:
ul. Nadbystrzycka 38H
20-618 Lublin

8 Literatura

- [1] Angeles J. Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Springer International Publishing AG, 2013.
- [2] Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized Inverses: Theory and Applications. Springer-Verlag, New York Inc. 2003.
- [3] Caban J., Nieoczym A., Misztal W., Barta D. Study of operating parameters of a plate conveyor used in the food industry. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019, 710, 1, 012020.
- [4] Craig J.J. Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i zastosowanie. WNT, Warszawa 1993.
- [5] Golnaraghi F., Kuo B.C. Automatic Control Systems. McGraw-Hill Education, 2017.
- [6] Hejmo W. Sterowanie robotami i manipulatorami przemysłowymi, Modele i metody matematyczne. Politechnika Krakowska, seria Informatyka Stosowana, Karków 1997.
- [7] Jacak W., Tchoń K. Podstawy robotyki. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1992.
- [8] Kaczorek T. Teoria sterowania i systemów. PWN, Warszawa 1993.
- [9] Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R. Podstawy teorii sterowania. WNT, Warszawa 2016.
- [10] Knapczyk J., Lebediew P.A. Teoria mechanizmów przestrzennych i manipulatorów. WNT, Warszawa 1990.
- [11] Kost G.K. Układy sterowania robotów przemysłowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2000.
- [12] Morecki A., Knapczyk J., Kędzior K. Teoria mechanizmów i manipulatorów. Podstawy i przykłady zastosowań w praktyce. WNT, Warszawa 2002.
- [13] Olszewski M. Manipulatory i roboty przemysłowe. WNT, Warszawa 1992.
- [14] Pritschow G. Technika sterowania obrabiarkami i robotami przemysłowymi. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995.
- [15] Siuta W. Mechanika techniczna WSzIP, Warszawa 1999.
- [16] Trojnecki M. Metody tworzenia modeli dynamiki mobilnych robotów kołowych. Modelowanie Inżynierskie, 2013, 17, 48, 150-161.
- [17] Tsai L.W. Robot Analysis. The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators. J. Wiley&Sons, New York, 1999.
- [18] Wawrzecki J. Teoria Manipulatorów. Politechnika Łódzka, Łódź 2007.
- [19] Winkler T. Komputerowo wspomagane projektowanie systemów antropotechnicznych. WNT, Warszawa, 2005.

PROGRAM WIEDZA EDUKACJA ROZWÓJ



Rzeczpospolita
Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

