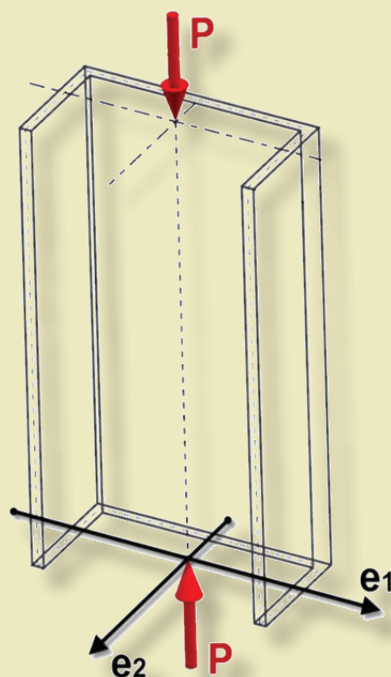


Paweł Wysmulski

Wpływ nieosiowości obciążenia na stateczność ściskanych cienkościennych słupów kompozytowych



Wpływ nieosiowości obciążenia
na stateczność ściskanych
cienkościennych słupów kompozytowych

Monografie – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Mechaniczny
ul. Nadbystrzycka 36
20-618 LUBLIN

Paweł Wysmulski

Wpływ nieosiowości obciążenia
na stateczność ściskanych
cienkościennych słupów kompozytowych



Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
Lublin 2020

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Ewa Magnucka-Blandzi, Politechnika Poznańska

prof. dr hab. inż. Zbigniew Kołakowski, Politechnika Łódzka

Monografia powstała na podstawie pracy doktorskiej autora napisanej pod kierunkiem dr hab. inż. Huberta Dębskiego, profesora uczelni, obronionej w 2020 roku na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lubelskiej

Badania zostały sfinansowane z Projektu Politechnika Lubelska – Regionalna Inicjatywa Doskonałości ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego na podstawie umowy nr 030/RID/2018/19

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2020

ISBN: 978-83-7947-406-6

Wydawca: Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej

www.biblioteka.pollub.pl/wydawnictwa

ul. Nadbystrzycka 36C, 20-618 Lublin

tel. (81) 538-46-59

Druk: DjaF – 30-092 Kraków, ul. Kmiotowicza 1/1

www.djaf.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl

Nakład: 100 egz.

Spis treści

Streszczenie.....	7
Abstract.....	8
Wykaz symboli i oznaczeń.....	9
1. Wstęp	11
1.1. Przegląd literatury.....	12
1.1.1. Stateczność kompozytowych elementów konstrukcyjnych.....	12
1.1.2. Modelowanie MES zagadnienia stateczności laminatów.....	15
1.1.3. Wpływ imperfekcji na zachowanie konstrukcji.....	17
1.2. Cel i zakres pracy.....	19
2. Stateczność cienkościennych słupów kompozytowych	21
3. Numeryczna analiza rozwiązania zagadnienia stateczności konstrukcji cienkościennych	25
3.1. Liniowa analiza stanu krytycznego.....	25
3.2. Nieliniowa analiza stateczności – metoda Newtona–Raphsona.....	26
4. Cienkościenne profile kompozytowe o przekrojach otwartych	29
4.1. Przedmiot badań.....	29
4.2. Metodyka badań eksperymentalnych.....	33
4.2.1. Aproksymacyjne metody wyznaczania wartości obciążenia krytycznego na podstawie badań doświadczalnych.....	36
4.3. Analiza numeryczna.....	38
5. Wyniki badań	41
5.1. Wyniki analizy stanu krytycznego.....	41
5.1.1. Słupy o przekroju ceowym.....	41
5.1.2. Słupy o przekroju zetowym.....	55
5.1.3. Podsumowanie analizy stateczności.....	68
5.2. Nieliniowa analiza stanu pokrytycznego.....	69
5.2.1. Analiza stanu pokrytycznego słupów o przekroju ceowym.....	69
5.2.2. Analiza stanu pokrytycznego słupów o przekroju zetowym.....	79
5.2.3. Inicjacja zniszczenia struktury kompozytu – słupy o przekroju ceowym.....	87
5.2.4. Inicjacja zniszczenia struktury kompozytu – słupy o przekroju zetowym.....	99
6. Podsumowanie	111
Literatura	115

Streszczenie

Wpływ nieosiowości obciążenia na stateczność ściskanych cienkościennych słupów kompozytowych

W pracy badano wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na stateczność oraz stany zakrytyczne ściskanych cienkościennych słupów o przekroju ceowym i zetowym wykonanych z kompozytu węglowo-epoksydowego. Badania prowadzono na fizycznych modelach konstrukcji wykonanych techniką autoklawową. Badane profile charakteryzowały się 8-warstwowym, symetrycznym układem warstw kompozytu względem płaszczyzny środkowej układu. Wykonane próbki poddawano ściskaniu na maszynie wytrzymałościowej, wprowadzając za pomocą specjalnie wykonanego przyrządu odpowiednie wartości mimośrodów obciążenia ściskającego. W trakcie prób rejestrowano pomiar siły, skrócenia słupa oraz ugięcia i odkształcenia ścianek i środka profilu. W trakcie badań doświadczalnych obserwowano pracę konstrukcji ulegającej utracie stateczności, dla której wyznaczono zakrytyczne ścieżki równowagi pokazujące zależność siła-ugięcie. Uzyskane charakterystyki pozwoliły na wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistej z wykorzystaniem odpowiednich metod aproksymacyjnych. Na podstawie otrzymanych wyników badań eksperymentalnych opracowano i walidowano modele numeryczne konstrukcji do obliczeń z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Zakres badań numerycznych obejmował liniową analizę stateczności, umożliwiającą wyznaczenie postaci wyboczenia w zależności od amplitudy nieosiowości obciążenia ściskającego oraz odpowiadających im wartości obciążenia krytycznego. Drugi etap obliczeń stanowiła nieliniowa analiza konstrukcji z zaimplementowanymi imperfekcjami geometrycznymi odpowiadającymi najniższym postaciom wyboczenia. Prowadzone obliczenia nieliniowe umożliwiły dokonanie oceny stopnia wyężenia kompozytu z wykorzystaniem kryterium Tsai–Wu. Obliczenia prowadzono do osiągnięcia parametru krytycznego w kryterium Tsai–Wu, co umożliwiło określenie mechanizmu inicjacji uszkodzenia materiału kompozytowego. Na podstawie uzyskanych wyników wyznaczono pokrytyczne ścieżki równowagi modeli numerycznych, które weryfikowano z charakterystykami doświadczalnymi konstrukcji rzeczywistych, uzyskując zadowalającą zgodność wyników symulacji numerycznych oraz badań doświadczalnych. Otrzymane wyniki potwierdziły adekwatność opracowanych modeli numerycznych do oceny utraty stateczności oraz pracy konstrukcji w zakresie zakrytycznym w zależności od wartości amplitudy mimośrodu obciążenia ściskającego.

Słowa kluczowe: struktury cienkościenne; wyboczenie; stan pokrytyczny; nieosiowość obciążenia, metoda elementów skończonych.

Abstract

Impact of Load Eccentricity on Stability Compressed Thin-Walled Composite Columns

The study investigates the effect of eccentric load on the stability and postcritical states of thin-walled carbon/epoxy composite C-section and Z-section columns under compression. Tests are performed on physical models of these structures produced by the autoclave technique. The columns have a symmetrical 8-ply lay-up. The test specimens are subjected to compression on a testing machine provided with a special fixture for introducing eccentric compressive loads. In the tests, loading force, column shortening, deflection and strains of the column walls and web are measured. The experiments involve examination of the operating performance of the structure undergoing buckling and determination of its postcritical equilibrium paths describing the relationship between force and deflection. The obtained characteristics led to determination of the critical load for real structures by suitable approximation methods. Based on the experimental results, numerical models of composite structures are designed and verified by the finite element method. The scope of the numerical analysis includes performing a nonlinear analysis of stability, which allows for determination of the buckling mode depending on the amplitude of compressive load eccentricity and the corresponding critical loads. The second stage of the analysis involves performing a nonlinear analysis of the structures with implemented geometric imperfections reflecting the lowest buckling modes. The nonlinear analysis is performed using the Tsai–Wu criterion to determine effort of the composite material. The computations are run until the critical parameter is reached in the Tsai–Wu criterion, allowing for description of the failure initiation mechanism in the composite material. Based on the results, postcritical equilibrium paths of the numerical models are determined. The equilibrium paths are then compared with the experimental characteristics of real structures. The numerical results and experimental findings show a satisfactory agreement. The results confirm that the numerical models are adequate for estimating the stability loss and performance of composite structures in the postcritical range, depending on the amplitude of compressive load eccentricity.

Keywords: thin-walled structures; buckling; post-buckling; eccentric load; finite element method.

Wykaz symboli i oznaczeń

- w – szerokość i -tej płyty;
 g – grubość i -tej płyty;
 l – długość i -tej płyty;
 u_i, v_i, w_i – składowe przemieszczenia powierzchni środkowej dla i -tej ściany;
 x_i, y_i, z_i – współrzędne lokalnego układu kartezjańskiego dla i -tej ściany słupa;
 σ_{xx}, σ_{yy} – naprężenia w płaszczyźnie płyty;
 σ_{zz} – naprężenia w kierunku normalnym do płyty;
 τ_{xz}, τ_{yz} – naprężenia styczne;
 τ_{xy} – naprężenia w płaszczyźnie;
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – odkształcenia względne warstwy środkowej odpowiednio w kierunku x_i, y_i ;
 ε_z – odkształcenia względne w kierunku z_i ;
 γ_{xyi} – kąt odkształcenia postaciowego warstwy środkowej;
 κ_{xi}, κ_{yi} – przyrosty krzywizny powierzchni środkowej i -tej płyty;
 κ_{xyi} – przyrost skrzywienia powierzchni środkowej i -tej płyty;
 P_1, P_2 – uogólnione siły zewnętrzne;
 I_a, I_b – uogólnione siły wewnętrzne;
 P_Δ – obciążenie przyrostowe;
 R_a, R_b – siły resztkowe;
 K_0, K_a – macierze sztywności;
 u_0, u_a, u_b – wektory przemieszczenia;
 C_a, C_b – przyrosty przemieszczenia;
 E_1, E_2 – moduły Younga w głównych kierunkach ortotropii 1,2;
 G_{12} – moduł Kirchhoffa;
 ν_{ij} – liczby Poissona: i – kierunek włókien kompozytu,
 j – kierunek prostopadły do kierunku włókien;

- F_{TU1}, F_{TU2} – wytrzymałość na rozciąganie kompozytu w głównych kierunkach ortotropii;
- F_{SU} – wytrzymałość na ścinanie kompozytu;
- F_{CU1}, F_{CU2} – wytrzymałość na ściskanie kompozytu w głównych kierunkach ortotropii;
- a_0, a_1, a_2 – współczynniki pokrytecznej ścieżki równowagi;
- P_{cr} – siła krytyczna;
- w_{0C}, w_{0Z} – amplituda ugięcia wstępnego: C – słup o przekroju ceowym,
 Z – słup o przekroju zetowym;
- w_i – amplituda ugięcia wywołanego siłą P_i ;
- U_x, U_y, U_z – translacyjne stopnie swobody słupa;
- UR_x, UR_y, UR_z – rotacyjne stopnie swobody słupa;
- e_1, e_2 – parametr nieosiowości obciążenia: 1 – kierunek równoległy do środka, 2 – kierunek prostopadły do środka słupa;
- R^2 – współczynnik korelacji;

1. Wstęp

Rozwój cywilizacyjny i przemysłowy wiąże się z koniecznością projektowania coraz bardziej zaawansowanych technologicznie konstrukcji, zwłaszcza w takich dziedzinach przemysłu, jak m.in.: kosmonautyka, lotnictwo czy przemysł motoryzacyjny. We wszystkich tych przypadkach istotne znaczenie odgrywają konstrukcje cienkościenne, którym stawiane są coraz bardziej rygorystyczne wymagania dotyczące wytrzymałości i sztywności ustroju nośnego. Aby im sprostać konstruktorzy zmuszeni są do poszukiwania wciąż nowych rozwiązań konstrukcyjnych, technologicznych czy materiałowych. Prowadzi to do zastępowania we współczesnych konstrukcjach klasycznych materiałów inżynierskich (metali) materiałami o bardziej złożonej budowie, do których zalicza się materiały kompozytowe.

Kompozyt stanowi materiał, składający się z co najmniej dwóch komponentów, różniących się właściwościami. Jednym z komponentów konstrukcyjnych jest osnowa, która zapewnia spójność, twardość oraz elastyczność materiału, natomiast drugi stanowi zbrojenie, zadaniem którego jest zapewnienie odpowiedniej wytrzymałości i sztywności materiału. W kompozytach można łączyć różne rodzaje materiałów, takich jak metale, tworzywa polimerowe czy ceramiczne, wykorzystując ich specyficzne właściwości. Istotą materiałów kompozytowych jest otrzymanie całkowicie odmiennych właściwości w porównaniu z właściwościami komponentów składowych. Zaletą tego typu materiałów jest możliwość świadomego kształtowania ich właściwości już na etapie projektowania.

Kolejny ważny problem wymagający rozwiązania związany jest z koniecznością, zwłaszcza w konstrukcjach lotniczych, istotnego obniżenia masy gotowego produktu. Materiałami, które posiadają powyższe właściwości, są w szczególności kompozyty o osnowie polimerowej wzmocnione włóknami szklanymi (GFRC), węglowymi (CFRC) lub kevlarowymi. Cienkościenne elementy nośne wykonane z kompozytów polimerowych – laminaty, charakteryzują się wysokimi właściwościami mechanicznymi oraz sztywnościowymi, jak również niewielką masą. Nośność tego rodzaju ustrojów zależy głównie od właściwości zastosowanych materiałów, liczby warstw laminatu oraz kierunków ułożenia włókien w poszczególnych warstwach (konfiguracji laminatu).

Właściwości mechaniczne cienkościennej konstrukcji kompozytowych stwarzają możliwości ich praktycznego zastosowania między innymi w lotniczych konstrukcjach półskorupowych i skorupowych, które mogą bezpiecznie pracować w stanie pokrytycznym sprężystym. Dotyczy to przede wszystkim lokalnego wyboczenia struktury o statecznej ścieżce równowagi pokrytycznej, gdyż w takim przypadku wzrost wartości przemieszczeń możliwy jest jedynie poprzez zwiększenie wartości obciążenia. Te cechy konstrukcji cienkościennej narzu-

cają konieczność opisu pracy ustroju w pełnym zakresie obciążenia, uwzględniając możliwość wystąpienia lokalnego wybożenia elementów struktury i jej pracy w zakresie obciążeń pokrytycznych.

Efektywnym narzędziem wspomagającym proces projektowania konstrukcji cienkościennych, w tym wykonanych z materiałów kompozytowych jest metoda elementów skończonych (MES). Zastosowanie oprogramowania CAE (ang. Computer Aided Engineering), wykorzystującego metodę elementów skończonych, z uwagi na rozwijane i wciąż udoskonalane techniki obliczeń numerycznych, umożliwia przeprowadzanie złożonych analiz struktur kompozytowych z uwzględnieniem zachowania materiału w zakresie pokrytycznym oraz stanach granicznych. Jest to możliwe dzięki zaimplementowanym we współczesnych programach MES specjalistycznym procedurom zawierającym możliwości modelowania struktury kompozytu, właściwości materiałowych oraz kryteriów zniszczenia dedykowanych materiałom kompozytowym.

W niniejszej monografii zaprezentowano badania ściskanych cienkościennych słupów kompozytowych prowadzone metodami doświadczalnymi i numerycznymi. Badania koncentrowały się na określeniu wpływu mimośrodowości obciążenia oraz konfiguracji układu warstw kompozytu na stateczność oraz pokrytyczną pracę badanych profili. Badania prowadzono do momentu wystąpienia inicjacji zniszczenia materiału kompozytowego ocenianego z wykorzystaniem metody emisji akustycznej (badania eksperymentalne) oraz z wykorzystaniem inicjacyjnych kryteriów zniszczenia (badania numeryczne MES). W prowadzonych analizach numerycznych uwzględniono również wpływ wartości amplitudy wstępnych imperfekcji geometrycznych na stateczność i pokrytyczne ścieżki równowagi ściskanych profili kompozytowych. Zakres pracy obejmuje zagadnienia dotyczące nieliniowej stateczności konstrukcji cienkościennych oraz mechaniki materiałów kompozytowych.

1.1. Przegląd literatury

1.1.1. Stateczność kompozytowych elementów konstrukcyjnych

Pierwsze cienkościenne ustroje nośne zastosowane w konstrukcjach lotniczych pojawiły się na początku XX wieku. Dynamiczny rozwój badań nad ustrojami tego typu przypadał na lata 50. XX wieku. Analiza przyczyn uszkodzeń konstrukcji cienkościennych sprawiła, że zjawisko utraty stateczności stało się przedmiotem wnikliwych badań. W ich efekcie powstało wiele prac o charakterze naukowym, między innymi Naleszkiewicza [115] oraz Timoshenki [153], [154], [155]. Wnikliwy przegląd literatury omawiającej stateczność konstrukcji cienkościennych do lat 70. XX wieku można znaleźć w pracach Hutchinsona oraz Koitera [58]. Prace prowadzone przez Koitera [65], [66] zaowocowały opracowaniem ogólnej nieliniowej teorii stateczności układów zachowawczych, która z powodu jej ogólnego charakteru stała się najbardziej popularną teorią w tym zakresie. Wnikliwe jej omówienie w języku polskim przedstawiają pozycje literaturowe:

Grybosia [55] oraz Królaka [91]. Modyfikacji teorii Koiterai przedstawienia jej w postaci dogodnej do praktycznego zastosowania podjęli się Byskov oraz Hutchinson [26]. Jest ona oparta na asymptotycznym rozwinięciu pokrytycznej ścieżki równowagi. Opis matematyczny energii potencjalnej układu przedstawiono w postaci szeregu potęgowego, zawierającego amplitudy liniowe postaci wybożenia w pobliżu punktu bifurkacji. Stateczność ustroju określa się znakiem drugiej pochodnej energii potencjalnej całego układu.

Zmodyfikowana asymptotyczna teoria stateczności dla układów zachowawczych zastosowana została do analiz pracy rzeczywistych ustrojów. W opracowaniach Byskova [27], Thompsona i Hunta [152] oraz Tvergaarda [157], [158] zastosowano ją do opisu zachowania profili o prostych przekrojach poprzecznych. Analizy ściskanych słupów o stałych przekrojach poprzecznych swobodnie podpartych, z zastosowaniem metody pasm skończonych dokonano w pracach Benito oraz Sridharana [20], [21], Goltermanna i Mollmana [53], Mollmana i Goltermanna [112], Sridharana [141], Pignataro oraz Luongo [125]. Prace Byskova oraz Hansena [25], Byskova [28], Lanzo oraz Garcea [100], opisują zachowanie ustrojów przy założonych warunkach brzegowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych.

Dostępne metody asymptotycznej teorii stateczności nie znalazły zastosowania w praktyce z powodu ich skomplikowanych procedur. Koniecznym było zatem opracowanie uproszczonej procedury rozwiązywania zagadnień interakcyjnego wybożenia, którą nazwano metodą segmentową. Jej nieskomplikowany charakter, polegający między innymi na wykorzystaniu metody szerokości efektywnych, która jest stosowana w zaleceniach projektowych, zastosowali w swoich pracach: Bradford i Hancock [23] oraz Wang [161], [162] w celu zbadania zachowania słupów liniowo-sprężystych. Techniki komputerowych spowodował dynamiczny rozwój metod dyskretnych. Wyniki badań stateczności ustrojów nośnych z wykorzystaniem metody elementów skończonych przedstawili m.in. Attard [9], Barsoum oraz Gallagher [17], analizując zjawisko globalnego wybożenia elementów belkowych. Opisem zachowania elementów płytowych z wykorzystaniem MES zajmowali się m.in. Batoz oraz inni [18], [118], zaś badaniami nad ustrojami powłokowymi Dvorkin oraz Bathe. [48].

Analizą zjawiska globalnej i lokalnej postaci wybożenia cienkościennych profili o przekrojach otwartych, poddanych obciążeniu ściskającemu zajęli się w swoich pracach: Grimaldi oraz Pignataro [54], Pignataro [124], Sridharan oraz Benito [139]. Wyniki badań wykazały, że wystąpienie postaci giętej w przypadku lokalnego oraz globalnego wybożenia jest najbardziej niebezpieczne. Prace Byskova oraz Hutchinsona [26], Koitera [66], Manevicha [109], [110], Sridharana oraz Penga [140], Królaka [90], Kołakowskiego [75], [76], Sridharana oraz Ali [138] dotyczą rozszerzonej analizy uwzględniającej wyższą postać lokalną. Interakcja postaci lokalnych mających znacząco różne długości półfal oraz dwóch różnych globalnych postaci wybożenia jest bardzo słaba, lub w ogóle nie zachodzi, co szczegółowo opisano w pracach Kołakowskiego [79], [83], [84]

oraz Manevicha [109], [110]. W pracach Kołakowskiego [77], Pignataro [124], Sridharana oraz Ali [138] wykazano, że globalna postać wyboczenia (opisana równaniem Eulera) może zachodzić wyłącznie przy parzystej liczbie symetrycznych/antysymetrycznych lokalnych postaci wyboczenia, natomiast postać giętno-skrętna, w przypadku symetrycznej i antisymetrycznej pary lokalnych postaci.

Informacje dotyczące stateczności konstrukcji wykonanych z klasycznych materiałów inżynierskich wynikające z wyników analiz eksperymentalnych oraz numerycznych są powszechnie dostępne w literaturze. Zostały one w przeważającym stopniu zbadane i szeroko opisane. W latach 70. XX wieku nastąpił rozwój badań doświadczalnych dotyczących materiałów kompozytowych. Publikacje zespołu Davisa [38] dotyczą zachowania się ściskanych warstwowych płyt kompozytowych, zbrojonych włóknami szklanymi w pełnym zakresie obciążenia. W tamtym okresie do wyznaczania sił krytycznych płyt oraz słupów wykorzystywano metodę Southwella, którą opisali w swoich pracach m.in.: Ashtoni Love [8], Kicher i Mandell [62], Barbero oraz Raftoyiannis [14]. Wnikliwy opis doświadczalnych metod wyznaczania wartości obciążeń krytycznych dla materiałów kompozytowych zawarty jest w pracy Venkataramaiaha oraz Roorda [160]. Odrębnym zagadnieniem, którym zajmowali się Lukoshevichyus [106], Libove [102], Tung oraz Surdenas [156], była utrata stateczności na skutek oddziaływania złożonego obciążenia. Tematyką ściskanych płyt z żebrami zajmowali się w swoich badaniach między innymi Lanzi [99] oraz Romeo [133]. Wyniki badań doświadczalnych dotyczących zachowania się ściskanych cienkościennych profili kompozytowych zawarto w nielicznych pracach, których autorami są: Arbelo i inni [3] Barbero i inni [13], Barbero i Tomblin [15], [16], Barbero oraz Raftoyiannis [14].

Zbiór aktualnego stanu wiedzy w zakresie zagadnień ściskanych cienkościennych konstrukcji wykonanych z materiałów izotropowych przedstawili w opracowaniu Chou oraz Rhodes [31]. W kolejnych latach: Singer, Arbocz i Weller dokonali przeglądu literatury z zakresu badań doświadczalnych [136]. W 2002 roku zespół Singera wydał drugi tom [137], w którym oprócz zagadnień związanych z ustrojami izotropowymi przedstawiono tematykę cienkościennych konstrukcji kompozytowych.

Analizę interakcyjnego wyboczenia, stanów pokrytycznych oraz nośności cienkościennych konstrukcji opisano w wielu publikacjach. Na uwagę zasługują m. in. prace Kołakowskiego [78], Królaka (red.) [90], Kubiaka [96] oraz Bazanta [19], które przedstawiają opis zjawiska stateczności z uwzględnieniem sprzężonych postaci wyboczenia ściskanych konstrukcji cienkościennych. Artykuły Kołakowskiego [75], [76], [77], [82], [84] oraz Tetera [150] prezentują zagadnienia wyboczenia interakcyjnego w strukturach cienkościennych w przypadku różnych profili o przekrojach otwartych oraz zamkniętych.

Rosnąca tendencja zastępowania tradycyjnych materiałów izotropowych materiałami o właściwościach ortotropowych, posiadających szerokie możliwości

kreowania właściwości mechanicznych sprawia, że współczesnym obszarem badań stały się cienkościenne ustroje nośne wykonane z materiałów kompozytowych. Analizą zjawiska stateczności ustrojów nośnych wykonanych z nowoczesnych materiałów kompozytowych, zajmowali się w swoich pracach m. in. Kołakowski i Królak [71], Kołakowski i Kowal–Michalska [69] oraz Kubiak [96], opisując zachowanie płyt. Pozycje literaturowe: Kołakowski [70], [80], [85], Kołakowski i Kubiak [72], Kołakowski i Teter [73], [74], [145] Królak i Mania [93], Kołakowski oraz Kowal–Michalska [68], poświęcone są opisowi pracy ściskanych słupów kompozytowych. Opis charakteru pracy sprężystych słupów kompozytowych w pełnym zakresie obciążenia przedstawili obszernie w swoich pracach: Dębski [45], [47], Dębski i inni [41], [39], [40], [44], Kubiak i inni [95], [94], [22], [122], Banat oraz Mania [11], [10], Mania i inni [111], prezentując w nich wyniki badań stateczności i nośności cienkościennych ortotropowych ustrojów poddanych ścisnaniu. Istotną cechą w/w prac w obszarze badań dotyczących ściskanych profili kompozytowych jest szerokie zaprezentowanie wyników badań eksperymentalnych do których dostęp we współczesnej literaturze jest jeszcze ograniczony.

1.1.2. Modelowanie MES zagadnienia stateczności laminatów

Metoda elementów skończonych wprowadzona została na początku drugiej połowy dwudziestego wieku przez zespół Turnera. Zastosowanie MES do rozwiązania zagadnienia stateczności jako pierwsi opublikowali w swoich pracach Argyris [5] oraz Gallagher [52] w latach 60. XX wieku, opisując macierz sztywności naprężeniowej. W kolejnych latach dynamicznie rozwijano tę metodę, wprowadzając coraz bardziej zaawansowane elementy skończone, jak również formułowano równania przyrostowe oraz procedury iteracyjne. Umożliwiło to numeryczne opisanie rzeczywistych nieliniowych ścieżek równowagi, znacznie rozszerzając zastosowanie metody elementów skończonych.

Podstawową wadą konstrukcji cienkościennych jest możliwość występowania zjawiska utraty stateczności. Opis tego zjawiska wiąże się z koniecznością rozwiązania zagadnienia nieliniowego. Jedną z ogólnie dostępnych metod służących do rozwiązywania tego typu zagadnień jest metoda elementów skończonych. Dostępnych jest wiele publikacji opisujących metody wyznaczania nieliniowych ścieżek równowagi. Jedną z nich jest metoda Riksa [130], [131], [132], która umożliwia opisanie ścieżek równowagi w przypadku kilku ekstremów. Wymienioną metodę rozwinął i zmodyfikował w swojej pracy Crisfield [34]. Jedną z najpopularniejszych metod numerycznych stosowanych do obliczeń zagadnień nieliniowych jest przyrostowo-iteracyjna metoda Newtona–Raphsona. Opisano ją w pracach między innymi Crisfielda [36], [35] oraz Waszczyszyna [165]. Inne metody numeryczne przedstawiono w publikacji Rakowskiego oraz Kasprzyka [129] i monografii Kleibera [64].

Numeryczne procedury nieliniowe zostały z powodzeniem zastosowane do opisu zagadnienia utraty stateczności i stanów granicznych kompozytowych konstrukcji cienkościennych. Przykład wykorzystania metody elementów skończonych do rozwiązania zagadnienia nieliniowej stateczności i nośności konstrukcji kompozytowych można znaleźć m. in. w pracach Alfano oraz Crisfielda [1], Camanho oraz Davila [29], Kołakowskiego [81], [85], Kreji [88], Kubiaka [96], Tetera oraz Kołakowskiego [145], [147]. Publikacje zawierające weryfikację symulacji numerycznych MES wynikami badań doświadczalnych, przeprowadzonych na kompozytowych elementach konstrukcyjnych przedstawili m.in.: Dębski [45], [46], Dębski i inni [39], [40], [43], Kim i inni [63], Orifici i inni [120], opisując zachowanie struktur o złożonych kształtach przekroju poprzecznego, poddawanych prostym przypadkom obciążenia: ściskania, ścinania lub prostego zginania.

Kompozytowe struktury nośne stanowią w wielu rozwiązaniach konstrukcyjnych elementy o znaczeniu krytycznym. Do wyznaczenia wartości obciążenia krytycznego oraz określenia formy deformacji ustroju stosowana jest liniowa analiza sprężysta. Polega ona na rozwiązaniu zagadnienia własnego stanu równowagi konstrukcji, odpowiadającemu minimum energii potencjalnej całego układu, opisanego przez Rusińskiego i innych [134]. Przykłady analiz numerycznych dotyczących ściskanych profili kompozytowych przedstawiają m.in. prace: Dębski [45], [47], Dębski i inni [39], [44], Kołakowski [78], [81], Kubiak [96], w których Autorzy w oparciu o liniowe procedury numeryczne wyznaczyli wartości obciążenia krytycznego oraz najniższą postać własną rozpatrywanych ustrojów cienkościennych.

Badania stanów pokrytycznych z wykorzystaniem analizy nieliniowej przedstawili w publikacjach Ciechoń [33], Kopecki [86] oraz Thompson i inni [152], uwzględniając nieliniowe zależności pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami. Umożliwia to wyznaczenie tzw. pokrytycznych ścieżek równowagi, określających zależności pomiędzy parametrami statycznymi, odpowiadającymi obciążeniu struktury, a parametrami geometrycznymi określającymi przemieszczenia jej węzłów. Wyniki badań związanych z analizą stanu pokrytycznego struktur kompozytowych pracujących pod obciążeniem przedstawili m.in.: Banat i inni [10], Dębski i inni [39], [44], [41].

Wyznaczenie w procesie obliczeń numerycznych wartości obciążenia niszczonego wiąże się z koniecznością wykorzystania kryteriów wyężenia oraz zniszczenia materiału kompozytowego (kryteria naprężeniowe oraz odkształceniowe). Szeroki opis kryteriów zniszczenia kompozytu, jak m.in.: maksymalnych naprężeń, kryterium Tsai–Hill’a, kryterium tensorowe Tsai–Wu, Azzi–Tsai–Hill’a oraz kryterium Pucka, które zostały zaimplementowane w programach komercyjnych MES (np. Abaqus®, Ansys®) przedstawili w swoich pracach: Hyla [59], Jones [61], Orifici i inni [119], Talreja i inni [143]. W pracach m.in. Dębskiego [45] oraz Tetera i inni [144], kryteria te zostały pomyślnie zweryfikowane w odniesieniu do oceny nośności cienkościennych słupów kompozytowych poddanych

osiowemu ściskaniu. Autorzy przy opracowaniu modelu dyskretnego MES zwrócili szczególną uwagę na odwzorowanie rzeczywistych warunków eksperymentu, mających istotny wpływ na spełnienie kryterium zniszczenia.

1.1.3. Wpływ imperfekcji na zachowanie konstrukcji

Istotnym problemem w rzeczywistych konstrukcjach nośnych jest możliwość występowania takich czynników jak: imperfekcje geometryczne, nieosiowości obciążenia, niedokładność warunków brzegowych i inne, które w znaczny sposób zmieniają charakter pracy ustroju, wprowadzając układ w złożony stan obciążenia. W takiej sytuacji warunki pracy konstrukcji cienkościennej ulegają zasadniczym zmianom, mogącym doprowadzić do przedwczesnej utraty stateczności elementów nośnych konstrukcji oraz ich zniszczenia w zakresie obciążeń eksploatacyjnych. Obecny stan wiedzy oparty jest na niewielkiej ilości publikacji opisujących tego typu zagadnienia. Przeważają prace prezentujące wyniki badań eksperymentalnych elementów nośnych konstrukcji budowlanych. Prace poświęcone określeniu wpływu wielkości nieosiowości obciążenia na możliwość wystąpienia utraty stateczności i zniszczenia tego typu elementów przedstawili m.in.: Wang i inni [164], [163], [104], Portoles i inni [126], Qu i inni [127], Ellobody i inni [50] oraz Zhou i inni [168], analizując zachowanie ściskanych kompozytów stalowo–betonowych. Liu oraz Chantel [105], Zhu i inni [169], Guo i inni [56] zaprezentowali wyniki badań wpływu nieosiowości obciążenia w przypadku słupów izotropowych o prostych przekrojach poprzecznych.

Podstawowym przeznaczeniem cienkościennych profili wzmacniających jest przede wszystkim przenoszenie obciążeń działających wzdłuż osi profilu. W rzeczywistych konstrukcjach cienkościennych występuje zaburzenie idealnych warunków osiowego obciążenia tych elementów, które może być wywołane różnymi czynnikami (technologicznymi, eksploatacyjnymi, itp.). Prowadzi to zazwyczaj do niekorzystnych dla konstrukcji cienkościennych zmian charakteru pracy jej elementów nośnych. Praca Królaka i innych [92] przedstawia analizę wpływu nieosiowości obciążeń ściskających na lokalną i globalną postać wyboczenia izotropowych oraz ortotropowych słupów o regularnym, sześciokątnym przekroju poprzecznym. Publikacje Elghazouli, Chryssanthopoulou oraz Esonga [32], [49] dotyczą badań wyboczenia pod wpływem obciążenia nieosiowego cylindrycznych cienkościennych elementów wykonanych z kompozytu węglowo–epoksydowego. Analizie zjawiska utraty stateczności długich słupów kompozytowych (GFRP) charakteryzujących się otwartymi przekrojami poprzecznymi obciążonymi mimośrodowo poświęcone były prace Mottrama, Browna [114], Nunes’a, Correia i innych [117] oraz Ragheba [128]. Istotnym zagadnieniem z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji jest możliwość określenia wpływu tych czynników na pracę konstrukcji w pełnym zakresie obciążeń.

Ważnym aspektem w analizie pracy cienkościennych struktur nośnych, wykonanych z materiałów kompozytowych jest uwzględnienie ich imperfekcji geometrycznych. Znajomość wpływu nieuniknionych niedokładności wykonania kompozytu na jego pracę jest istotna, gdyż materiały tego typu stosowane są w konstrukcjach lotniczych lub łopatach turbin wiatrowych, które pracują w warunkach wysokich i złożonych obciążań. W latach 70. XX wieku Thompson [151] opisał wpływ zwiększenia czułości struktury, uwzględniając jej niedoskonałości geometryczne w badaniach utraty stateczności ustroju. Prace Castro i innych [30], Li i Qiao [101], Orifici i Bisagni [121], Schilloi i innych [135] oraz Ismail'a i innych [60] poświęcone zostały analizie oddziaływań imperfekcji geometrycznych na zachowanie się w stanie krytycznym ściskanych cienkościennych słupów cylindrycznych. Prace Broggi i Schuëller [24] oraz Friedrich i innych [162] opisują wpływ modelowania niedokładności wykonania na wyboczenie cienkościennych słupów cylindrycznych. Efekt oddziaływania imperfekcji geometrycznych w przypadku długich słupów o przekrojach otwartych przedstawiają publikacje Mottrama, Browna i innych [113] oraz Ascione i innych [161]. W celu zaprojektowania struktury kompozytowej z uwzględnieniem zmniejszonej czułości, spowodowanej przez niedoskonałości geometryczne, stosuje się podejście opisane przez Lindgaard i innych [103]. Polega ono na zastosowaniu procedury nieliniowej optymalizacji wyboczenia elementów kompozytowych z uwzględnieniem „najgorszej” niedoskonałości kształtu.

Metodę "najgorszej" niedoskonałości kształtu stosuje się w celu określenia imperfekcji geometrycznych kompozytu, które powodują obniżenie wartości przynieszonego obciążenia krytycznego struktury. Opisałi to w swoich pracach: Deml i Wunderlich [42], Wunderlich i Albertin [167], Damatty i Nassef [37], Kristanic i Korelc [89], Henrichseni i inni [57]. Analizy tego typu umożliwiają wyznaczenie maksymalnych rozbieżności wartości obciążenia krytycznego między idealną, a rzeczywistą konstrukcją kompozytową.

W trakcie projektowania kompozytowych struktur warstwowych konstruktor jest często ograniczony zestawem dostępnych materiałów w tym zakresie. W celu zapewnienia najkorzystniejszych wymagań projektowych zaproponowana została optymalizacja dyskretna materiału (DMO), którą rozwinęli w swoich pracach Lund i Stegmann [107] oraz Stegmanni oraz Lund [142]. Metoda Discrete Material Optimization definiuje zestaw materiałów optymalnych pod względem zwiększenia wartości obciążenia krytycznego, które są wybierane z zestawu dostępnych materiałów proponowanych w podobny sposób, jak w przypadku optymalizacji topologii. Metodę DMO w swojej pracy przedstawił Lund [108], opisując procedurę optymalizacji liniowego wyboczenia kompozytowych konstrukcji powłokowych oraz Henrichsen i inni [57] przy opisie optymalizacji zjawiska utraty stateczności w przypadku kompozytowego słupa o przekroju ceowym.

Występowanie niedokładności związanych z tolerancją wykonania (imperfekcje geometryczne), nieodpowiednimi warunkami brzegowymi czy brakiem osiowości obciążenia prowadzi do istotnej zmiany charakteru pracy cienkościennych

ustrojów kompozytowych od początku procesu obciążania. Elementy rzeczywistych konstrukcji nośnych połączone są ze sobą w sposób odbiegający od idealnych warunków brzegowych (np. brak współosiowości elementów). Jest to przyczyną powstawania istotnych różnic warunków pracy ustroju rzeczywistego w porównaniu z konstrukcją idealną, której postawiono określone wymagania konstrukcyjne. Publikacje Arbocz'a [4] oraz Lam i Loy [97], [98] opisują problem wpływu warunków brzegowych na pracę cienkościennych elementów cylindrycznych. W pracy Urbaniaka, Tetera oraz Kubiaka [159] badano teoretycznie oraz eksperymentalnie wpływ warunków brzegowych na proces wybożenia, zachowanie w stanie pokrytycznym oraz wartość obciążenia niszczącego cienkościennych słupów kompozytowych (GFRP) o przekroju ceowym. Praca Teter, Dębski i Samborski [144] przedstawia badania stanu krytycznego i zniszczenia ściskanych omegowych słupów kompozytowych CFRP z uwzględnieniem różnych wariantów warunków brzegowych. W pracach Ascione [6] oraz Nguyen i innych [116] poddano analizie wpływ warunków brzegowych oraz imperfekcji geometrycznych na proces wybożenia dwuteowych belek kompozytowych. Przedstawione pozycje literaturowe stanowią podsumowanie obecnego stanu wiedzy dotyczącego omawianego problemu badawczego.

Zaprezentowany w niniejszym rozdziale przegląd literatury stanowi zbiór podstawowej wiedzy w zakresie tematyki badawczej podjętej w prezentowanej pracy. Jego celem jest przedstawienie bieżących wyników badań oraz osiągnięć dotyczących zagadnień stateczności w odniesieniu do ściskanych cienkościennych elementów kompozytowych. W podsumowaniu należy stwierdzić, że zakres wiedzy na ten temat nie został jeszcze w pełni wyczerpany. W literaturze przedmiotu dominują pozycje o charakterze teoretycznym oraz numerycznym, niewiele jest natomiast prac prezentujących wyniki badań doświadczalnych. Zagadnienie nieosiowości obciążenia konstrukcji nośnych opisane jest jako jeden z czynników mających wpływ na przyspieszenie utraty stateczności oraz zniszczenie struktury materiału. Istnieje potrzeba przeprowadzenia badań eksperymentalnych, umożliwiających rozszerzenie jakościowego oraz ilościowego opisu wpływu nieosiowości obciążenia i imperfekcji geometrycznych na zachowanie cienkościennych profili kompozytowych w stanie krytycznym i pokrytycznym. Będzie to stanowiło przedmiot badań niniejszej monografii.

1.2. Cel i zakres pracy

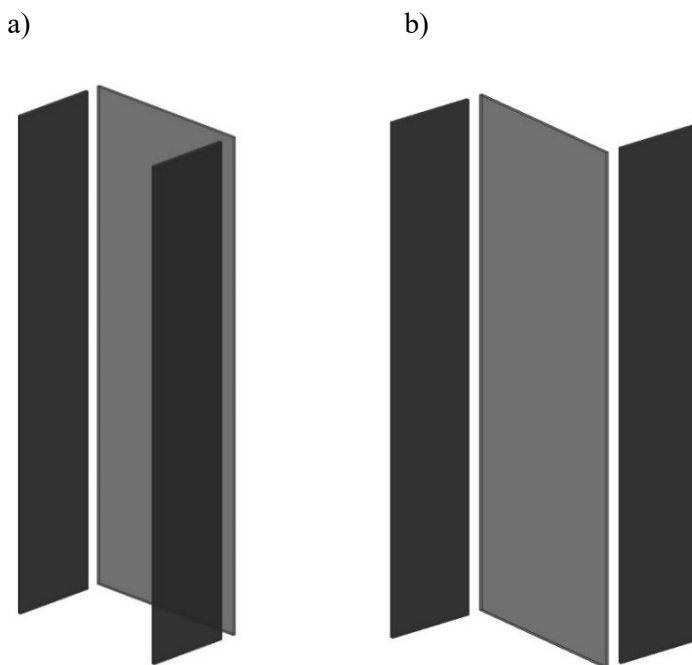
Na podstawie przeprowadzonego w poprzednim rozdziale przeglądu literatury sformułowano **cel pracy**, który stanowi określenie stopnia wpływu nieosiowości przyłożenia obciążenia ściskającego na zachowanie rzeczywistych, tzn. z imperfekcjami przyłożenia siły krótkich cienkościennych profili kompozytowych o złożonych kształtach przekroju poprzecznego. Przeprowadzona zostanie pogłębiona analiza stateczności i stanów pokrytycznych badanych ustrojów z wykorzysta-

niem metod doświadczalnych oraz symulacji numerycznych MES. Do oceny momentu inicjacji zniszczenia materiału kompozytowego wykorzystana zostanie metoda emisji akustycznej, a w przypadku symulacji numerycznych inicjacyjne kryterium zniszczenia kompozytu Tsai–Wu. Zakres badań doświadczalnych będzie obejmował ściskanie cienkościennych profili kompozytowych w temperaturze pokojowej z wykorzystaniem uniwersalnej maszyny wytrzymałościowej. Obliczenia numeryczne prowadzone w zakresie liniowym (rozwiązanie zagadnienia własnego – stan krytyczny) oraz nieliniowym (nieliniowa analiza stanu pokrytycznego) prowadzone będą z wykorzystaniem komercyjnego programu ABAQUS® [12]. Opracowane modele dyskretne zostaną zwalidowane wynikami badań eksperymentalnych. Takie podejście umożliwi opracowanie adekwatnych modeli numerycznych, umożliwiających opis zagadnienia nieliniowej stateczności ścispanych cienkościennych profili kompozytowych oraz określenia odpowiedzi konstrukcji na nieosiowość obciążenia oraz wartość początkowej amplitudy imperfekcji geometrycznych.

Postawiono **tezę pracy**, że cienkościenne struktury kompozytowe są wrażliwe na nieosiowość przyłożenia obciążenia ścisającego, co ma znaczący wpływ na stateczność oraz pracę w zakresie pokrytycznym tych konstrukcji. Istotny przy tym jest układ warstw w strukturze laminatu oraz geometria struktury, w tym ugięcia wstępne, mogące prowadzić do przedwczesnej utraty stateczności konstrukcji. Możliwe jest kształtowanie właściwości mechanicznych oraz sztywnościowych ścispanych cienkościennych słupów kompozytowych poprzez odpowiedni dobór układu warstw kompozytu, przy zachowaniu stałych parametrów geometrycznych i masy ustroju.

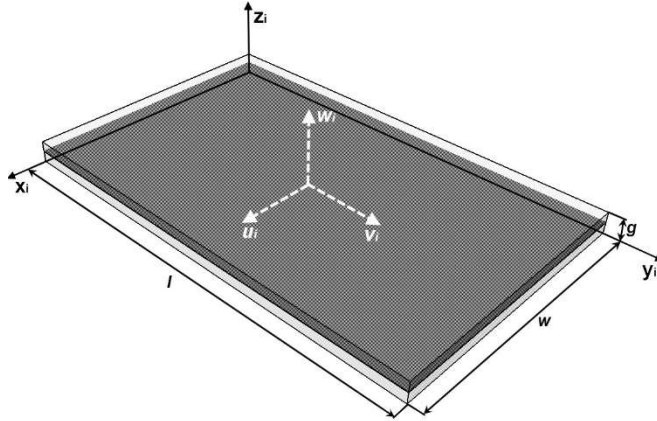
2. Stateczność cienkościennych słupów kompozytowych

Analizie poddano cienkościennie słupy kompozytowe o przekrojach otwartych. Elementy tego typu wykonywane są z laminatów zbrojonych włóknami węglowymi, szklanymi oraz grafitowymi zatopionymi w osnowie epoksydowej. Rozpatrywane ustroje kolumnowe charakteryzują się złożonymi przekrojami poprzecznymi. Wykonane są z płaskich ścian połączonych ze sobą wzdłuż ich najdłuższych krawędzi. Poniżej (rys.2.1) przedstawiono dwa cienkościennie słupy złożone z elementów płytowych o wybranych przekrojach poprzecznych.



Rys. 2.1. Modele cienkościennych słupów wykonanych z płaskich ścian o przekrojach poprzecznych: a) ceowym, b) zetowym

Poszczególne ściany analizowanych konstrukcji cienkościennych stanowią elementy płytowe wykonane w wielowarstwowego kompozytu. Wszystkie warstwy omawianego materiału charakteryzują się właściwościami ortotropowymi. Model geometryczny i -tej płyty z przyjętym układem współrzędnych przedstawiono na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Ortotropowy model geometryczny elementu płytowego

Analizowane cienkościennie ustroje słupowe wykonane zostały z kompozytu wielowarstwowego. Na potrzeby prowadzonych badań przyjęto płaski model płytowy oparty na założeniach klasycznej teorii płyt wielowarstwowych. W oparciu o prace [2], [67], [90], [91], [166] przyjęto następujące założenia modelowe:

- grubość płyty jest stała,
- grubość płyty jest znacznie mniejsza od pozostałych jej wymiarów,
- element płytowy wykonany jest z materiału posiadającego właściwości liniowo-sprężyste (obowiązuje uogólnione prawo Hooke'a),
- element charakteryzuje płaski stan naprężenia:
 - naprężenia panujące w płaszczyźnie płyty σ_{xx} i σ_{yy} są dominujące,
 - naprężenia w kierunku normalnym do płyty σ_{zz} są pomijalnie małe,
 - naprężenia styczne w kierunkach prostopadłych do płyty τ_{xz} i τ_{yz} są znacznie mniejsze niż wartości σ_{xx} , σ_{yy} oraz τ_{xy} w płaszczyźnie płyty,
- cienkościenny element warstwowy odkształca się, spełniając prawa hipotezy Kirchhoffa–Love'a (normalne do nieodkształconej powierzchni środkowej pozostają prostymi normalnymi do płaszczyzny środkowej płyty po wyoboczeniu oraz wyklucza się γ_{yz} , ε_z , ze stanu odkształcenia),
- przyjmuje się niewielkie przemieszczenia występujące w płaszczyźnie płyty (ε_x , ε_y , $\gamma_{yz} < 1$),
- płyta składa się z idealnie połączonych ze sobą warstw,
- nie uwzględnia się interakcji zachodzących pomiędzy poszczególnymi warstwami w kierunku prostopadłym do płaszczyzny środkowej,
- każda z warstw posiada właściwości ortotropowe przy zachowaniu stałej grubości,
- nie występują przemieszczenia płaszczyzny środkowej elementu płytowego w kierunku osi z.

W klasycznej teorii płyt płaski stan naprężeń opisany jest podstawowymi równaniami następującej postaci (są to zlinearyzowane równania geometryczne Cauchy'ego w oparciu o hipotezę Kirchhoffa):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xi} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_i} - z \frac{\partial^2 w_{0i}}{\partial x_i^2} \\ \varepsilon_{yi} &= \frac{\partial v_i}{\partial y_i} = \frac{\partial v_{0i}}{\partial y_i} - z \frac{\partial^2 w_{0i}}{\partial y_i^2} \\ \gamma_{xyi} &= \frac{\partial u_i}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - z \frac{\partial^2 w_{0i}}{\partial y_i^2}\end{aligned}\quad (2.1)$$

gdzie: współrzędne u_{0i} , v_{0i} oraz w_{0i} odpowiadają przemieszczeniu dowolnego punktu w kierunku poszczególnych osi i -tej płyty.

W celu opisanego powierzchni środkowej każdej ze ścian słupa, która jest zarazem i -tą płytą przyjmuje się tensor odkształcenia opisany w następującej postaci [67], [91], [121], [145] oraz [150]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xi} &= u_{xi} + 0,5(w_{xi}^2 + u_{xi}^2 + v_{xi}^2) \\ \varepsilon_{yi} &= v_{yi} + 0,5(w_{yi}^2 + u_{yi}^2 + v_{yi}^2) \\ 2\varepsilon_{xyi} = \gamma_{xyi} &= u_{yi} + v_{xi} + w_{xi}w_{yi} + u_{xi}u_{yi} + v_{xi}v_{yi}\end{aligned}\quad (2.2)$$

gdzie: u_i , v_i oraz w_i są współrzędnymi przemieszczenia powierzchni środkowej równoległe względem osi: x_i , y_i , z_i (rys. 2.1). Płaszczyzna $x_i - y_i$ leży na powierzchni środkowej i -tej płyty przed wystąpieniem zjawiska wyboczenia.

Głównym ograniczeniem przyjętej teorii jest liniowy opis zależności przyrostu krzywizn zginania κ_{xi} , κ_{yi} oraz skręcania κ_{xyi} w odniesieniu do i -tego elementu płytowego [166] oraz [123]:

$$\begin{aligned}\kappa_{xi} &= -w_{xxi} \\ \kappa_{yi} &= -w_{yyi} \\ \kappa_{xyi} &= -2w_{xyi}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Wartości zredukowanych sił oraz momentów w przekrojach względem powierzchni środkowej płyty w przypadku analiz materiału izotropowego przedstawiono między innymi w pracach: [145], [146], [148], [149], [150].

3. Numeryczna analiza rozwiązania zagadnienia stateczności konstrukcji cienkościennych

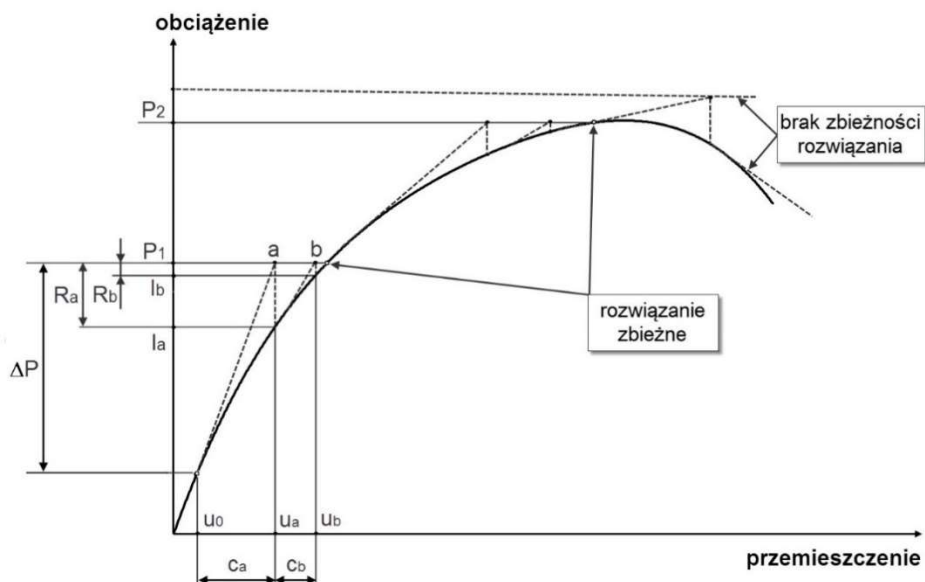
Dynamiczny rozwój technik komputerowych oraz komercjalizacja systemów wspomagających prace inżynierskie spowodowały rozpowszechnienie wykorzystywania metody elementów skończonych (MES) w analizie współczesnych konstrukcji. Metoda elementów skończonych oparta jest na założeniu, że wielkości takie, jak na przykład naprężenie, przemieszczenie lub odkształcenie, wyrażone są w postaci pierwotnej – tzn. funkcji w określonym obszarze ciągłym modelu rzeczywistego, które następnie aproksymuje się, otrzymując model dyskretny. Model numeryczny (zdyskretyzowany) składa się z funkcji ciągłych w określonej liczbie obszarów, nazwanych elementami, na jakie został podzielony analizowany obszar. Funkcje ciągłe należące do podobszarów określa się poprzez wartości postaci pierwotnej, jako skończona liczba punktów z całego rozpatrywanego obszaru. Punkty te nazwano węzłami, natomiast ich zbiór tworzy siatkę elementów skończonych. Otrzymanie wymaganej dokładności modelu dyskretnego wiąże się z odpowiednim przyjęciem funkcji kształtu, która wyraża przemieszczenia węzłów. Jest to kluczowe kryterium, gdyż jego spełnienie oraz zagęszczenie podziału obszaru na elementy skończone w znaczny sposób wpływa na poprawność przeprowadzonych obliczeń, a tym samym na dokładność otrzymanych wyników. Metodę elementów skończonych można stosować również do analizy zagadnień stateczności konstrukcji cienkościennych zarówno w stanie krytycznym, jak i zakrytycznym oraz w opisie zachowania się konstrukcji w stanie granicznym.

3.1. Liniowa analiza stanu krytycznego

Analiza stanu krytycznego konstrukcji cienkościennej w przypadku zastosowania metody elementów skończonych polega na rozwiązaniu liniowego zagadnienia własnego, prowadzącego do wyznaczenia najniższej postaci wyboczenia statecznego oraz odpowiadającej jej wartości obciążenia krytycznego. Powyższa analiza stanowi tzw. zagadnienie ograniczonego podejścia MES do bifurkacyjnej utraty stateczności na podstawie liniowej analizy sprężystej. Algorytm wyznaczenia wartości obciążenia krytycznego, przy którym konstrukcja traci stateczność, bazuje na kryterium ekstremum energii potencjalnej układu. Siła krytyczna odpowiadająca minimum energii potencjalnej odnosi się do stanu równowagi rozpatrywanego układu. Z tego wynika konieczność uzyskania dodatniego znaku drugiej wariacji energii potencjalnej w przypadku konstrukcji charakteryzujących się stateczną ścieżką równowagi pokrytycznej.

3.2. Nieliniowa analiza stateczności – metoda Newtona–Raphsona

Zagadnienie ściskania cienkościennych ustrojów nośnych w zakresie pokrytym stanowi złożony problem nieliniowy. Najczęściej stosowanym w tym przypadku algorytmem obliczeniowym jest przyrostowo-iteracyjna metoda Newtona–Raphsona. Wykorzystanie tej metody umożliwia uzyskanie poprawnych wyników oraz szybkie osiągnięcie zbieżności obliczeń. Na rysunku 3.1 przedstawiono graficzną interpretację algorytmu obliczeń przeprowadzonych w oparciu o metodę Newtona–Raphsona.



Rys. 3.1. Graficzna interpretacja algorytmu metody Newtona–Raphsona

Na rysunku 3.1 poszczególne symbole oznaczają:

- P_1, P_2 – uogólnione siły zewnętrzne,
- I_a, I_b – uogólnione siły wewnętrzne,
- ΔP – obciążenie przyrostowe,
- R_a, R_b – siły resztkowe,
- K_0, K_a – macierze sztywności,
- u_0, u_a, u_b – wektory przemieszczenia,
- C_a, C_b – przyrosty przemieszczenia.

Poszczególne kroki obliczeniowe wykonane w oparciu o algorytm metody Newtona–Raphsona można opisać w następujący sposób:

- wyznaczenie przyrostu przemieszczenia C_a z wykorzystaniem linowej macierzy sztywności K_0 oraz wartości u_0 i ΔP ,
- przyjęcie wartości kolejnego przemieszczenia u_a ,
- wyznaczenie wartości sił wewnętrznych I_a ,
- określenie siły resztkowej R_a ,
- w przypadku małej wartości R_a nieprzekraczającej 0,005 wartości obciążenia ΔP obliczenia przeprowadzone są iteracyjnie przy założonej następnej wartości przyrostowej obciążenia.

Obliczenia numeryczne przeprowadzane są w oparciu o wyżej przedstawiony algorytm do chwili, kiedy siła resztkowa nie osiągnie poziomu niższego od założonego. Wadą metody Newtona–Raphsona jest konieczność budowania i odwracania macierzy sztywności oraz rozwiązywania układu równań liniowych w oparciu o zaktualizowaną macierz sztywności w trakcie realizacji kolejnej iteracji obliczeń. Efektywność tej metody przy rozwiązywaniu złożonych zadań obliczeniowych oraz w przypadku zagadnień związanych z występowaniem niesymetrycznych macierzy sztywności (śledzące obciążenia zewnętrzne, wybrane zagadnienia niesprężyste) nie jest zbyt wysoka. Program ABAQUS[®] umożliwia zastosowanie algorytmów pokrewnych metod przyrostowo-iteracyjnych, jak na przykład uproszczoną metodę Newtona–Raphsona oraz metodę quasi-Newtona. W przypadku tych metod algorytm obliczeń jest podobny do tego, jak w metodzie Newtona–Raphsona, natomiast różnica dotyczy budowania macierzy sztywności wyznaczonej tylko jeden raz w części startowej algorytmu obliczeń.

Opis zagadnienia stateczności ściskanych cienkościennych słupów kompozytowych o przekrojach otwartych wymaga rozwiązania liniowego zagadnienia własnego, na podstawie którego możliwe jest zaimplementowanie początkowych imperfekcji geometrycznych odpowiadających najniższej postaci wyboczenia, stanowiących początkowe stadium deformacji modelu w obliczeniach nieliniowych. Rozwiązanie w kolejnym etapie obliczeń zagadnienia nieliniowej stateczności pozwala na pełny opis stanu odkształcenia oraz wyłączenia analizowanych kompozytowych konstrukcji cienkościennych.

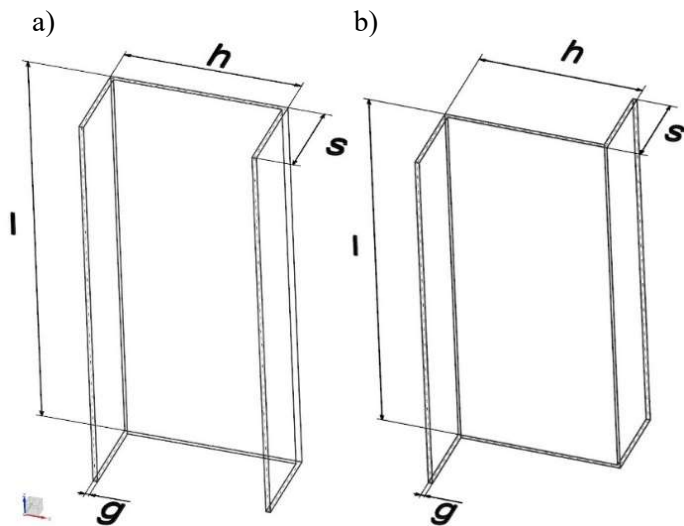
4. Cienkościenne profile kompozytowe o przekrojach otwartych

Niniejsza praca dotyczy analizy krótkich cienkościennych profili kompozytowych o otwartych przekrojach poprzecznych. Próbki wykonano techniką autoklawową z laminatu węglowo-epoksydowego (włókna węglowe zatopione w żywicy epoksydowej – CFRP). Wybrana metoda wytwarzania pozwala na uzyskanie wysokowytrzymałych struktur kompozytowych, przy zachowaniu wysokiej powtarzalności procesu wytwarzania (proces sterowany automatycznie). Koszty produkcji rozważanych kompozytów w porównaniu z kosztami materiałów izotropowych są znacznie wyższe, jednakże laminaty węglowe charakteryzują się wysokim współczynnikiem wytrzymałości, przy zachowaniu niskiej gęstości, niskim współczynnikiem rozszerzalności cieplnej oraz korzystnymi właściwościami przewodzącymi. Cechy te powodują, że warstwowe kompozyty węglowe są powszechnie stosowane w przemyśle jako alternatywa dla tradycyjnych materiałów inżynierskich.

W wytwarzanych strukturach kompozytowych istotne znaczenie ma opis konfiguracji warstw laminatu. Najczęściej do opisu struktury laminatu stosuje się oznaczenia w postaci liczbowego indeksu dolnego, umożliwiającego skrócenie zapisu konfiguracji, tzn.: $[+45^{\circ}/+45^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}/0^{\circ}/0^{\circ}]_T \rightarrow [+45^{\circ}_2/90^{\circ}/0^{\circ}_3]_T$, co oznacza zapis laminatu asymetrycznego, składającego się z sześciu warstw. Dodatkowo przy pomocy literowych indeksów, jak np.: S (kompozyt symetryczny), oraz T (total – pełna konfiguracja kompozytu) symetryczny układ dziesięciu warstw laminatu można wyrazić w postaci: $[+45^{\circ}/+45^{\circ}/-45^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/-45^{\circ}/+45^{\circ}/+45^{\circ}]_T \rightarrow [+45^{\circ}_2/-45^{\circ}/90^{\circ}_4/-45^{\circ}/+45^{\circ}_2]_T \rightarrow [+45^{\circ}_2/-45^{\circ}/90^{\circ}_2]_S$. Prezentowane przykłady wskazują na istotne możliwości uproszczenia zapisu konfiguracji kompozytu, zwłaszcza w przypadku laminatów o dużej liczbie warstw. Powyższa nomenklatura została przyjęta do opisu konfiguracji warstw laminatu analizowanych w niniejszej pracy cienkościennych słupów kompozytowych.

4.1. Przedmiot badań

Przedmiot badań stanowiły krótkie, cienkościenne słupy kompozytowe charakteryzujące się złożonymi przekrojami poprzecznymi. W pracy zajęto się analizą stanu krytycznego oraz pokrytycznego ściskanych profili o przekrojach: ceowym oznaczonym w dalszej pracy symbolem „C” oraz zetowym – „Z”, poddanych osiowemu i nieosiowemu obciążeniu ściskającemu. Analizowane konstrukcje należą do typowych struktur cienkościennych, składających się z prostopadłych ścian, stanowiących płaskie elementy płytowe, połączone na dłuższych krawędziach. Na poniższym rysunku przedstawiono schematy geometryczne przyjętych do badań wariantów cienkościennych słupów kompozytowych (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Przedmiot badań: a) model słupa o przekroju ceowym, b) model słupa o przekroju zetowym

Do badań przyjęto następujące wymiary analizowanych profili:

- długość słupa: $l = 250\text{mm}$,
- szerokość przekroju: $h = 60\text{mm}$,
- wysokość przekroju: $s = 30\text{mm}$,
- grubość ścian słupa: $g = 0,84\text{mm}$.

a)

b)



Rys. 4.2. Modele fizyczne: a) słup o przekroju ceowym, b) słup o przekroju zetowym

Modele fizyczne słupów kompozytowych CFRP (Carbon Fiber Reinforced Polymer) wykonano techniką autoklawową z jednokierunkowej taśmy prepregu węglowo-epoksydowego o oznaczeniu EP137–CR527/100–35 (rys.4.2). Do badań wybrano 4 konfiguracje ułożenia warstw, składające się każda z 8 warstw w symetrycznym układzie względem płaszczyzny środkowej laminatu. Rzeczywiste słupy ceowe oznaczono symbolami C2 do C5, natomiast próbki o przekroju zetowym Z2 do Z5. Pierwszy układ warstw (C1 i Z1) został odrzucony w badaniach z przyczyn technicznych. Tabela 4.1 przedstawia oznaczenie próbek w odniesieniu do przyjętych konfiguracji warstw kompozytu.

Tabela 4.1. Konfiguracje warstw kompozytu

Słup ceowy	Słup zetowy	Układ warstw laminatu
C2	Z2	[0 / -45 / 45 / 90 / 90 / 45 / -45 / 0] _T
C3	Z3	[90 / -45 / 45 / 0 / 0 / 45 / -45 / 90] _T
C4	Z4	[45 / -45 / 90 / 0 / 0 / 90 / -45 / 45] _T
C5	Z5	[90 / 0 / 90 / 0 / 0 / 90 / 0 / 90] _T

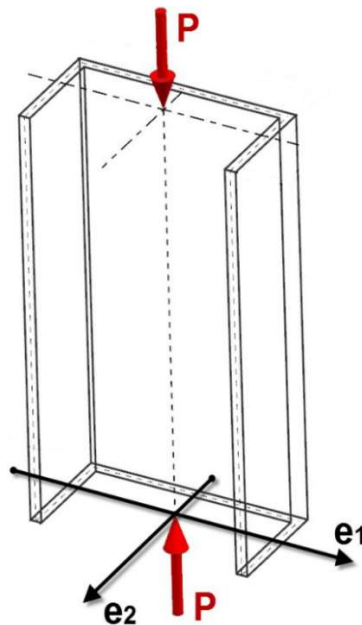
Dla wytworzonego materiału kompozytowego wyznaczone zostały drogą doświadczalną właściwości mechaniczne oraz graniczne wg norm ISO. Określone doświadczalnie właściwości materiałowe kompozytu węglowo-epoksydowego umożliwiają definicję modelu materiału ortotropowego w płaskim stanie naprężenia, wykorzystanego w obliczeniach numerycznych MES. Właściwości mechaniczne dla pojedynczej warstwy kompozytu CFRP przedstawia tabela 4.2.

Tabela 4.2. Właściwości mechaniczne kompozytu węglowo-epoksydowego

Moduł na rozciąganie		Moduł na ścinanie	Liczba Poissona	Wytrzymałość na rozciąganie		Wytrzymałość na ścinanie	Wytrzymałość na ściskanie	
E₁ (0°)	E₂ (90°)	G_{1,2}	ν₁₂	F_{TU1} (0°)	F_{TU2} (90°)	F_{SU} (45°)	F_{CU1} (0°)	F_{CU2} (90°)
GPa	MPa	MPa	–	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
143,5	5826,3	3845,5	0,36	2220,7	49	83,5	641	114

Nieosiowość obciążenia ściskającego realizowano poprzez zmianę współrzędnej przyłożenia siły P w dwóch wyznaczonych wzajemnie prostopadłych kierunkach. Przyjęto, że kierunek równoległy do średnika oznaczony będzie symbolem e_1 , natomiast kierunek prostopadły do średnika symbolem e_2 . Maksymalne wartości mimośrodów siły wynosiły zatem dla ceownika: $e_1 = 10\text{mm}$, $e_{2(-)} = 6\text{mm}$ oraz $e_{2(+)} = 10\text{mm}$. Wartość parametrów nieosiowości obciążenia zmieniano z podziałką co 1mm.

Założono, że w przypadku słupów o przekroju ceowym wartość nieosiowości przyłożenia obciążenia zawarta będzie w zakresach: $e_1 < 0 \div 10 \text{ mm} >$ oraz $e_2 < -6 \div 10 \text{ mm} >$. Parametrowi e_1 odpowiadają wyłącznie wartości dodatnie, co wynika z faktu symetryczności przekroju poprzecznego słupa w tym kierunku. Przedział przyjętych wartości nieosiowości e_2 wynika z niesymetrycznego charakteru przekroju profilu w badanym kierunku. Kierunek dodatni mimośrodowi obciążenia e_2 przyjęto jako skierowany w stronę od środka profilu, natomiast kierunek ujemny w stronę do środka. Badania eksperymentalne nie pozwalały na wykonanie prób obciążenia słupa, gdy współrzędna nieosiowości przekraczała wartość $e_2 \geq -6 \text{ mm}$. Wynikało to z faktu, że punkt przyłożenia obciążenia ściskającego znajdował się poza zarysem przekroju poprzecznego rozważanego słupa. Wartość nieosiowości przyłożenia obciążenia w przypadku przekroju zetowego zmieniano w przedziałach: $e_1 < 0 \div 10 \text{ mm} >$ oraz $e_2 < 0 \div 6 \text{ mm} >$. Maksymalne wartości mimośrodu siły dla zetownika wynosiły zatem $e_1 = 10 \text{ mm}$ oraz $e_2 = 6 \text{ mm}$. Ustalonym parametrom odpowiadają wyłącznie wartości dodatnie, co wynika z faktu symetryczności przekroju poprzecznego słupa o przekroju zetowym w dwóch rozważanych kierunkach. Opisany powyżej schemat realizacji nieosiowości obciążenia ilustruje rysunek 4.3, na którym zaznaczono kierunki wprowadzania mimośrodu siły ściskającej. W badaniach eksperymentalnych nieosiowość obciążenia wprowadzano poprzez przesunięcie słupa względem osi wyznaczonej przez przeguby kuliste, stanowiące podparcie przekrojów końcowych słupa.



Rys. 4.3. Model geometryczny słupa o przekroju ceowym z zaznaczonymi kierunkami realizowania mimośrodu obciążenia ściskającego e_1 i e_2

4.2. Metodyka badań eksperymentalnych

Zakres prowadzonych badań obejmował analizę stanu krytycznego i pokrytycznego do wartości obciążenia odpowiadającego inicjacji uszkodzenia pierwszej warstwy laminatu z uwzględnieniem nieosiowości przyłożenia obciążenia ściskającego. Badania prowadzono na drodze eksperymentalnej oraz z wykorzystaniem analizy numerycznej MES. Badania doświadczalne przeprowadzono przy wykorzystaniu statycznej maszyny wytrzymałościowej Zwick – Z100 w temperaturze pokojowej, przy stałej prędkości przemieszczania trawersy górnej wynoszącej 2 mm/min. Rysunek 4.4. przedstawia zdjęcie stanowiska badawczego, na którym przeprowadzano badania eksperymentalne ściskania cienkościennych słupów kompozytowych.



Rys. 4.4. Statyczna maszyna wytrzymałościowa Zwick–100

W trakcie badań doświadczalnych rejestrowano odkształcenia środnika słupów z wykorzystaniem tensometrów oporowych, naklejonych po obu jego stronach w miejscu przewidywanych największych ugięć. Dodatkowo z wykorzystaniem czujnika laserowego mierzono ugięcia ścianek słupów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ścianki. Wyniki prowadzonych pomiarów pozwoliły

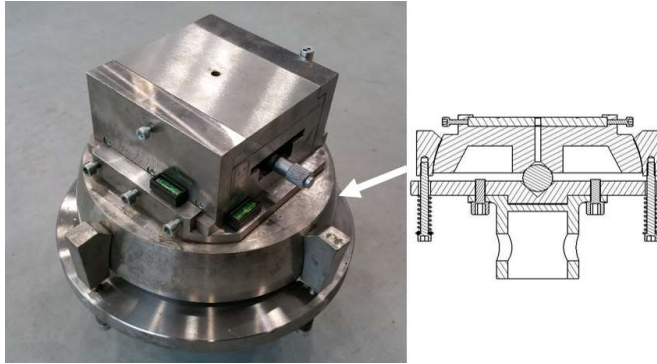
na opracowanie pokrytycznych charakterystyk konstrukcji, umożliwiających dokonanie opisu zachowania się słupów w zakresie realizowanego obciążenia ściskającego.

W celu zapewnienia warunków przegubowego podparcia przekrojów końcowych słupa zastosowano specjalne głowice mocujące osadzone na sworzniach maszyny wytrzymałościowej, zawierające przeguby kuliste (rys.4.6). Osiowanie słupa ceowego względem sworzni maszyny wytrzymałościowej odbywało się poprzez zastosowanie płytek z wykonanymi otworami w punkcie środka ciężkości przekroju poprzecznego. W przypadku słupa o przekroju zetowego osiowanie polegało na precyzyjnym pozycjonowaniu środka ciężkości słupa względem punktu zerowego stolika przesuwne. Dodatkowo w celu wyeliminowania niedokładności warunków brzegowych oraz zapewnienia równomiernego obciążenia poszczególnych krawędzi przekrojów końcowych słupów zastosowano podkładki z odkształcalnego tworzywa polimerowego (rys.4.5).



Rys. 4.5. Realizacja podparcia przekroju końcowego próbki badawczej

Na obydwu głowicach przegubowych zamocowano specjalnie zaprojektowane stoły przesuwne, umożliwiające przy pomocy śruby mikrometrycznej precyzyjne wprowadzanie wartości nieosiowości obciążenia ściskającego, poprzez odpowiednie pozycjonowanie profilu względem osi statycznej maszyny wytrzymałościowej (rys.4.6).



Rys. 4.6. Głowica przegubowa z zamocowanym stołem umożliwiającym precyzyjne realizowanie mimośrodu obciążenia

W celu zapewnienia kontroli realizacji mimośrodu obciążenia z dokładnością do 0,01mm zastosowano dodatkowy układ pomiarowy z wykorzystaniem czujników elektronicznych. Ustalanie pozycji mimośrodu obciążenia w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach e_1 i e_2 realizowano poprzez odpowiednie ustawienie profilu słupa względem osi maszyny wytrzymałościowej. Pozycję mimośrodu obciążenia ustalano z podziałką równą 1mm odpowiednio w każdym kierunku. Widok stanowiska do badań doświadczalnych umożliwiającego realizację nieosiowości obciążenia ściskającego przedstawia rysunek 4.7.



Rys. 4.7. Realizacja badań na stanowisku badawczym

W trakcie badań rejestrowano przebieg wartości siły ściskającej, odkształceń środnika słupów oraz ugięcie ścian słupów na kierunku prostopadłym z wykorzystaniem czujnika laserowego. Otrzymane w wyniku pomiarów pokrytyczne ścieżki równowagi, określające zależność obciążenia ściskającego względem ugięcia ścian słupów P - w , umożliwiły określenie wartości obciążenia krytycznego oraz ocenę pracy konstrukcji w zakresie pokrytycznym.

4.2.1. Aproksymacyjne metody wyznaczania wartości obciążenia krytycznego na podstawie badań doświadczalnych

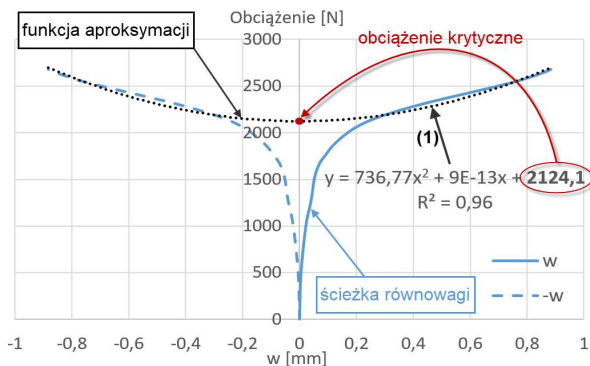
Występujące w trakcie prowadzonych badań eksperymentalnych wszelkiego rodzaju niedokładności, powodowane różnymi niezależnymi czynnikami, jak m.in. imperfekcjami geometrycznymi konstrukcji, czy sposobie realizacji obciążenia i warunków brzegowych utrudniają precyzyjne wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego konstrukcji cienkościennej. W takich przypadkach niezbędne jest wykorzystanie metod aproksymacyjnych, umożliwiających oszacowanie wartości obciążenia krytycznego na podstawie uzyskanych wyników pomiarów prowadzonych w trakcie realizacji badań eksperymentalnych. W niniejszej pracy do oceny wartości sił krytycznych zastosowano dwie niezależne metody aproksymacyjne: metodę Koiter'a oraz metodę P - w^2 .

Zastosowanie metody Koiter'a polegało na aproksymacji pokrytycznej ścieżki równowagi, opisującej zależność pomiędzy obciążeniem próbki, a ugięciem mierzonym prostopadle do ścianki profilu z wykorzystaniem czujnika laserowego. Wyznaczona eksperymentalnie pokrytyczna ścieżka równowagi P - w dotycząca zakresu słabo pokrytycznego jest w tym przypadku aproksymowana funkcją kwadratową o następującym równaniu [122]:

$$P = P_{cr} \frac{a_2}{a_0} w^2 + P_{cr} \frac{a_1}{a_0} w + P_{cr} \quad (4.1)$$

gdzie: a_0 , a_1 , a_2 – stanowią parametry funkcji, P – oznacza wartość siły obciążającej, P_{cr} – wartość nieznanego obciążenia krytycznego oraz wartość w oznacza przyrost ugięcia, mierzony prostopadle do ściany profilu, przyjęto $w_0 = 0$.

W przypadku metody Koiter'a obciążenie krytyczne określone jest jako miejsce przecięcia funkcji (1) z pionową osią układu współrzędnych pokrytycznej charakterystyki konstrukcji P - w (rys. 4.8). Dokładność określenia wartości obciążenia krytycznego jest uzależniona od wyboru zakresu aproksymacji, gdzie w przypadku statecznej charakterystyki konstrukcji współczynnik kierunkowy wielomianu stopnia drugiego musi być dodatnio określony.



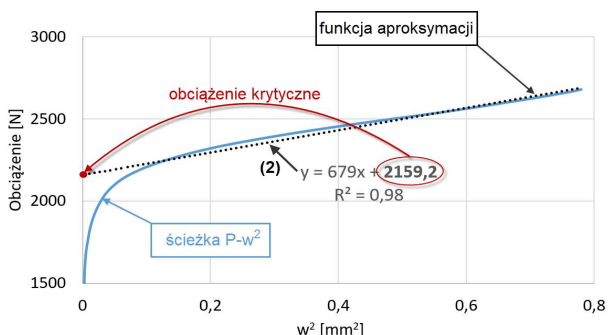
Rys. 4.8. Przykład zastosowania aproksymacyjnej metody Koitera'a do wyznaczania wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistej

W przypadku metody $P-w^2$ obciążenie krytyczne jest również wyznaczone na podstawie pokrytycznej ścieżki równowagi, jednakże oszacowanie przybliżonej wartości siły krytycznej bazuje na charakterystyce obciążenia względem kwadratu ugięcia mierzonego w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ściany profilu. W prowadzonych badaniach wartość ugięcia w otrzymano z pomiaru ugięcia rejestrowanego za pomocą czujnika laserowego. Pokrytyczną ścieżkę równowagi $P-w^2$ aproksymowano funkcją liniową w postaci [122]:

$$P = P_{cr} \frac{a_1}{a_0} w + P_{cr} \quad (4.2)$$

gdzie: a_0, a_2 – stanowią parametry funkcji, P – oznacza wartość siły obciążającej, P_{cr} – wartość nieznanego obciążenia krytycznego, natomiast wartość w^2 oznacza kwadrat przyrostu ugięcia mierzonego prostopadle do ściany profilu, przyjęto $w_0 = 0$.

Obciążenie krytyczne w tym przypadku określa się jako punkt przecięcia funkcji aproksymacji (2) z pionową osią układu współrzędnych pokrytycznej charakterystyki konstrukcji $P-w^2$ (rys. 4.9).



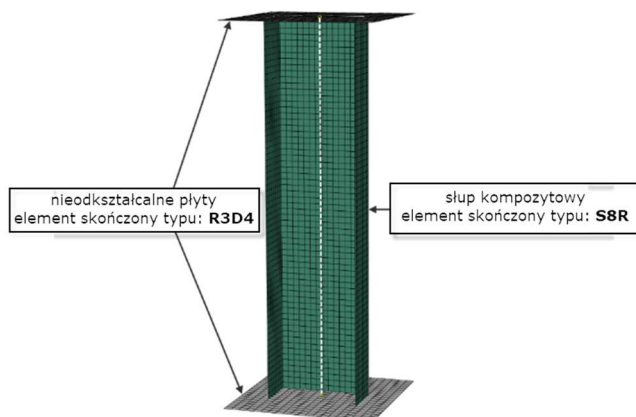
Rys. 4.9. Przykład zastosowania aproksymacyjnej metody $P-w^2$ do wyznaczania wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistej

W prowadzonych badaniach wyznacznikiem decydującym o dokładności procesu aproksymacji jest współczynnik korelacji R^2 . Wartość tego współczynnika decyduje o poziomie zbieżności przebiegu funkcji aproksymującej z wybranym zakresem aproksymowanej krzywej doświadczalnej. Wyższa wartość współczynnika korelacji zapewnia większą dokładność zastosowanego procesu aproksymacji. W prowadzonych badaniach procesy aproksymacji zapewniały zachowanie minimalnej wartości współczynnika korelacji na poziomie $R^2 \geq 0,95$.

4.3. Analiza numeryczna

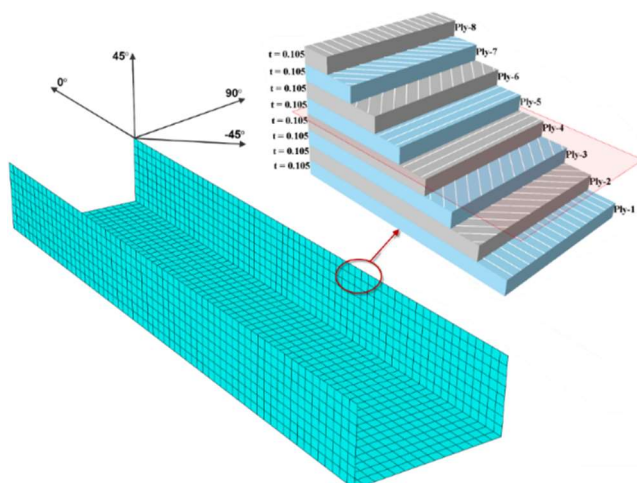
Obliczenia numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych realizowano w dwóch etapach. Pierwszy etap obliczeń obejmował rozwiązanie zagadnienia własnego, w wyniku którego wyznaczono wartość obciążenia bifurkacyjnego konstrukcji idealnej na podstawie kryterium minimum energii potencjalnej układu oraz odpowiadającą mu postać utraty stateczności słupa. Drugi etap dotyczył nieliniowej analizy stanu pokrytycznego do wartości obciążenia inicjującego zniszczenie pierwszej warstwy laminatu wyznaczoną na podstawie iteracyjnego kryterium zniszczenia Tsai–Wu. Obliczenia nieliniowe prowadzono na modelu konstrukcji z zaimplementowaną początkową wartością imperfekcji geometrycznych odpowiadających uzyskanej najniższej postaci utraty stateczności słupa, których amplituda wynosiła: $w_{0C} = 0,1$ mm dla słupa o przekroju ceowym i $w_{0Z} = 0,05$ mm dla słupa o przekroju zetowym. Zastosowana wartość imperfekcji wstępnych została wyznaczona na podstawie walidacji numerycznych charakterystyk pokrytycznych badanych profili wynikami badań doświadczalnych. Nieliniowe zagadnienie stateczności rozwiązano z wykorzystaniem przyrostowo-iteracyjnej metody Newtona–Raphsona.

Dyskretyzację konstrukcji przeprowadzono z wykorzystaniem warstwowych elementów powłokowych typu *SHELL*, posiadających trzy translacyjne oraz trzy rotacyjne stopnie swobody w każdym węźle elementu. W opracowanych modelach numerycznych słupów zastosowano typ elementu skończonego o oznaczeniu S8R, stanowiącego element 8-węzłowy, z funkcją kształtu drugiego rzędu oraz zredukowanym całkowaniem. W przypadku płyt modelujących płaszczyzny podparcia przekrojów końcowych słupa przyjęto elementy skończone typu *R3D4*, stanowiące sztywne elementy 4-węzłowe typu *RIGID* (rys.4.10). Opracowane modele numeryczne charakteryzowały się równomierną strukturą siatki elementów skończonych o wymiarach pojedynczego elementu 2x2 mm. Pozwoliło to na równomierny podział poszczególnych ścian profilu poprzez wygenerowanie siatki o stałej gęstości. Takie podejście umożliwiło dokładną obserwację stanów odkształcenia oraz naprężenia podczas pracy obciążonych konstrukcji cienkościennych.



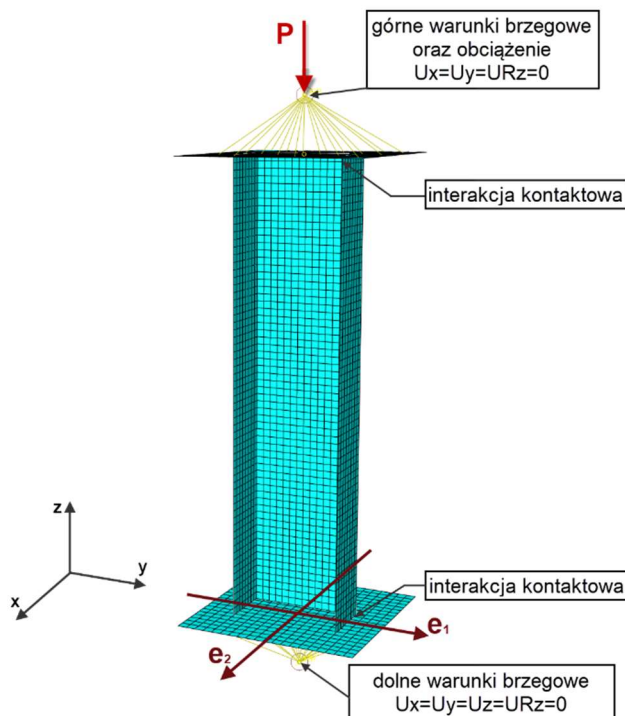
Rys. 4.10. Model dyskretny słupa – sposób dyskretyzacji konstrukcji

Zastosowany typ elementu skończonego umożliwił definicję struktury kompozytu warstwowego wzdłuż wektora normalnego do powierzchni elementu. Strukturę laminatu wykonano za pomocą techniki modelowania *Layup-Ply*, która umożliwia odwzorowanie konfiguracji układu warstw kompozytu wzdłuż grubości elementu skończonego, poprzez definicję następujących parametrów: grubość warstwy, rodzaj materiału oraz kierunek ułożenia włókien w warstwie (rys. 4.11). Wartość grubości pojedynczej warstwy laminatu wynosi $t = 0,105\text{mm}$ (całkowita grubość ściany słupa $g = 0,84\text{mm}$) określono na podstawie pomiarów geometrycznych rzeczywistej struktury kompozytu. W opracowanych modelach numerycznych zdefiniowano model materiału ortotropowego w płaskim stanie naprężenia, na podstawie wyznaczonych eksperymentalnie właściwości mechanicznych materiału kompozytowego – tabela 4.2.



Rys. 4.11. Numeryczny model słupa z oznaczonymi kierunkami ułożenia włókien oraz strukturą kompozytu po grubości elementu powłokowego

W modelu MES zdefiniowano warunki brzegowe odwzorowujące rzeczywiste podparcie przekrojów końcowych słupa, realizowane na maszynie wytrzymałościowej (rys. 4.7). Zastosowano punkty referencyjne odpowiadające położeniu środków ciężkości kul przegubów kulistych głowic mocujących, w których sformułowano warunki brzegowe przegubowego podparcia. W punkcie odwzorowującym górny przegub kulisty zablokowano translacyjne stopnie swobody ($U_x = U_y = 0$) oraz możliwość obrotu względem osi słupa ($U_{Rz} = 0$), natomiast w punkcie odwzorowującym dolny przegub kulisty zablokowano trzy translacyjne stopnie swobody ($U_x = U_y = U_z = 0$) oraz obrót względem osi słupa ($U_{Rz} = 0$). Punkty referencyjne zostały powiązane ze sztywnymi płytami stanowiącymi podparcie przekrojów końcowych słupa poprzez sprzężenie wszystkich stopni swobody punktu i płyty. Obciążenie konstrukcji realizowano poprzez wprowadzenie ściskającej siły skupionej w górnym punkcie referencyjnym. Wartość parametru nieosiowości „e” realizowano poprzez zmianę położenia modelu słupa względem sztywnych płyt, przesuując go odpowiednio o wartość mimośrodowość w kierunku e_1 lub e_2 . Pomiędzy krawędziami przekrojów końcowych słupa, a płytami zdefiniowano interakcje kontaktowe. Widok ogólny modelu MES, prezentujący zdefiniowane warunki brzegowe i obciążenie modelu przedstawia rysunek 4.12.



Rys. 4.12. Model dyskretny słupa z graficzną prezentacją warunków brzegowych, kierunków realizacji nieosiowości obciążenia oraz sposobem wprowadzenia siły ściskającej

5. Wyniki badań

Przeprowadzone badania nieosiowego ściskania cienkościennych profili kompozytowych o przekroju ceowym i zetowym pozwalają na dokonanie oceny wpływu mimośrodowego obciążenia na stan krytyczny oraz pracę konstrukcji w zakresie pokrytycznym, do momentu inicjacji zniszczenia pierwszej warstwy laminatu. Badania przeprowadzono dla 4 konfiguracji ułożenia warstw kompozytu w układach symetrycznych względem środkowej płaszczyzny laminatu. Opracowane modele dyskretne konstrukcji umożliwiły obliczenia realizacji mimośrodowego obciążenia w dwóch prostopadłych kierunkach. Otrzymane wyniki obliczeń MES weryfikowano wynikami badań doświadczalnych, prowadzonych na rzeczywistych strukturach kompozytowych, dla wybranych wartości mimośrodowego obciążenia ściskającego. Wyniki badań doświadczalnych umożliwiły walidację opracowanych modeli numerycznych.

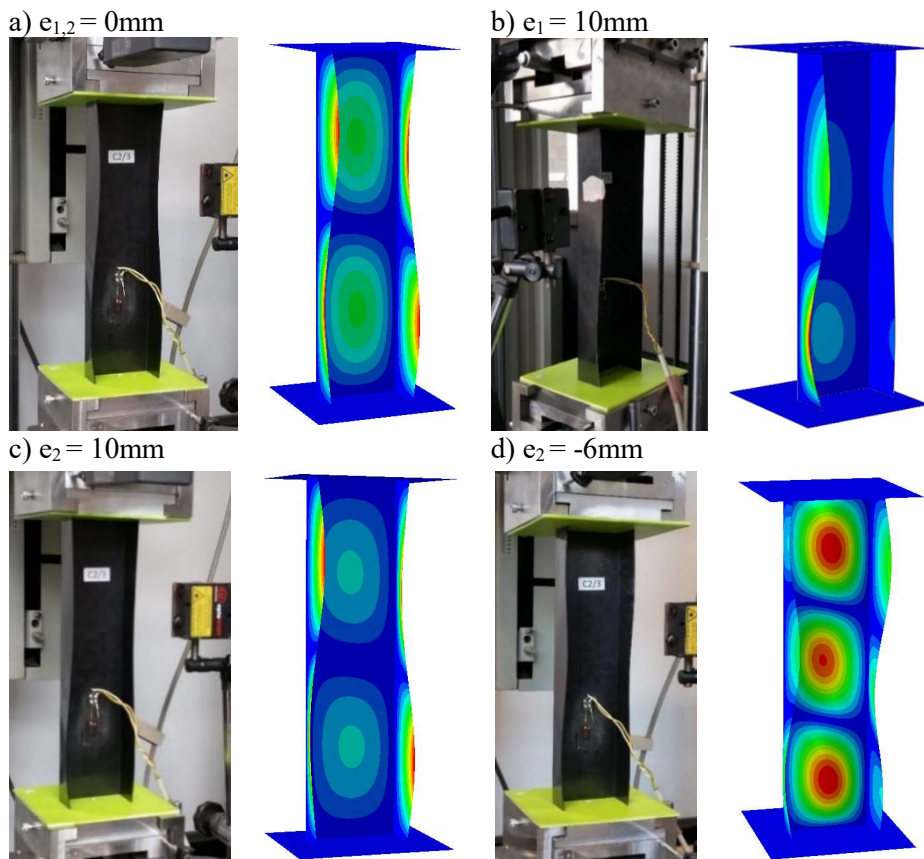
5.1. Wyniki analizy stanu krytycznego

Badania doświadczalne stanu krytycznego pozwalają na opis stanu deformacji konstrukcji rzeczywistej po utracie stateczności (do ok. 150% wartości obciążenia krytycznego). W analizowanych przypadkach utrata stateczności konstrukcji miała charakter lokalnego wybożenia środnika i ścian słupów, charakteryzującego się powstaniem określonej liczby półfal w kierunku wzdłużnym słupa. Zakres badań obejmował również wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistej na podstawie zarejestrowanych pokrytycznych ścieżek równowagi, przy wykorzystaniu dwóch metod aproksymacyjnych: metody $P-w^2$ oraz metody *Koitera*.

Numeryczna analiza stanu krytycznego obejmowała rozwiązanie zagadnienia własnego, umożliwiając wyznaczenie wartości obciążenia bifurkacyjnego konstrukcji idealnej (bez imperfekcji geometrycznych) oraz odpowiadającej jej najniższej postaci utraty stateczności. Wyznaczone w obliczeniach MES wartości obciążenia krytycznego oraz postacie wybożenia porównano z wynikami badań doświadczalnych w tym zakresie.

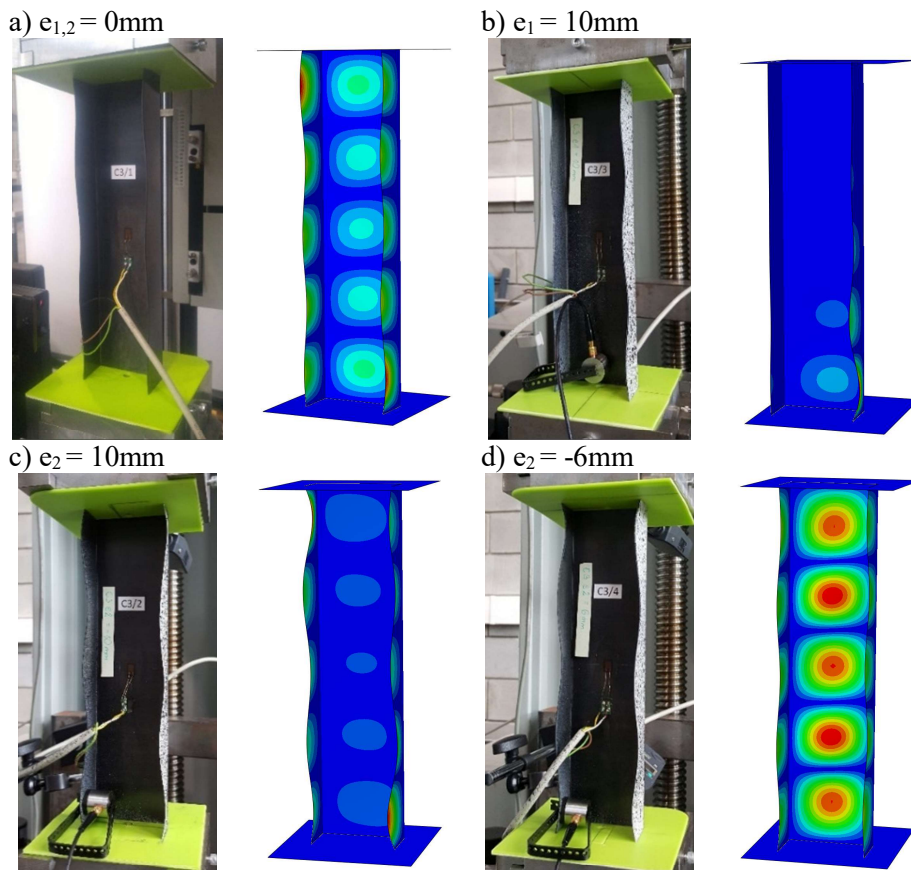
5.1.1. Słupy o przekroju ceowym

Na poniższych rysunkach zestawiono wyznaczone doświadczalnie i numerycznie postacie utraty stateczności słupów o przekroju ceowym, odpowiadające badanym konfiguracjom warstw laminatu: C2 (rys.5.1), C3 (rys.5.2), C4 (rys.5.3) oraz C5 (rys.5.4). Postacie utraty stateczności prezentowane są dla wybranych przypadków nieosiowości obciążenia ściskającego, obejmujących ściskanie osiowe oraz skrajne wartości mimośrodowego obciążenia w kierunku e_1 (równoległym do środnika) i kierunku e_2 (prostopadłym do środnika).



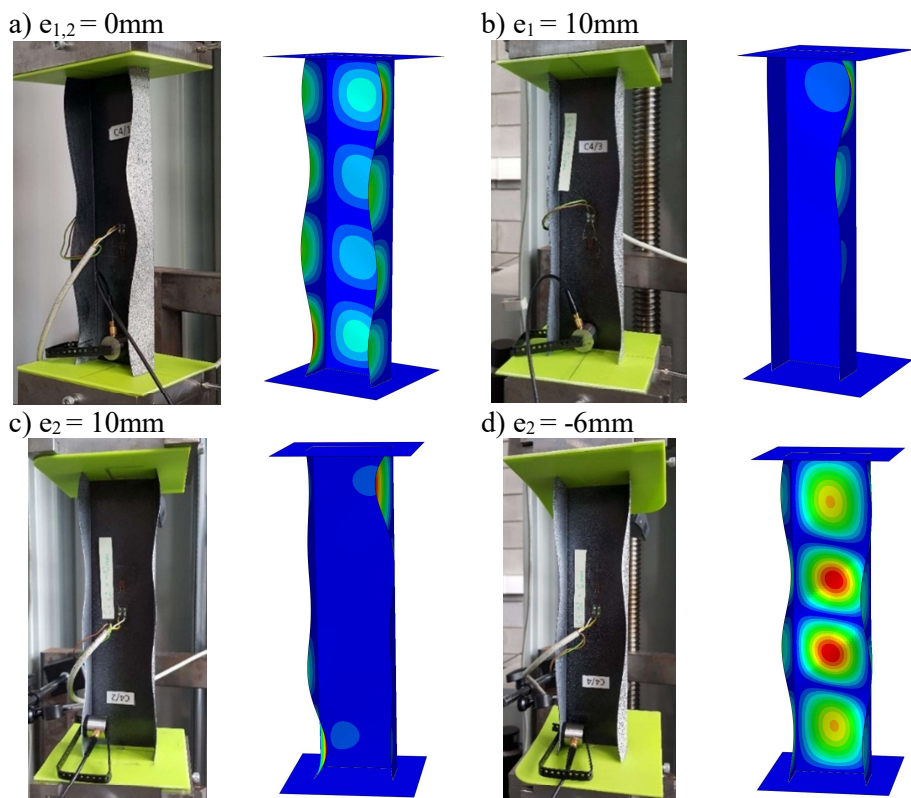
Rys. 5.1. Postacie utraty stateczności słupa C2 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych:
a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10$ mm, c) mimośród $e_2 = 10$ mm,
d) mimośród $e_2 = -6$ mm

W przypadku ściskania osiowego słupa o przekroju ceowym C2 (rys.5.1a) lokalne wyboczenie środka i ścian słupa charakteryzowało się powstaniem dwóch półfal w kierunku wzdłużnym słupa, symetrycznie względem wzdłużnej płaszczyzny symetrii słupa. W wyniku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 nie stwierdzono zmiany postaci wyboczenia – liczby półfal w pełnym zakresie realizowanych wartości mimośrodu siły ściskającej, jednakże zaobserwowano utratę symetrii półfal na poszczególnych ściankach słupa. Wynikało to z faktu dociążania ścianki w kierunku której realizowano mimośród obciążenia, oraz jednoczesne odciążanie ścianki przeciwległej (rys.5.1b). Postać lokalnego wyboczenia konstrukcji pozostała niezmienna w przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ od środka profilu (rys.5.1c). Natomiast realizacja mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ do środka profilu powodowała całkowitą zmianę postaci wyboczenia z dwóch na trzy półfale (rys.5.1d).



Rys. 5.2. Postacie utraty stateczności słupa C3 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych:
 a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$,
 d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

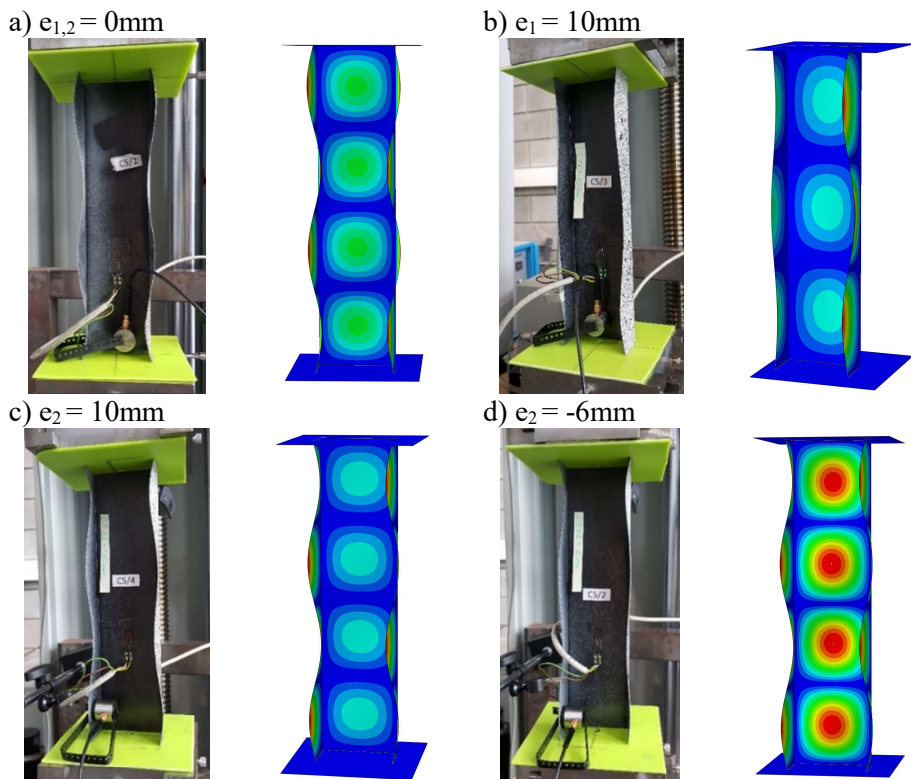
Przypadek ściskania osiowego słupa C3 (rys.5.2a) charakteryzowało lokalne wyboczenie środka i ścian słupa charakteryzujące się pięcioma półfalami w kierunku wzdłużnym słupa, usytuowanych symetrycznie względem płaszczyzny symetrii profilu ceowego. W przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 zaobserwowano zmianę postaci wyboczenia słupa, polegającą na zanikaniu półfal na ścianie odciążonej oraz środku i jednocześnie pogłębienie się półfal w pobliżu dolnego przekroju końcowego słupa (rys.5.2b). W przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ od środka profilu (rys.5.2c) liczba półfal na ściankach i środku profilu nie uległa zmianie, jednakże zaobserwowano odciążenie środka słupa i jednocześnie dociążenie jego ścianek. Natomiast wzrost wartości mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ do środka profilu powoduje odciążenie półek i dociążenie środka słupa. Nie wpływa to jednak na zmianę postaci wyboczenia (rys.5.2d).



Rys. 5.3. Postacie utraty stateczności s. C4 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) m. $e_2 = -6\text{mm}$

Ściskanie osiowe słupa C4 (rys.5.3a) charakteryzowało lokalne wyboczenie środka oraz ścian słupa w postaci czterech półfal w kierunku wzdłużnym słupa, usytuowanych symetrycznie względem płaszczyzny symetrii profilu. W przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 liczba półfal początkowo odpowiadała stanowi obciążenia osiowego. Wraz ze wzrostem wartości mimośrodu obciążenia postać wyboczenia utraciła swój symetryczny charakter względem płaszczyzny symetrii profilu ceowego. Górna część ścianki dociążonej przejęła w tym przypadku znaczącą wartość obciążenia (rys.5.3b), podczas gdy przeciwległa ścianka została praktycznie odciążona. Postać lokalnego wyboczenia konstrukcji w przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ od środka profilu zmieniła swój charakter z czterech na pięć półfal.

W tym przypadku górny i dolny obszar profilu ceowego został znacząco dociążony w porównaniu do części środkowej słupa (rys.5.3c). Wzrost wartości mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ do środka profilu powoduje odciążenie półek i dociążenie środka. Fakt ten nie wpływa na zmianę liczby półfal w porównaniu ze stanem ściskania osiowego (rys.5.3d).

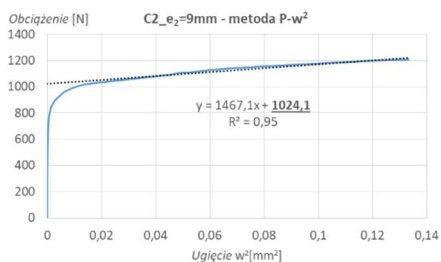


Rys. 5.4. Postacie utraty stateczności s. C5 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) m. $e_2 = -6\text{mm}$

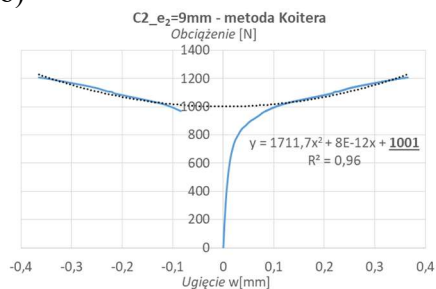
W przypadku ściskania osiowego słupa ceowego C5 (rys.5.4a) lokalne wyboczenie średnicy i ścian słupa charakteryzowało się powstaniem czterech półfal, usytuowanych symetrycznie względem płaszczyzny symetrii profilu ceowego. Realizacja nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 powodowała w rozważanym przypadku zmianę ilości półfal z czterech uzyskanych w przypadku ściskania osiowego na trzy półfale, przy czym wraz ze wzrostem wartości mimośrodu obciążenia postać wyboczenia traciła swój symetryczny charakter względem płaszczyzny symetrii profilu ceowego (rys.5.4b). W przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ postać lokalnego wyboczenia konstrukcji nie uległa zmianie (rys.5.4c). Analogicznie wzrost wartości mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ do średnicy profilu również nie wpływał na zmianę postaci wyboczenia (rys.5.4d).

Przedstawione na rysunkach 5.1÷5.4 wyznaczone numerycznie postacie utraty stateczności ściskanych słupów o przekroju ceowym zachowują całkowitą zgodność z otrzymanymi formami deformacji konstrukcji rzeczywistych, otrzymanymi w badaniach eksperymentalnych.

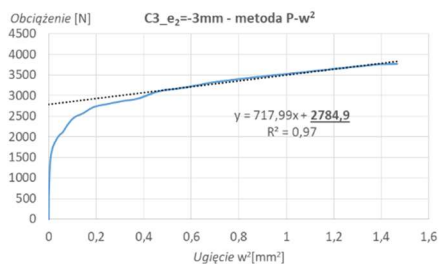
a)



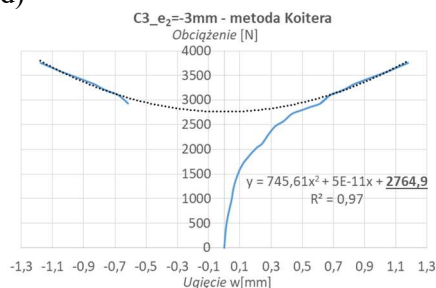
b)



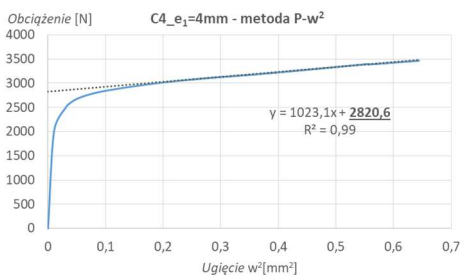
c)



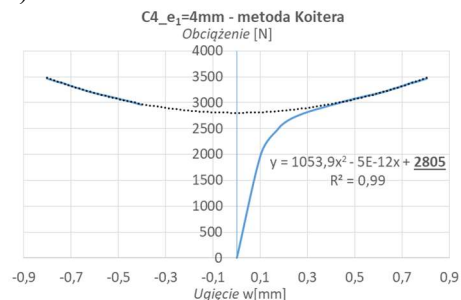
d)



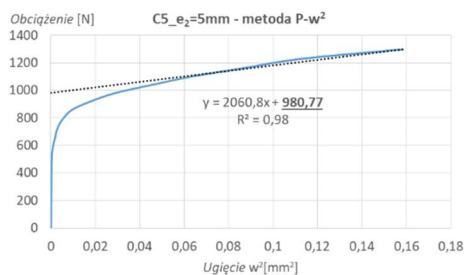
e)



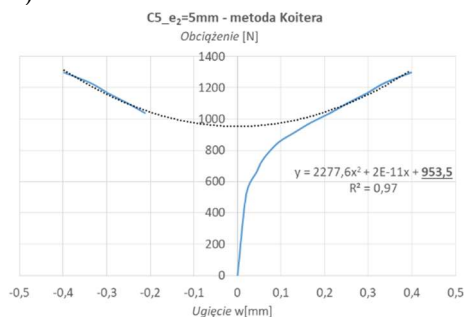
f)



g)



h)



Rys. 5.5. Aproxymacyjne wartości siły krytycznej słupów ceowych: a) C2 e₂ = 9mm – metoda P-w², b) C2 e₂ = 9mm – metoda Koitera, c) C3 e₂ = -3mm – metoda P-w², d) C3 e₂ = -3mm – metoda Koitera, e) C4 e₁ = 4mm – metoda P-w², f) C4 e₁ = 4mm – metoda Koitera, g) C5 e₂ = 5mm – metoda P-w², h) C5 e₂ = 5mm – metoda Koitera

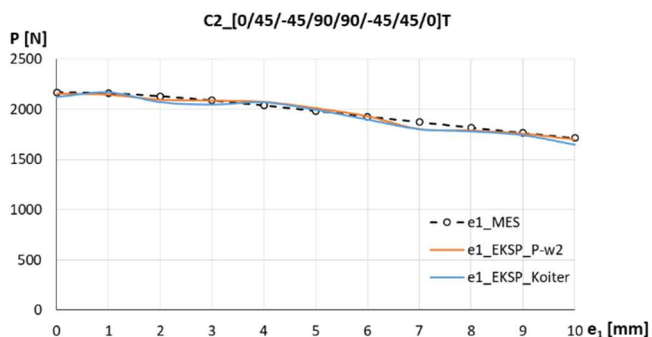
W celu określenia ilościowego wpływu nieosiowości obciążenia na stan krytyczny konstrukcji porównano wartości obciążenia krytycznego, odpowiadającego najniższym postaciom utraty stateczności ściskanych słupów kompozytowych. Wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistych wyznaczone zostały na podstawie określonych doświadczalnie pokrytycznych ścieżek równowagi w postaci *siła-przemieszczenie*, otrzymanych w wyniku pomiarów ugięć czujnikiem laserowym na kierunku prostopadłym do ścianki słupa ceowego. Do określenia wartości obciążenia krytycznego zastosowano w tym przypadku dwie aproksymacyjne metody: metodę $P-w^2$ oraz metodę *Koitera*. Przykładowe charakterystyki aproksymacyjne dla wybranych przypadków badanych próbek przedstawiono na rysunku 5.5.

W tabeli 5.1 zestawiono wyznaczone doświadczalnie oraz numerycznie wartości obciążenia krytycznego dla słupa ceowego o konfiguracji oznaczonej jako C2.

Tabela 5.1. Wartości sił krytycznych dla układu C2 – [0/45/-45/90/90/-45/45/0]_T

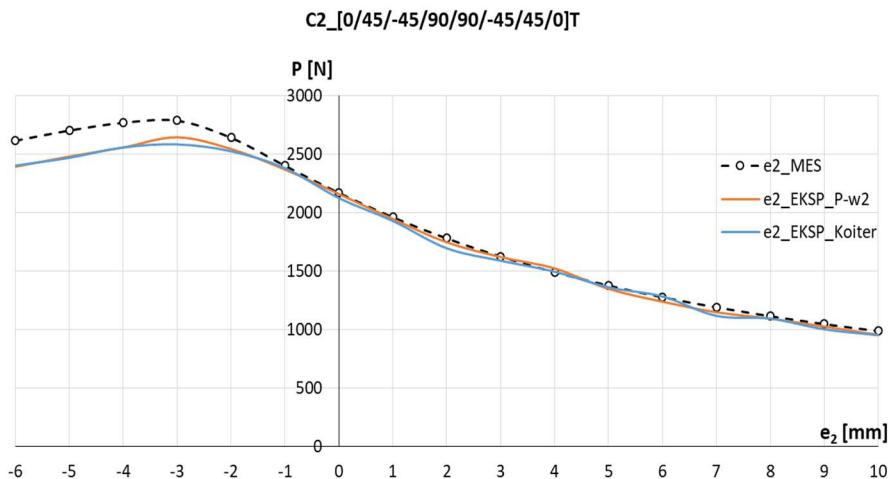
Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]						
C2 [0/45/-45/90/90/-45/45/0]_T						
e	e₁			e₂		
	e₁_EKSP_ P-w²	e₁_EKSP_ Koiter	e₁_MES	e₂_EKSP_ P-w²	e₂_EKSP_ Koiter	e₂_MES
-6				2392	2402	2618
-5				2480	2468	2705
-4				2557	2557	2771
-3				2644	2583	2788
-2				2544	2525	2643
-1				2368	2380	2402
0	2159	2124	2170	2159	2124	2170
1	2147	2170	2160	1945	1928	1961
2	2097	2073	2131	1745	1694	1780
3	2087	2049	2089	1619	1588	1625
4	2076	2071	2039	1522	1494	1491
5	2013	1997	1985	1347	1360	1376
6	1932	1899	1929	1237	1281	1277
7	1804	1804	1873	1147	1116	1190
8	1789	1781	1818	1092	1092	1114
9	1759	1744	1765	1024	1001	1046
10	1700	1649	1714	953	950	987

Wyznaczone wartości obciążeń krytycznych wykazują wysoką zbieżność zastosowanych metod. Maksymalne rozbieżności obciążeń krytycznych konstrukcji rzeczywistej wyznaczone metodami aproksymacyjnymi wynoszą w przybliżeniu 3%, natomiast różnice z uzyskanymi wynikami obliczeń numerycznych nie przekraczają 9%. Należy przy tym zauważyć, że zastosowane metody aproksymacyjne stanowią w przeważającej liczbie prób dolne oszacowanie obciążenia krytycznego względem obciążenia uzyskanego z MES. W celu dokonania oceny wpływu nieosiowości obciążenia na wartość obciążenia krytycznego konstrukcji opracowano krzywe opisujące zależność obciążenia krytycznego od wartości mimośrodowość obciążenia na poszczególnych kierunkach (rys.5.6 oraz 5.7).



Rys. 5.6. Słup ceowy C2 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_1

Zmiany wartości mimośrodowość obciążenia w kierunku e_1 powodują monotoniczny spadek obciążenia krytycznego, którego maksymalna wartość wynosi 21% w przypadku granicznej wartości mimośrodowość $e_1 = 10\text{mm}$ uzyskanej z obliczeń numerycznych (MES). Analogiczny charakter krzywych otrzymano w przypadku metody $P-w^2$ oraz metody *Koitera*, przy czym w tym przypadku spadek wartości siły osiąga 22% (rys.5.6). Podobne zmiany otrzymano w przypadku realizacji mimośrodowość obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ od środka profilu ceowego (rys.5.7). W tym przypadku spadek obciążenia krytycznego wraz ze wzrostem wartości mimośrodowość obciążenia był znaczący i wynosił 54% (w porównaniu do ściskania osiowego – obliczenia MES), natomiast w odniesieniu do metody $P-w^2$ oraz metody *Koitera* 56%. Całkowicie odmienną odpowiedź konstrukcji otrzymano w wyniku realizacji mimośrodowość obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ od środka ciężkości w stronę środka profilu ceowego. W tym przypadku, zbliżając się do środka profilu, stwierdzono wzrost odporności słupa na wyobczenie. Wzrost wartości obciążenia krytycznego odpowiadającego mimośrodowość $e_2 = -3\text{mm}$ osiąga wartość 28% w przypadku obliczeń MES oraz 22% w przypadku metod $P-w^2$ oraz *Koitera*. Dalszy wzrost mimośrodowość obciążenia powoduje łagodny spadek wartości obciążenia krytycznego (rys.5.7).



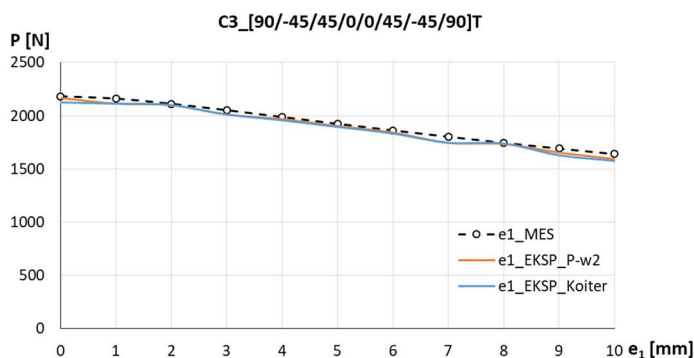
Rys. 5.7. Słup ceowy C2 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

Tabela 5.2. Wartości sił krytycznych dla układu C3 – [90/-45/45/0/0/45/-45/90]T

Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]						
C3 [90/-45/45/0/0/45/-45/90]T						
e	e₁			e₂		
	e₁_EKSP_P-w²	e₁_EKSP_Koiter	e₁_MES	e₂_EKSP_P-w²	e₂_EKSP_Koiter	e₂_MES
-6				2585	2543	2626
-5				2700	2700	2731
-4				2739	2751	2805
-3				2784	2764	2793
-2				2610	2611	2632
-1				2404	2403	2413
0	2167	2124	2181	2167	2124	2181
1	2114	2114	2159	1954	1927	1966
2	2100	2100	2111	1773	1736	1778
3	2012	2012	2051	1605	1584	1616
4	1968	1958	1988	1459	1426	1477
5	1903	1895	1924	1364	1316	1359
6	1842	1833	1862	1257	1209	1257
7	1746	1746	1803	1152	1112	1168
8	1734	1739	1746	1078	1040	1090
9	1654	1629	1692	984	960	1022
10	1594	1576	1641	910	887	962

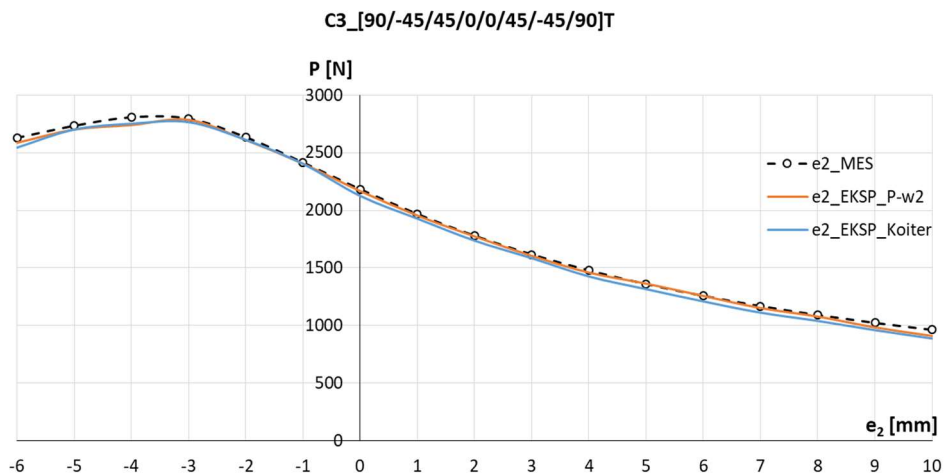
W analogiczny sposób przedstawione zostaną wyniki badań dotyczące pozostałych słupów ceowych C3÷C5. Wyznaczone doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążeń krytycznych w przypadku słupa o przekroju ceowym C3 zestawiono w tabeli 5.2. Otrzymane różnymi metodami badawczymi wartości obciążeń krytycznych w opisywanym przypadku wykazują wysoką zgodność. Maksymalne rozbieżności obciążeń krytycznych konstrukcji rzeczywistej wyznaczone metodami aproksymacyjnymi wynoszą w przybliżeniu 4%, natomiast w porównaniu z wartościami wyznaczonymi numerycznie nie przekraczają 8%. Należy zauważyć, że zastosowane metody aproksymacyjne stanowią dolne oszacowanie obciążenia krytycznego, względem obciążenia bifurkacyjnego.

Wyznaczone wartości obciążeń krytycznych zaprezentowano w formie graficznej w postaci charakterystyk *obciążenie krytyczne-wartość mimośrod* obciążenia na rysunkach 5.8 i 5.9.



Rys. 5.8. Słup ceowy C3 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_1

Zmiany wartości mimośrodu obciążenia w kierunku e_1 powodują monotoniczny spadek obciążenia krytycznego, którego maksymalna wartość wynosi 25% w przypadku maksymalnej wartości mimośrodu $e_1 = 10\text{mm}$ – wyniki MES. Analogiczny charakter krzywych otrzymano w przypadku metody $P-w^2$ oraz metody *Koitera*, przy czym spadek wartości siły osiąga 26% (rys.5.8). Zbliżone zachowanie słupa o przekroju ceowym otrzymano w przypadku zmian wartości mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ od środka profilu ceowego (rys.5.9). W tym przypadku spadek obciążenia krytycznego w odniesieniu do przypadku ściskania osiowego jest znaczący i wynosi 56% (obliczenia MES), natomiast w przypadku metod $P-w^2$ oraz *Koitera* 58%. Całkowicie odmienny charakter zmian obciążenia krytycznego otrzymano w przypadku realizacji mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ od środka ciężkości do środka profilu ceowego. Stwierdzono wzrost wartości obciążenia krytycznego w przypadku wartości mimośrodu obciążenia $e_2 = -3\text{mm}$ (ekstremum) wynoszący 28% (wyniki obliczeń MES) oraz 30% w przypadku metod $P-w^2$ oraz *Koitera*. Dalszy wzrost mimośrodu obciążenia powodował łagodny spadek wartości obciążenia krytycznego (rys.5.9).

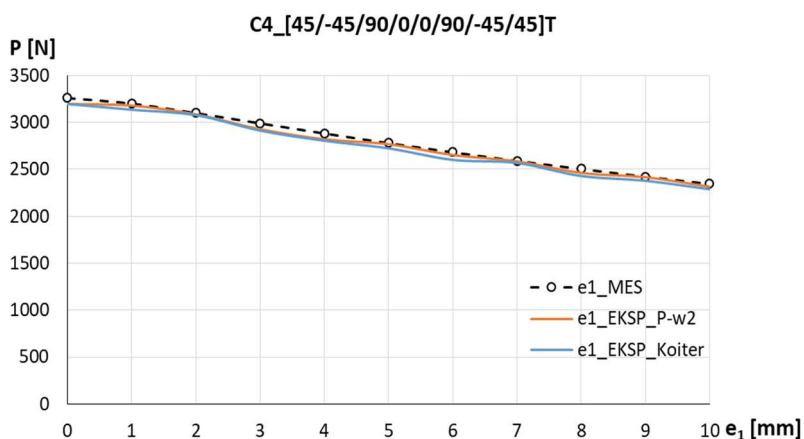


Rys. 5.9. Słup ceowy C3 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

Tabela 5.3. Wartości sił krytycznych dla układu C4 – [45/-45/90/0/0/90/-45/45]T

<i>Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]</i>						
<i>C4 [45/-45/90/0/0/90/-45/45]T</i>						
<i>e</i>	<i>e₁</i>			<i>e₂</i>		
	<i>e₁_EKSP_P-w²</i>	<i>e₁_EKSP_Koiter</i>	<i>e₁_MES</i>	<i>e₂_EKSP_P-w²</i>	<i>e₂_EKSP_Koiter</i>	<i>e₂_MES</i>
-6				3528	3494	3555
-5				3712	3682	3714
-4				3815	3796	3864
-3				3917	3900	3974
-2				3817	3792	3874
-1				3529	3529	3608
0	3196	3196	3259	3196	3196	3259
1	3179	3135	3200	2906	2823	2916
2	3086	3078	3099	2590	2586	2614
3	2927	2913	2990	2255	2260	2357
4	2820	2805	2883	2061	2015	2141
5	2768	2724	2780	1915	1881	1959
6	2653	2601	2683	1726	1656	1804
7	2585	2568	2591	1515	1494	1671
8	2462	2429	2504	1427	1396	1556
9	2416	2379	2423	1404	1366	1455
10	2315	2288	2346	1322	1300	1366

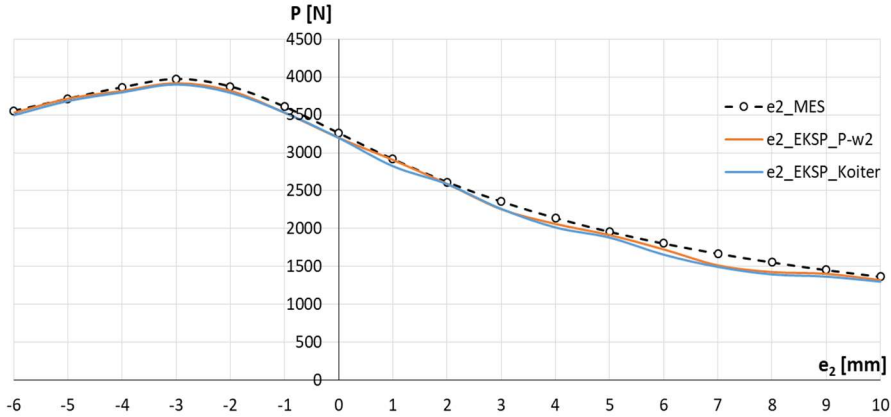
Wyznaczone doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążeń krytycznych dla próbki C4 zestawiono w tabeli 5.3. Maksymalne rozbieżności wartości obciążeń krytycznych konstrukcji rzeczywistej wyznaczonych metodami aproksymacyjnymi nie przekraczają 3%, natomiast z wartościami obliczonymi numerycznie osiągają 11% w przypadku mimośrodowości ($e_2 = 7\text{mm}$). W przypadku słupa o przekroju ceowym C4 metody aproksymacyjne również stanowią dolne oszacowanie obciążenia krytycznego względem obciążenia bifurkacyjnego.



Rys. 5.10. Słup ceowy C4 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_1

Rysunki 5.10 i 5.11 opisują charakterystyki wpływu nieosiowości obciążenia na wartość obciążenia krytycznego w przypadku słupa o przekroju ceowym C4. Zmiana wartości mimośrodu obciążenia w kierunku e_1 powoduje monotoniczny spadek wartości obciążenia krytycznego, którego maksymalna wartość wynosi 28% dla maksymalnej wartości mimośrodu w przypadku wszystkich metod (rys.5.10). Analogiczne zmiany wartości obciążenia krytycznego uzyskano w przypadku zmian wartości mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ od środka profilu ceowego (rys.5.11). Spadek obciążenia krytycznego jest znaczący wraz ze wzrostem wartości mimośrodu obciążenia i osiąga 58% (MES), natomiast 59% w przypadku metod $P-w^2$ oraz *Koitera*. Odmienny charakter pracy konstrukcji występuje w przypadku zmian wartości mimośrodu obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ od środka ciężkości do środka profilu ceowego. Wzrost wartości obciążenia krytycznego odpowiadający wartości mimośrodu obciążenia $e_2 = -3\text{mm}$ osiąga (ekstremum) 22% w przypadku wszystkich metod. Dalszy wzrost mimośrodu obciążenia powoduje łagodny spadek wartości obciążenia krytycznego (rys.5.11).

C4_[45/-45/90/0/0/90/-45/45]T

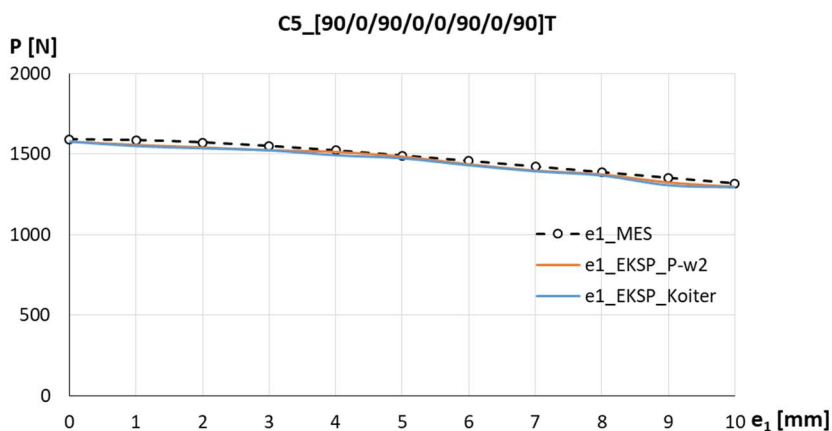


Rys. 5.11. Słup ceowy C4 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

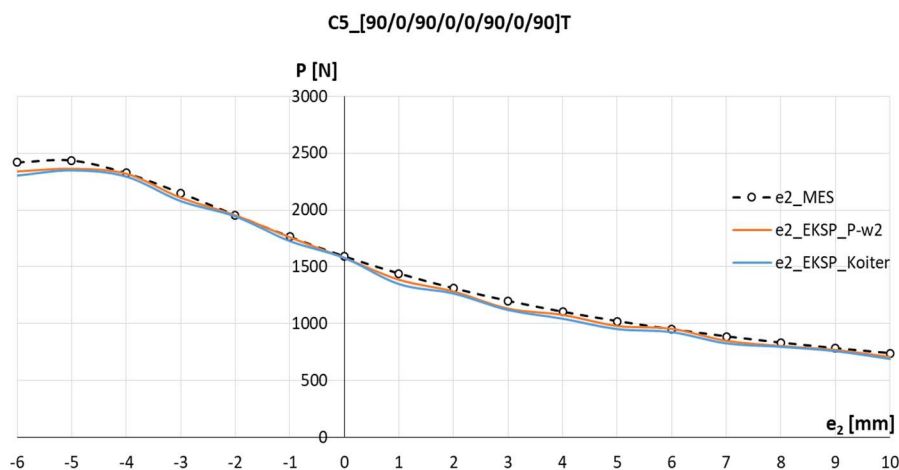
Tabela 5.4. Wartości sił krytycznych dla układu C5 – [90/0/90/0/0/90/0/90]T

Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]						
C5 [90/0/90/0/0/90/0/90]T						
e	e_1			e_2		
	$e_1_{EKSP_P-w^2}$	$e_1_{EKSP_Koiter}$	e_1_{MES}	$e_2_{EKSP_P-w^2}$	$e_2_{EKSP_Koiter}$	e_2_{MES}
-6				2339	2302	2420
-5				2361	2348	2436
-4				2318	2293	2325
-3				2107	2078	2148
-2				1953	1943	1954
-1				1759	1726	1764
0	1578	1578	1591	1578	1578	1591
1	1557	1550	1586	1387	1349	1440
2	1541	1536	1572	1283	1265	1311
3	1524	1523	1550	1133	1121	1200
4	1514	1493	1522	1078	1044	1104
5	1484	1474	1490,9	980	953	1022
6	1437	1431	1457	955	926	950
7	1397	1393	1422	850	827	887
8	1374	1367	1387	804	797	832
9	1324	1307	1352	770	759	783
10	1297	1294	1318	708	691	739

Ostatnią rozpatrywaną konfiguracją warstw kompozytu był słup o przekroju ceowym o oznaczeniu C5. Dla tego przypadku wyznaczone doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążeń krytycznych prezentuje tabela 5.4. Maksymalne rozbieżności wartości obciążeń krytycznych słupa C5 wyznaczonych metodami aproksymacyjnymi nie przekraczają 2%, natomiast różnice z wartościami wyznaczonymi numerycznie nie przekraczają 5%, ($e_2 = -6\text{mm}$). Zastosowane metody aproksymacyjne stanowią dolne oszacowanie obciążenia krytycznego względem obciążenia bifurkacyjnego.



Rys. 5.12. Słup C5 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_1



Rys. 5.13. Słup C5 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

Charakterystyki wpływu nieosiowości obciążenia w dwóch niezależnych kierunkach na wartość obciążenia krytycznego dla słupa o przekroju ceowym C5 (krzyżowy układ warstw kompozytu) przedstawiono na rysunkach 5.12 i 5.13. Zmiany wartości mimośrodowość obciążenia w kierunku e_1 podobnie jak w poprzednich przypadkach powodują monotoniczny spadek wartości obciążenia krytycznego, którego maksymalna wartość wynosi 17% przy maksymalnej wartości mimośrodowość (obliczenia MES) oraz 18% (metody aproksymacyjne) (rys.5.12).

W przypadku zmian wartości mimośrodowość obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ od środka profilu ceowego (rys.5.13) spadek obciążenia krytycznego wraz ze wzrostem wartości mimośrodowość obciążenia jest wysoki i osiąga 53% (obliczenia MES), natomiast 55% w przypadku metody $P-w^2$ oraz 56% w przypadku metody *Koitera* (w odniesieniu do ściskania osiowego).

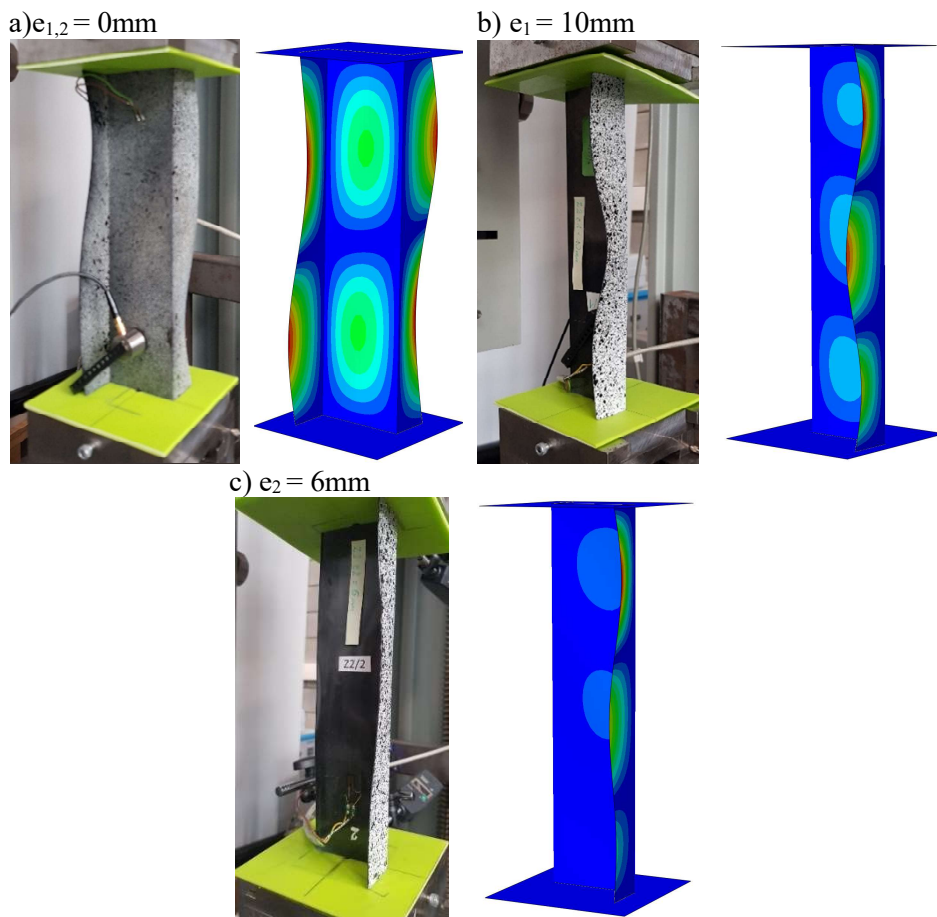
Odmienne zachowanie konstrukcja wykazuje w przypadku zmian wartości mimośrodowość obciążenia $e_{2(-)}$ od środka ciężkości do środka profilu ceowego. W tym przypadku następuje wzrost wartości obciążenia krytycznego odpowiadający wartości mimośrodowość obciążenia w punkcie $e_2 = -5\text{mm}$ (ekstremum) o 53% w przypadku metody MES, natomiast 50% według metody $P-w^2$ oraz 49% wg metody *Koitera*. Dalszy wzrost mimośrodowość obciążenia powoduje łagodny spadek wartości obciążenia krytycznego (rys.5.13).

5.1.2. Słupy o przekroju zetowym

W analogiczny sposób przeprowadzona została analiza stanu krytycznego słupów o przekroju zetowym. Badaniom poddano takie same konfiguracje warstw laminatu o oznaczeniach Z2÷Z5, odpowiadające oznaczeniom stosowanym w przypadku słupów o przekroju ceowym. Na poniższych rysunkach przedstawiono eksperymentalne formy deformacji oraz numerycznie wyznaczone najniższe postacie utraty stateczności słupów zetowych dla wszystkich rozważanych konfiguracji kompozytu: Z2 (rys. 5.14), Z3 (rys. 5.15), Z4 (rys. 5.16) oraz Z5 (rys.5.17). Prezentowane wyniki dotyczą przypadku ściskania osiowego oraz skrajnych wartości mimośrodowość obciążenia w dwóch prostopadłych kierunkach e_1 oraz e_2 .

W przypadku ściskania osiowego słupa o przekroju zetowym Z2 (rys. 5.14a) lokalne wyboczenie środka i ścian słupa charakteryzowało się powstaniem dwóch półfal w kierunku wzdłużnym słupa, usytuowanych równomiernie na środku i ściankach profilu. Podczas realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 zaobserwowano zmianę postaci wyboczenia z dwóch na trzy półfale. Wraz ze wzrostem wartości mimośrodowość obciążenia maksymalne poprzeczne ugięcia profilu przesuwały się na ściankę słupa zetowego. Wynika to z faktu dociążania ścianki w kierunku, w którym zwiększano nieosiowość obciążenia, czemu towarzyszył proces jednoczesnego odciążania środka oraz drugiej ścianki słupa o przekroju zetowym (rys. 5.14b). Realizacja nieosiowości obciążenia ściskają-

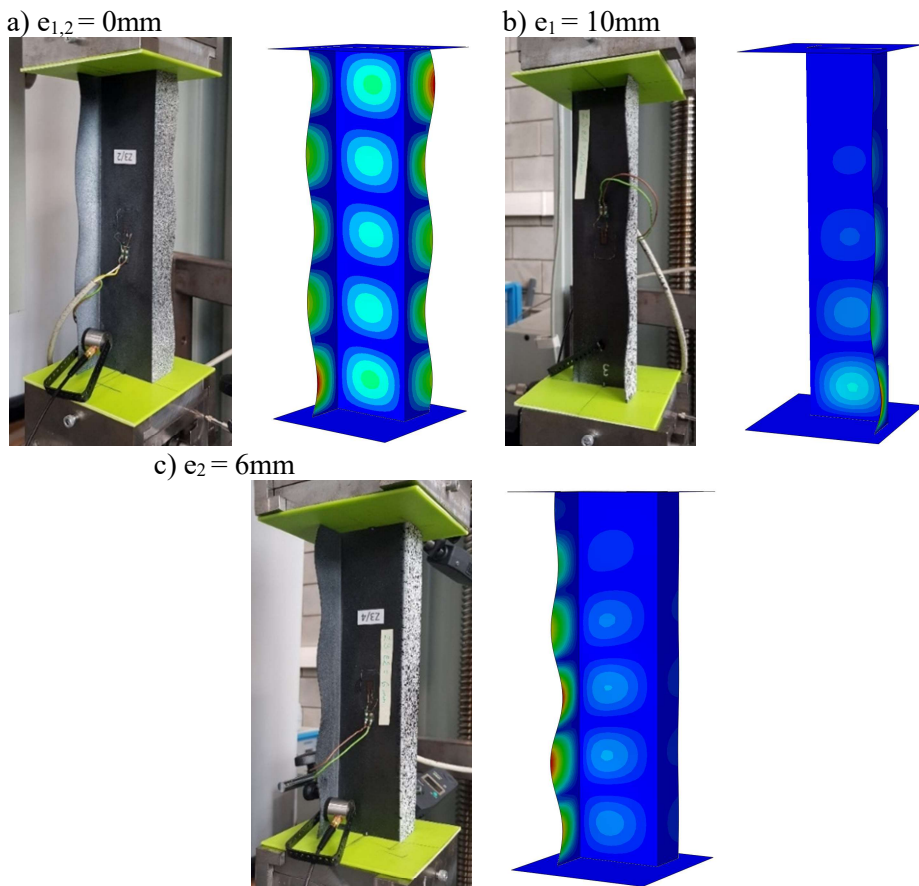
tego w kierunku e_2 (prostopadle do środka) również prowadziło do zmiany postaci wybożenia z dwóch na trzy półfale (rys. 5.14c). Maksymalne wartości ugięcia występowały na dociążonej ścianie.



Rys. 5.14. Postacie utraty stateczności słupa Z2 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

Przypadek ściskania osiowego słupa o przekroju zetowym Z3 (rys. 5.15a) charakteryzowało lokalne wybożenie profilu w postaci powstania pięciu półfal w kierunku wzdłużnym słupa, usytuowanych na jego środku i ściankach. W przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 nie stwierdzono zmiany postaci utraty stateczności – ilości półfal nie ulegała zmianie. Wraz ze wzrostem wartości mimośrodu obciążenia maksymalne ugięcia kumulowały się na dociążanej ścianie słupa o przekroju zetowym. W tym przypadku dolna część obciążonej ścianki przejęła znaczącą wartość obciążenia (rys. 5.15b).

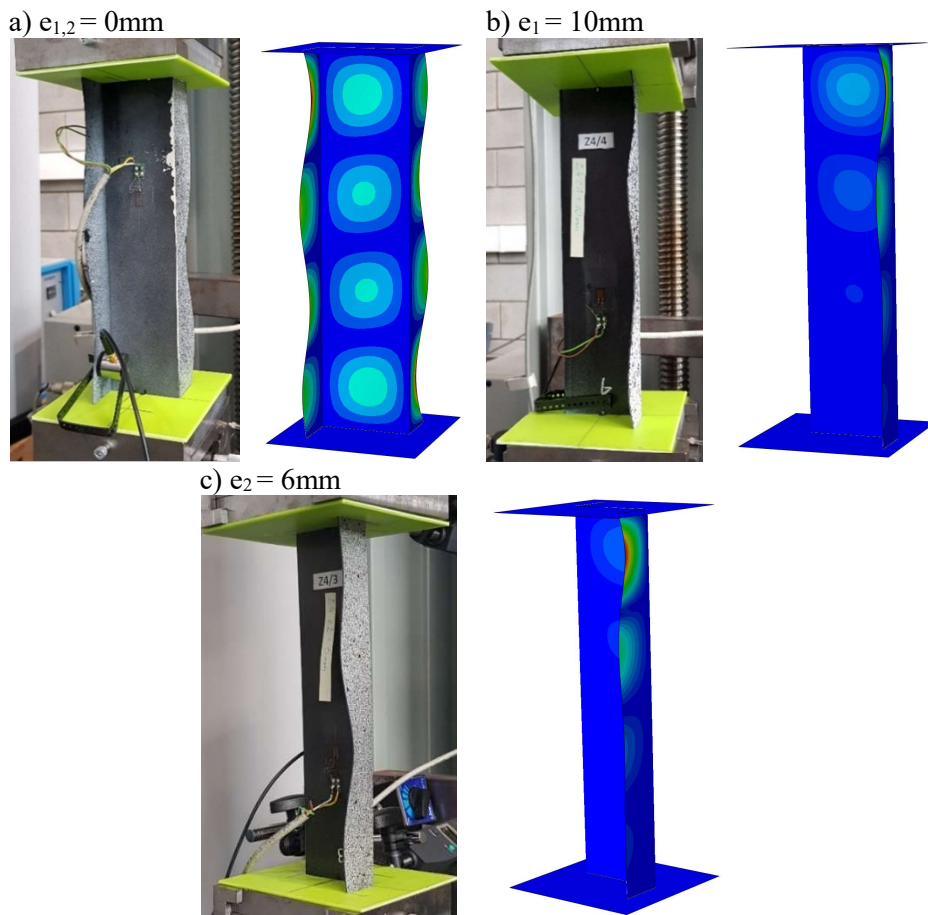
W kierunku e_2 można również zaobserwować dociążanie ścianki, w kierunku której realizowana jest nieosiowość obciążenia (rys. 5.15c). Ponadto wzrost wartości mimośrod obciążenia w kierunku e_2 powoduje zmianę postaci wybożenia z pięciu na sześć półfal (rys. 5.15c).



Rys. 5.15. Postacie utraty stateczności słupa Z3 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

Ściskanie osiowe słupa o przekroju zetowym Z4 (rys. 5.16a) charakteryzowało równomierne wybożenie środka oraz ścian słupa w postaci powstania czterech półfal w kierunku wzdłużnym słupa. W przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 postać wybożenia (liczba półfal) odpowiada stanowi obciążenia osiowego. Wraz ze wzrostem wartości mimośrod obciążenia postać wybożenia traci swój symetryczny charakter względem osi profilu zetowego. Górna część ścianki dociążonej przejmuje znaczącą wartość obciążenia (rys. 5.16b).

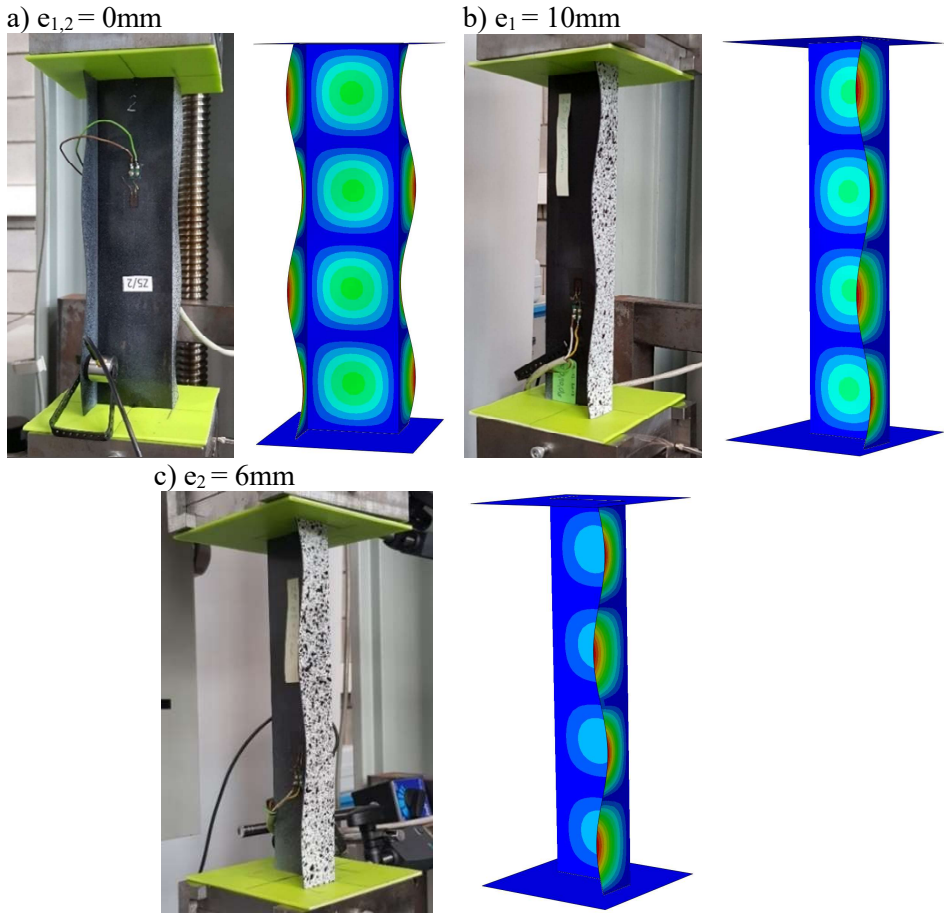
Również postać lokalnego wybożenia konstrukcji w przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_2 pozostaje niezmienna. Wzrost wartości mimośrodu obciążenia powoduje dociążenie ścianki słupa zgodnie z kierunkiem realizacji mimośrodu obciążenia.



Rys. 5.15. Postacie utraty stateczności słupa Z4 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

W przypadku ściskania osiowego słupa o przekroju zetowym Z5 (rys. 5.17a) lokalne wybożenie środka i ścian słupa charakteryzowało powstanie czterech półfal. Realizacja nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 nie wpływała na zmianę ilości półfal. Wraz ze wzrostem wartości mimośrodu obciążenia postać wybożenia ulegała modyfikacji, polegającej na widocznym dociążeniu ścianki słupa, w kierunku której realizowano nieosiowość obciążenia (rys. 5.17b). Postać lokalnego wybożenia konstrukcji nie ulegała zmianie również w przypadku realizacji

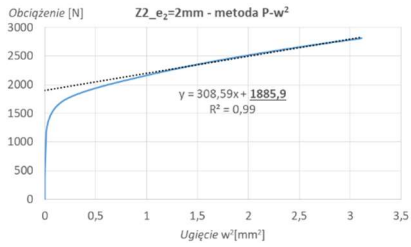
nieosiowości obciążenia w kierunku e_2 (rys. 5.17c). Wzrost nieosiowości obciążenia powodował dociążenie ścianki w kierunku realizacji nieosiowości e_2 , na której występują wartości największych ugięć.



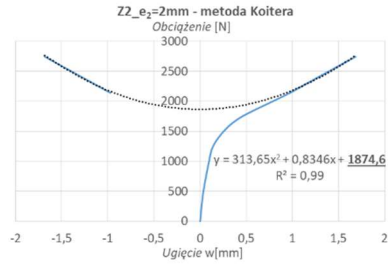
Rys. 5.17. Postacie utraty stateczności słupa Z5 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

Otrzymane doświadczalne i numeryczne formy deformacji ściskanych słupów o przekroju zetowym wykazują istotny wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego w obydwu kierunkach na pracę konstrukcji. Wyznaczone numerycznie postacie utraty stateczności badanych słupów wykazały we wszystkich przypadkach zgodność jakościową z postaciami deformacji konstrukcji rzeczywistych.

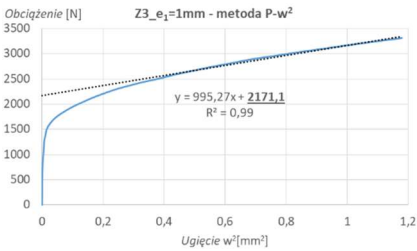
a)



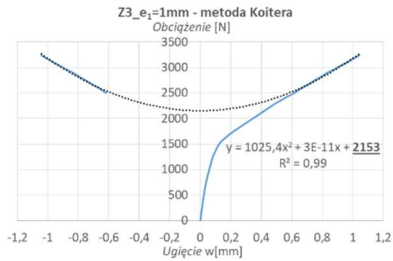
b)



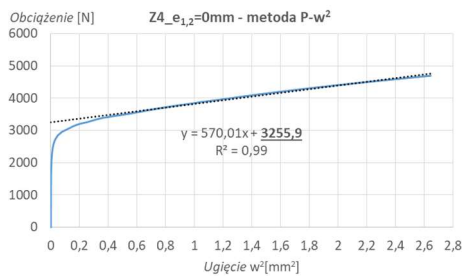
c)



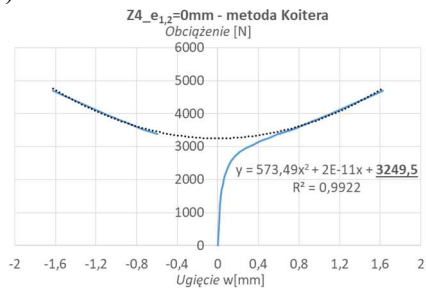
d)



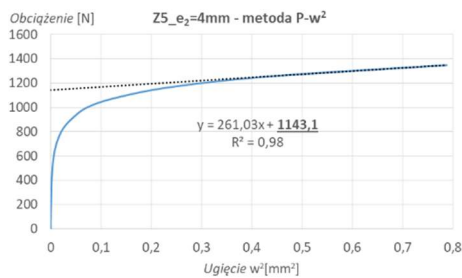
e)



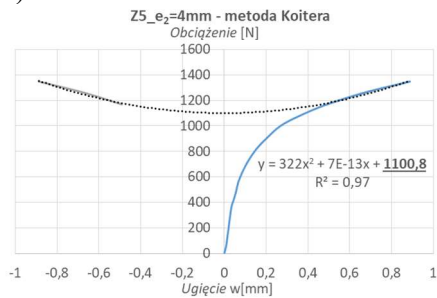
f)



g)



h)



Rys. 5.18. Aproksymacyjne wartości obciążenia krytycznego słupów o przekroju zetowym poddanych ścisłaniu mimośrodowemu: a) Z2 e₂ = 2mm – metoda P-w², b) Z2 e₂ = 2mm – metoda Koitera, c) Z3 e₁ = 1mm – metoda P-w², d) Z3 e₁ = 1mm – metoda Koitera, e) Z4 e_{1,2} = 0mm – metoda P-w², f) Z4 e_{1,2} = 0mm – metoda Koitera, g) Z5 e₂ = 4mm – metoda P-w², h) Z5 e₂ = 4mm – metoda Koitera

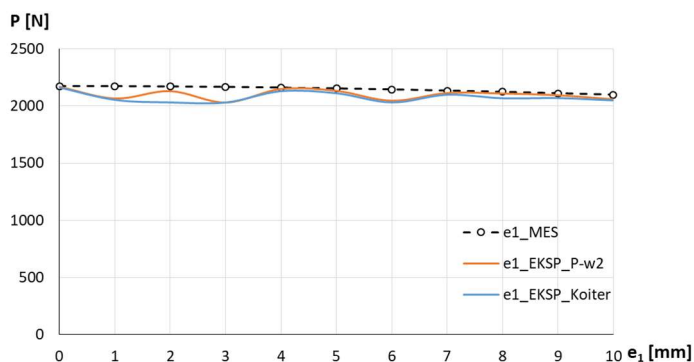
Ocenę ilościowego wpływu nieosiowości obciążenia na stan krytyczny konstrukcji przeprowadzono na podstawie porównania doświadczalnych i numerycznych wartości obciążenia krytycznego ściskanych słupów o przekroju zetowym. Eksperymentalne wartości obciążenia krytycznego wyznaczone zostały metodami aproksymacyjnymi: *P-w²* i *Koitera* na podstawie pokrytycznych ścieżek równowagi *siła-przemieszczenie*, natomiast numeryczne wartości obciążenia krytycznego otrzymano w wyniku rozwiązania liniowego zagadnienia własnego wykorzystującego kryterium minimum energii potencjalnej układu. Na rysunku 5.18 przedstawiono przykładowe charakterystyki ściskanych słupów, wykonane z wykorzystaniem w/w metod aproksymacyjnych.

Wyznaczone eksperymentalne oraz numeryczne wartości obciążeń krytycznych słupa o przekroju zetowym o konfiguracji warstw kompozytu oznaczonej symbolem Z2 przedstawiono w tabeli 5.5.

Tabela 5.5. Wartości sił krytycznych dla układu Z2

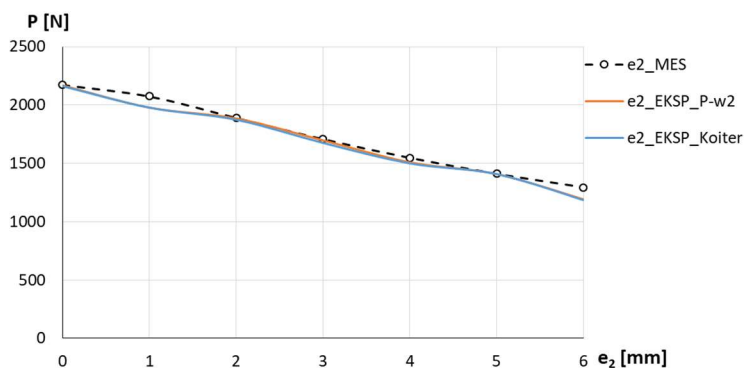
Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]						
Z2 [0/45/-45/90/90/-45/45/0]_T						
e	e₁			e₂		
	e₁_EKSP_ P-w²	e₁_EKSP_ Koiter	e₁_MES	e₂_EKSP_ P-w²	e₂_EKSP_ Koiter	e₂_MES
0	2168	2162	2173	2168	2162	2173
1	2065	2053	2173	1978	1978	2075
2	2130	2031	2170	1885	1874	1890
3	2030	2030	2166	1697	1675	1708
4	2149	2129	2160	1509	1500	1547
5	2132	2111	2153	1408	1408	1410
6	2046	2031	2144	1192	1185	1295
7	2114	2098	2134			
8	2109	2068	2123			
9	2094	2069	2111			
10	2058	2049	2098			

Otrzymane wartości sił krytycznych potwierdzają wysoką zgodność zastosowanych metod. Maksymalne rozbieżności obciążeń krytycznych konstrukcji rzeczywistej wyznaczone metodami aproksymacyjnymi wynoszą ok. 5%, natomiast różnice z wynikami obliczeń numerycznych nie przekraczają 6%. Należy zauważyć, że zastosowane metody aproksymacyjne stanowią dolne oszacowanie obciążenia krytycznego względem obciążenia uzyskanego z MES dla wszystkich przeprowadzonych prób. Prezentowane w tabeli 5.5 wyniki przedstawiono w formie graficznej w postaci wykresów opisujących wpływ wartości mimośrod obciążenia na wartość siły krytycznej (rys. 5.19 i 5.20).



Rys. 5.19. Słup Z2 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_1

Realizacja nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 powoduje nieznaczny spadek wartości obciążenia krytycznego, którego maksymalna wartość wynosi 5% w przypadku największej wartości mimośrodów $e_1 = 10\text{mm}$, uzyskanej z obliczeń numerycznych. Zbliżony charakter krzywych otrzymano w przypadku metody $P-w^2$ oraz metody *Koitera*, gdzie spadek wartości siły krytycznej wynosi również 5% (rys. 5.19). Znacznie istotniejsze zmiany otrzymano w przypadku realizacji mimośrodu obciążenia w kierunku e_2 , dla którego spadek obciążenia krytycznego wyznaczonego numerycznie wraz ze wzrostem wartości mimośrodu obciążenia ($e_2 = 6\text{mm}$) wynosił 40%. Potwierdziły to wyniki badań doświadczalnych, w wyniku których w przypadku metod aproksymacyjnych: $P-w^2$ oraz metody *Koitera* spadek siły krytycznej wyniósł 45% (w porównaniu do ściskania osiowego) (rys. 5.20).

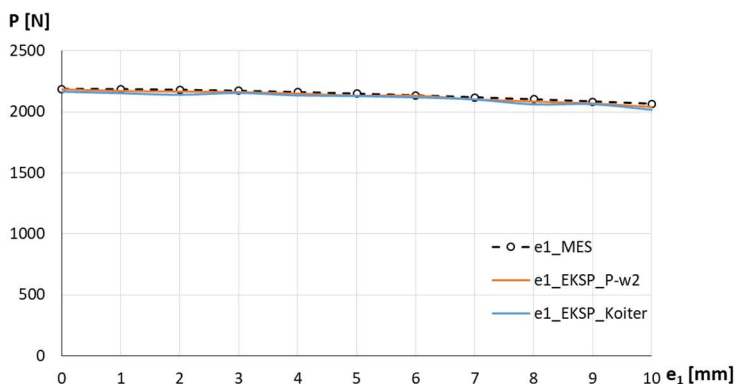


Rys. 5.20. Słup Z2 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

Doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążeń krytycznych otrzymane w wyniku realizowania nieosiowości obciążenia próbki Z3 przedstawiono w tabeli 5.6. Maksymalne rozbieżności obciążeń krytycznych konstrukcji rzeczywistej wyznaczone metodami aproksymacyjnymi wynoszą w przybliżeniu 4%, natomiast w porównaniu z wartościami wyznaczonymi numerycznie nie przekraczają 12% ($e_2 = 4\text{mm}$). Należy zauważyć, że zastosowane metody aproksymacyjne stanowią dolne oszacowanie obciążenia krytycznego, względem obciążenia numerycznego (MES).

Tabela 5.6. Wartości sił krytycznych dla układu Z3

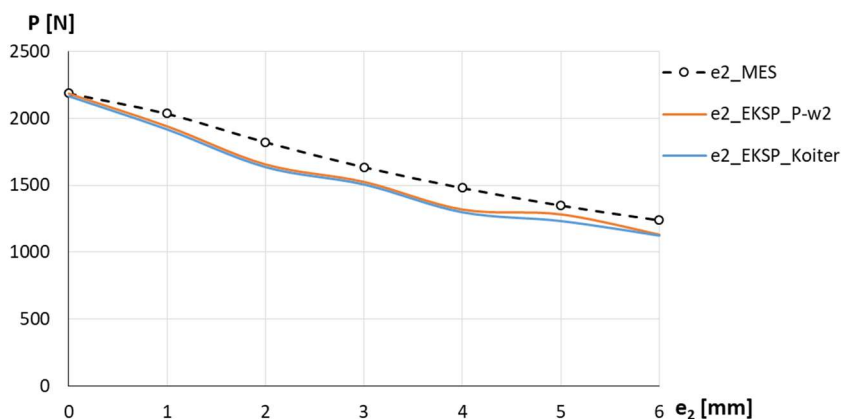
<i>Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]</i>						
<i>Z3 [90/-45/45/0/0/45/-45/90]_T</i>						
e	e ₁			e ₂		
	e ₁ _EKSP_ P-w ²	e ₁ _EKSP_ Koiter	e ₁ _MES	e ₂ _EKSP_ P-w ²	e ₂ _EKSP_ Koiter	e ₂ _MES
0	2184	2165	2187	2184	2165	2187
1	2171	2153	2185	1940	1917	2035
2	2166	2139	2180	1655	1635	1822
3	2161	2154	2171	1525	1505	1635
4	2150	2134	2161	1318	1297	1479
5	2132	2129	2148	1282	1232	1349
6	2132	2118	2134	1131	1123	1238
7	2102	2101	2118			
8	2084	2061	2101			
9	2068	2062	2084			
10	2040	2016	2065			



Rys. 5.21. Słup Z3 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e₁

Analizę wpływu nieosiowości obciążenia na wartość obciążenia krytycznego słupa o przekroju zetowym Z3 przedstawiono na podstawie wykresów opisujących charakterystykę *obciążenie krytyczne-wartość mimośrodu obciążenia* (rys. 5.21 i 5.22).

Zmiany wartości mimośrodu obciążenia próbki Z3 w kierunku e_1 powodują nieznaczny spadek numerycznej wartości obciążenia krytycznego, którego maksymalna wartość wynosi 6% dla maksymalnej wartości mimośrodu $e_1 = 10\text{mm}$. Analogiczny charakter krzywych oraz spadek wartości siły otrzymano w przypadku metody $P-w^2$ oraz metody *Koitera*, przy czym spadek wartości siły osiągał 7% (rys. 5.21). Większy wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na pracę konstrukcji otrzymano w przypadku realizacji mimośrodu obciążenia w kierunku e_2 (rys.5.22). W tym przypadku spadek obciążenia krytycznego w odniesieniu do przypadku ściskania osiowego jest znaczący i wynosi 43% (MES), natomiast w przypadku metod $P-w^2$ oraz *Koitera* 48% (rys.5.22).

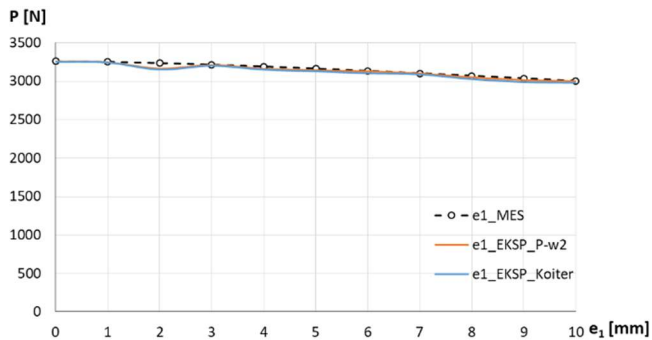


Rys. 5.22. Słup Z3 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

Wyznaczone doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążeń krytycznych w przypadku słupa o przekroju zetowym Z4 zestawiono w tabeli 5.7. Maksymalne rozbieżności wartości obciążeń krytycznych konstrukcji rzeczywistej wyznaczonych metodami aproksymacyjnymi nie przekraczają 4%, natomiast z wartościami obliczonymi numerycznie osiągają 13% ($e_2 = 5\text{mm}$). W przypadku konfiguracji Z4 metody aproksymacyjne, również stanowią dolne oszacowanie obciążenia krytycznego względem obciążenia bifurkacyjnego.

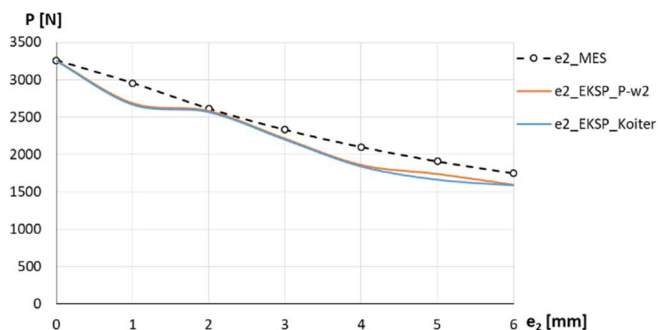
Tabela 5.7. Wartości sił krytycznych dla układu Z4

Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]						
Z4 [45/-45/90/0/0/90/-45/45] _T						
e	e ₁			e ₂		
	e ₁ _EKSP_ P-w ²	e ₁ _EKSP_ Koiter	e ₁ _MES	e ₂ _EKSP_ P-w ²	e ₂ _EKSP_ Koiter	e ₂ _MES
0	3255	3249	3256	3255	3249	3256
1	3244	3241	3250	2686	2667	2954
2	3162	3150	3235	2582	2567	2612
3	3209	3199	3214	2213	2199	2330
4	3160	3149	3190	1860	1840	2100
5	3141	3127	3162	1739	1663	1909
6	3126	3102	3133	1595	1588	1749
7	3099	3087	3101			
8	3049	3025	3068			
9	3014	2988	3035			
10	2998	2978	3001			



Rys. 5.23. Słup Z4 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e₁

Rysunki 5.23 i 5.24 prezentują charakterystyki wpływu nieosiowości obciążenia na wartość obciążenia krytycznego słupa o przekroju zetowym Z4. Zmiana wartości mimośrod obciążenia w kierunku e_1 powoduje spadek wartości obciążenia krytycznego, którego maksymalna wartość dla maksymalnej wartości mimośrod wynosi 8% w przypadku wszystkich zastosowanych metod (rys.5.23). Bardziej znaczące obniżenie wartości obciążenia krytycznego uzyskano w przypadku zmian wartości mimośrod obciążenia w kierunku e_2 (rys.5.24). Spadek obciążenia krytycznego wraz ze wzrostem wartości mimośrod obciążenia w punkcie $e_2 = 6\text{mm}$ osiąga 46% (MES), natomiast 51% w przypadku metod $P-w^2$ oraz Koitera.

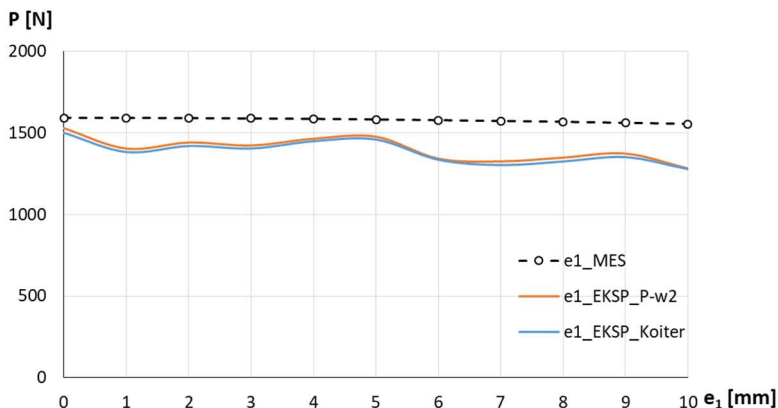


Rys. 5.24. Słup Z4 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

Ostatnią rozpatrywaną konfiguracją warstw kompozytu stanowił słup o przekroju zetowym o oznaczeniu Z5. Dla tego przypadku wyznaczone doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążeń krytycznych prezentuje tabela 5.8. Maksymalne rozbieżności wartości obciążeń krytycznych słupa Z5 wyznaczone metodami aproksymacyjnymi nie przekraczają 4% ($e_2 = 4\text{mm}$), natomiast w porównaniu z wartościami wyznaczonymi numerycznie nie przekraczają 18% (mimośrodowości $e_1 = 10\text{mm}$). Zastosowane metody aproksymacyjne we wszystkich przypadkach stanowią dolne oszacowanie obciążenia krytycznego względem obciążenia bifurkacyjnego. Należy zauważyć, że aproksymacyjne wartości sił krytycznych realizowane w kierunku e_1 w dużym stopniu odbiegają od wartości numerycznych w porównaniu do wszystkich wcześniej analizowanych przypadków.

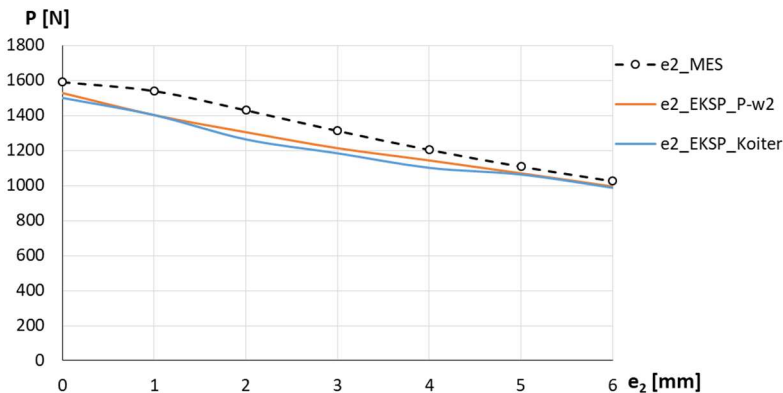
Tabela 5.8. Wartości sił krytycznych dla układu Z5

<i>Wartość krytyczna siły dla nieosiowości obciążenia [N]</i>						
<i>Z5 [90/0/90/0/0/90/0/90]_T</i>						
e	e ₁			e ₂		
	e ₁ _EKSP_P-w ²	e ₁ _EKSP_Koiter	e ₁ _MES	e ₂ _EKSP_P-w ²	e ₂ _EKSP_Koiter	e ₂ _MES
0	1527	1499	1591	1527	1499	1591
1	1403	1382	1591	1402	1401	1540
2	1440	1419	1590	1304	1263	1430
3	1422	1403	1587	1213	1183	1312
4	1463	1448	1584	1143	1100	1203
5	1476	1458	1581	1069	1062	1107
6	1341	1335	1576	994	986	1024
7	1324	1302	1571			
8	1348	1324	1565			
9	1372	1350	1559			
10	1281	1277	1552			



Rys. 5.25. Słup Z5 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_1

Charakterystyki wpływu nieosiowości obciążenia na wartość siły krytycznej w przypadku konfiguracji słupa o przekroju zetowym Z5 przedstawiono na rysunku 5.25 (kierunek nieosiowości e_1) oraz rysunku 5.26 (kierunek nieosiowości e_2). Zaobserwowano nieznaczne obniżenie wartości obciążenia krytycznego w kierunku e_1 nie przekraczające 3% dla skrajnej wartości nieosiowości (obliczenia MES). Znacząco większy spadek wartość obciążenia odnotowano na podstawie przeprowadzonych metod aproksymacyjnych, który wynosił w przybliżeniu 16% w przypadku $e_1 = 10\text{mm}$ (rys. 5.25).



Rys. 5.26. Słup Z5 – wpływ nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia krytycznego w kierunku e_2

W tym przypadku realizacji nieosiowości obciążenia ściskającego w kierunku e_2 analogicznie jak w poprzednich konfiguracjach (Z2, Z3 oraz Z4) zaobserwowano znaczący spadek wartości obciążenia krytycznego. Zmiany

wartości mimośrodowo obciążenia w kierunku e_2 w przypadku analizy numerycznej oraz metod aproksymacyjnych kształtują się na poziomie 34–36% (rys.5.26).

5.1.3. Podsumowanie analizy stateczności

Analiza stanu krytycznego słupów o przekroju ceowym i zetowym wykazała znaczący wpływ zmiany parametru nieosiowości obciążenia na postać deformacji oraz odpowiadającej jej wartości siły krytycznej. Podczas badań stanu krytycznego zaobserwowano zmianę postaci wybożenia słupa o przekroju ceowym C2 w kierunku $e_{2(-)}$ z 2 półfal (ściskanie osiowe) na 3 półfale, próbki C4 w kierunku $e_{2(+)}$ z 4 na 5 półfal oraz słupa C5 w kierunku e_1 z 4 na 3 półfale. Analiza stanu wybożeniowego słupów o przekroju zetowym wykazała zmianę postaci wybożenia jedynie w przypadku próbki Z2 z 2 (ściskanie osiowe) na 3 półfale, lokalnie występujące podczas realizacji mimośrodowo obciążenia w kierunku e_1 oraz e_2 . Doświadczalne formy deformacji we wszystkich przypadkach odpowiadały numerycznym najniższym postaciom wybożenia, co potwierdza poprawność przyjętych założeń w opracowaniu numerycznych modeli analizowanych konstrukcji. Otrzymane wyniki pozwoliły zaobserwować, że zwiększanie wartości mimośrodowo obciążenia w kierunku e_1 oraz $e_{2(+)}$ powodowało obniżanie wartości obciążenia krytycznego, przyczyniając się do przedwczesnego wybożenia konstrukcji w odniesieniu do przypadku ściskania osiowego. Realizacja nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 powodowała spadek wartości siły krytycznej (w odniesieniu do ściskania osiowego) o 17–28% w przypadku słupa o przekroju ceowym oraz 3–8% w przypadku słupa o przekroju zetowym. Znacznie bardziej istotne spadki wartości obciążenia krytycznego zarejestrowano w kierunku $e_{2(+)}$, gdzie w przypadku słupa o przekroju ceowym obniżenie wartości obciążenia krytycznego zawierało się w przedziale 53–58%, a w przypadku słupa o przekroju zetowym 34–46%. Takie zachowanie struktury jest szczególnie niebezpieczne, ponieważ przedwczesne wybożenie konstrukcji może wystąpić w zakresie obciążeń eksploatacyjnie dopuszczalnych. Odmienną odpowiedź konstrukcji słupów o przekroju ceowym otrzymano w przypadku realizacji mimośrodowo obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ (w stronę do środka profilu), w którym zwiększanie wartości mimośrodowo prowadziło do wzrostu wartości siły krytycznej o 22–53%. Zaobserwowane zwiększenie sztywności słupa wynikało z faktu, że znaczną wartość obciążenia ściskającego przejmował środek profilu, stanowiący najszywniejszy element słupa, usytuowany pomiędzy dwoma sztywnymi krawędziami.

Przeprowadzone badania stanu krytycznego wykazały wysoką jakościową oraz ilościową zgodność wyników analiz numerycznych z wynikami badań doświadczalnych. Potwierdza to adekwatność opracowanych modeli numerycznych w analizie zagadnienia stateczności cienkościennych konstrukcji kompozytowych poddanych osiowemu i nieosiowemu ścisnaniu.

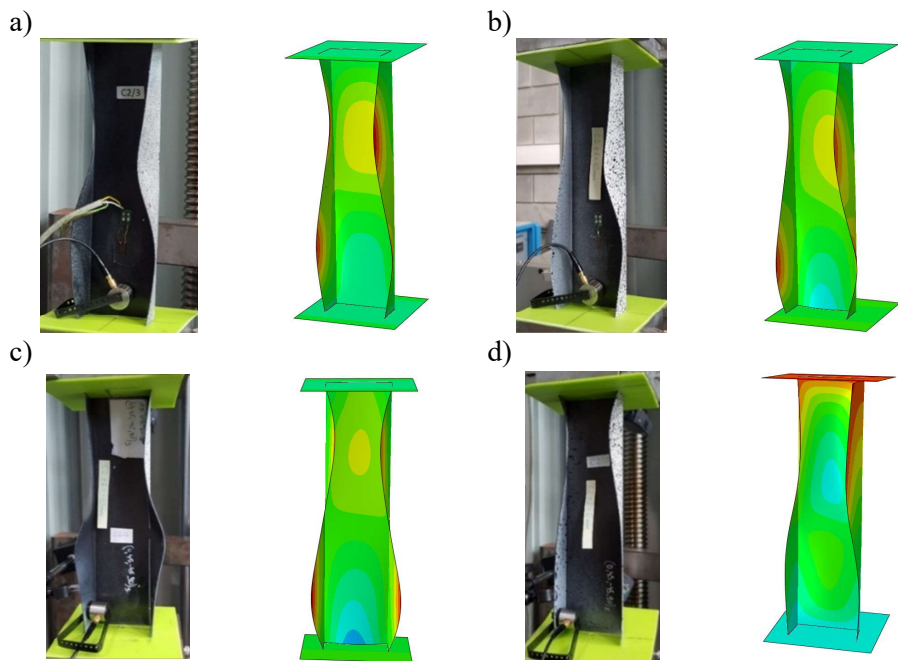
5.2. Nieliniowa analiza stanu pokrytycznego

Cienkościenne konstrukcje kompozytowe charakteryzują się tym, iż po przekroczeniu siły krytycznej są zdolne do dalszego przenoszenia obciążenia pod warunkiem, iż ich charakterystyki mają charakter stateczny. Dlatego możliwość opisu pracy konstrukcji w stanie pokrytycznym należy do zagadnień bardzo istotnych, zarówno ze względów poznawczych, jak i aplikacyjnych. W związku z powyższym kolejny etap badań obejmował określenie wpływu nieosiowości obciążenia ściskającego na pracę kompozytowych słupów po utracie stateczności do wartości obciążenia, przy którym następowała inicjacja uszkodzenia pierwszej warstwy kompozytu. W tym celu wyznaczone zostały pokrytyczne ścieżki równowagi *siła-przemieszczenie*, które dla konstrukcji rzeczywistej stanowiły charakterystyki otrzymane z wykorzystaniem pomiarów ugięć czujnikiem laserowym, natomiast w przypadku obliczeń numerycznych MES były wynikiem rozwiązania zagadnienia nieliniowego konstrukcji z zainicjowaną imperfekcją geometryczną odpowiadającą najniższej postaci utraty stateczności. Wyznaczone pokrytyczne ścieżki równowagi konstrukcji umożliwiły określenie charakterystyk poszczególnych słupów o przekroju ceowym i zetowym w stanie pokrytycznym, w zależności od zastosowanej konfiguracji układu warstw kompozytu.

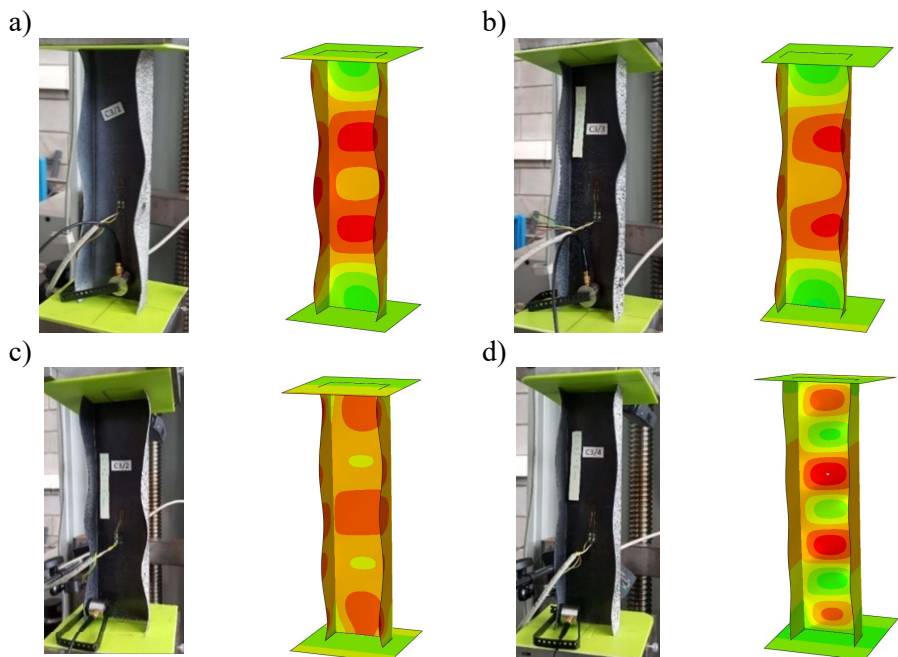
Badania nieosiowości obciążenia słupów kompozytowych prowadzono do stanu odpowiadającego momentowi inicjacji uszkodzenia kompozytu. W tym celu w trakcie badań eksperymentalnych rejestrowano przebieg siły w czasie oraz mierzono efekty akustyczne z wykorzystaniem metody emisji akustycznej, mogące świadczyć o wystąpieniu pierwszych oznak uszkodzenia materiału kompozytowego. Wynikiem prowadzonych badań doświadczalnych była identyfikacja formy deformacji słupów kompozytowych oraz wyznaczenie wartości siły inicjującej zniszczenie próbki, dla zadanej wartości nieosiowości obciążenia. Równolegle prowadzono nieliniową analizę numeryczną polegającą na identyfikacji zjawiska inicjacji zniszczenia ściskanych słupów z wykorzystaniem tensorowego kryterium zniszczenia kompozytów Tsai–Wu. Obciążenie odpowiadające spełnieniu kryterium Tsai–Wu stanowiło numeryczną wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy laminatu.

5.2.1. Analiza stanu pokrytycznego słupów o przekroju ceowym

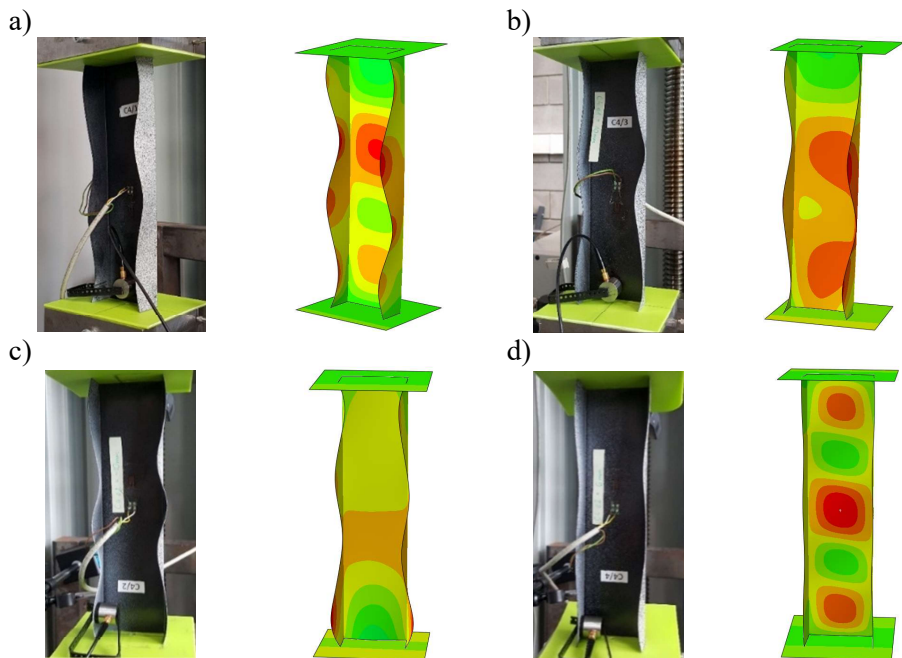
Badania stanu pokrytycznego ściskanych słupów o przekroju ceowym wykazały pogłębianie się deformacji odpowiadających najniższym postaciom utraty stateczności konstrukcji wraz z dalszym wzrostem obciążenia ściskającego. Badania realizowano do pierwszych oznak uszkodzenia materiału kompozytowego, przyjętych w niniejszej pracy za moment inicjacji uszkodzenia kompozytu. Na rys. 5.27÷5.30 przedstawiono przykładowe formy deformacji ściskanych słupów o przekroju ceowym dla konfiguracji C2÷C5, odpowiadające obciążeniu inicjującemu uszkodzenie kompozytu.



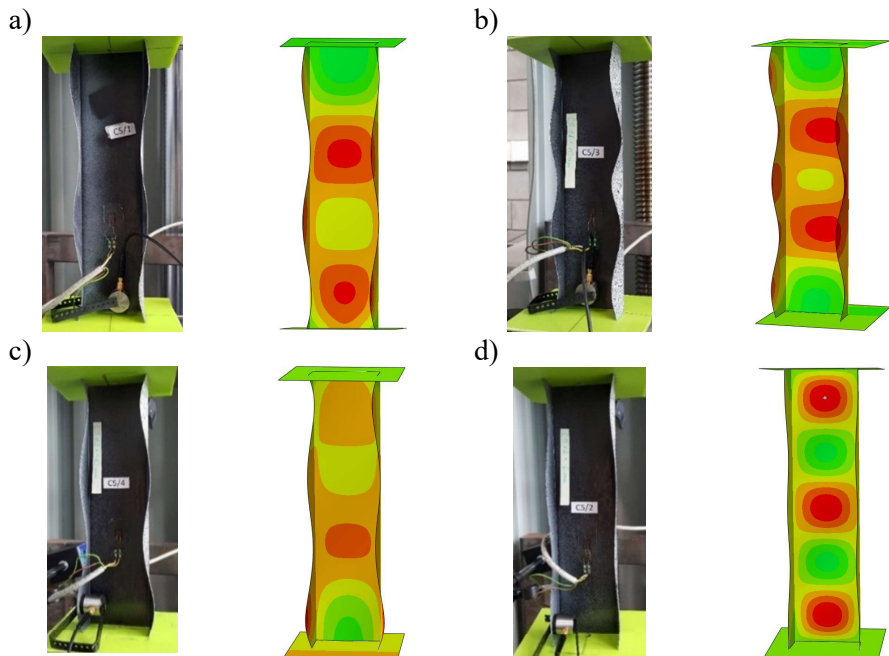
Rys 5.27. Formy deformacji pokrytycznej słupa C2: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$



Rys 5.28. Formy deformacji pokrytycznej słupa C3: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

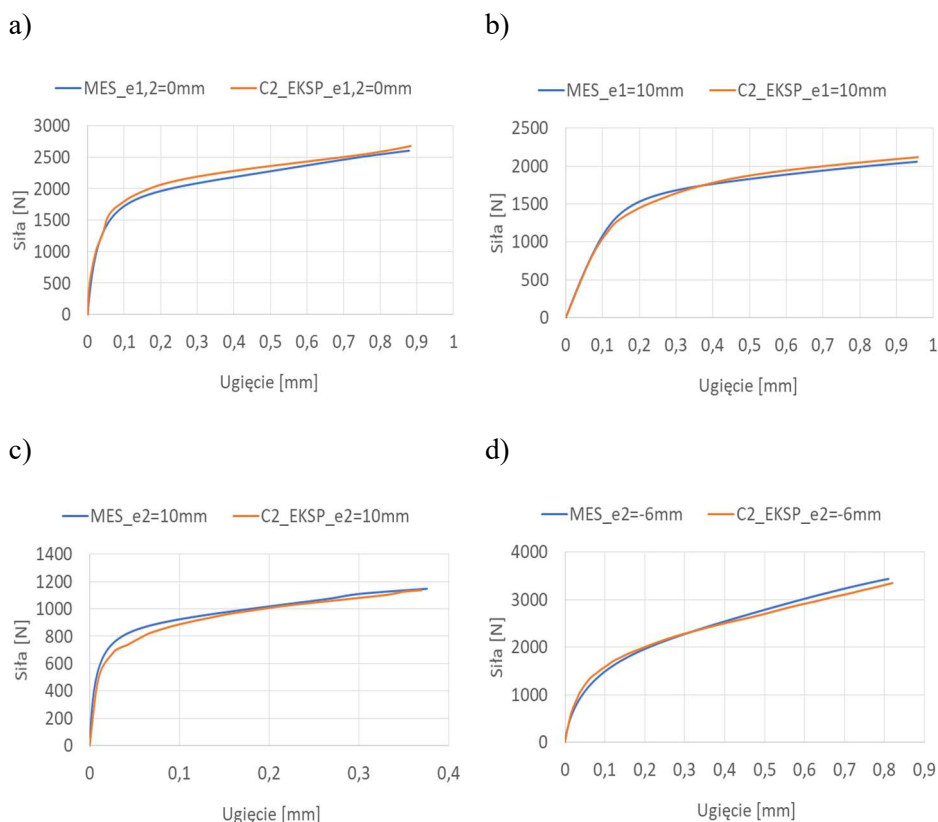


Rys 5.29. Formy deformacji pokrytycznej słupa C4: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $\epsilon_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $\epsilon_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $\epsilon_2 = -6\text{mm}$

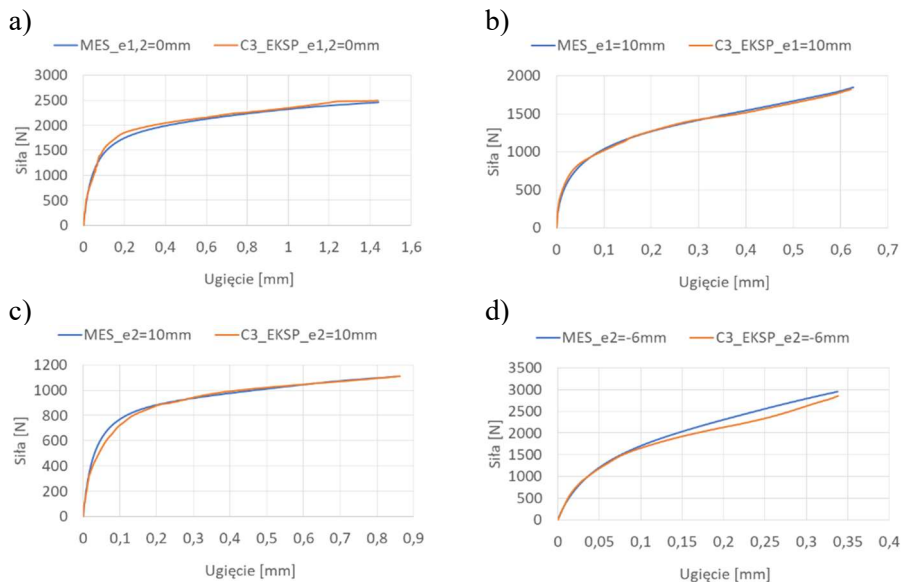


Rys 5.30. Formy deformacji pokrytycznej słupa C5: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $\epsilon_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $\epsilon_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $\epsilon_2 = -6\text{mm}$

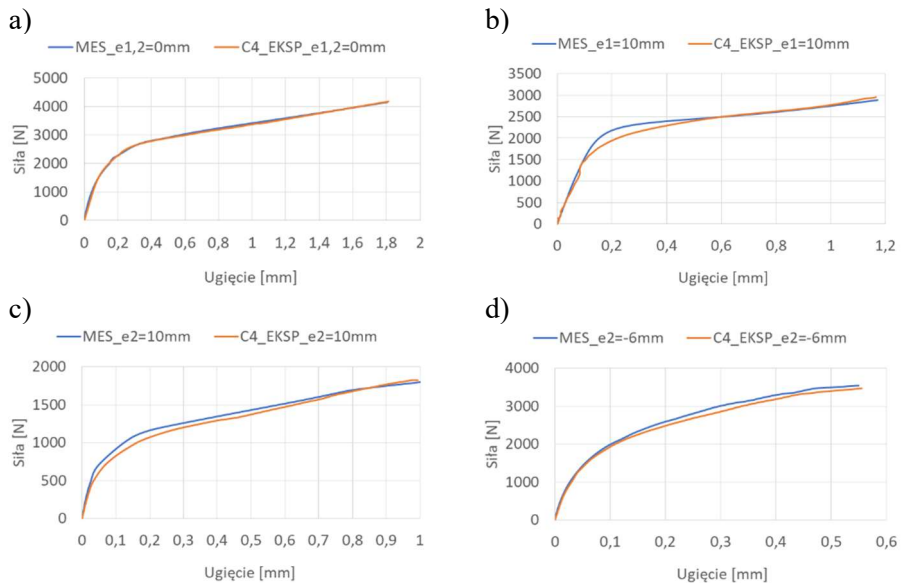
Analizę stanu pokrytycznego przeprowadzono na podstawie porównania doświadczalnych oraz numerycznych pokrytycznych ścieżek równowagi konstrukcji. Eksperymentalne ścieżki równowagi *siła-przemieszczenie* wykonano na podstawie zarejestrowanej siły oraz wskazań lasera skierowanego prostopadle w półfałę powstałą na ściance profilu ceowego, która charakteryzowała się największymi ugięciami. W celu wygenerowania numerycznych ścieżek równowagi mierzono prostopadle przemieszczenie punktu ugięcia ścianki słupa, odpowiadającego doświadczałnemu punktowi pomiaru. Na rysunku 5.31÷5.34 przedstawiono porównanie badań doświadczalnych z wynikami analizy numerycznej słupów C2÷C5 dla przypadku ściskania osiowego $e_{1,2} = 0\text{mm}$ oraz skrajnych przypadków wartości mimośrodów obciążenia: $e_1 = 10\text{mm}$ (kierunek równoległy do średnicy), $e_2 = 10\text{mm}$ oraz $e_2 = -6\text{mm}$ (kierunek prostopadły do średnicy).



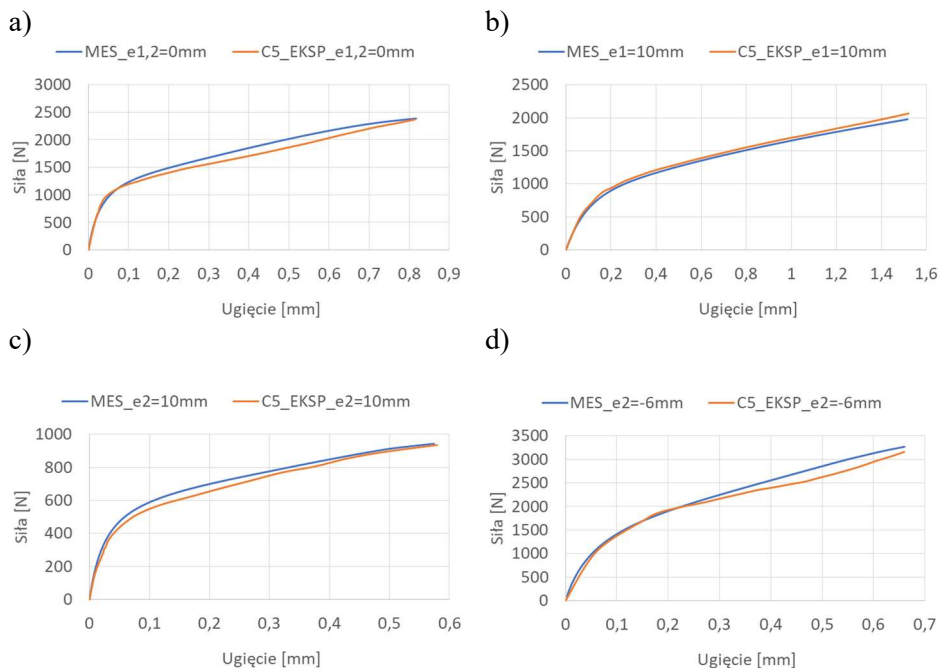
Rys. 5.31. Słup C2 – pokrytyczne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$



Rys. 5.32. Słup C3 – pokrytne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$



Rys. 5.33. Słup C4 – pokrytne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

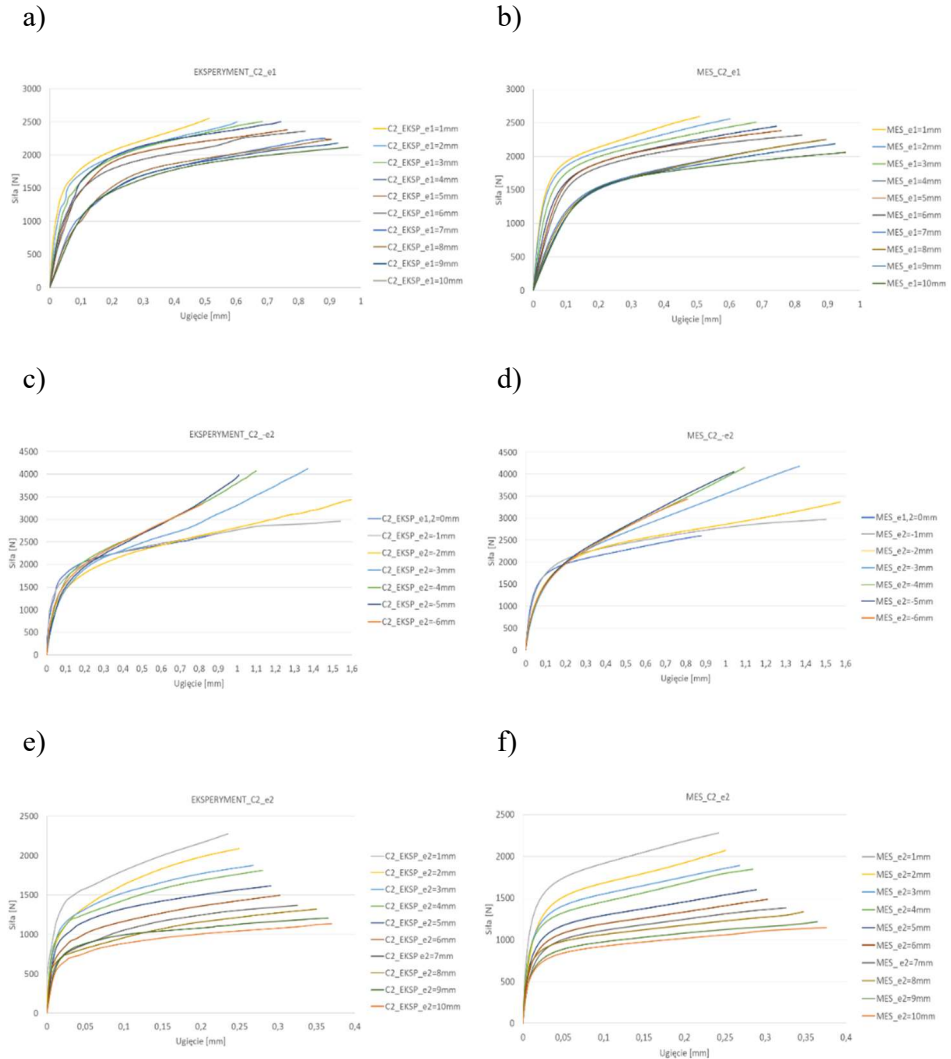


Rys. 5.34. Słup C5 – pokrytyczne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0$ mm, b) mimośród $e_1 = 10$ mm, c) mimośród $e_2 = 10$ mm, d) mimośród $e_2 = -6$ mm

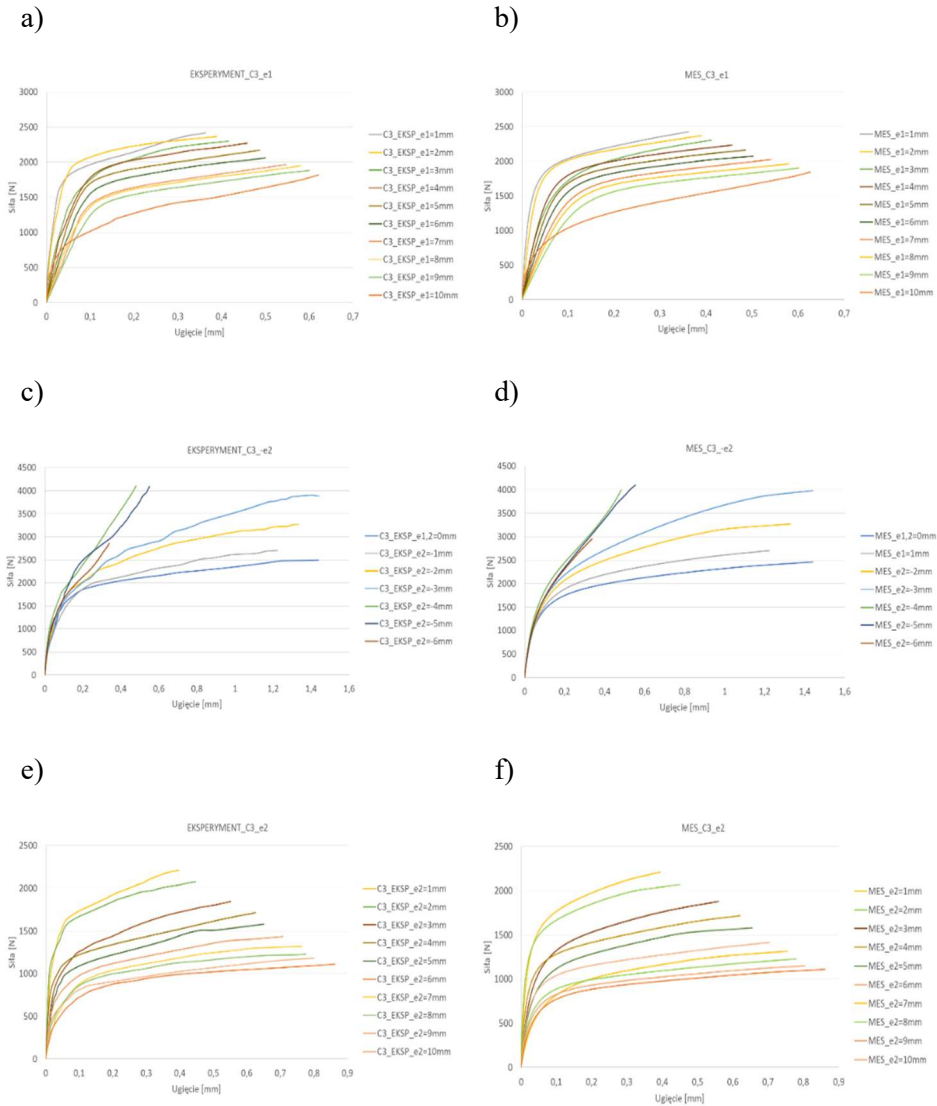
Otrzymane charakterystyki wykazują bardzo wysoką zbieżność wyników badań doświadczalnych z wynikami obliczeń numerycznych MES. W przypadku konstrukcji rzeczywistej pokrytyczne ścieżki równowagi wykazują nieco niższą sztywność, niż krzywe wyznaczone numerycznie. W obu przypadkach otrzymane przebiegi posiadają zbliżony, stateczny charakter pracy, co potwierdza zdolność konstrukcji do dalszego przenoszenia obciążenia w zakresie pokrytycznym. Na rysunkach 5.35÷5.38 zestawiono doświadczalne oraz numeryczne pokrytyczne ścieżki równowagi ściskanych słupów C2÷C5 z uwzględnieniem nieosiowości obciążenia w kierunkach e_1 i e_2 dla wszystkich realizowanych wartości mimośrodu obciążenia ściskającego.

Wyznaczone pokrytyczne ścieżki równowagi ściskanych słupów o przekroju ceowym wykazują tendencję zmniejszania się sztywności konstrukcji, spowodowaną wprowadzeniem mimośrodu obciążenia w kierunkach e_1 oraz $e_{2(+)}$ (realizowanego w stronę od środka profilu ceowego) (rys.5.35a,b,e,f÷5.38a,b,e,f). Odmienna sytuacja występuje w przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ (od środka ciężkości w stronę środka profilu ceowego), gdzie zaobserwowano wzrost sztywności konstrukcji wraz ze wzrostem wartości mimośrodu obciążenia (rys.5.35c,d÷5.38c,d). Jest to spowodowane tym, że w analizowanym

przypadku obciążenie przenoszone jest głównie przez środnik profilu, usytuowany pomiędzy sztywnymi krawędziami, natomiast mało sztywne ścianki profilu ceowego zostają odciążone.

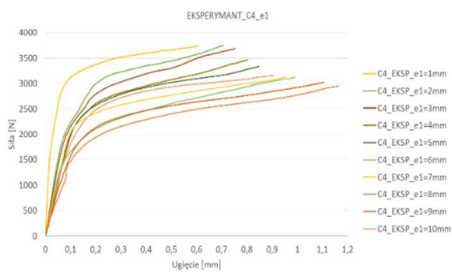


Rys. 5.35. Pokrytyczne ścieżki równowagi słupa C2 przy realizacji mimośrodowo obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e₁, b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e₁, c) badania eksperymentalne w kierunku -e₂, d) obliczenia numeryczne MES w kierunku -e₂, e) badania eksperymentalne w kierunku e₂, f) obliczenia numeryczne MES w kierunku e₂

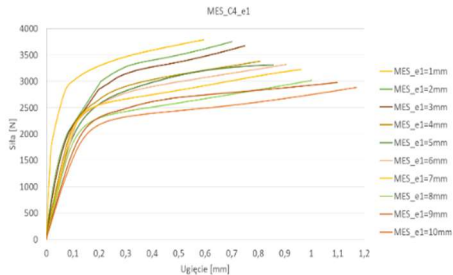


Rys. 5.36. Pokrywcze ścieżki równowagi słupa C3 przy realizacji mimośrodowego obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e₁, b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e₁, c) badania eksperymentalne w kierunku -e₂, d) obliczenia numeryczne MES w kierunku -e₂, e) badania eksperymentalne w kierunku e₂, f) obliczenia numeryczne MES w kierunku e₂

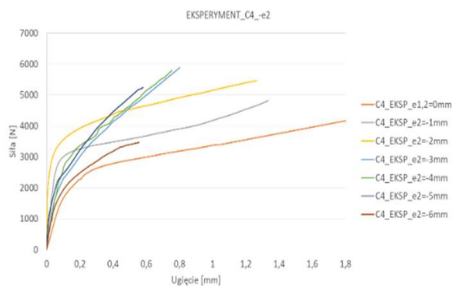
a)



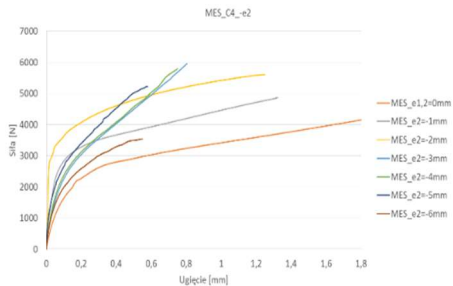
b)



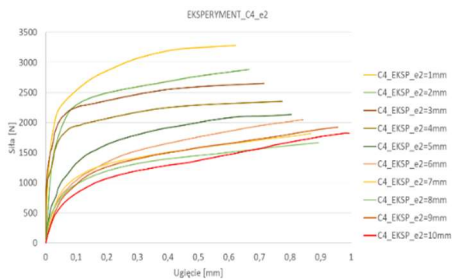
c)



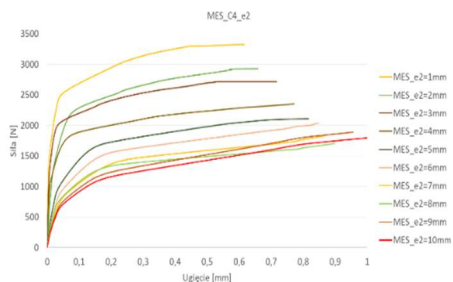
d)



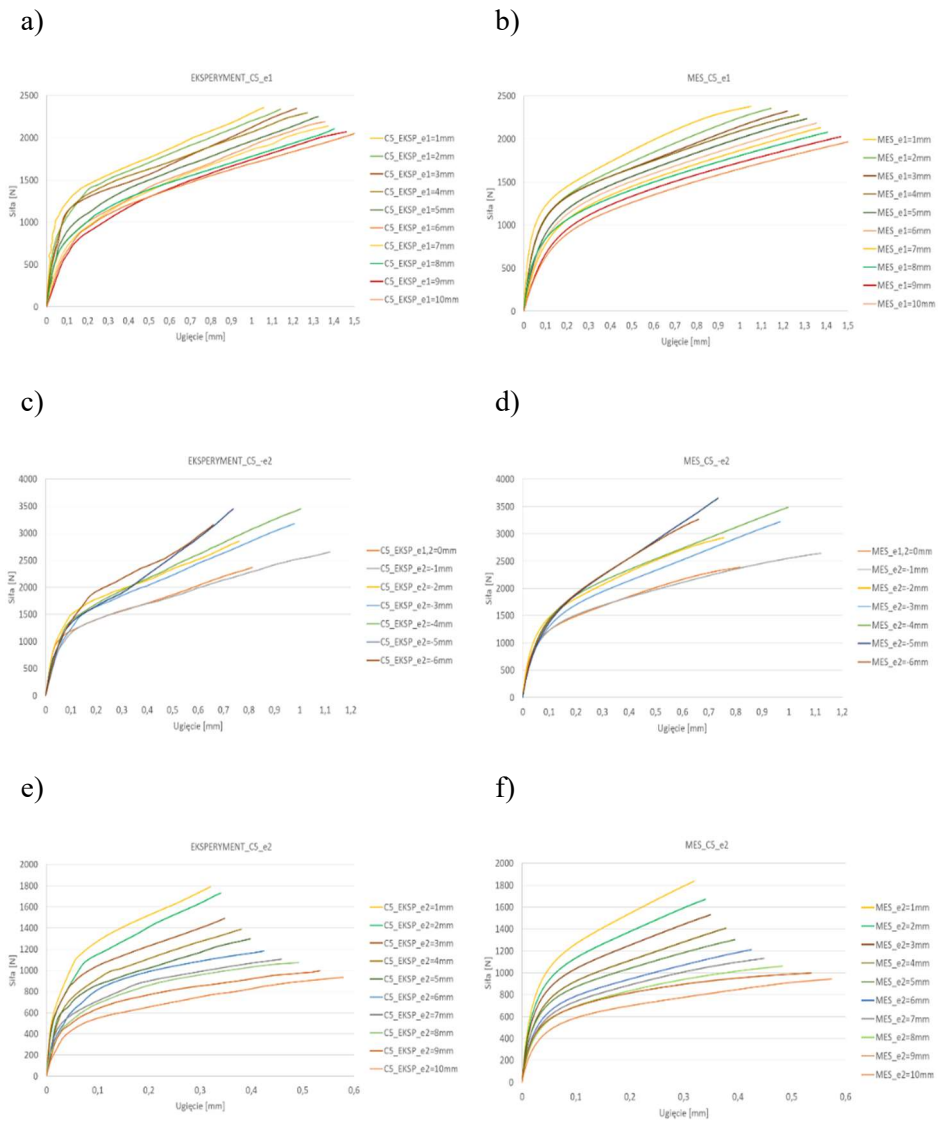
e)



f)



Rys. 5.37. Pokrywcze ścieżki równowagi słupa C4 przy realizacji mimośrodowego obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e_1 , b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e_1 , c) badania eksperymentalne w kierunku $-e_2$, d) obliczenia numeryczne MES w kierunku $-e_2$, e) badania eksperymentalne w kierunku e_2 , f) obliczenia numeryczne MES w kierunku e_2



Rys. 5.38. Pokrywcze ścieżki równowagi słupa C5 przy realizacji mimośrodru obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e1, b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e1, c) badania eksperymentalne w kierunku -e2, d) obliczenia numeryczne MES w kierunku -e2, e) badania eksperymentalne w kierunku e2, f) obliczenia numeryczne MES w kierunku e2

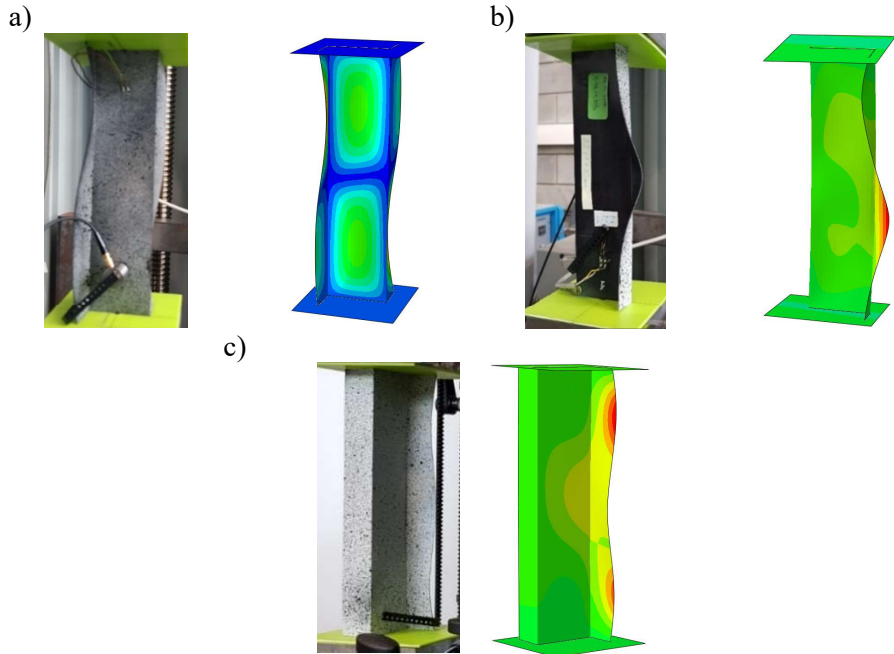
Poddając analizie ilościowej zmianę sztywności konstrukcji spowodowaną wprowadzaniem nieosiowości obciążenia ściskającego można stwierdzić, że poziom zmniejszenia sztywności konstrukcji w zakresie pokrytycznym jest znacząco zróżnicowany, w zależności od kierunku realizacji mimośrodowo obciążenia. Wprowadzanie mimośrodowo obciążenia w kierunku e_1 powoduje spadek sztywności konstrukcji (w zależności od układu warstw kompozytu) w zakresie 14–36%, natomiast w kierunku $e_{2(+)}$ spadek sztywności mieści się w zakresie 46–54%. Realizacja mimośrodowo obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ powodowała istotny wzrost sztywności konstrukcji, mieszczący się w zakresie 44–70%. W tabeli 5.9 zestawiono zmiany sztywności słupa ceowego pod wpływem działania nieosiowości obciążenia dla wszystkich rozpatrywanych wariantów konfiguracji warstw kompozytu. Z zamieszczonych wyników można zauważyć, że nieosiowość obciążenia ściskającego w największym stopniu wpływa na pracę konstrukcji w stanie pokrytycznym w przypadku konfiguracji C3, natomiast w najmniejszym na konfigurację C2.

Tabela 5.9. Zmiana sztywności słupa C w zależności od maksymalnego mimośrodowo obciążenia ściskającego

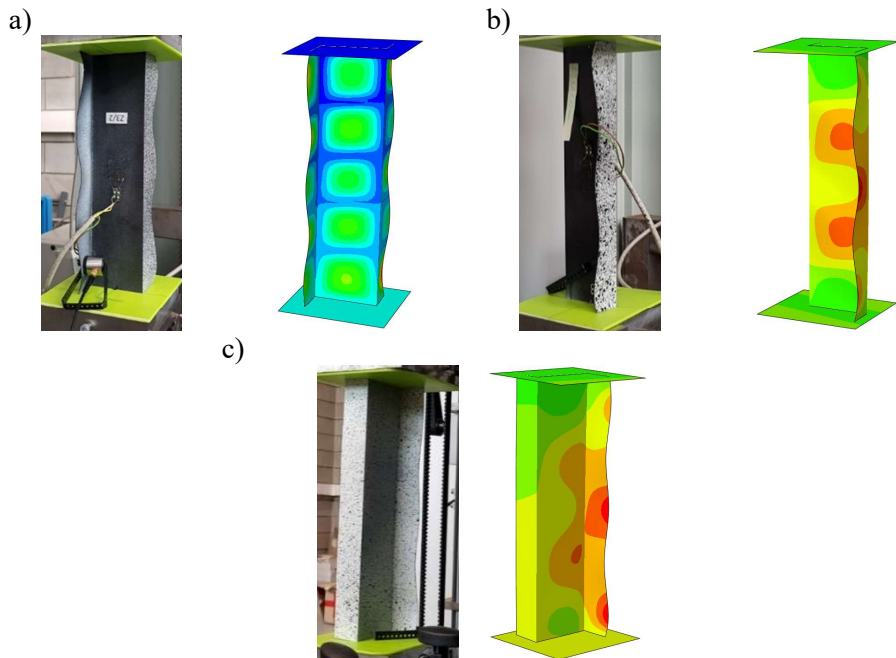
e	Układ warstw kompozytu							
	C2		C3		C4		C5	
	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES
e_1	-28%	-27%	-41%	-39%	-34%	-32%	-28%	-27%
$e_{2(+)}$	-55%	-53%	-54%	-52%	-59%	-57%	-57%	-56%
$e_{2(-)}$	+29%	+33%	+43%	+50%	+73%	+74%	+49%	+51%

5.2.2. Analiza stanu pokrytycznego słupów o przekroju zetowym

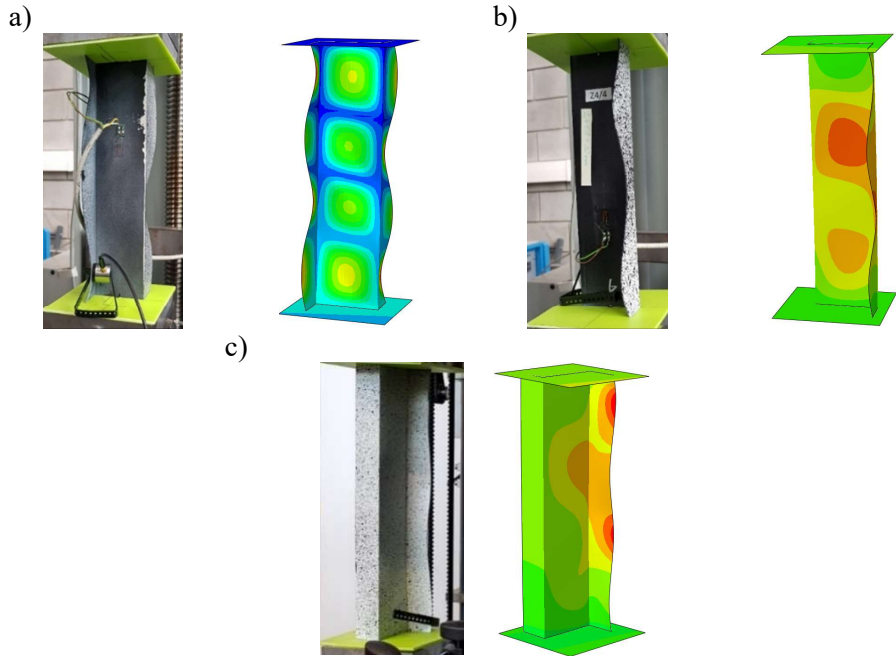
W analogiczny sposób przeprowadzona została analiza pokrytycznej pracy ściśniętych słupów o przekroju zetowym. Również w tym przypadku wzrost wartości obciążenia ściskającego prowadził do pogłębiania się form deformacji konstrukcji odpowiadających najniższym postaciom utraty stateczności poszczególnych słupów. Na rysunkach 5.39÷5.42 przedstawiono formy deformacji słupów o przekroju zetowym dla wartości obciążenia odpowiadającego momentowi inicjacji uszkodzenia materiału kompozytowego.



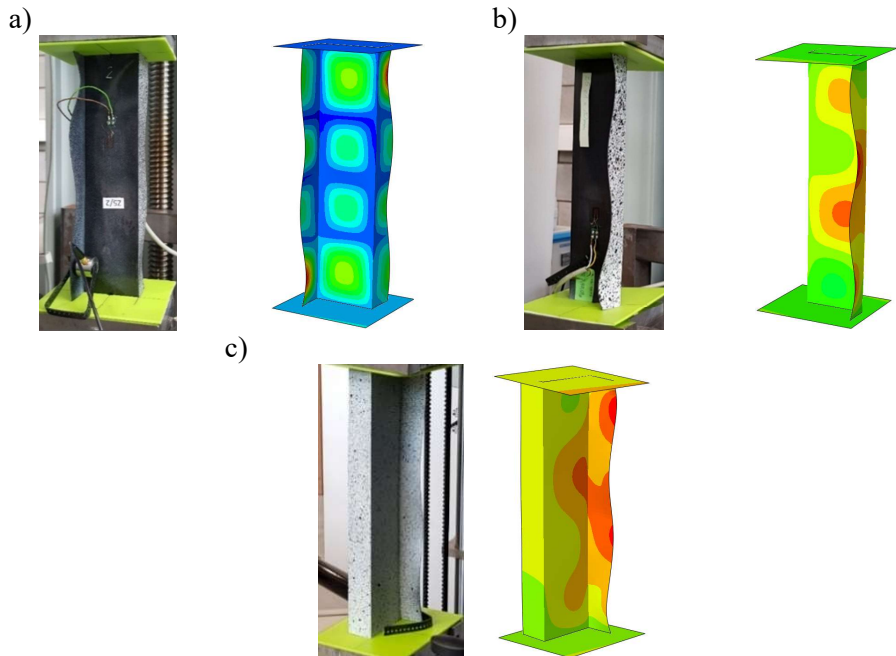
Rys 5.39. Formy deformacji pokrytycznej słupa Z2: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$



Rys 5.40. Formy deformacji pokrytycznej słupa Z3: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$



Rys 5.41. Formy deformacji pokrytycznej słupa Z4: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

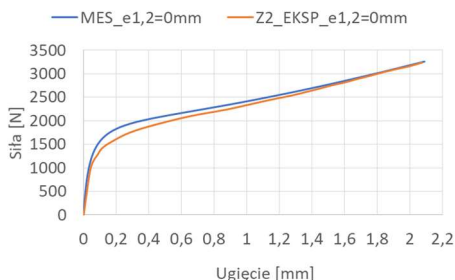


Rys 5.42. Formy deformacji pokrytycznej słupa Z5: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

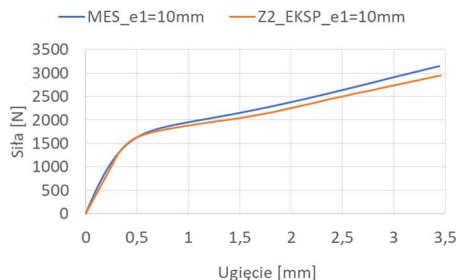
W analogiczny sposób, jak w przypadku słupów o przekroju ceowym pomiaru ugięcia dokonywano w punkcie odpowiadającym ekstremum ugięcia ścianki słupa o przekroju zetowym. Ugięcie mierzono w kierunku prostopadłym do ścianki słupa. Na rysunkach 5.43÷5.46 przedstawiono porównanie charakterystyk eksperymentalnych i numerycznych słupów o przekroju zetowym Z2÷Z5 dla przypadku ściskania osiowego $e_{1,2} = 0\text{mm}$ oraz skrajnych przypadków wartości mimośrodów obciążenia: $e_1 = 10\text{mm}$ (kierunek równoległy do środka), $e_2 = 6\text{mm}$ (kierunek prostopadły do środka).

Otrzymane charakterystyki potwierdzają wysoką zbieżność wyników badań doświadczalnych z wynikami obliczeń numerycznych MES. W przypadku konstrukcji rzeczywistej pokrywające ścieżki równowagi określają dolne oszacowanie sztywności konstrukcji w porównaniu do idealnych warunków realizowanych za pomocą metody elementów skończonych. Na rysunkach 5.47÷5.50 zestawiono pokrywające ścieżki równowagi ściskanych słupów o przekroju zetowym Z2÷Z5 dla wszystkich realizowanych wartości mimośrodu obciążenia ściskającego.

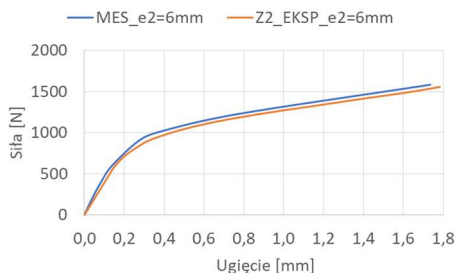
a)



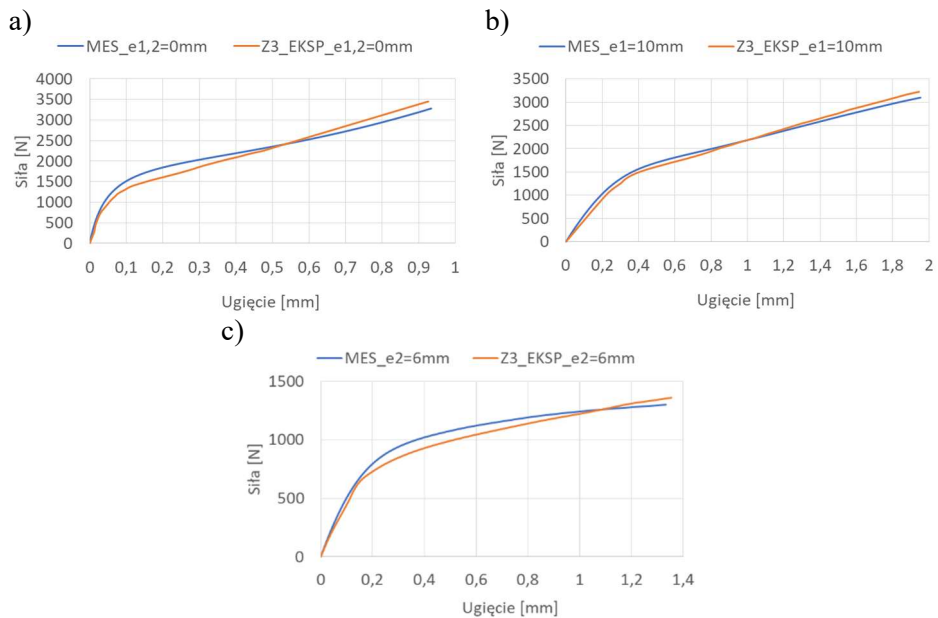
b)



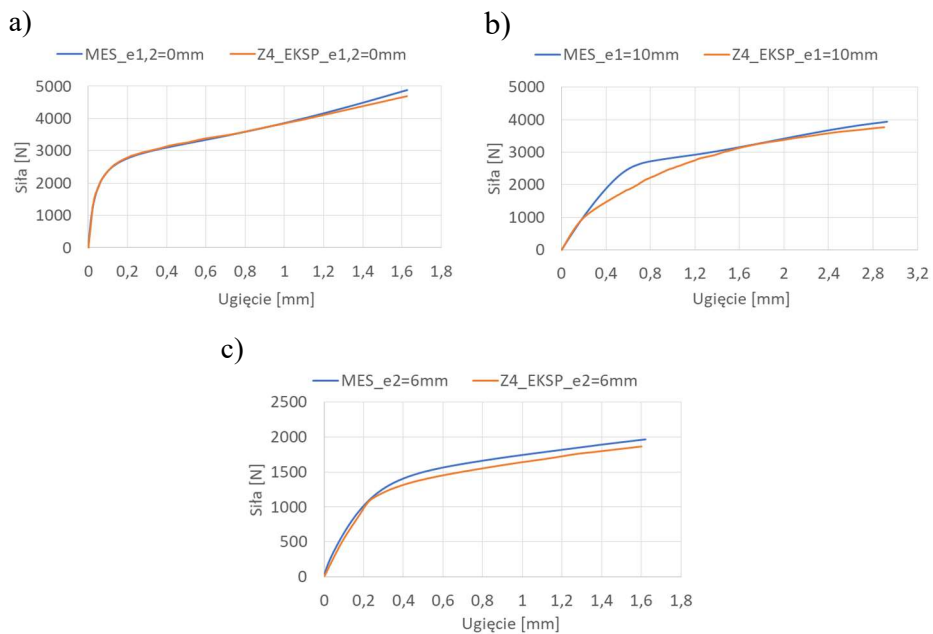
c)



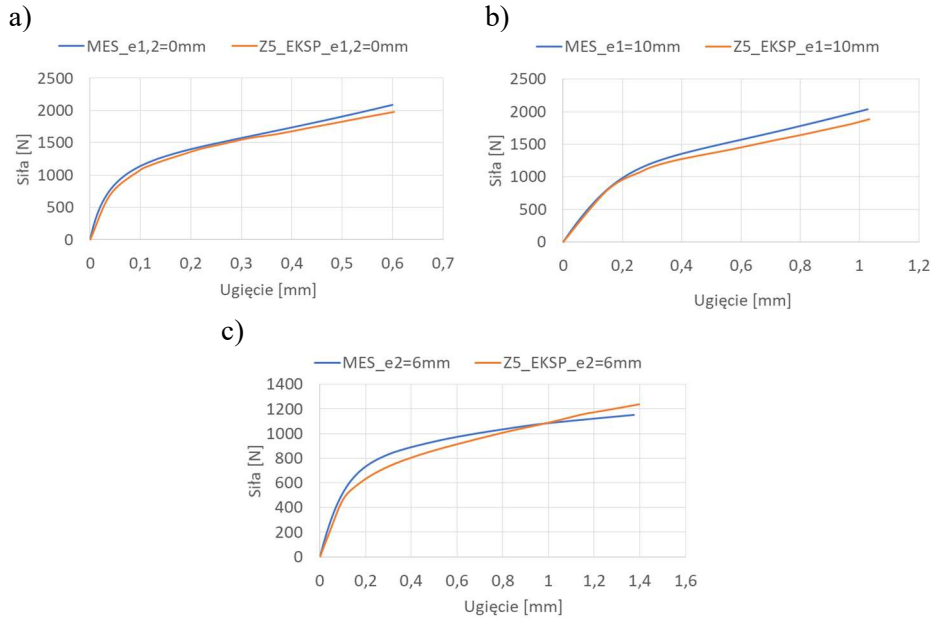
Rys. 5.43. Słup Z2 – pokrywające ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$



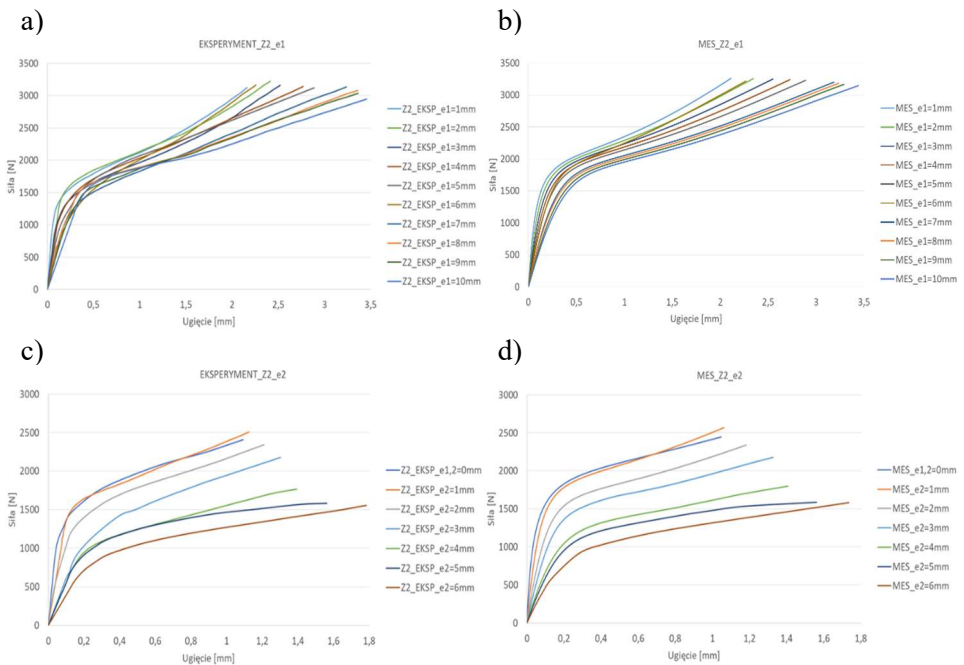
Rys. 5.44. Słup Z3 – pokrytyczne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$



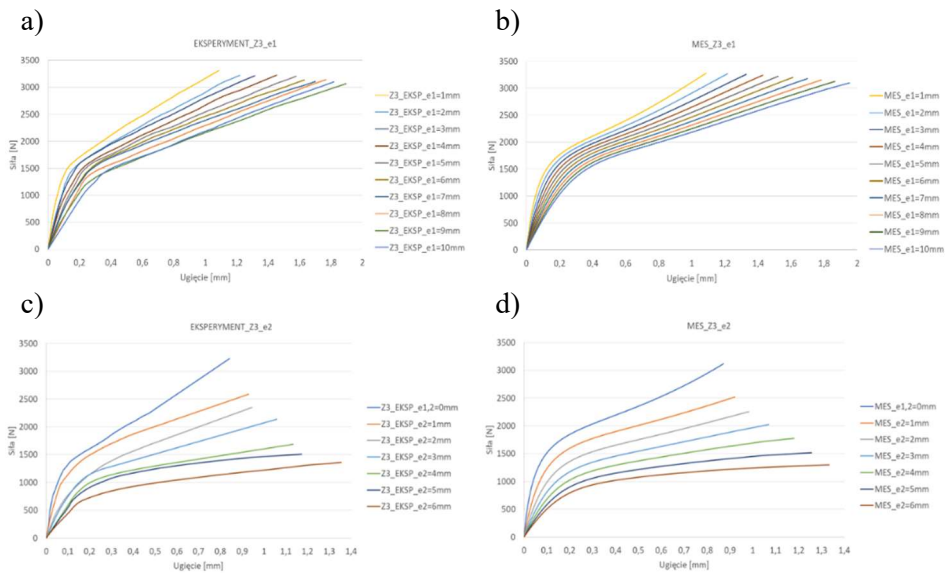
Rys. 5.45. Słup Z4 – pokrytyczne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$



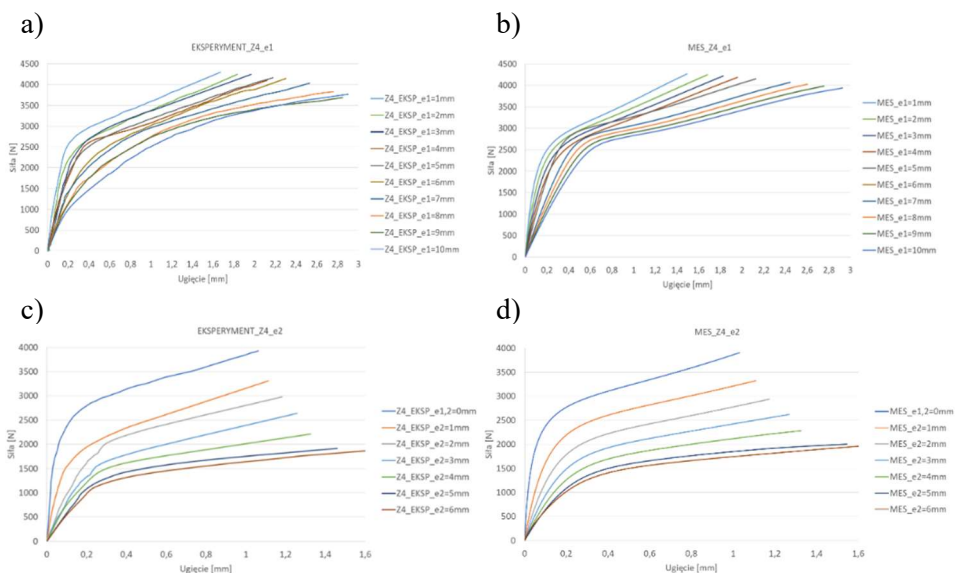
Rys. 5.46. Słup Z5 – pokrytyczne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$



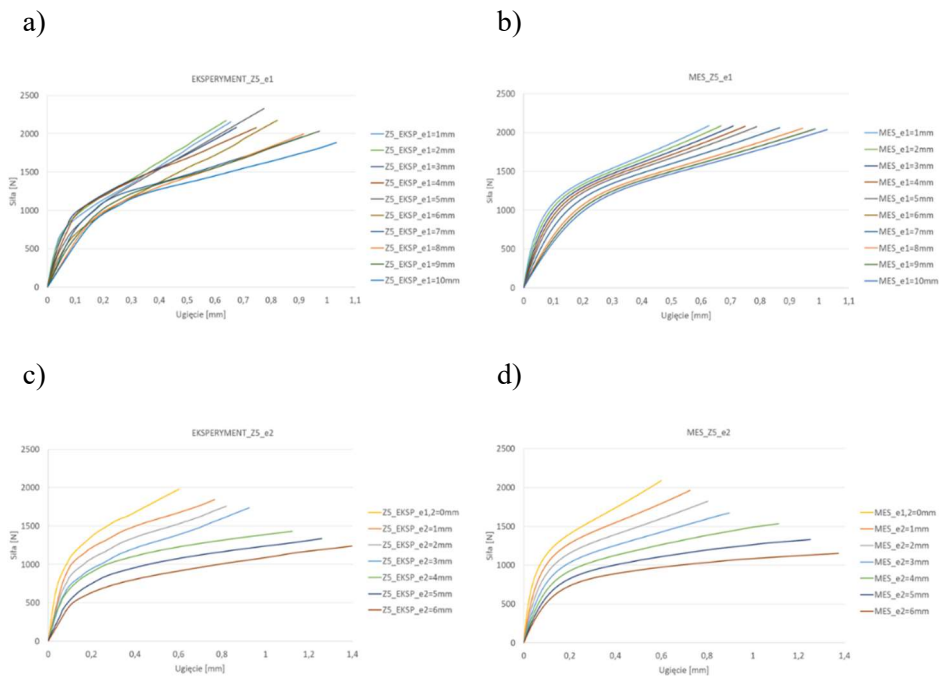
Rys. 5.47. Pokrytyczne ścieżki równowagi słupa Z2 przy realizacji mimośrodu obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e_1 , b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e_1 , c) badania eksperymentalne w kierunku e_2 , d) obliczenia MES w kierunku e_2



Rys. 5.48. Pokrytyczne ścieżki równowagi słupa Z3 przy realizacji mimośrodowo obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e₁, b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e₁, c) badania eksperymentalne w kierunku e₂, d) obliczenia MES w kierunku e₂



Rys. 5.49. Pokrytyczne ścieżki równowagi słupa Z4 przy realizacji mimośrodowo obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e₁, b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e₁, c) badania eksperymentalne w kierunku e₂, d) obliczenia MES w kierunku e₂



Rys. 5.50. Pokrytyczne ścieżki równowagi słupa Z5 przy realizacji mimośrodowego obciążenia ściskającego: a) badania eksperymentalne w kierunku e_1 , b) obliczenia numeryczne MES w kierunku e_1 , c) badania eksperymentalne w kierunku e_2 , d) obliczenia MES w kierunku e_2

Przeprowadzone badania stanu pokrytycznego słupów o przekroju zetowym wykazują zmniejszenie sztywności konstrukcji spowodowane wprowadzeniem mimośrodowego obciążenia w obydwu analizowanych kierunkach e_1 (równoległym do średnicy profilu) oraz e_2 (prostopadłym do średnicy profilu) (rys. 5.47÷5.50). Również w tym przypadku dla wszystkich badanych słupów otrzymano stateczne ścieżki równowagi konstrukcji co oznacza, że konstrukcja jest w stanie nadal przetrzymać obciążenie po utracie stateczności. Analiza ścieżek pokrytycznych wykazała, że obniżenie sztywności słupów o przekroju zetowym w kierunku e_1 spowodowane realizacją nieosiowości obciążenia kształtuje się na poziomie 20–33% (w zależności od konfiguracji warstw kompozytu), natomiast w przypadku kierunku e_2 obniżenie sztywności jest znacznie wyższe i kształtuje się w przedziale 46–61%. W tabeli 5.10 zestawiono procentowe wartości spadku sztywności słupów o przekroju zetowym dla maksymalnych wartości mimośrodowego obciążenia w zależności od konfiguracji warstw kompozytu. W przypadku słupów o przekroju zetowym można zauważyć, że nieosiowość obciążenia ściskającego w największym stopniu wpływa na pracę konstrukcji w stanie pokrytycznym w przypadku konfiguracji kompozytu Z3, natomiast w najmniejszym na konfigurację Z2.

Tabela 5.10. Spadek sztywności słupa Z w zależności od maksymalnego mimośrodru nieosiowości obciążenia ściskającego

e	Układ warstw kompozytu							
	Z2		Z3		Z4		Z5	
	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES
e_1	-26%	-23%	-32%	-31%	-26%	-21%	-30%	-23%
e_2	-46%	-43%	-64%	-61%	-58%	-55%	-53%	-52%

5.2.3. Inicjacja zniszczenia struktury kompozytu – słupy o przekroju ceowym

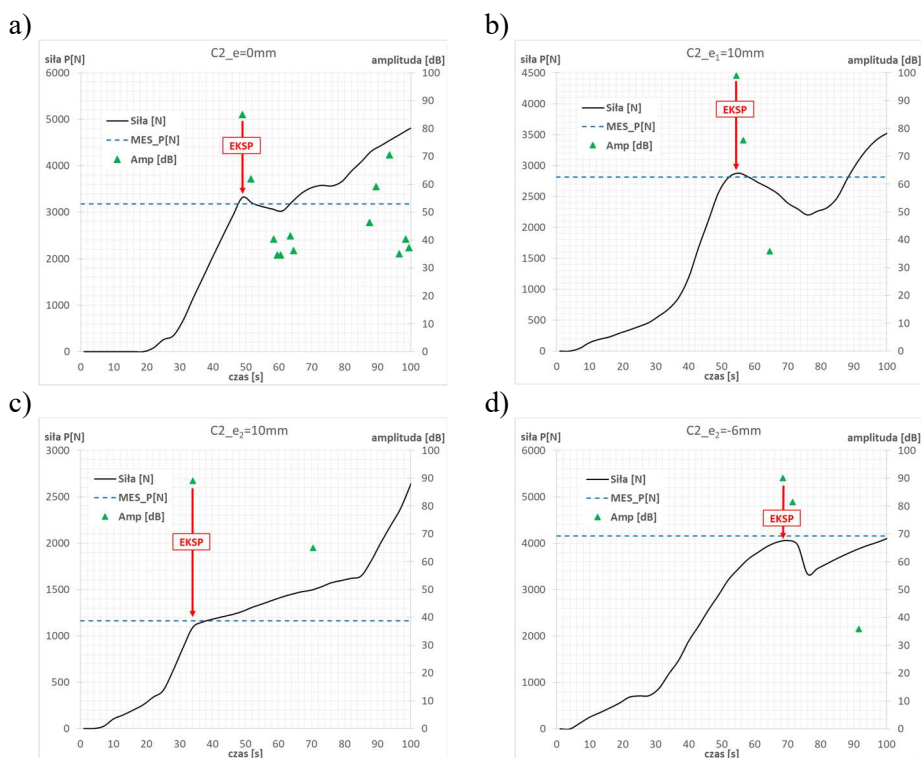
Badania ściskania słupów o przekroju ceowym i zetowym prowadzono do momentu zarejestrowania pierwszych oznak mogących świadczyć o początku procesu uszkodzenia materiału kompozytowego. Zakres badań doświadczalnych obejmował prowadzenie 4 prób dla wszystkich analizowanych konfiguracji laminatu, obejmujących skrajne wartości mimośrodru obciążenia ściskającego, tj.: $e_{1,2} = 0\text{mm}$ (ściskanie osiowe), $e_1 = 10\text{mm}$, $e_2 = 10\text{mm}$ oraz $e_2 = -6\text{mm}$. Przeprowadzone pomiary umożliwiły dokonanie weryfikacji wyników obliczeń numerycznych, które prowadzono dla wszystkich wartości mimośrodru obciążenia z podziałką co 1mm.

W badaniach eksperymentalnych obciążanie konstrukcji realizowano do momentu wystąpienia pierwszych oznak zniszczenia struktury materiału kompozytowego, rejestrowanych za pomocą metody emisji akustycznej. W trakcie badań MEA poza pomiarem wartości siły ściskającej w czasie rejestrowano: amplitudę sygnału EA [dB], liczbę zdarzeń, liczbę zliczeń oraz energię sygnału wyrażoną w jednostkach umownych [eU]. W prowadzonych badaniach do oceny momentu inicjacji uszkodzenia materiału kompozytowego wykorzystano charakterystykę amplitudy sygnału EA zestawioną z przebiegiem siły w czasie.

Nieliniową analizę numeryczną w oparciu o metodę elementów skończonych przeprowadzono przy wykorzystaniu komercyjnego programu ABAQUS®. Celem analizy numerycznej było wyznaczenie wartości obciążenia ściskającego, przy którym występuje inicjacja zniszczenia pierwszej warstwy struktury laminatu. Oceny uszkodzenia materiału kompozytowego dokonywano na podstawie zaimplementowanego w programie kryterium zniszczenia kompozytów Tsai–Wu (kryterium tensorowe). Nieliniowe obliczenia konstrukcji realizowano na modelach z zainicjonowaną najniższą postacią wyboczenia z wykorzystaniem przyrostowo-iteracyjnej metody Newtona–Raphsona. Obliczenia numeryczne prowadzono do momentu spełnienia kryterium zniszczenia, polegającego na osiągnięciu parametru krytycznego I (w skali $0 \div I$). Obszary struktury, w których osiągnięto

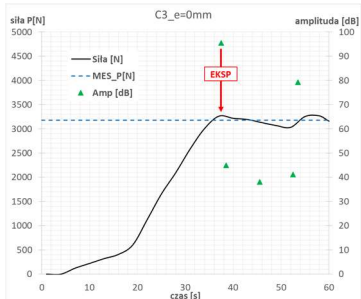
krytyczną wartość parametru zniszczenia określają strefy newralgiczne, dla których zachodzi duże prawdopodobieństwo uszkodzenia warstwy kompozytu. Prezentowane wyniki MES przedstawiają stan osiągnięcia parametru krytycznego w pierwszej warstwie kompozytu oraz odpowiadającą mu wartość siły inicjującej zniszczenie materiału kompozytowego.

Wyznaczone w trakcie badań eksperymentalnych charakterystyki opisujące przebieg siły ściskającej oraz amplitudę sygnału emisji akustycznej w czasie umożliwiły określenie wartości obciążenia inicjującego zniszczenie pierwszej warstwy kompozytu konstrukcji rzeczywistej. Doświadczalną wartość siły inicjującej uszkodzenie materiału kompozytowego wyznaczono na podstawie pierwszego wyraźnego spadku przebiegu siły w czasie, któremu jednocześnie towarzyszył wyraźny przyrost amplitudy sygnału EA. W prowadzonych badaniach doświadczalna wartość siły inicjującej zniszczenie stanowiła w większości przypadków maksimum lokalnego ekstremum charakterystyki *siła-czas*. Na rysunkach 5.51÷5.54 przedstawiono metodykę graficznego wyznaczenia doświadczalnej wartości siły inicjującej zniszczenie kompozytowych słupów o przekroju ceowym.

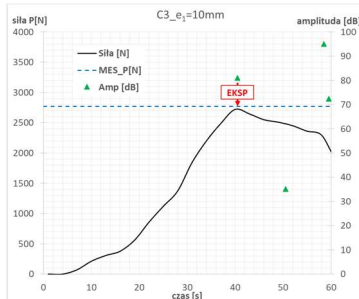


Rys. 5.51. Słup C2 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

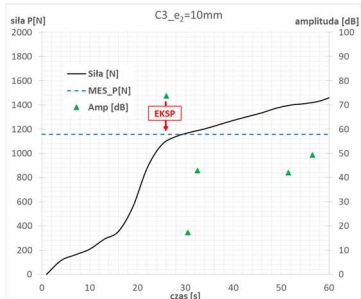
a)



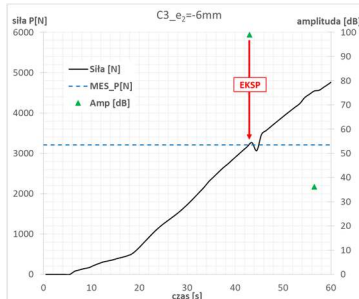
b)



c)

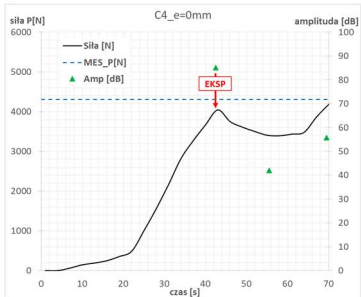


d)

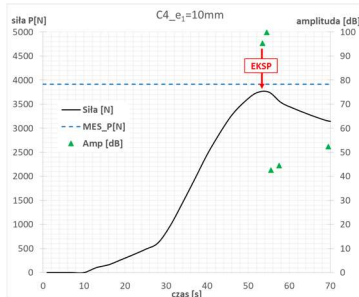


Rys. 5.52. Słup C3 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

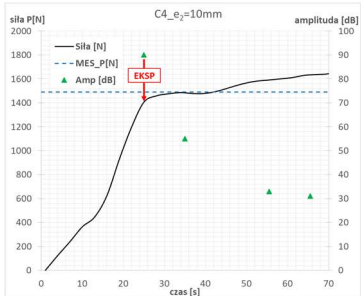
a)



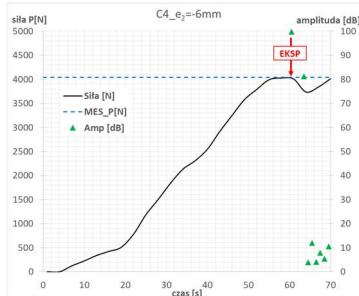
b)



c)

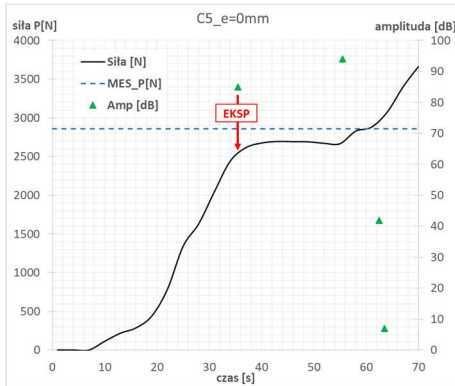


d)

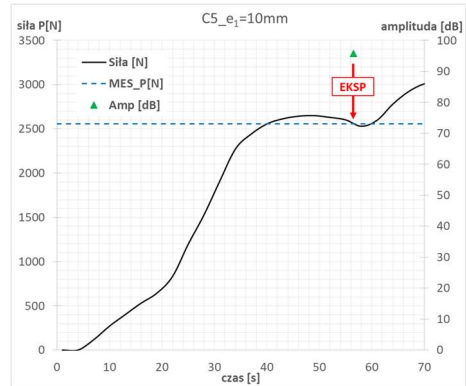


Rys. 5.53. Słup C4 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

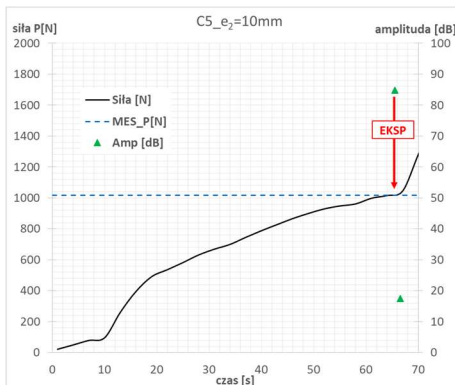
a)



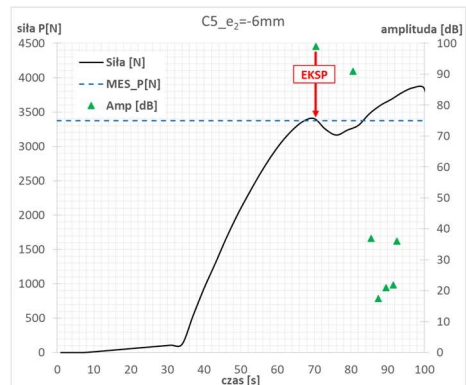
b)



c)



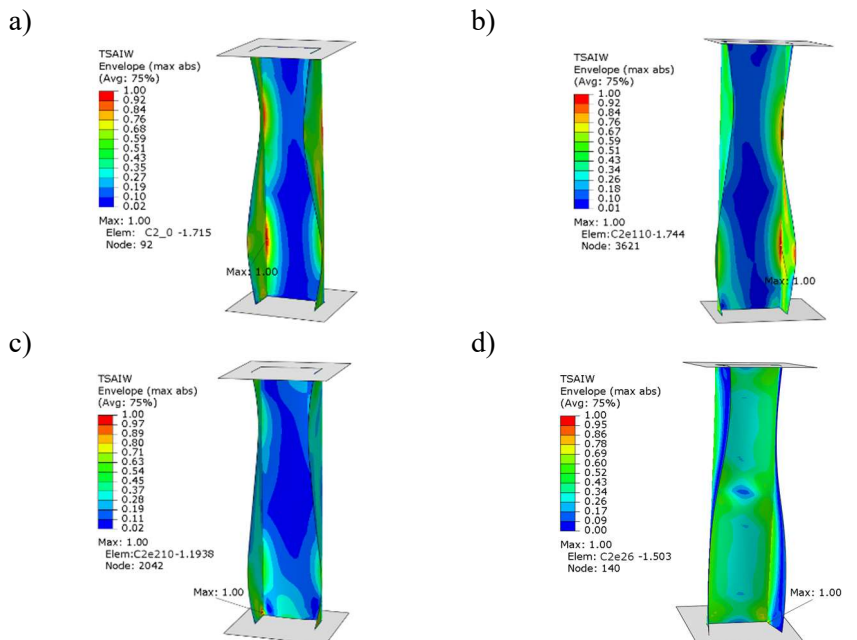
d)



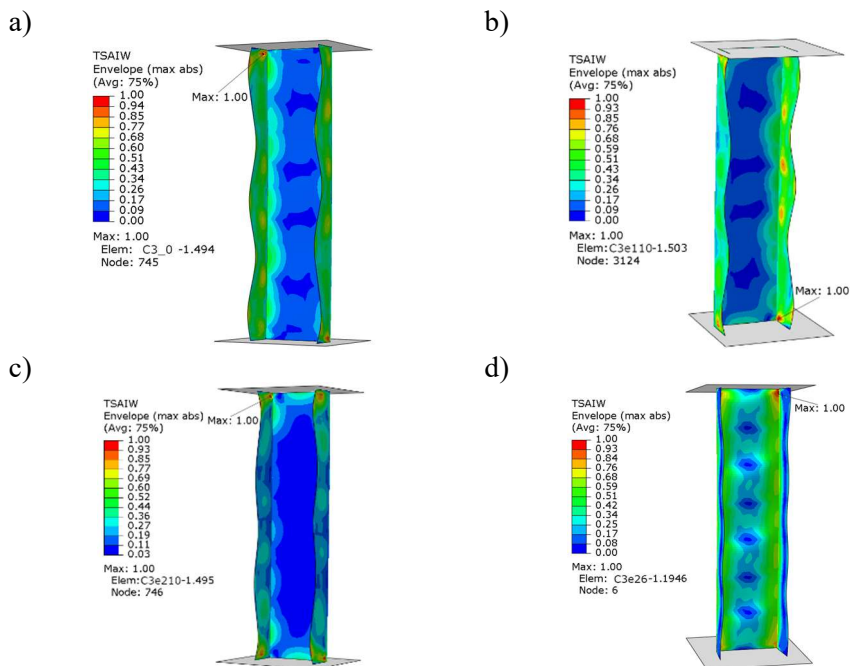
Rys. 5.54. Słup C5 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

Powyższe wykresy przedstawiają wartość obciążenia inicjującego uszkodzenie struktury kompozytu konstrukcji rzeczywistej, odpowiadające zarejestrowanej podwyższonej wartości amplitudy EA (zielone trójkąty). Wyznaczone wartości obciążenia konfrontowano z wynikami obliczeń numerycznych, które na wykresach zaznaczono niebieską przerywaną linią, poprowadzoną równoległe do osi czasu.

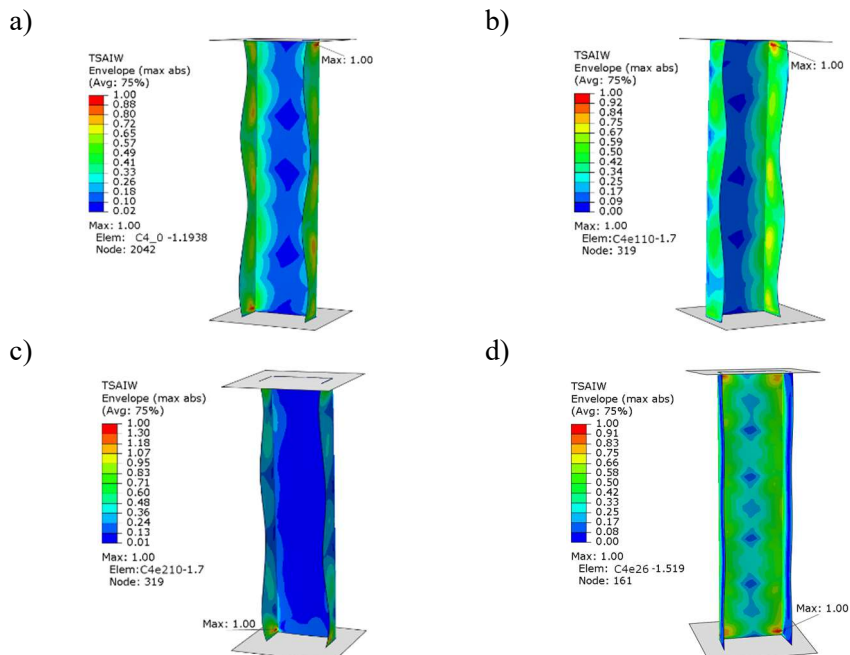
W przypadku analizy numerycznej wyznaczono mapy parametru krytycznego odpowiadające spełnieniu kryterium zniszczenia. Na rysunkach 5.55÷5.58 zaprezentowano obszary, w których nastąpiła inicjacja uszkodzenia pierwszej warstwy kompozytu, odpowiadająca osiągnięciu wartości I parametru krytycznego określonego wg kryterium Tsai–Wu.



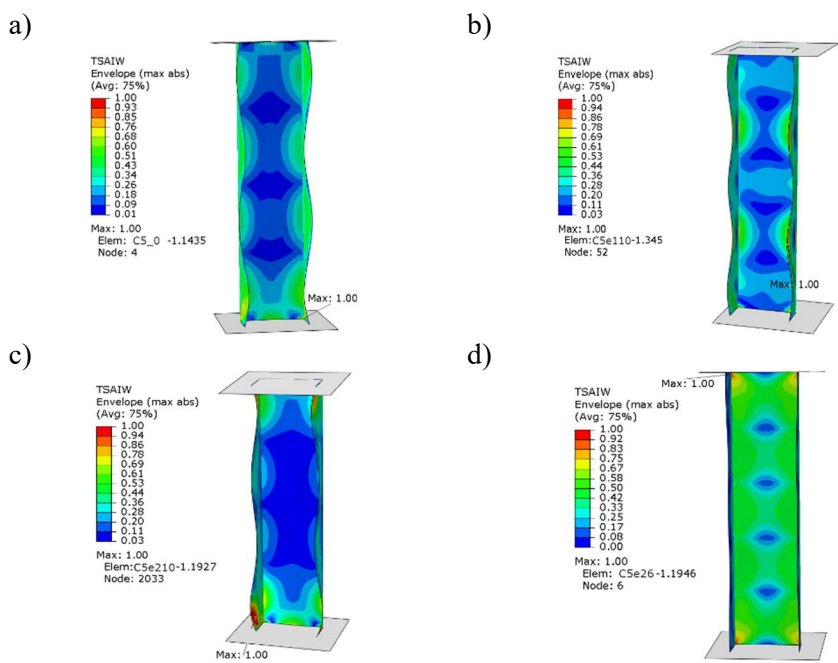
Rys. 5.55. Słup C2 – mapy parametru krytycznego Tsai-Wu: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$



Rys. 5.56. Słup C3 – mapy parametru krytycznego Tsai-Wu: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$



Rys. 5.57. Słup C4 – mapy parametru krytycznego Tsai–Wu: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$



Rys. 5.58. Słup C5 – mapy parametru krytycznego Tsai–Wu: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 10\text{mm}$, d) mimośród $e_2 = -6\text{mm}$

Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych mapy parametru krytycznego pozwalają zidentyfikować obszary, w których istnieje duże prawdopodobieństwo uszkodzenia struktury materiału kompozytowego. Analizując przedstawione mapy można stwierdzić, że są to głównie obszary zlokalizowane na ścianach profilu ceowego, w pobliżu przekrojów końcowych analizowanych słupów.

W tabelach 5.11 i 5.12 zestawiono doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążenia inicjującego uszkodzenie kompozytu oraz numery warstw (w nawiasach), w których w obliczeniach numerycznych zidentyfikowano krytyczną wartość parametru zniszczenia I . Wyniki zestawiono dla wszystkich analizowanych słupów o przekroju ceowym C2÷C5.

Tabela 5.11. Wartość siły inicjującej zniszczenie dla konfiguracji C2 i C3

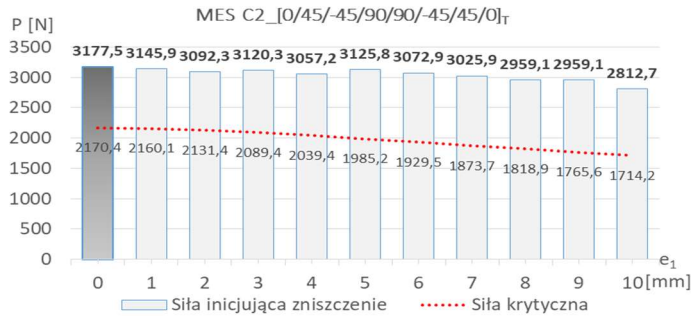
<i>Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy [N]</i>								
<i>C2 [0/45/-45/90/0/-45/45/0]_T</i>					<i>C3 [90/-45/45/0/0/45/-45/90]_T</i>			
<i>e</i>	<i>e₁</i>		<i>e₂</i>		<i>e₁</i>		<i>e₂</i>	
	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>
-6			4152(8)	4057			3209(2)	3267
-5			5326(8)				5342(2)	
-4			6278(8)				6669(2)	
-3			4896(1)				4582(2)	
-2			3880(1)				3680(2)	
-1			3383(1)				3398(6)	
0	3177(8)	3320	3177(8)	3320	3176(6)	3263	3176(6)	3263
1	3145(8)		2707(2)		3036(8)		2529(8)	
2	3092(8)		2372(2)		2723(8)		2158(8)	
3	3120(1)		2038(2)		3089(6)		1962(8)	
4	3057(1)		1999(2)		3026(6)		1797(8)	
5	3125(1)		1740(8)		2975(6)		1620(8)	
6	3073(1)		1545(8)		2943(6)		1533(8)	
7	3026(1)		1443(2)		2885(6)		1535(7)	
8	2959(1)		1328(2)		2829(6)		1241(7)	
9	2959(1)		1281(2)		2782(2)		1170(7)	
10	2813(8)	2877	1162(2)	1092	2770(2)	2722	1157(7)	1139

Tabela 5.12. Wartość siły inicjującej zniszczenie dla konfiguracji C4 i C5

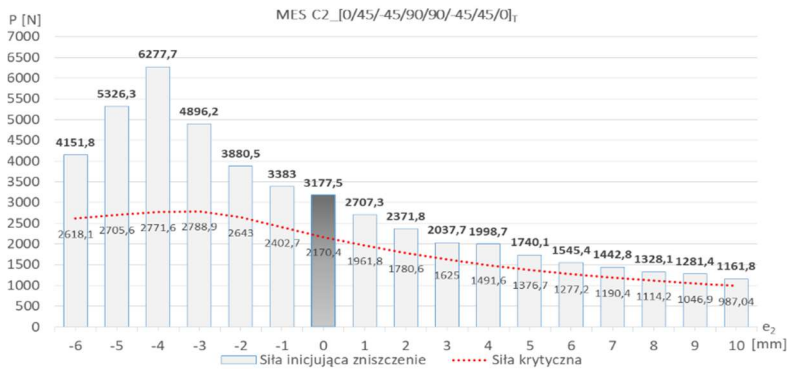
<i>Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy [N]</i>								
<i>C4_[45/-45/90/0/0/90/-45/45]_T</i>					<i>C5_[90/0/90/0/0/90/0/90]_T</i>			
<i>e</i>	<i>e₁</i>		<i>e₂</i>		<i>e₁</i>		<i>e₂</i>	
	MES	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP
-6			4040(2)	4027			3375(1)	3366
-5			5502(2)				5991(2)	
-4			6864(2)				5371(2)	
-3			7948(2)				4039(2)	
-2			5449(8)				3602(1)	
-1			5057(8)				3074(1)	
0	4303(8)	4042	4303(8)	4042	2860(1)	2695	2860(1)	2695
1	3568(1)		3562(1)		2841(1)		2460(1)	
2	4128(7)		3043(1)		2872(1)		2155(1)	
3	4348(7)		2677(1)		2821(1)		1924(1)	
4	4162(7)		2376(1)		2783(1)		1714(1)	
5	4063(7)		2236(1)		2776(1)		1538(1)	
6	4104(7)		2043(1)		2666(8)		1392(1)	
7	3943(7)		1825(1)		2575(8)		1257(7)	
8	3724(7)		1784(1)		2603(8)		1160(7)	
9	3822(7)		1572(1)		2605(1)		1113(7)	
10	3917(7)	3752	1490(1)	1458	2555(1)	2644	1017(7)	1016

Zamieszczone w tabelach 5.11 i 5.12 wyniki badań potwierdziły wysoką zgodność wartości obciążenia inicjującego zniszczenie materiału kompozytowego konstrukcji rzeczywistej z odpowiadającą jej wartością otrzymaną w przypadku modelu numerycznego. Maksymalne procentowe rozbieżności wynosiły odpowiednio: słup C2: 5,9%, słup C3: 2,7%, słup C4: 6% oraz słup C5: 5,7%. Jest to bardzo wysoka zgodność wyników badań, potwierdzająca poprawność przyjętej metodyki badawczej. Otrzymane wyniki zaprezentowano w sposób graficzny, umożliwiający bezpośrednią wizualizację wpływu nieosiowości obciążenia ścisającego na wartość siły inicjującej zniszczenie materiału kompozytowego. Na rysunkach 5.59÷5.66 przedstawiono wykresy siły inicjującej zniszczenie kompozytu w zależności od wartości mimośrod obciążenia. Dodatkowo zaznaczono wartości sił krytycznych, umożliwiające określenie zakresu pracy konstrukcji w stanie pokrytycznym, tzn. od momentu utraty stateczności słupa do chwili zarejestrowania pierwszych oznak uszkodzenia materiału kompozytowego.

- słup C2

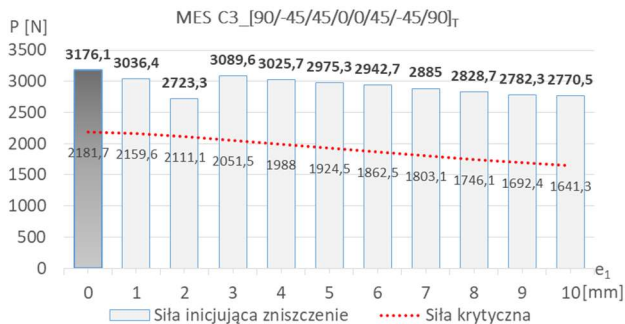


Rys. 5.59. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C2 odpowiadająca realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1

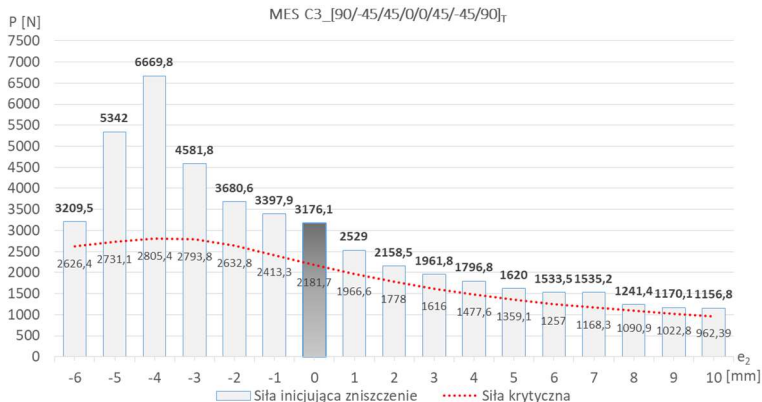


Rys. 5.60. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C2 odpowiadająca realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_2

- słup C3

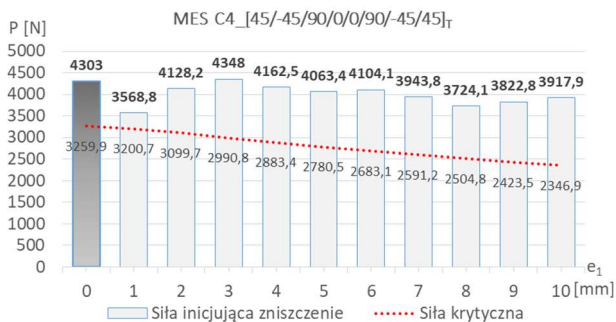


Rys. 5.61. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C3 odpowiadająca realizacji nieosiowości w kierunku e_1

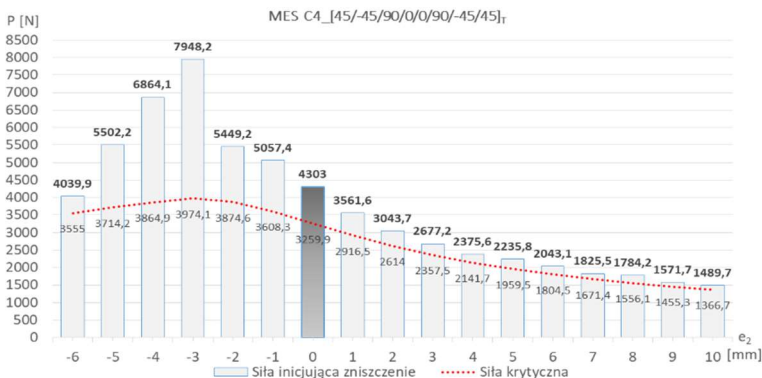


Rys. 5.62. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C3 odpowiadająca realizacji nieosiowości w kierunku e_2

- słup C4

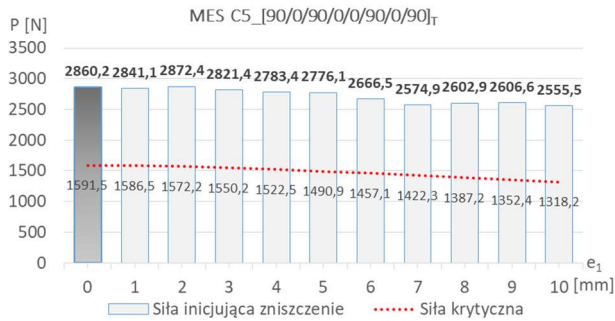


Rys. 5.63. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C4 odpowiadająca realizacji nieosiowości w kierunku e_1

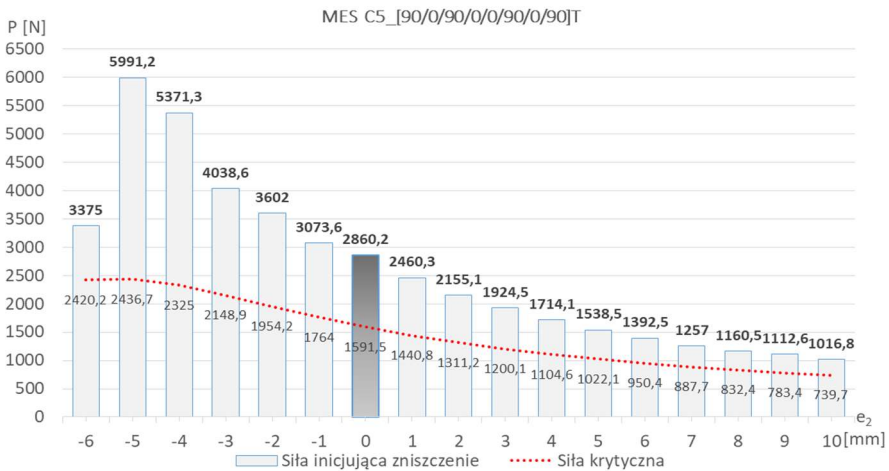


Rys. 5.64. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C4 odpowiadająca realizacji nieosiowości w kierunku e_2

- słup C5



Rys. 5.65. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C5 odpowiadająca realizacji nieosiowości w kierunku e_1



Rys. 5.66. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa C5 odpowiadająca realizacji nieosiowości w kierunku e_2

Na podstawie otrzymanych wyników badań można zauważyć, że niezależnie od konfiguracji warstw kompozytu wpływ nieosiowości obciążenia na wartość siły krytycznej oraz siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy jest jakościowo taki sam, dla wszystkich rozważanych słupów o przekroju ceowym. Realizacja mimośrodowo obciążenia w kierunku e_1 oraz $e_{2(+)}$ powoduje monotoniczny spadek siły krytycznej oraz siły inicjującej zniszczenie kompozytu. Natomiast zwiększanie mimośrodowo obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ prowadzi początkowo do istotnego wzrostu obydwu sił, które zaczynają się zmniejszać przy większych wartościach mimośrodowo obciążenia w zakresie $-4 \div -6$ mm. Procentowe wartości obciążenia inicjującego zniszczenie kompozytu (- spadek wartości obciążenia; + wzrost wartości obciążenia) w odniesieniu do przypadku ściskania osiowego przedstawione zostały w tabeli 5.13.

Tabela 5.13. Zmiana wartości obciążenia inicjującego zniszczenie słupa C w zależności od maksymalnego mimośrodowo obciążenia ściskającego

e	Układ warstw kompozytu							
	C2		C3		C4		C5	
	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES
e_1	-13%	-11%	-17%	-13%	-7%	-9%	-2%	-10%
$e_{2(+)}$	-67%	-63%	-65%	-64%	-64%	-65%	-62%	-64%
$e_{2(-)}$	+22%	+31%	0%	+1%	0%	+6%	+25%	+18%

Ilościowa analiza otrzymanych wyników wykazała, że największy spadek wartości siły inicjującej zniszczenie kompozytu w kierunku e_1 występuje w przypadku konfiguracji C3 i wynosi 13%, natomiast najniższym spadkiem na poziomie 9% charakteryzuje się układ C4. Realizacja obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ w większym stopniu wpływa na spadek wartości obciążenia inicjującego zniszczenie i kształtuje się na poziomie 63%–65%. Natomiast w przypadku wzrostu wartości obciążenia inicjującego zniszczenie kompozytu (kierunek $e_{2(-)}$) najwyższy wzrost na poziomie 30% otrzymano dla konfiguracji C2, natomiast najniższe wartości w przypadku konfiguracji C3 (ok. 1%).

Istotne znaczenie w pracy ściskanego profilu kompozytowego odgrywa zakres statecznej pracy konstrukcji w stanie pokrytycznym – po utracie stateczności. Zakres ten można opisać stosunkiem wartości obciążenia inicjującego zniszczenie pierwszej warstwy kompozytu do wartości siły krytycznej. W tabeli 5.14 przedstawiono procentowy wzrost obciążenia, liczony jako wzrost wartości siły inicjującej zniszczenie kompozytu ponad wartość siły krytycznej.

Tabela 5.14. Procentowy wzrost wartości obciążenia inicjującego zniszczenie słupa C w stosunku do wartości obciążenia krytycznego

e	Układ warstw kompozytu			
	C2	C3	C4	C5
<i>osiowe</i>	46%	45%	32%	80%
$e_1 = 10\text{mm}$	64%	69%	67%	94%
$e_{2(+)} = 10\text{mm}$	18%	20%	9%	37%
$e_{2(-)} = -6\text{mm}$	58%	22%	14%	39%

W wyniku realizacji obciążenia osiowego otrzymano wzrost siły do poziomu siły inicjującej zniszczenie w porównaniu do siły krytycznej odpowiednio: C2: 46%, C3: 45%, C4: 32% oraz C5: 80%. Podczas realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku e_1 maksymalny wzrost siły niszczącej względem obciążenia krytycznego, dla wszystkich prób występował w punkcie: $e_1 = 10\text{mm}$ i wynosił: C2: 64%, C3: 69%, C4: 67% oraz C5: 94% (rys. 5.59, 5.61, 5.63 i 5.65). W przypadku realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku $e_{2(-)}$ występuje zjawisko umacniania się profilu, natomiast w kierunku $e_{2(+)}$ profil traci swoją sztywność (analogicznie do wyników stanu krytycznego). W wyniku badań słupów o przekroju ceowym w kierunku $e_{2(-)}$ zarejestrowano maksymalny wzrost siły inicjującej zniszczenie względem siły krytycznej o: C2: 126% ($e_2 = -4\text{mm}$), C3: 137% ($e_2 = -4\text{mm}$), C4: 100% ($e_2 = -3\text{mm}$) oraz C5: 146% ($e_2 = -5\text{mm}$). Należy zauważyć, że siła inicjująca zniszczenie znacząco zbliża się do siły krytycznej podczas wzrostu mimośrodowo obciążenia w kierunku $e_{2(+)}$ (rys. 5.60, 5.62, 5.64 i 5.66).

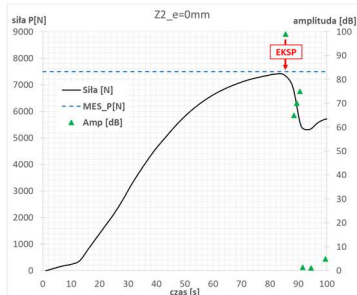
5.2.4. Inicjacja zniszczenia struktury kompozytu – słupy o przekroju zetowym

Wyniki badań słupów o przekroju zetowym zaprezentowane zostaną w sposób analogiczny, jak w przypadku słupów o przekroju ceowym, opisanych w rozdziale 5.2.3. W tym przypadku badania doświadczalne prowadzono w 3 próbach każdej analizowanej konfiguracji laminatu, dla skrajnych wartości mimośrodowo obciążenia ściskającego: $e_{1,2} = 0\text{mm}$ (ściskanie osiowe), $e_1 = 10\text{mm}$ oraz $e_2 = 6\text{mm}$. W przypadku obliczeń numerycznych nieliniową analizę stateczności wykonano dla wszystkich wariantów nieosiowości obciążenia z krokiem realizacji mimośrodowo obciążenia wynoszącym 1mm . Obliczenia prowadzono do momentu spełnienia kryterium zniszczenia kompozytu Tsai–Wu, polegającego na osiągnięciu wartości 1 parametru krytycznego.

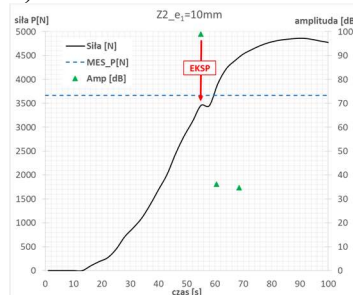
Na rysunkach 5.67÷5.70 zaprezentowano doświadczalne charakterystyki siły i amplitudy sygnału EA w czasie, na podstawie których określona została wartość obciążenia inicjującego zniszczenie materiału kompozytowego.

Na powyższych wykresach wyznaczono wartości obciążenia inicjującego uszkodzenie struktury kompozytu rzeczywistych słupów o przekroju zetowym. Wartości tych obciążeń odpowiadają zarejestrowanej podwyższonej wartości amplitudy sygnału EA (zielone trójkąty). Wyznaczone wartości obciążenia konfrontowano z wynikami obliczeń numerycznych, które na wykresach zaznaczono niebieską przerywaną linią, poprowadzoną równoległe do osi czasu.

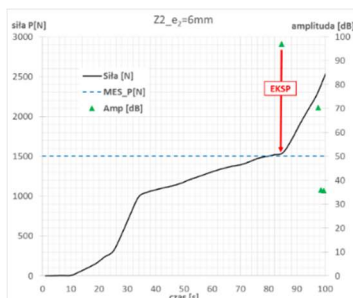
a)



b)

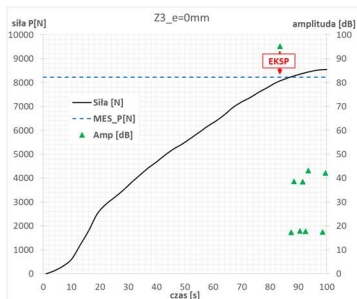


c)

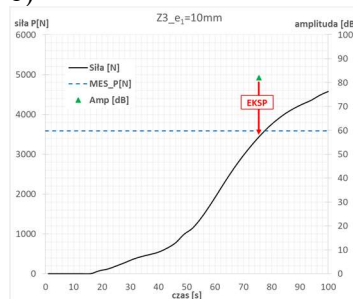


Rys. 5.67. Slup Z2 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

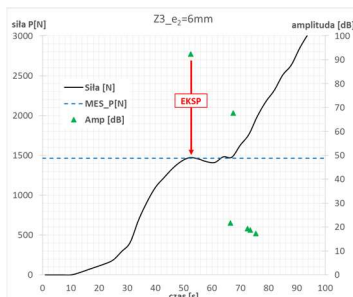
a)



b)

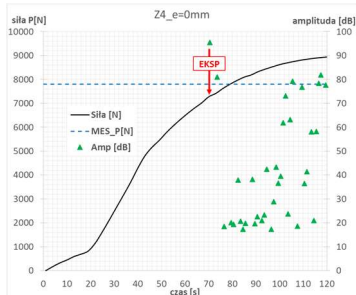


c)

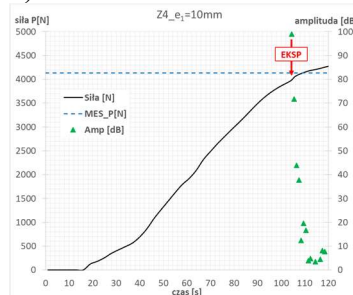


Rys. 5.68. Slup Z3 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

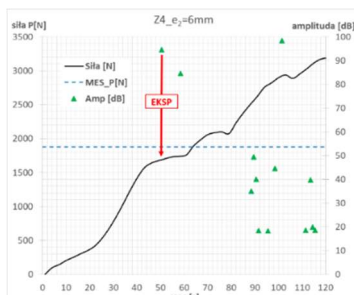
a)



b)

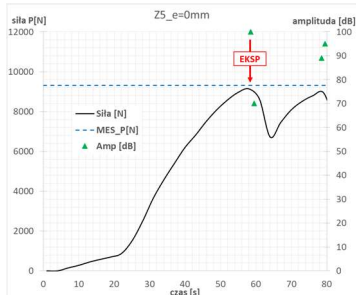


c)

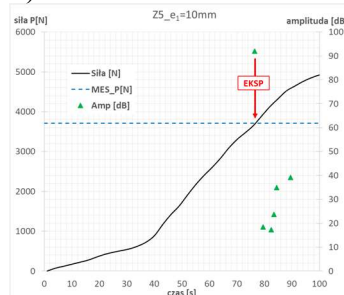


Rys. 5.69. Słup Z4 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0$, b) mimośród $\epsilon_1 = 10\text{mm}$, mimośród $\epsilon_2 = 6\text{mm}$

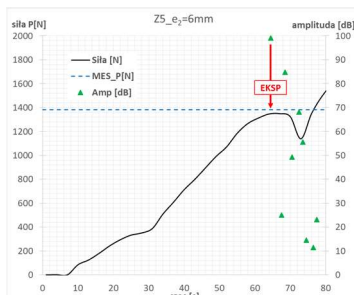
a)



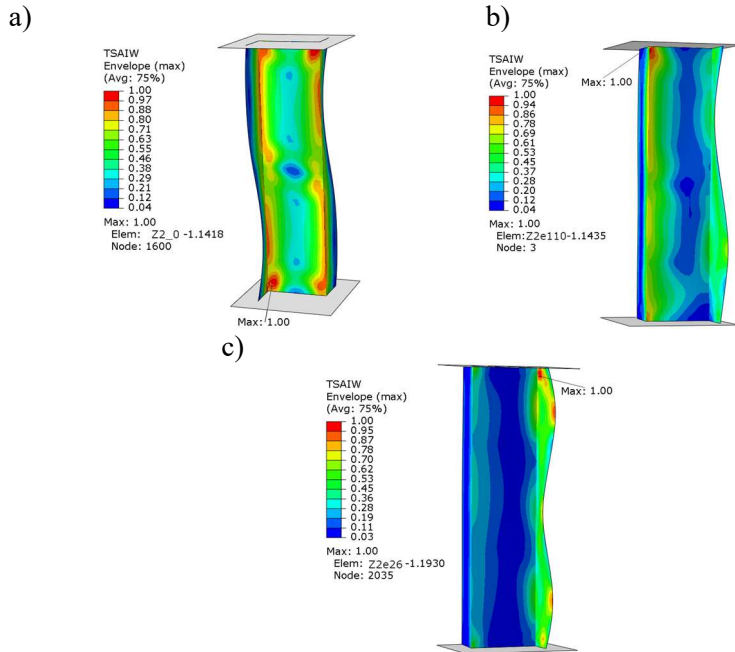
b)



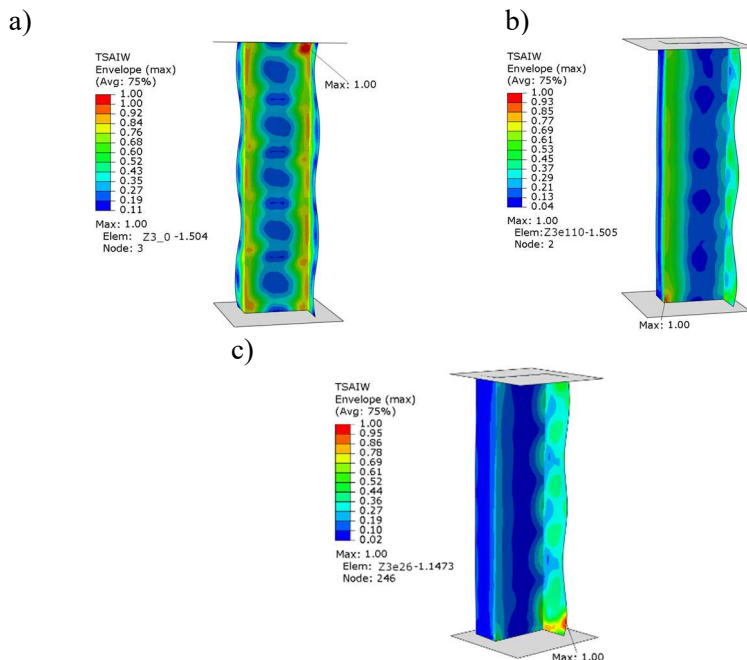
c)



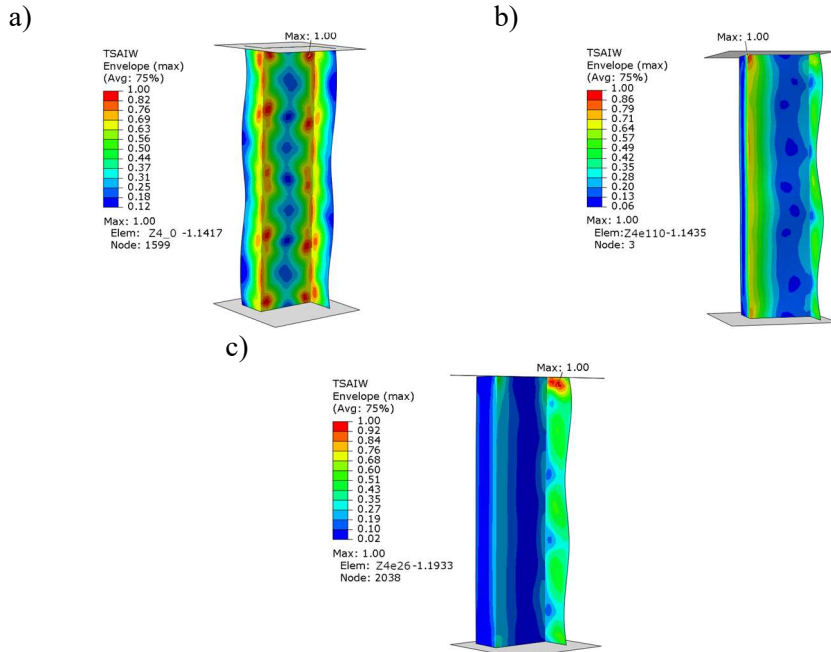
Rys. 5.70. Słup Z5 – siła inicjująca zniszczenie: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0$, b) mimośród $\epsilon_1 = 10\text{mm}$, mimośród $\epsilon_2 = 6\text{mm}$



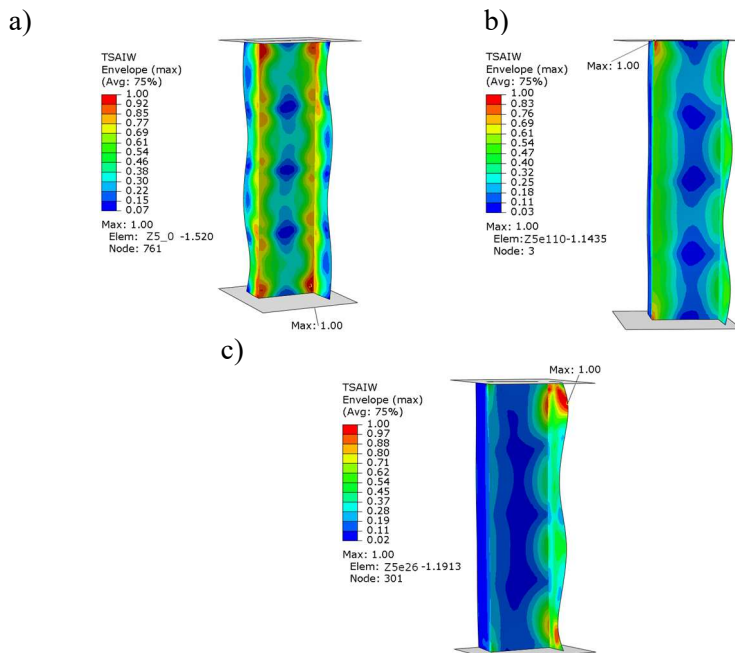
Rys. 5.71. Słup Z2 – mapy parametru krytycznego Tsai–Wu: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $\epsilon_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $\epsilon_2 = 6\text{mm}$



Rys. 5.72. Słup Z3 – mapy parametru krytycznego Tsai–Wu: a) ściskanie osiowe $\epsilon_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $\epsilon_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $\epsilon_2 = 6\text{mm}$



Rys. 5.73. Słup Z4 – mapy parametru krytycznego Tsai–Wu: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$



Rys. 5.74. Słup Z5 – mapy parametru krytycznego Tsai–Wu: a) ściskanie osiowe $e_{1,2} = 0\text{mm}$, b) mimośród $e_1 = 10\text{mm}$, c) mimośród $e_2 = 6\text{mm}$

Przeprowadzona analiza numeryczna słupów o przekroju zetowym umożliwiła wyznaczenie form deformacji ściskanych słupów oraz map parametru krytycznego, odpowiadających spełnieniu kryterium zniszczenia w przypadku pierwszej warstwy kompozytu. Na rysunkach 5.71÷5.74 zaprezentowano obszary, w których nastąpiła inicjacja uszkodzenia pierwszej warstwy kompozytu, odpowiadająca osiągnięciu wartości I parametru krytycznego określonego wg kryterium Tsai–Wu.

Otrzymane w obliczeniach numerycznych mapy parametru krytycznego pozwalają zidentyfikować obszary, w których istnieje duże prawdopodobieństwo uszkodzenia struktury materiału kompozytowego. Analizując przedstawione mapy można stwierdzić, że są to głównie obszary usytuowane w pobliżu przekrojów końcowych analizowanych słupów zetowych. W zależności od wartości nieosiowości obciążenia obszar inicjacji pierwszej warstwy występuje średnicu na: $e = 0\text{mm}$, $e_1 = 10\text{mm}$, oraz na ścianie profilu $e_2 = 6\text{mm}$.

W tabelach 5.15 i 5.16 zestawiono doświadczalne oraz numeryczne wartości obciążenia inicjującego uszkodzenie pierwszej warstwy materiału kompozytowego oraz numery warstw (w nawiasach), w których zidentyfikowano osiągnięcie parametru krytycznego I .

Tabela 5.15. Wartość siły inicjującej zniszczenie dla konfiguracji Z2÷Z3

<i>Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy [N]</i>								
<i>Z2 [0/45/-45/90/90/-45/45/0]_T</i>					<i>Z3 [90/-45/45/0/0/45/-45/90]_T</i>			
<i>e</i>	<i>e₁</i>		<i>e₂</i>		<i>e₁</i>		<i>e₂</i>	
	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>
0	7496(7)	7374	7496(7)	7374	8229(2)	7992	8229(2)	7992
1	4801(1)		3962(8)		4685(4)		3832(4)	
2	4636(1)		3157(8)		4524(4)		3043(1)	
3	4486(1)		2551(8)		4374(4)		2457(1)	
4	4347(1)		2082(8)		4193(4)		2012(1)	
5	4215(1)		1721(2)		4065(4)		1707(1)	
6	4094(1)		1504(2)	1497	3994(4)		1466(1)	1349
7	4004(1)				3881(4)			
8	3904(8)				3786(4)			
9	3892(8)				3683(4)			
10	3666(8)	3454			3587(4)	3476		

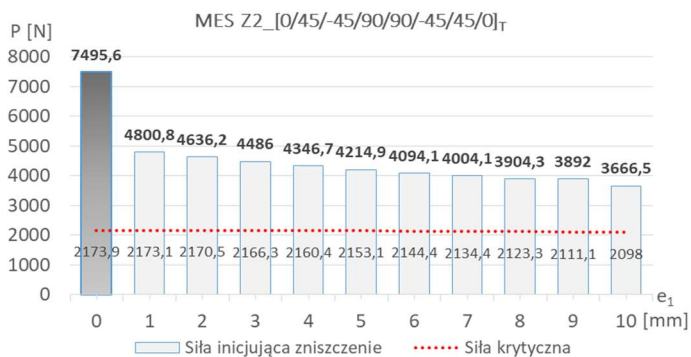
Tabela 5.16. Wartość siły inicjującej zniszczenie dla konfiguracji Z4÷Z5

<i>Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy [N]</i>								
<i>Z4 [45/-45/90/0/0/90/-45/45]_T</i>					<i>Z5 [90/0/90/0/0/90/0/90]_T</i>			
<i>e</i>	<i>e₁</i>		<i>e₂</i>		<i>e₁</i>		<i>e₂</i>	
	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>	<i>MES</i>	<i>EKSP</i>
0	7802(8)	7417	7802(8)	7417	9301(2)	9141	9301(2)	9141
1	5343(1)		4555(4)		4962(7)		3757(7)	
2	5173(1)		3744(1)		4748(7)		2865(1)	
3	5011(4)		3088(7)		4571(7)		2306(1)	
4	4862(4)		2570(7)		4412(7)		1911(1)	
5	4728(4)		2171(7)		4267(7)		1622(7)	
6	4603(4)		1875(7)	1762	4131(7)		1381(7)	1349
7	4471(4)				4013(7)			
8	4364(4)				3898(7)			
9	4295(4)				3800(7)			
10	4129(4)	3969			3706(7)	3652		

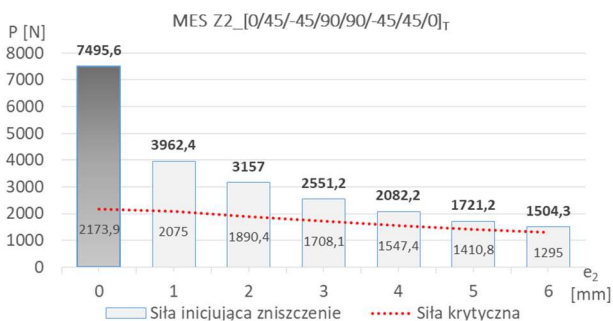
Zamieszczone w tabelach 5.15 i 5.16 wyniki badań potwierdziły wysoką zgodność ilościową wartości obciążenia inicjującego zniszczenie kompozytu konstrukcji rzeczywistej z odpowiadającą jej wartością otrzymaną w przypadku modelu numerycznego. Maksymalne procentowe rozbieżności wynosiły odpowiednio: słup Z2: 5,8%, słup Z3: 7,9%, słup Z4: 6% oraz słup Z5: 2,3%. Jest to bardzo wysoka zgodność wyników badań, potwierdzająca poprawność przyjętej metody badawczej. Otrzymane wyniki zaprezentowano w sposób graficzny, umożliwiający bezpośrednią wizualizację wpływu nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość siły inicjującej zniszczenie materiału kompozytowego. Na rysunkach 5.75÷5.82 przedstawiono wykresy siły inicjującej zniszczenie kompozytu w zależności od wartości mimośrodów obciążenia. Dodatkowo zaznaczono wartości sił krytycznych, umożliwiające określenie zakresu pracy konstrukcji w stanie pokrytycznym, tzn. od momentu utraty stateczności słupa do chwili zarejestrowania pierwszych oznak uszkodzenia materiału kompozytowego.

Na podstawie zaprezentowanych wyników można stwierdzić, że niezależnie od konfiguracji warstw kompozytu wpływ nieosiowości obciążenia na wartość siły krytycznej oraz siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy jest jakościowo zbliżony – największa rozbieżność występuje podczas ściskania osiowego. Realizacja mimośrodów obciążenia w kierunku e_1 oraz e_2 powoduje monotoniczny spadek siły krytycznej oraz siły inicjującej zniszczenie kompozytu. Wpływ mimośrodów obciążenia w obu kierunkach prowadzi do istotnego obniżenia siły inicjującej zniszczenie struktury kompozytowej w odniesieniu do ściskania osiowego. Procentowe wartości spadku obciążenia inicjującego zniszczenie kompozytu w odniesieniu do przypadku ściskania osiowego przedstawione zostały w tabeli 5.17.

- słup Z2

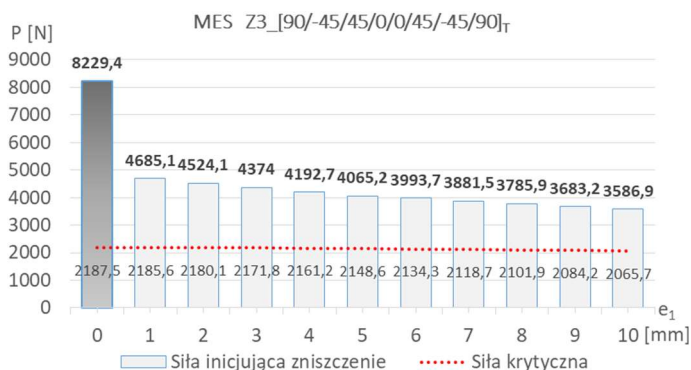


Rys. 5.75. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z2 odpowiadające realizacji nieosiowości w kierunku e_1

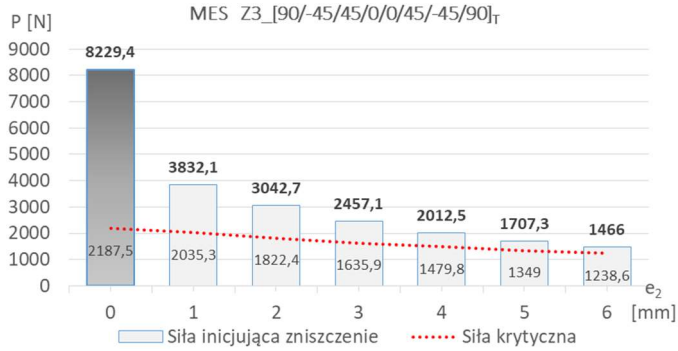


Rys. 5.76. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z2 odpowiadające realizacji nieosiowości w kierunku e_2

- słup Z3

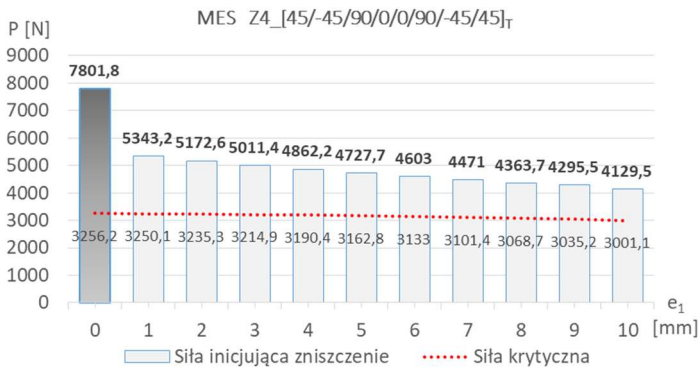


Rys. 5.77. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z3 odpowiadające realizacji nieosiowości w kierunku e_1

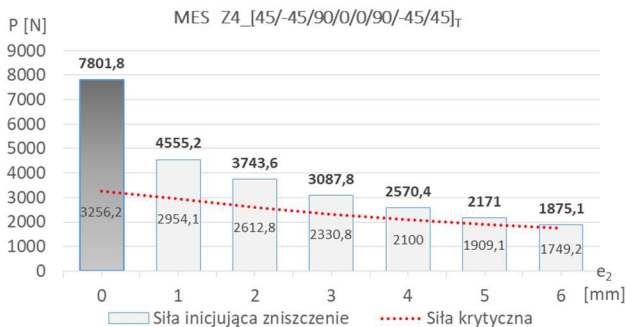


Rys. 5.78. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z3 odpowiadające realizacji niesiowości w kierunku e_2

- słup Z4

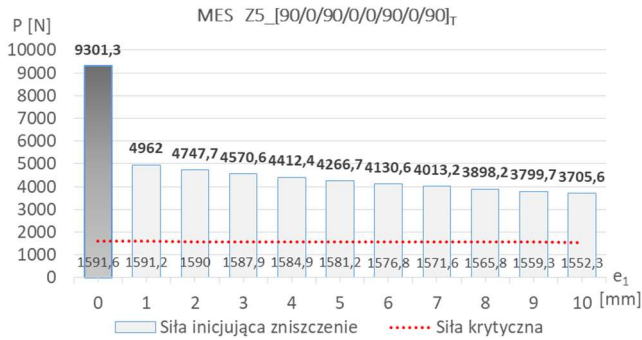


Rys. 5.79. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z4 odpowiadające realizacji niesiowości w kierunku e_1

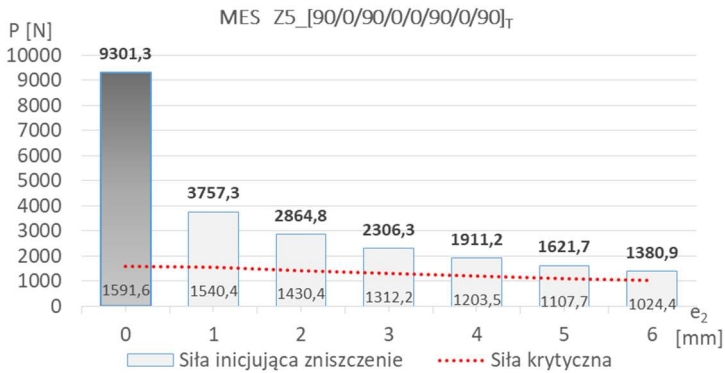


Rys. 5.80. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z4 odpowiadające realizacji niesiowości w kierunku e_2

- słup Z5



Rys. 5.81. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z5 odpowiadające realizacji nieosiowości w kierunku e_1



Rys. 5.82. Wartość siły inicjującej zniszczenie pierwszej warstwy słupa Z5 odpowiadające realizacji nieosiowości w kierunku e_2

Tabela 5.17. Zmiana wartości obciążenia inicjującego zniszczenie słupa Z w zależności od maksymalnych wartości mimośrodu obciążenia ściskającego

e	Układ warstw kompozytu							
	Z2		Z3		Z4		Z5	
	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES	EKSP	MES
e_1	-53%	-51%	-57%	-56%	-46%	-47%	-60%	-60%
e_2	-80%	-80%	-83%	-82%	-76%	-76%	-85%	-85%

Ilościowa analiza otrzymanych wyników wykazała, że największy spadek wartości siły inicjującej zniszczenie kompozytu w kierunku e_1 występuje w przypadku konfiguracji Z5 i wynosi 60%, natomiast najniższym spadkiem na poziomie 47% charakteryzuje się układ Z4. Realizacja obciążenia w kierunku e_2 w większym stopniu wpływa na obniżenie wartości obciążenia inicjującego zniszczenie – najwyższy spadek na poziomie 85% otrzymano dla konfiguracji Z5, natomiast najniższe wartości w przypadku konfiguracji Z4 (75%).

Również w przypadku słupów o przekroju zetowym zbadano zakres statecznej pracy konstrukcji w stanie pokrytycznym – po utracie stateczności. Zakres ten określono w sposób analogiczny do słupów o przekroju ceowym, jako stosunek wartości obciążenia inicjującego zniszczenie pierwszej warstwy kompozytu do wartości siły krytycznej. W tabeli 5.18 przedstawiono procentowy wzrost obciążenia inicjującego zniszczenie w stosunku do wartości siły krytycznej dla wszystkich badanych słupów o przekroju zetowym.

Tabela 5.18. Procentowy wzrost wartości obciążenia inicjującego zniszczenie słupa Z w stosunku do wartości obciążenia krytycznego

e	Układ warstw kompozytu			
	Z2	Z3	Z4	Z5
<i>osiowe</i>	245%	276%	140%	484%
$e_1 = 10\text{mm}$	75%	74%	38%	139%
$e_2 = 6\text{mm}$	16%	18%	7%	35%

Najwyższy wzrost siły inicjującej zniszczenie w stosunku do siły krytycznej otrzymano dla przypadku ściskania osiowego o: Z2: 245%, Z3: 276%, Z4: 140% oraz Z5: 484%. Podczas realizacji nieosiowości obciążenia w kierunku równoległym do środka wzrost siły niszczącej względem obciążenia krytycznego w punkcie $e_1 = 10\text{mm}$ wynosił odpowiednio: Z2: 75%, Z3: 74%, Z4: 38% oraz Z5: 139%. W przypadku zmiany nieosiowości obciążenia w kierunku e_2 występuje zjawisko wyraźnego osłabienia się nośności profilu zetowego. Wzrost procentowy siły inicjującej zniszczenie względem siły krytycznej w przypadku $e_2 = 6\text{mm}$ wynosi: Z2: 16%, Z3: 18%, Z4: 7% oraz Z5: 35%. Należy zauważyć, że wartość siły inicjująca zniszczenie znacząco zbliża się do wartości krytycznej podczas wzrostu nieosiowości w kierunku e_2 (rys. 5.76, 5.78, 5.80 i 5.82).

Wyniki badań przeprowadzone w oparciu o metodę emisji akustycznej oraz metodę elementów skończonych wykazały zgodność wskazań doświadczalnej i numerycznej wartości sił inicjujących zniszczenie kompozytu. Przeprowadzona analiza słupów o przekroju zetowym potwierdza duży wpływ maksymal-

nych nieosiowości obciążenia ściskającego na pracę konstrukcji w stanie pokrytym. Należy podkreślić, że najwyższą sztywność profil osiąga podczas działania siły osiowej (warunki idealne obciążenia). Nieznaczne spadki sztywności konstrukcji na skutek realizacji mimośrodowo obciążenia zaobserwowano na kierunku e_1 , równoległym do środka. Znacząco niekorzystny wpływ na pracę konstrukcji zaobserwowano w przypadku realizacji mimośrodowo obciążenia w kierunku prostopadłym do środka profilu zetowego. Występowanie nieosiowości obciążenia w tym kierunku może znacząco osłabić sztywność i wytrzymałość ściskanego profilu, prowadząc do przedwczesnego uszkodzenia struktury materiału kompozytowego. Jest to zjawisko niebezpieczne, zwłaszcza w zakresie obciążeń eksploatacyjnie dopuszczalnych.

6. Podsumowanie

Głównym tematem niniejszej monografii jest opis pracy ściskanych osiowo i mimośrodowo cienkościennych krótkich słupów o złożonych kształtach przekroju poprzecznego wykonanych z kompozytu węglowo-epoksydowego. Badaniom poddano słupy o przekroju ceowym i zetowym, wykonane techniką autoklawową, złożone z 8 warstw kompozytu w symetrycznym układzie względem płaszczyzny środkowej laminatu.

Badania miały na celu określenie wpływu nieosiowości obciążenia ściskającego na stan krytyczny (wyboczenie konstrukcji) oraz pracę w zakresie pokrytycznym, do momentu pierwszych oznak uszkodzenia materiału kompozytowego. Zastosowana metodyka badań obejmowała badania eksperymentalne, prowadzone z wykorzystaniem fizycznych modeli konstrukcji kompozytowych oraz obliczenia numeryczne. Zastosowanym narzędziem numerycznym był komercyjny program MES – ABAQUS®.

Badania eksperymentalne ściskania słupów kompozytowych realizowano w warunkach laboratoryjnych (temperaturze pokojowej) z wykorzystaniem uniwersalnej maszyny wytrzymałościowej, zapewniającej przegubowe podparcie przekrojów końcowych słupów poprzez zastosowanie specjalnie wykonanych głowic mocujących opartych na przegubach kulistych. Realizację nieosiowości obciążenia zapewniały zaprojektowane i wykonane w tym celu stoły przesuwne, napędzane śrubą mikrometryczną, umożliwiające precyzyjne wprowadzanie wartości mimośrodu obciążenia. Wartość mimośrodu dodatkowo kontrolowano z wykorzystaniem czujnika elektronicznego. Zastosowane oprzyrządowanie umożliwiała realizację nieosiowości obciążenia konstrukcji w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, z których kierunek e_1 określał kierunek równoległy do środniczki badanych profili, natomiast kierunek e_2 był kierunkiem prostopadłym do środniczki. W trakcie badań eksperymentalnych rejestrowano przebieg siły w czasie, pomiar ugięć (z wykorzystaniem czujnika laserowego) w kierunku prostopadłym do ścianek słupów oraz skrócenie słupa. Dodatkowo, w celu monitorowania bieżącego stanu struktury materiału kompozytowego zastosowano pomiar sygnału z wykorzystaniem metody emisji akustycznej (MEA). Do oceny stanu materiału kompozytowego wykorzystano w tym przypadku amplitudę sygnału EA.

Wyniki otrzymywanych badań eksperymentalnych umożliwiły dokonywanie bieżącej walidacji opracowywanych modeli numerycznych konstrukcji, które w przypadku ściskania nieosiowego wymagały uwzględnienia szeregu parametrów, zapewniających szczegółowe odwzorowanie warunków prowadzonego eksperymentu. Opracowywane modele numeryczne były walidowane do momentu, w którym otrzymywane wyniki obliczeń, w szczególności dla dużych wartości mimośrodów obciążenia dostarczały adekwatnych wyników w odniesieniu do konstrukcji rzeczywistej. Takie podejście umożliwiło opracowanie uniwersal-

nych modeli MES, zwalidowanych doświadczalnie, umożliwiających prowadzenie symulacji numerycznych cienkościennych profili kompozytowych poddawanych ścisnaniu z dowolnymi wartościami mimośrodowo obciążenia.

Zakres prowadzonych obliczeń obejmował liniową analizę zagadnienia własnego, umożliwiającą ocenę wpływu nieosiowości obciążenia na utratę stateczności ścisnanych słupów kompozytowych. Wynikiem analizy liniowej było wyznaczenie najniższych postaci wyboczenia konstrukcji oraz odpowiadających im wartości obciążenia krytycznego. Otrzymane postacie utraty stateczności zostały zaimplementowane do nieliniowej analizy stateczności, prowadzonej z wykorzystaniem przyrostowo-iteracyjnej metody Newtona–Raphsona. Prowadzone obliczenia nieliniowe umożliwiły opis pracy konstrukcji w zakresie pokrytycznym, do momentu uszkodzenia pierwszej warstwy kompozytu, szacowanego na podstawie kryterium zniszczenia Tsai–Wu. Wyznaczone w ten sposób obciążenie odpowiadające obciążeniu inicjującemu zniszczenie kompozytu porównywano z wartością obciążenia, dla którego z wykorzystaniem metody emisji akustycznej rejestrowano pierwsze podwyższone sygnały amplitudy EA.

Przeprowadzone w pracy badania wykazały bardzo wysoką jakościową oraz ilościową zgodność wyników obliczeń numerycznych z wynikami badań doświadczalnych. Dotyczyło to zarówno stanu krytycznego, jak i pracy konstrukcji w zakresie pokrytycznym, co potwierdziło adekwatność opracowanych modeli numerycznych. Na tej podstawie przyjęto, że otrzymane wyniki obliczeń numerycznych, dotyczące opisu pracy ścisnanych nieosiowo konstrukcji cienkościennych można uznać za wiarygodne. Pozwala to na dokonanie szczegółowego opisu zachowania tych konstrukcji poddanych działaniu ścisnania nieosiowego.

Otrzymane wyniki wykazały istotny wpływ mimośrodowo obciążenia ścisniającego na utratę stateczności konstrukcji kompozytowej. W szczególności zwiększanie mimośrodowo obciążenia w kierunku e_1 (równoległym do średnicy profilu) oraz $e_{2(+)}$ (prostopadłym do średnicy, realizowanym od środka ciężkości w kierunku od średnicy profilu) powoduje monotoniczne obniżanie się wartości obciążenia krytycznego, co w konsekwencji może spowodować przedwczesne wprowadzenie konstrukcji w stan powyboczeniowy, obniżając w sposób istotny jej parametry wytrzymałościowe i sztywnościowe. Zaobserwowane obniżenie wartości obciążenia krytycznego kształtowało się na poziomie: 17–28% – kierunek e_1 i 53–58% – kierunek $e_{2(+)}$ w przypadku słupów o przekroju ceowym oraz 3–8% – kierunek e_1 i 34–46% – kierunek e_2 w przypadku słupów o przekroju zetowym. Dodatkowo wprowadzanie mimośrodowo obciążenia powodowało w niektórych przypadkach (słupy ceowe C4 i C5 oraz zetowy Z2) zmianę postaci wyboczenia. Opisane zjawisko jest szczególnie istotne, ponieważ przedwczesne wyboczenie konstrukcji może wystąpić w zakresie obciążeń eksploatacyjnie dopuszczalnych.

Odmianą sytuację zaobserwowano w przypadku realizacji mimośrodowo obciążenia słupów o przekroju ceowym w kierunku oznaczonym jako $e_{2(-)}$, realizowanym od środka ciężkości przekroju poprzecznego w kierunku średnicy profilu. Zwiększanie mimośrodowo obciążenia w kierunku średnicy powodowało istotny

wzrost obciążenia krytycznego, spowodowany przejęciem znacznego obciążenia przez średnik profilu, usytuowany pomiędzy sztywnymi krawędziami słupa. W tym przypadku doszło jedynie do zmiany postaci wybożenia słupa C2 (z 2 półfal słupa na 3 półfale).

We wszystkich badanych przypadkach utrata stateczności ściskanych słupów kompozytowych o przekroju ceowym i zetowym miała charakter stateczny. Zostało to potwierdzone możliwością dalszej pracy konstrukcji w zakresie pokrytycznym. Dalsze sukcesywne zwiększanie obciążenia ściskającego powodowało pogłębianie się form deformacji odpowiadających najniższym postaciom wybożenia słupów, aż do momentu wystąpienia pierwszych oznak inicjacji uszkodzenia materiału kompozytowego. Zastosowana metodyka badań umożliwiła określenie wpływu nieosiowości obciążenia ściskającego na wartość obciążenia inicjującego zniszczenie struktury kompozytu. Otrzymane wyniki potwierdziły zachowanie się konstrukcji analogiczne do wyników otrzymanych w przypadku stanu krytycznego. Potwierdzono, że realizacja mimośrod obciążenia w kierunku e_1 (równoległym do średnika profilu) oraz $e_{2(+)}$ (prostopadłym do średnika, realizowanym od środka ciężkości w kierunku od średnika profilu) powoduje monotoniczny spadek wartości obciążenia inicjującego zniszczenie kompozytu, co w istotny sposób prowadzi do obniżenia wytrzymałości ściskanej konstrukcji. Zaobserwowane obniżenie wartości obciążenia inicjującego zniszczenie kompozytu kształtowało się na poziomie: 9–13% – kierunek e_1 i 63–65% – kierunek $e_{2(+)}$ w przypadku słupów o przekroju ceowym oraz 47–60% – kierunek e_1 i 75–85% – kierunek e_2 w przypadku słupów o przekroju zetowym. Analogicznie w przypadku słupów o przekroju ceowym wprowadzanie mimośrod obciążenia na kierunku $e_{2(-)}$, realizowanym od środka ciężkości przekroju poprzecznego w kierunku średnika profilu powodowało istotny wzrost obciążenia inicjującego zniszczenie kompozytu, kształtującego się na poziomie 1–30% w odniesieniu do ściskania osiowego.

Wyznaczone w badaniach pokrytyczne ścieżki równowagi konstrukcji *sila-ugięcie* wykazały istotny spadek sztywności konstrukcji na skutek zwiększania wartości mimośrod obciążenia w kierunkach e_1 oraz $e_{2(+)}$ oraz zwiększenie sztywności słupów o przekroju ceowym na skutek wzrostu mimośrod obciążenia na kierunku $e_{2(-)}$.

Otrzymane wyniki, potwierdzające w większości badanych przypadków spadek wartości obciążenia krytycznego i inicjującego zniszczenie kompozytu, jak również sztywności pokrytycznej konstrukcji na skutek nieosiowości obciążenia potwierdzają, że występowanie mimośrodu siły ściskającej prowadzi do zmiany charakteru obciążenia struktury, w stosunku do konstrukcji ściskanej osiowo. Pojawiający się w tym przypadku od początku procesu obciążania dodatkowy stan zgięciowy powoduje istotne dociążenie poszczególnych elementów struktury cienkościennej. Wyjątek stanowi przypadek realizacji mimośrodu obciążenia w kierunku średnika profilu ceowego, powodujący wzrost wartości obciążenia

krytycznego oraz sztywności konstrukcji w stanie pokrytycznym, który jest efektem przejścia obciążenia przez najbardziej w tym przypadku sztywny element profilu – średnik usytuowany pomiędzy dwoma sztywnymi krawędziami słupa.

Przeprowadzone badania pozwoliły również na ilościową ocenę wpływu układu warstw kompozytu na sztywność konstrukcji poddanej ścisłaniu nieosiowemu. Na podstawie przeanalizowanych słupów można stwierdzić, że największą podatnością charakteryzują się słupy o konfiguracjach C3 i Z3, natomiast najwyższą sztywność zachowują konfiguracje oznaczone C2 i Z2.

Zaprezentowane w pracy badania wpływu nieosiowości obciążenia ściskającego na stateczność oraz pracę konstrukcji w zakresie pokrytycznym pozwalają stwierdzić, że zaproponowana metodyka badań umożliwia opis zagadnień o istotnym znaczeniu poznawczym i praktycznym, zwłaszcza w odniesieniu do projektowania cienkościennych struktur kompozytowych, narażonych na występowanie nieprzewidzianych niedokładności, mogących w istotny sposób wpływać na pracę tych konstrukcji.

Otrzymane wyniki badań potwierdzają realizację podstawowych celów pracy oraz potwierdzają słuszność postawionej tezy. Na uwagę zasługuje osiągnięta wysoka zgodność wyników badań numerycznych z wynikami badań eksperymentalnych, prowadzonych na rzeczywistych konstrukcjach. Pozwala to na stwierdzenie, że zastosowana metodyka badawcza jest prawidłowa, a opracowane modele dyskretnie konstrukcji w ujęciu metody elementów skończonych dostarczają wiarygodnych wyników, umożliwiając prowadzenie szczegółowej analizy pracy konstrukcji, znajdującej się w stanie głęboko powyboczeniowym.

Na podstawie przeprowadzonych badań można wskazać dalsze kierunki prac w tym zakresie, polegające na analizie pracy ściskanych nieosiowo konstrukcji kompozytowych w pełnym zakresie obciążenia – do całkowitej utraty nośności konstrukcji, wraz ze szczegółowym opisem procesu zniszczenia struktury materiału kompozytowego. Wymaga to uwzględnienia w obliczeniach numerycznych bardziej złożonych modeli zniszczenia materiałów kompozytowych, uwzględniających nie tylko moment inicjacji uszkodzenia materiału, ale pozwalających również na opis dalszej ewolucji uszkodzonego kompozytu, aż do całkowitej degradacji sztywności materiału.

Literatura

- [1] Alfano, G., Crisfield M.A.: *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites*. Mechanical and Computational Issues, "International Journal for Numerical Methods in Engineering", Vol. 50, 2001, p. 1701–1736.
- [2] Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.: *Structural analysis of laminate and sandwich beams and plates. An introduction into the mechanics of composite*. Lubelskie Towarzystwo Naukowe, Lublin, 2001.
- [3] Arbelo M.A., de Almeida SFM., Donadon M.V.: *An experimental and numerical analysis for the post-buckling behavior of composite shear webs*. "Composite Structures", Vol. 93, No. 2, 2011, p. 465–473.
- [4] Arboz J.: *The effect of imperfect boundary conditions on the collapse behavior of anisotropic shells*. "International Journal of Solids and Structures", Vol. 37, 2000, p. 6891–6915.
- [5] Argyris J.H.: *Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*. Ossolineum, PAN, 1977, p. 163–234.
- [6] Ascione F.: *Influence of initial geometric imperfections in the lateral buckling problem of thin walled pultruded GFRP I-profiles*. "Composite Structures", Vol. 112, 2014, p. 85–99.
- [7] Ascione L., Berardi V.P., Giordano A., Spadea S.: *Pre-buckling imperfection sensitivity of pultruded FRP profiles*." Composites: Part B", Vol. 72, 2015, p. 206–212.
- [8] Ashton J.E., Love T.S.: *Experimental Study of the Stability of Composite Plates*. "Journal of Composite Materials", Vol. 3, 1969, p. 230–242.
- [9] Attard M.M.: *Lateral buckling analysis of beam by the FEM*. "Computers and Structures", Vol. 23, No. 2, 1986, p. 217–231.
- [10] Banat D., Kołakowski Z., Mania R.J.: *Investigations of FML profile buckling and post-buckling behaviour under axial compression*. "Thin-Walled Structures", Vol. 107, 2016, p. 335–344.
- [11] Banat D., Mania R.J.: *Comparison of failure criteria application for FML column buckling strength analysis*. "Composite Structures", Vol. 140, 2016, p. 806–815.
- [12] Barbero E. J.: *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus*. Taylor & Francis Inc, Nowy Jork 2013.
- [13] Barbero E.J., Dede E.K., Jones S.: *Experimental verification of buckling-mode interaction in intermediate-length composite columns*. "International Journal of Solids and Structures", Vol. 37, No. 29, 2000, p. 3919–3934.
- [14] Barbero E.J., Raftoyiannis I.G.: *Euler buckling of pultruded composite columns*. "Composite Structures", Vol. 24, No. 2, 1993, p. 139–147.
- [15] Barbero E.J., Tomblin J.: *Euler buckling of thin-walled composite columns*. "Thin-Walled Structures", Vol. 17, No. 4, 1993, p. 237–258.

- [16] Barbero E.J., Tomblin J.: *Prediction and measurement of the post-critical behavior of fiber-reinforced composite columns*. “Composites Science and Technology”, Vol. 58, No. 8, 1998, p. 1335–1341.
- [17] Barsoum R.S., Gallagher R.H.: *Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems*. “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, Vol. 2, 1970, p. 335–352.
- [18] Batoz J.L., Bathe K.J., Ho L.W.: *A study of three-node triangular plate bending elements*. “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, Vol. 12, No. 12, 1980, p. 1771–1812.
- [19] Bazant Z.P., Cedolin L.: *Stability of structures. Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. Oxford University, UK, 2010.
- [20] Benito R., Sridharan S.: *Interactive buckling analysis with finite strips*. “International Journal for Numerical Methods in Engineering” Vol. 21, 1985, p. 145–161.
- [21] Benito R., Sridharan S.: *Mode interaction in thin-walled structural members*. “Journal of Structural Mechanics”, Vol. 12, No. 4, 1985, p. 517–542.
- [22] Bieniaś J., Gliszczynski A., Jakubczaka P., Kubiak T., Majerski K.: *Influence of autoclaving process parameters on the buckling and postbuckling behaviour of thin-walled channel section beams*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 85, 2014, p. 262–270.
- [23] Bradford M.A., Hancock G.J.: *Elastic interaction of local and lateral buckling in beams*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 2, 1984, p. 1–25.
- [24] Broggi M., Schuëller G.I.: *Efficient modeling of imperfections for buckling analysis of composite cylindrical shells*. “Engineering Structures”, Vol. 33, 2011, p. 1796–1806.
- [25] Byskov E., Hansen J.C.: *Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of axially stiffened cylindrical shells with mode interaction*. “Journal of Structural Mechanics”, Vol. 8, No. 2, 1980, p. 205–224.
- [26] Byskov E., Hutchinson J.W.: *Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells*. “AIAA”, Vol. 15, No. 7, 1977, p. 941–948.
- [27] Byskov E.: *Applicability of an asymptotic expansion for elastic buckling problems with mode interaction*. “AIAA”, Vol. 17, No. 6, 1979, p. 630–633.
- [28] Byskov E.: *Smooth postbuckling stresses by a modified finite element method*. “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, Vol. 28, 1989, p. 2877–2888.
- [29] Camanho, P.P., Davila C.G.: *Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials*. NASA/TM–2002–211737, 2002, p. 1–37.

- [30] Castro Saullo G.P., Zimmermann Rolf, Arbelo Mariano A., Degenhard Richardt: *Exploring the constancy of the global buckling load after a critical geometric imperfection level in thin-walled cylindrical shells for less conservative knock-down factors*. "Thin-Walled Structures", Vol. 72, 2013, p. 76–87.
- [31] Chou S.M., Rhodes.: *Review and Compilation of Experimental Results on Thin-Walled Structures*. "Computers and Structures", Vol. 65, No. 1, 1997, p. 47–67.
- [32] Chryssanthopoulos M.K., Elghazouli A.Y., Esong I.E.: *Compression tests on anti-symmetric two-ply GFRP cylinders*. "Composites: Part B", Vol. 30, 1999, p. 335–350.
- [33] Cichoń C.: *Nieliniowa analiza stateczności konstrukcji prętowych w ujęciu MES*. Wydaw. Politechniki Krakowskiej, Monografia, 38, Kraków, 1985.
- [34] Crisfield M.A.: *A faster modified Newton-Raphson iteration*. "Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", Vol. 20, 1979, p. 267–278.
- [35] Crisfield M.A.: *An arc-length method including line searches and accelerations*. "International Journal for Numerical Methods in Engineering", Vol. 19, 1983, p. 1269–1289.
- [36] Crisfield M.A.: *Non-linear finite element analysis of solids and structures, vol.1 and 2*. John Wiley & Sons Ltd, London, 1991.
- [37] Damatty A., Nassef A.: *A finite element optimization technique to determine critical imperfections of shell structures*. "Structural and Multidisciplinary Optimization", Vol. 23, No. 1, 2001, p. 75–87.
- [38] Davis J.G., Zender G.W.: *Compressive Behavior of Plates Fabricated from Glass Filaments and Epoxy Resin*. NASA TN D-3918, Washington, 1967.
- [39] Debski H., Kubiak T., Teter A.: *Buckling and postbuckling behaviour of thin-walled composite channel section column*. "Composite Structures", Vol. 100, 2013, p. 195–204.
- [40] Debski H., Kubiak T., Teter A.: *Experimental investigation of channel-section composite profiles behaviour with various sequences of plies subjected to static compression*. "Thin-Walled Structures", Vol. 71, 2013, p. 147–154.
- [41] Debski H., Teter A., Kubiak T., Samborski S.: *Local buckling, post-buckling and collapse of thin-walled channel section composite columns subjected to quasi-static compression*. "Composite Structures", Vol. 136, 2016, p. 593–601.
- [42] Deml M., Wunderlich W.: *Direct evaluation of the worst imperfection shape in shell buckling*. "Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", Vol. 149, No. 1–4, 1997, p. 201–222.
- [43] Dębski H., Kubiak T., Teter A.: *Numerical and experimental studies of compressed composite columns with complex open cross-sections*. "Composite Structures", Vol. 118, 2014, p. 28–36.

- [44] Dębski H., Różyło P., Wysmulski P.: *Numeryczno–eksperymentalne badania stateczności i stanów pokrytycznych słupów kompozytowych o przekroju ceowym*. „Mechanik”, Vol. 11, 2014, p. 954–956.
- [45] Dębski H.: *Badania numeryczne i doświadczalne stateczności i nośności kompozytowych słupów cienkościennych poddanych ściskaniu*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2013.
- [46] Dębski H.: *Experimental investigation of post–buckling behavior of composite column with top–hat cross–section*. “Eksplatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability”, Vol. 15, No. 2, 2013, p. 106–110.
- [47] Dębski H.: *Numerical analysis of stability of thin–walled composite column with open cross–section*. “Mechanics and Mechanical Engineering”, Vol. 1, No. 17, 2013, p. 29–35.
- [48] Dvorkin E.N., Bathe K.J.: *A continuum mechanics based four–node shell element for general nonlinear analysis*. “Engineering Computations”, Vol. 1, No. 1, 1984, p. 77–88.
- [49] Elghazouli A.Y., Chryssanthopoulos M.K., Esong I.E.: *Buckling of woven GFRP cylinders under concentric and eccentric compression*. “Composite Structures”, Vol. 45, 1999, p. 13–27.
- [50] Ellobody E., Young B., Lam D.: *Eccentrically loaded concrete encased steel composite columns*. “Thin–Walled Structures”, Vol. 49, 2011, p. 53–65.
- [51] Friedrich L., Loosen S., Liang K., Ruess M., Bisagni C., Schröder Kai–Uwe: *Stacking sequence influence on imperfection sensitivity of cylindrical composite shells under axial compression*. “Composite Structures”, Vol. 134, 2015, p. 750–761.
- [52] Gallagher R.H., Gellatly R.A., Padlog J., Mallett R.H.: *A discrete element procedure for thin shell instability analysis*. “AIAA J.”, Vol. 5, No. 1, 1967, p. 138–145.
- [53] Goltermann P., Mollman H.: *Interactive buckling in thin–walled beams – II*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 25, No. 7, 1989, p. 729–749.
- [54] Grimaldi A., Pignataro M.: *Post–buckling behaviour of thin–walled open cross–section compression members*. “Journal of Structural Mechanics”, Vol. 7, No. 2, 1979, p. 143–159.
- [55] Gryboś R.: *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*. PWN, Warszawa–Poznań, 1980.
- [56] Guo Y.L., Fukumoto Y.: *Theoretical study of ultimate load of locally buckled stub columns loaded eccentrically*. “Journal of Constructional Steel Research”, Vol. 38, No. 3, 1996, p. 239–255.
- [57] Henrichsen S.R., Lindgaard E., Lund E.: *Robust buckling optimization of laminated composite structures using discrete material optimization considering “worst” shape imperfections*. “Thin–Walled Structures”, Vol. 94, 2015, p. 624–635.

- [58] Hutchinson J.W., Koiter W.T.: *Post-buckling theory*. “Applied Mechanics Reviews”, 1970, p. 1353–1366.
- [59] Hyla I.: *Elementy mechaniki kompozytów*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 1995.
- [60] Ismail M.S., Purbolaksano J., Andriyana A., Tan C.J., Muhammada N., Liew H.L.: *The use of initial imperfection approach in design process and buckling failure evaluation of axially compressed composite cylindrical shells*. “Engineering Failure Analysis”, Vol. 51, 2015, p. 20–28.
- [61] Jones R.M.: *Mechanics of composite materials*. Taylor & Francis, Inc., Philadelphia, PA, 1999.
- [62] Kicher T.P., Mandell J.E.: *A Study of the Buckling of Laminated Composite Plates*. “AIAA”, Vol. 9, No. 4, 1971, p. 605–613.
- [63] Kim S.C., Kim J.S., Yoon H.J.: *Experimental and Numerical Investigations of Mode I Delamination Behaviors of Woven Fabric Composites with Carbon, Kevlar and Their Hybrid Fibers*. “International Journal of Precision Engineering and Manufacturing”, Vol. 12, No. 2, 2011, p. 321–329.
- [64] Kleiber M.: *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. PWN, Warszawa–Poznań, 1985.
- [65] Koiter W.T.: *Elastic stability and post-buckling behaviour*. Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin, 1963.
- [66] Koiter W.T.: *General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures*. WTHD Report 590, Delft 1976.
- [67] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (pod red.): *Selected problems of instabilities in composite structures*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 1999.
- [68] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (pod red.): *Statics, Dynamics and Stability of Structures, vol. 2. Statics, Dynamics and Stability of Structural Elements and Systems*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Monografia, Łódź, 2012.
- [69] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K.: *Interactive buckling regarding the axial extension mode of a thin-walled channel under uniform compression in the first nonlinear approximation*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 48, 2011, p. 119–125.
- [70] Kołakowski Z., Królak M., Kowal-Michalska K.: *Mode interactive buckling of thin-walled composite beam-columns regarding distortional deformations*. “International Journal of Engineering Science”, Vol. 37, 1999, p. 1577–1596.
- [71] Kołakowski Z., Królak M.: *Modal coupled instabilities of thin-walled composite plate and shell structures*. “Composite Structures”, Vol. 76, 2006, p. 303–313.
- [72] Kołakowski Z., Kubiak T.: *Load-carrying capacity of thin-walled composite structures*. “Composite Structures”, Vol. 67, 2005, p. 417–426.

- [73] Kołakowski Z., Teter A.: *Load carrying capacity of functionally graded columns with open cross-sections under static compression*. "Composite Structures", Vol. 129, 2015, p. 1–7.
- [74] Kołakowski Z., Teter A.: *Static interactive buckling of functionally graded columns with closed cross-sections subjected to axial compression*. "Composite Structures", Vol. 123, 2015, p. 257–262.
- [75] Kołakowski Z.: *Influence of modification of boundary conditions on load carrying capacity in thin-walled columns in the second order approximation*. "International Journal of Solids and Structures", Vol. 30, No. 19, 1993, p. 2597–2609.
- [76] Kołakowski Z.: *Interactive buckling of thin-walled beams with open and closed cross-sections*. "Thin-Walled Structures" Vol. 15, 1993, p. 159–183.
- [77] Kołakowski Z.: *Interactive buckling of thin-walled beams with open and closed cross-section*. "Engineering Transactions", Vol. 37, No. 2, 1989, p. 375–397.
- [78] Kołakowski Z.: *Interakcyjne wyoboczenie cienkościennych konstrukcji sprężystych*. Zeszyty Naukowe nr 653. Rozprawy Naukowe Politechniki Łódzkiej z. 173. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1992.
- [79] Kołakowski Z.: *Mode interaction in wide plate with angle section longitudinal stiffeners under compression*. "Engineering Transactions", Vol. 37, No. 1, 1989, p. 117–135.
- [80] Kołakowski Z.: *On some aspects of the modified TSAI–WU criterion in thin-walled composite structures*. "Thin-Walled Structures" Vol. 41, No. 4, 2003, p. 357–374.
- [81] Kołakowski Z.: *Podstawy Wytrzymałości i Stateczności Płytowych Konstrukcji Kompozytowych*. Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2008.
- [82] Kołakowski Z.: *Semi-analytical method for the analysis of the interactive buckling of thin-walled elastic structures in the second order approximation*. "International Journal of Solid and Structures", Vol. 33, No. 25, 1996, p. 3779–3790.
- [83] Kołakowski Z.: *Some aspects of mode interaction in thin-walled stiffened plate under uniform compression*. "Engineering Transactions", Vol. 36, No. 1, 1988, p. 167–179.
- [84] Kołakowski Z.: *Some thoughts on mode interaction in thin-walled columns under uniform compression*. "Thin-Walled Structures", Vol. 7, 1989, p. 23–35.
- [85] Kołakowski Z.: *Static and dynamic interactive buckling of composite columns*. "Journal of Theoretical and Applied Mechanics", Vol. 47, No. 1, 2009, p. 177–192.

- [86] Kopecki T.: *Stany zaawansowanych deformacji w projektowaniu cienkościennych ustrojów nośnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2010.
- [87] Kowal–Michalska K. (pod red.): *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*. WNT, Łódź–Warszawa, 2007.
- [88] Kreja I.: *A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels*. “Cent. Eur. J. Eng.”, Vol. 1, No. 1, 2011, p. 59–80.
- [89] Kristanič N., Korelc J.: *Optimization method for the determination of the most unfavorable imperfection of structures*. “Computational Mechanics”, Vol. 42, No. 6, 2008, p. 859–872.
- [90] Królak M. (pod red.): *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN, Warszawa–Łódź, 1990.
- [91] Królak M. (pod red.): *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 1995.
- [92] Królak M., Kołakowski Z., Kotełko M.: *Influence of load–non–uniformity and eccentricity on the stability and load carrying capacity of orthotropic tubular columns of regular hexagonal cross–section*. “Thin–Walled Structures”, Vol. 39, 2001, p. 483–498.
- [93] Królak M., Mania R.J. (pod red.): *Statics, Dynamics and Stability of Structures. vol. 1. Stability of Thin–walled Plate Structures*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Monografia, Łódź, 2011.
- [94] Kubiak T., Kaczmarek Ł.: *Estimation of load–carrying capacity for thin–walled composite beams*. “Composite Structures”, Vol. 119, 2015, p. 749–756.
- [95] Kubiak T.: *Estimation of dynamic buckling for composite columns with open cross–section*. “Computers Structures”, Vol. 89, No. 21, 2011, p. 2001–2009.
- [96] Kubiak T.: *Static and dynamic buckling of thin–walled plate structures*. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2013.
- [97] Lam K. Y., Loy C. T.: *Influence of boundary conditions and fibre orientation on the natural frequencies of thin orthotropic laminated cylindrical shells*. “Composite Structures”, Vol. 31, 1995, p. 21–30.
- [98] Lam K. Y., Loy C. T.: *Influence of boundary conditions for a thin laminated rotating cylindrical shell*. “Composite Structures”, Vol. 41, 1998, p. 215–228.
- [99] Lanzi L.: *A numerical and experimental investigation on composite stiffened panels into post–buckling*. “Thin–Walled Structures”, Vol. 42, No. 12, 2004, p. 1645–1664.
- [100] Lanzo A.D., Garcea G.: *Koiter's analysis of thin–walled structures by a finite element approach*. “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, Vol. 39, No. 17, 1998, p. 3007–3031.

- [101] Li Zhi–Min, QiaoPizhong: *Buckling and postbuckling behavior of shear deformable anisotropic laminated beams with initial geometric imperfections subjected to axial compression*. “Engineering Structures”, Vol. 85, 2015, p. 277–292.
- [102] Libove C.: *Buckling Pattern of Biaxially Compressed Simple Supported Orthotropic Rectangular Plates*. “Journal of Composite Materials”, Vol. 17, 1983, p. 45–48.
- [103] Lindgaard E., Lund E., Rasmussen K.: *Nonlinear buckling optimization of composite structures considering worst shape imperfections*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 47, No. 22–23, 2010, p. 3186–3202.
- [104] Liu J., Wang X., Zhang S.: *Behavior of square tubed reinforced–concrete short columns subjected to eccentric compression*. “Thin–Walled Structures”, 91, 2015, p. 108–115.
- [105] Liu Y., Chantel S.: *Experimental study of steel single unequal–leg angles under eccentric compression*. “Journal of Constructional Steel Research”, Vol. 67, 2011, p. 919–928.
- [106] Lukoshevichyus R.S.: *Minimizing the Mass of Reinforced Rectangular Plates Compressed in Two Directions in a Manner Conductive toward Stability*. “Polymer Mechanics”, Vol. 12, No. 6, 1977, p. 929–933.
- [107] Lund E., Stegmann J.: *On structural optimization of composite shell structures using a discrete constitutive parameterization*. “Wind Energy”, Vol. 8, No. 1, 2005, p. 109–124.
- [108] Lund E.: *Buckling topology optimization of laminated multi–material composite shell structures*. *Composite Structures*, Vol. 91, No. 2, 2009, p. 158–167.
- [109] Manevich A.I.: *Interactive buckling of stiffened plate under compression*. “Mekhanika Tverdogo Tela”, Vol. 5, 1988, p. 152–159.
- [110] Manevich A.I.: *Theory of interaction buckling of stiffened thin–walled structures*. “Prikladnaya Matematikai Mekhanika”, Vol. 46, 1982, p. 337–345.
- [111] Mania R. J., Kołakowski Z., Bieniaś J., Jakubczak P., Majerski K.: *Comparative study of FML profiles buckling and postbuckling behaviour under axial loading*. “Composite Structures”, Vol. 134, 2015, p. 216–225.
- [112] Mollman H., Goltermann P.: *Interactive buckling in thin–walled beams – I. Theory*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 25, No. 7, 1989, p. 715–728.
- [113] Mottram J. T., Brown N. D., Anderson D.: *Physical testing for concentrically loaded columns of pultruded glass fibre reinforced plastic profile*. “Proceedings of the Institution of Civil Engineers Structures & Buildings”, Vol. 156, 2003, p. 205–219.

- [114] Mottram J.T., Brown N.D., Anderson D.: *Buckling characteristics of pultruded glass fibre reinforced plastic columns under moment gradient*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 41, 2003, p. 619–638.
- [115] Naleszkiewicz J.: *Zagadnienia stateczności sprężystej*. PWN, Warszawa 1958.
- [116] Nguyen T.T., Chan T.M., Mottram J.T.: *Influence of boundary conditions and geometric imperfections on lateral-torsional buckling resistance of a pultruded FRP I-beam by FEA*. “Composite Structures”, Vol. 100, 2013, p. 233–242.
- [117] Nunes F., Correia M., Correia J.R., Silvestre N., Moreira A.: *Experimental and numerical study on the structural behavior of eccentrically loaded GFRP columns*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 72, 2013, p. 175–187.
- [118] Olsen M.D., Bearden T.W.: *A simple flat triangular shell element revisited*. “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, Vol. 14, No. 1, 1979, p. 51–68.
- [119] Orifici A.C., Herszberg I., Thomson R.S.: *Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure*. “Composite Structures”, Vol. 86, No. 1–3, 2008, p. 194–210.
- [120] Orifici A.C., Thomson R.S., Degenhardt R., Kling A., Rohwer K., Bayandor J.: *Degradation investigation in a postbuckling composite stiffened fuselage panel*. “Composite Structures”, Vol. 82, 2008, p. 217–224.
- [121] Orifici Adrian C., Bisagni Chiara: *Perturbation-based imperfection analysis for composite cylindrical shells buckling in compression*. “Composite Structures”, Vol. 106, 2013, p. 520–528.
- [122] Paszkiewicz M., Kubiak T.: *Selected problems concerning determination of the buckling load of channel section beams and columns*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 93, 2015, p. 112–121.
- [123] Pietraszkiewicz W.: *Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells*. “Advances in Mechanics”, Vol. 12, No. 1, 1989, p. 51–130.
- [124] Pignataro M., Luongo A., Rizzi N.: *On the effect of the local overall interaction on the postbuckling of uniformly compressed channels*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 3, 1985, p. 283–321.
- [125] Pignataro M., Luongo A.: *Asymmetric interactive buckling of thin-walled columns with initial imperfections*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 5, 1987, p. 365–386.
- [126] Portoles J.M., Romero M.L., Bonet J.L., Filippou F.C.: *Experimental study of high strength concrete-filled circular tubular columns under eccentric loading*. “Journal of Constructional Steel Research”, Vol. 67, 2011, p. 623–633.
- [127] Qu X., Chen Z., Sun G.: *Experimental study of rectangular CFST columns subjected to eccentric loading*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 64, 2013, p. 83–93.

- [128] Ragheb Wael F.: *Local buckling analysis of pultruded FRP structural shapes subjected to eccentric compression*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 48, 2010, p. 709–717.
- [129] Rakowski G., Kasprzyk Z.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1993.
- [130] Riks E.: *A unqied method for the computation of critical equilibrium states of nonlinear elastic systems*. “Acta Techn. Acad. Scient. Hungaricae.”, Vol. 87, No. 1–2, 1978, p. 121–141.
- [131] Riks E.: *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 15, 1979, p. 529–551.
- [132] Riks E.: *The application of Newton’s method to the problem of elastic stability*. “Journal of Applied Mechanics”, Vol. 39, 1972, p. 1060–1066.
- [133] Romeo G.: *Experimental Investigation on Advanced Composite-Stiffened Structures under Uniaxial Compression and Bending*. “AIAA”, Vol. 24, No. 11, 1986, p. 1823–1830.
- [134] Rusiński E., Czmochoński J., Smolnicki T.: *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2000.
- [135] Schillo C., Röstermundt D., Krause D.: *Experimental and numerical study on the influence of imperfections on the buckling load of unstiffened CFRP shells*. “Composite Structures”, Vol. 131, 2015, p. 128–138.
- [136] Singer J., Arbocz J., Weller T.: *Buckling Experiments. Experimental methods in buckling of thin-walled structure. Basic concepts, columns, beams, and plates*. Volume 1. John Wiley & Sons Inc., New York, 1998.
- [137] Singer J., Arbocz J., Weller T.: *Buckling Experiments. Experimental methods in buckling of thin-walled structure. Shells built-up structures, composites and additional topics*. Volume 2. John Wiley & Sons Inc., New York, 2002.
- [138] Sridharan S., Ali M.A.: *An improved interactive buckling analysis of thin-walled columns having doubly symmetric sections*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 22, No. 4, 1986, p. 429–443.
- [139] Sridharan S., Benito R.: *Columns static and dynamic interactive buckling*. Journal of Engineering Mechanics, “ASCE”, Vol. 110, No. 1, 1984, p. 49–65.
- [140] Sridharan S., Peng MH.: *Performance of axially compressed stiffened panels*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 25, No. 8, 1989, p. 879–899.
- [141] Sridharan S.: *Doubly symmetric interactive buckling of plate structures*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 19, No. 7, 1983, p. 625–641.

- [142] Stegmann J., Lund E.: *Discrete material optimization of general composite shell structures*. “International Journal for Numerical Methods in Engineering,” Vol. 62, No. 14, 2005, p. 2009–2027.
- [143] Talreja R., Singh C.V.: *Damage and failure of composite*. Cambridge University Press, 2012.
- [144] Teter A., Dębski H., Samborski S.: *On buckling collapse and failure analysis of thin-walled composite lipped-channel columns subjected to uniaxial compression*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 85, 2014, p. 324–331.
- [145] Teter A., Kołakowski Z.: *Buckling of thin-walled composite structures with intermediate stiffeners*. “Composite Structures”, Vol. 69, 2005, p. 421–428.
- [146] Teter A., Kołakowski Z.: *Comparison of the theoretical load carrying capacity with the experimental data for some thin-walled plates and beams with intermediate stiffeners*. “Archive of Mechanical Engineering”, Vol. 48, No. 1, 2001, p. 29–54.
- [147] Teter A., Kołakowski Z.: *Coupled dynamic buckling of thin-walled composite columns with open cross-sections*. “Composite Structures”, Vol. 95, 2013, p. 28–34.
- [148] Teter A., Kołakowski Z.: *Interactive buckling and load carrying capacity of thin-walled beam-columns with intermediate stiffeners*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 42, 2004, p. 211–254.
- [149] Teter A., Kołakowski Z.: *Stability and local carrying capacity of thin-walled corrugated trapezoidal plate*. “International Journal of Applied Mechanics and Engineering”, Vol. 6, No. 2, 2001, p. 311–323.
- [150] Teter A.: *Static and dynamic interactive buckling of isotropic thin-walled closed columns with variable thickness*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 45, 2007, p. 936–940.
- [151] Thompson J.: *Optimization as a generator of structural instability*. “International Journal of Mechanical Sciences”, Vol. 14, No. 9, 1972, p. 627–629.
- [152] Thompson J.M.T., Hunt G.W.: *General theory of elastic stability*. Wiley, New York 1973.
- [153] Timoshenko S.P., Gere J.M.: *Teoria stateczności sprężystej*. Arkady, Warszawa, 1963.
- [154] Timoshenko S.P., Goodier J.N.: *Teoria sprężystości*. Arkady, Warszawa, 1963.
- [155] Timoshenko S.P.: *Historia wytrzymałości materiałów*. Arkady, Warszawa, 1963.
- [156] Tung T.K., Surdenas J.: *Buckling of Rectangular Orthotropic Plates under Biaxial Loading*. “Journal of Composite Materials”, Vol. 21, 1987, p. 124–128.

- [157] Tvergaard V. *Influence of post-buckling behaviour on optimum design of stiffened panels*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 9, 1973, p. 1519–1534.
- [158] Tvergaard V.: *Imperfections sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression*. “International Journal of Solids and Structures”, Vol. 9, 1973, p. 177–192.
- [159] Urbaniak M., Teter A., Kubiak T.: *Influence of boundary conditions on the critical and failure load in the GFPR channel cross-section columns subjected to compression*. “Composite Structures”, Vol. 134, 2015, p. 199–208.
- [160] Venkataramaiah K.R., Roorda J.: *Analysis of local plate buckling experimental data*. “Sixth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures”, formerly the University of Missouri – Rolla, 1982, p. 45–74.
- [161] Wang S.T., Pao H.Y.: *Tensional–flexural buckling of locally buckling columns*. “Computers and Structures”, Vol. 11, 1980, p. 127–136.
- [162] Wang S.T., Yost M.I., Tien Y.L.: *Lateral buckling of locally buckling using finite element techniques*. “Computers and Structures”, Vol. 7, 1977, p. 469–475.
- [163] Wang X., Liu J., Zhang S.: *Behavior of short circular tubed reinforced concrete columns subjected to eccentric compression*. “Engineering Structures”, Vol. 105, 2015, p. 77–86.
- [164] Wang X., Liu J., Zhou X.: *Behaviour and design method of short square tubed–steel–reinforced–concrete columns under eccentric loading*. “Journal of Constructional Steel Research”, Vol. 116, 2016, p. 193–203.
- [165] Waszczyszyn Z. i inni: *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Arkady, Warszawa, 1990.
- [166] Woźniak C. (pod red.): *Mechanika techniczna – mechanika sprężysta płyt i powłok*. Tom VIII. PWN, Warszawa, 2001.
- [167] Wunderlich W., Albertin U.: *Analysis and load carrying behaviour of imperfection sensitive shells*. “Int J Numer Methods Eng”, Vol. 47, No. 1–3, 2000, p. 255–273.
- [168] Zhou X., Yan B., Liu J.: *Behavior of square tubed steel reinforced–concrete (SRC) columns under eccentric compression*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 91, 2015, p. 129–138.
- [169] Zhu J–H., Young B.: *Aluminum alloy circular hollow section beam columns*. “Thin-Walled Structures”, Vol. 44, 2006, p. 131–140.