



# Matematyczne miscellanea Tom 3

redakcja  
Izolda Gorgol

MONOGRAFIE

# Matematyczne miscellanea

Tom 3

# Monografie – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska  
Wydział Podstaw Techniki  
ul. Nadbystrzycka 38  
20-618 Lublin

# Matematyczne miscellanea

Tom 3

redakcja  
Izolda Gorgol



Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej  
Lublin 2018

Recenzenci:

prof. dr hab. Witold Rzymowski (rozdział 1)

dr hab. Józef Waniurski, prof. Politechniki Lubelskiej (rozdziały 2,3,4)

Redakcja naukowa i techniczna: Izolda Gorgol

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2018

ISBN: 978-83-7947-324-3

Wydawca: Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej

[www.biblioteka.pollub.pl/wydawnictwa](http://www.biblioteka.pollub.pl/wydawnictwa)

ul. Nadbystrzycka 36C, 20-618 Lublin

tel. (81) 538-46-59

Druk: TOP Agencja Reklamowa Agnieszka Łuczak

[www.agencjatorp.pl](http://www.agencjatorp.pl)

---

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL [www.bc.pollub.pl](http://www.bc.pollub.pl)

Nakład: 80 egz.

# Spis treści

<b>Przedmowa</b> .....	9
<b>Dyskretna procedura aproksymacji stochastycznej w środowisku markowowskim</b> .....	11
<i>Yaroslav Chabanyuk, Uliana Khimka, Wojciech Rosa</i>	
1 Wstęp .....	12
2 Środowisko markowowskie .....	15
3 Dyskretna PAS w schemacie uśredniania .....	17
4 Dyfuzyjna PAS w schemacie aproksymacji dyfuzyjnej .....	27
5 PAS dla procesu dyfuzyjnego w przestrzeni semi-markowskiej .....	30
6 Wnioski .....	33
Literatura .....	34
<b>Prognozowanie kursu EURO/USD w oparciu nie tylko o szare modele</b> ...	39
<i>Witold Rzymowski, Agnieszka Surowiec, Tomasz Warowny</i>	
1 Wstęp .....	40
2 Prognoza z użyciem teorii szarych modeli GM(1,1) .....	43
3 Inne wybrane typy modeli .....	44
4 Ocena jakości wybranych modeli .....	47
5 Wyniki .....	47
6 Wnioski .....	53
Literatura .....	54
<b>Wielomian chromatyczny jako narzędzie klasyfikacji hipergrafów</b> .....	57
<i>Ewa Łazuka</i>	
1 Wstęp .....	58
2 Wprowadzenie do teorii grafów i hipergrafów .....	61
2.1 Grafy .....	61
2.2 Hipergrafy .....	62
2.3 Wybrane własności wielomianów chromatycznych grafów .....	64
2.4 Własności wielomianów chromatycznych hipergrafów .....	66

2.5	Praktyczne sposoby wyznaczania wielomianów chromatycznych hipergrafów .....	72
3	Współczynniki wielomianów chromatycznych hipergrafów .....	79
3.1	Własności hipergrafów wynikające z postaci wielomianu chromatycznego .....	80
3.2	Współczynniki zdeterminowane strukturą hipergrafu .....	82
3.3	Współczynniki wielomianów dla liniowych hipergrafów $h$ -jednorodnych .....	83
4	Chromatyczność pewnych klas hipergrafów .....	87
4.1	Hiperdrzewa .....	89
4.1.1	Hiperdrzewa $h$ -jednorodne .....	89
4.1.2	Hiperdrzewa o dowolnych krawędziach .....	92
4.2	Hipergrafy wielomostowe .....	93
4.2.1	$\lambda$ -kolorowania ścieżki .....	94
4.2.2	Ogólna postać wielomianu chromatycznego hipergrafów wielomostowych .....	97
4.3	Cykle .....	98
4.3.1	Postać wielomianu chromatycznego jednorodnego cyklu .....	98
4.3.2	Uogólnienie wielomianu chromatycznego cyklu .....	99
4.4	Hipergrafy jednocykliczne .....	101
4.5	Hipergrafy quasi-liniowe .....	103
4.5.1	Ogólna postać wielomianu chromatycznego hipergrafu quasi-liniowego .....	104
4.5.2	Ścieżka quasi-liniowa .....	106
5	Chromatyczna jednoznaczność hipergrafów .....	108
5.1	Cykle .....	109
5.2	Bicykle .....	115
5.3	Słoneczniki .....	117
5.3.1	Chromatyczna jednoznaczność hipergrafu $SH(n, h)$ .....	118
5.3.2	$h$ -chromatyczna jednoznaczność hipergrafu $SH(n, p, h)$ .....	121
5.4	Hipergrafy zawierające wiszące ścieżki .....	127
6	Podsumowanie i wnioski .....	128
	Literatura .....	130

<b>Planarna liczba Ramseya</b> .....	135
<i>Izolda Gorgol</i>	
1 Wstęp .....	136
2 Podstawy teoretyczne .....	138
3 Planarna liczba Ramseya .....	140
4 Planarna liczba Ramseya dla pary grafów pełnych .....	142
5 Planarna liczba Ramseya dla grafu spójnego i grafu pełnego .....	146
3.1 Łatwe przypadki .....	147
3.2 Graf $C_4$ .....	147
3.3 Graf $K_4 - e$ .....	149
6 Wyniki otrzymane przy wykorzystaniu analizy komputerowej .....	150
7 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i grafu spójnego .....	151
7.1 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i cyklu .....	152
7.2 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i grafu prawie pełnego .....	153
7.3 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i koła .....	153
7.4 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i drzewa .....	154
8 Planarna liczba Ramseya dla innych par grafów .....	155
8.1 Planarna liczba Ramseya dla pary cykli .....	155
8.1.1 Planarna liczba Ramseya dla pary ścieżek .....	156
8.2 Planarna liczba Ramseya dla pary grafów prawie pełnych .....	157
8.3 Planarna liczba Ramseya dla grafu prawie pełnego i cyklu .....	158
8.3.1 Graf prawie pełny i cykl .....	158
8.3.2 Cykl i graf prawie pełny .....	158
8.4 Planarna liczba Ramseya dla cyklu i koła .....	160
8.5 Planarna liczba Ramseya dla cyklu i drzewa .....	161
8.6 Planarna liczba Ramseya dla skojarzenia i grafu pełnego .....	162
9 Podsumowanie .....	162
Literatura .....	162





# Przedmowa

Niniejsza publikacja jest drugą dotyczącą matematyki powstałą w ramach obchodów dziesięciolecia powstania Wydziału Podstaw Techniki. Jubileusz ten zbiegł się z dziesiątą rocznicą utworzenia kierunku *matematyka* w Politechnice Lubelskiej, który jest prowadzony w tym właśnie Wydziale. Kształcenie na kierunku *matematyka* na uczelni technicznej to szczególne wyzwanie. Nie tylko trzeba zachować standardy tego kierunku, ale należy również uwzględnić bardzo ważną pozycję matematyki w nowoczesnym kształceniu inżyniera. Minione dziesięć lat to okres wyteźonej pracy nad przygotowaniem kierunku, ciągłą modyfikacją programów w celu dostosowania ich do wymogów formalnych, ale i wymogów stawianych przez rozwijającą się wiedzę i gospodarkę.

Niniejsza monografia uzupełnia poprzednią o prezentację osiągnięć kolejnych pracowników Katedry Matematyki Stosowanej i osób z nimi współpracujących. Jak wszyscy prowadzący zajęcia ze studentami kierunku *matematyka*, rozszerzają oni klasyczną wiedzę przekazywaną w ramach różnych przedmiotów o najnowsze wyniki nie tylko swoich badań.

Dwa pierwsze rozdziały dotyczą opisu bądź zastosowania narzędzi wykorzystywanych między innymi w analizie ryzyka lub formułowaniu prognoz finansowych.

W pierwszym rozdziale zaprezentowano dyskretną procedurę aproksymacji stochastycznej w środowisku markowowskim. Podano warunki zbieżności do punktu równowagi dla układu uśrednianego względem rozkładu ergodycznego wbudowanego łańcucha Markowa. Została opracowana metoda badania zbieżności takiej procedury, z wykorzystaniem własności asymptotycznej operatora kompensującego i rozwiązania problemu zaburzenia osobliwego dla tego operatora.

Drugi rozdział jest ściśle związany z profilem kierunku *matematyka*. Dotyczy on mianowicie analiz finansowych, a konkretnie prognozowania kursu EURO/USD. Porównano w nim różne modele pod kątem ich użyteczności w przewidywaniu kursów wymienionych walut. Autorzy osiągnęli ciekawe rezultaty pokazując, że nie zawsze złożone modele o skomplikowanej podbudowie teoretycznej dają lepsze wyniki niż modele prostsze.

Dwa kolejne rozdziały dotyczą teorii grafów i hipergrafów, która rozwinęła się z potrzeby modelowania różnych zagadnień praktycznych, w tym optymalizacyjnych.

Rozdział trzeci jest syntetycznym ujęciem osiągnięć związanych z klasyfikacją hipergrafów poprzez ich wielomian chromatyczny. Zawarto w nim właściwie wszystkie znane do tej pory wyniki związane z tym tematem, a tekst bogato zilustrowano przykładami.

W czwartym rozdziale zawarto zestawienie wyników uzyskanych na przestrzeni ostatnich kilku dekad dotyczących planarnej liczby Ramseya. Jest to jedna z wielu modyfikacji doskonale znanej liczby Ramseya. Większość wyników zestawiono w formie tabelarycznej, co ułatwia ich porównanie.

Na tym kończymy ten krótki, z konieczności ograniczony, cykl prezentacji osiągnięć naukowych osób bezpośrednio lub pośrednio związanych z kierunkiem *matematyka*. Kolejne uzyskane wyniki przedstawimy na pewno, ale już nie w ramach obchodów jubileuszu dziesięciolecia Wydziału Podstaw Techniki.

*Redaktor*

# Dyskretna procedura aproksymacji stochastycznej w środowisku markowskim

Yaroslav Chabanyuk<sup>1</sup>

Uliana Khimka<sup>2</sup>

Wojciech Rosa<sup>3</sup>

## Streszczenie

Dla skokowej procedury aproksymacji stochastycznej w środowisku markowskim otrzymano warunki zbieżności do punktu równowagi dla układu uśrednianego względem rozkładu ergodycznego wbudowanego łańcucha Markowa. Ponadto zostały zbadane procedury zarówno dla schematu uśredniania jak i dla schematu aproksymacji dyfuzyjnej. Została opracowana metoda badania zbieżności skokowej procedury aproksymacji stochastycznej w środowisku semi-markowskim, z wykorzystaniem własności asymptotycznej operatora kompensującego i rozwiązania problemu zaburzenia osobliwego dla tego operatora.

---

<sup>1</sup>Katedra Matematyki Stosowanej; Politechnika Lubelska  
e-mail: y.chabanyuk@pollub.pl

<sup>2</sup>Katedry Matematyki Obliczeniowej i Programowania Politechniki Lwowskiej, Ukraina  
e-mail: ulyana.himka@gmail.com

<sup>3</sup>Katedra Matematyki Stosowanej; Politechnika Lubelska  
e-mail: w.rosa@pollub.pl

### Abstract

For the discrete stochastic approximation procedure in the Markov environment, sufficient conditions were obtained to converge to the equilibrium point for the system averaged relative to the ergodic distribution of the Markov chain inserted. In addition, the procedures were examined in both the averaging scheme and the diffusion approximation scheme. A method for testing the convergence of the stepwise stochastic approximation procedure in the smelting environment has been developed, using the asymptotic properties of the compensation operator and solving the problem of a peculiar disorder for this operator.

**Słowa kluczowe:** dyskretna procedura aproksymacji stochastycznej, środowisko markowowskie i semi-markowowskie, zbieżność.

## 1 Wstęp

Głównym problemem dotyczącym procedury aproksymacji stochastycznej (PAS) jest zbieżność procedury przy wykorzystaniu najmniejszej ilości informacji o funkcji regresji oraz charakterystyk tej funkcji w punkcie obserwacji.

W 1951 r. w pracy H. Robbinsa i S. Monro [35] została zaproponowana dyskretna (rekurencyjna) procedura aproksymacji stochastycznej wyznaczania pierwiastka  $u_0$  równania regresji

$$C(u) = 0.$$

W pracy zbadano zbieżność średniokwadratową.

Wynik ten został uogólniony w pracach J. Wolfowitza, J. Bluma, K. L. Chunga i innych. W szczególności J. Blum po raz pierwszy dowiódł zbieżności PAS z prawdopodobieństwem 1. Zbadał również wielowymiarową PAS dla  $u \in R^d$ , a także wykorzystał teorię nadmartyngałów do badania zbieżności dyskretniej PAS.

Używając idei aproksymacji stochastycznej Robbinsa-Monro, Kiefer i Wolfowitz w swej pracy z 1952 r. rozważyli problem wyznaczania maksimum nieznaney

funkcji  $f(u)$ ,  $u \in R$ , czyli rozwiązania równania  $f'(u) = 0$  (przy założeniu, że  $f$  ma jedno globalne maksimum i  $f'(u) = 0$  ma tylko jedno rozwiązanie). Jeśli wartości funkcji  $f(u)$  są dane bez błędów losowych, to można zastosować metodę gradientową w postaci  $u(t+1) - u(t) = a \frac{df(u(t))}{dt}$ , gdzie  $a$  jest stałą dodatnią. Idea metody Kiefera-Wolfowitza polega na tym, by pochodną przybliżać stosunkiem przyrostu funkcji do przyrostu argumentu  $\Delta u = 2c(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , a jednocześnie „wstrzymać” zmianę  $u$  do  $u_0$  przez uzależnienie parametru  $a$  od czasu. Zauważmy, że jest to procedura dyskretna. E. Kiefer i J. Wolfowitz [15] zbadali zbieżność tej procedury w sensie średniokwadratowym.

W pracach J. Bluma, C. Dermana i D. L. Burkholdera (oraz innych) dowiedziono zbieżności tej procedury z prawdopodobieństwem 1.

Ciągły analog procedury Robbinsa-Monro był po raz pierwszy rozpatrzony przez M. Drimla i J. Nedoma [12], którzy dowiedli jej zbieżności przy dość ogólnych warunkach nałożonych na procesy losowe. Zbieżność ciągłego analogu procedury Kiefera-Wolfowitza udowodnił D. T. Sakrison.

Ciągła PAS z addytywnym białym szumem została wprowadzona przez R.Z. Hasminskiego i była badana w pracach M. B. Newelsona, R. G. Gjachkowa, L. G. Gladyszewa, E. N. Pynskera, Kifera Yu, N. A. i innych autorów. W szczególności, w pracy L. Ljunga, G. Pfluga i H. Walka [32] zbadano modyfikację procedury Robbinsa-Monro i wskazano na szereg zastosowań do znajdowania minimum globalnego funkcji  $C(u)$ ,  $u \in S, S \in R^d$ , gdzie  $S$  jest obszarem ograniczonym, oraz minimum lokalnego dla  $u \in S \cap U$ , gdzie  $U$  jest otwartym otoczeniem punktu  $u_0$ .

W pracy E. B. Newelsona i R. Z. Hasminskiego [34] dowiedziono zbieżności procedur stochastycznych wykorzystując własności funkcji Lapunowa. Umożliwiło to uproszczenie badań i zastosowanie PAS.

Jedną z głównych własności dyskretnej PAS jest asymptotyczna normalność tej procedury. Taka własność fluktuacji PAS w otoczeniu punktu równowagi  $u_0$  została otrzymana przez J. Sacksiem i uogólniona w pracach E. B. Newelsona i R. Z. Hasminskiego, Ibragimowa, V. Fabiana, D. Rupperta i innych. Przy tym, podobnie jak w monografii Newelsona i Hasminskiego, w artykule L. Ljung, G. Pflug

i H. Walk zastosowano normalizację względem czasu  $\sqrt{t}$  z centrowaniem fluktuacji względem punktu równowagi  $u_0$ , albo względem procesu granicznego. Twierdzenia o normalności asymptotycznej dla innych PAS zostały dowiedzione w pracach V. Fabiana, C. Dermana, D. L. Burkholdera, V. Dupacha i innych.

Z drugiej strony zauważmy, że PAS stanowi podstawę teoretyczną optymalizacji konstrukcji ciągu zbieżnego do punktu równowagi w warunkach skomplikowanych wpływów środowiska zewnętrznego na funkcję regresji albo, co na jedno wychodzi, wpływów na układ stochastyczny.

Jednym z najważniejszych zadań ogólnej teorii układów ewolucyjnych w środowisku stochastycznym jest znalezienie warunków stabilności takich układów. Po raz pierwszy stabilność układu dynamicznego, który spełnia zasadę uśredniania, została zbadana przez M. M. Bogolubowa [7] (zobacz też U. O. Mytropol'ski, A. M. Samoilenko [33]). Badanie stabilności układów dynamicznych w środowisku stochastycznym rozpoczęli od rozwoju teorii ewolucji losowych R. Griego i T. Hersh [14]. Stabilność układu dynamicznego z zaburzeniami markowowskimi z warunkiem stabilności układu uśrednionego została zbadana w pracach A. W. Skorochoda i E. F. Tsarkowa, a także W. S. Korolyuka [18]. Problem stabilności w warunkach aproksymacji dyfuzyjnej układu dynamicznego z markowowskimi zaburzeniami po raz pierwszy został rozwiązany w artykule G. L. Blankenshipa i G. C. Papanicolaou [6] za pomocą martyngałowej charakteryzacji odpowiedniego procesu Markowa.

Uogólnieniem omówionych PAS jest sytuacja, w której funkcja regresji zależy bezpośrednio od środowiska zewnętrznego, czyli ma postać  $C(u, x)$ , gdzie  $x$  jest argumentem, który opisuje to środowisko. W badaniach takiej PAS używamy metod teorii aproksymacji układów stochastycznych w środowisku losowym, a w szczególności zasadę uśredniania i rozwiązanie zadania zaburzenia osobliwego.

## 2 Środowisko markowowskie

Zastosowanie algorytmów fazowego uśrednienia procesów Markowa i semi-Markowa, a także algorytmów dyfuzyjnego przybliżenia stochastycznych ewolucji jest wykorzystywane przez metody martyngałowe współczesnej teorii procesów losowych [21, 23–25, 28, 29].

Dalej zakładamy, że wszystkie operatory są zdefiniowane w przestrzeni Banacha wszystkich funkcji rzeczywistych z normą supremum:

$$\|\varphi\| := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

**Definicja 2.1.** *Liniowy i ograniczony operator  $Q$  jest nazywany uogólnionym odwracalnym, jeżeli przestrzeń Banacha może być rozłożona na sumę podprzestrzeni*

$$B = N_Q \oplus R_Q \tag{2.1}$$

gdzie  $\dim N_Q \geq 1$ , oraz  $N_Q := \{\varphi : Q\varphi = 0\}$  jest przestrzenią zerową operatora  $Q$ ,  $R_Q := \{Q\psi : \psi \in B\}$  przestrzenią wartości operatora  $Q$ , zaś  $\dim N_Q$  wymiarem przestrzeni  $N_Q$ .

Rozkład (2.1) generuje operator rzutujący  $\Pi$  w podprzestrzeni  $N_Q$  taki, że:  $\Pi\varphi = \varphi, \varphi \in N_Q$  i  $\Pi\varphi = 0, \varphi \in R_Q$ .

W tym przypadku operator  $I - \Pi$  jest także rzutem na podprzestrzeń  $R_Q$ :

$$(\Pi - I)\varphi = \varphi, \varphi \in R_Q \quad \text{i} \quad (\Pi - I)\varphi = 0, \varphi \in N_Q.$$

Tak więc równanie (2.1) w formie wektorowej ma postać

$$\varphi = \Pi\varphi - (\Pi - I)\varphi.$$

**Definicja 2.2** ([25]). *Liniowy operator ograniczony  $Q$  nazywany jest normalnie rozwiązywalnym, jeśli równanie*

$$Q\varphi = \psi, \psi \in R_Q$$

ma rozwiązanie dla dowolnego  $\psi \in R_Q$ .



Zauważmy, że skonstruowany odwracalny operator  $Q$  jest normalnie rozwiązywalny. Ważną własnością zbudowanego operatora odwrotnego jest istnienie uogólnionego operatora odwrotnego.

**Lemat 2.1** ([25]). *Dla normalnie rozwiązywalnego operatora  $Q$  istnieje operator odwrotny  $(Q + \Pi)^{-1}$ .*

**Definicja 2.3** ([25]). *Potencjalnym operatorem (lub tylko potencjałem) dla operatora  $Q$  nazywamy operator  $R_0 = \Pi - [Q + \Pi]^{-1}$ .*

Własności potencjału  $R_0$ :

1.  $QR_0 = R_0Q = \Pi - I$ ,
2.  $R_0\Pi = \Pi R_0 = 0$ ,
3.  $QR_0^n = R_0^n Q = R_0^{n-1}$ ,
4.  $\|R_0\| = \|Q_0^{-1}\|$ .

Rozważmy proces Markowa  $x(t), t \geq 0$ , w przestrzeni standardowej  $(X, \mathbf{X})$  z rozkładem stacjonarnym  $\pi(B), B \in \mathbf{X}$  z operatorem generującym  $Q$ , który jest określony przez wzór

$$Q\varphi(x) = \int_X Q(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

dla  $\varphi(x) \in D_Q$ , gdzie  $D_Q$  jest dziedziną operatora  $Q$ . W tym przypadku operator generujący  $Q$  jest uogólniony i odwrotny [25] wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje potencjał  $R_0$  określony [25] przez równanie

$$R_0Q = QR_0 = \Pi - I.$$

Rzut  $\Pi$  w przestrzeni Banacha  $\mathbf{B}(X)$  ma następującą definicję:

$$\Pi\varphi(x) := \tilde{\varphi}\mathbf{I}(x), \tilde{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x), \quad \mathbf{I}(x) \equiv 1, \quad x \in X.$$

Dany jest rozkład stacjonarny  $\pi(B)$ ,  $B \in \mathbf{X}$  przez równanie

$$\pi(B) = \int_X \pi(dy)Q(y, B), \quad B \in \mathbf{X}, \quad \pi(X) = 1.$$

**Uwaga 2.1.** Ograniczenia dotyczące klasy procesów Markowa, które są tu rozpatrywane, są podstawą nowych metod badania PAS. Z drugiej strony, klasa procesów Markowa może zostać rozszerzona.

### 3 Dyskretna PAS w schemacie uśredniania

W tym rozdziale badamy skokową procedurę aproksymacji stochastycznej. W schemacie uśredniania skokową PAS określamy wzorem:

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(0) = u, \quad (3.1)$$

gdzie  $\nu(t)$  jest procesem liczącym wbudowanego łańcucha Markowa. Z definicji  $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$ . W PAS (3.1) mamy  $u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon)$ ,  $x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon)$ ,  $\tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n$ ,  $n \geq 0$ . Funkcja regresji  $C(u, x) = (C_k(u, x), k = \overline{1, d})$ ,  $u \in R^d$ ,  $x \in X$ , spełnia warunki istnienia globalnego rozwiązania układów towarzyszących

$$du^x(t)/dt = C(u^x(t), x), \quad x \in X.$$

Zauważmy, że w równaniu (3.1) zawarta jest dyskretna PAS:

$$u_{n+1}^\varepsilon = u_n^\varepsilon + a_n^\varepsilon C(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon).$$

Środowisko zewnętrzne jest opisane jednoznacznie ergodycznym procesem Markowa  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , w standardowej przestrzeni fazowej  $(X, \mathbf{X})$  z generatorem  $Q$  i jego potencjałem  $R_0$ .

W PAS (3.1) ciąg normujący  $a_n^\varepsilon$ ,  $n \geq 0$ , określamy wartościami sterującej funkcji  $a(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $a_n^\varepsilon := a(\tau_n^\varepsilon)$ ,  $\tau_n^\varepsilon := \varepsilon\tau_n$ ,  $n \geq 0$ , gdzie  $\tau_n$ ,  $n \geq 0$ , to momenty odnowy wbudowanego łańcucha Markowa  $x_n := x(\tau_n)$ ,  $n \geq 0$ , z procesem liczącym  $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}$ ,  $t \geq 0$ .

Zbieżność PAS (3.1) badamy przy założeniu stabilności wykładniczej układu uśrednionego:

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u, x), \quad (3.2)$$

gdzie  $\rho(B)$ ,  $B \in X$ , jest rozkładem ergodycznym wbudowanego łańcucha Markowa  $x_n$ ,  $n \geq 0$ .

**Twierdzenie 3.1.** Niech funkcja Lapunowa  $V(u) \in C^3(\mathbb{R}^d)$ ,  $u \in \mathbb{R}^d$ , uśrednionego układu (3.2) będzie taka, że

*C1* : gwarantuje stabilność wykładniczą uśrednionego układu (3.2)

$$C(u)V'(u) \leq -c_0V(u), \quad c_0 > 0;$$

*C2* : dla  $\bar{C}(u) := \max_{x \in X} C(u, x)$  są spełnione oszacowania

$$|\bar{C}(u)V'(u)| \leq c_1(1 + V(u)), \quad c_1 > 0,$$

$$|\bar{C}(u)[\bar{C}(u)V'(u)]'| \leq c_2(1 + V(u)), \quad c_2 > 0,$$

$$|\bar{C}(u)\bar{C}(u)[\bar{C}(u)V'(u)]''| \leq c_3(1 + V(u)), \quad c_3 > 0.$$

Funkcja normująca  $a(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  jest malejąca i spełnia warunki:

$$C3 : \int_0^\infty a(t)dt = \infty, \quad \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Wtedy dla każdego dodatniego  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , gdzie  $\varepsilon_0$  jest wystarczająco małe, PAS (3.1) jest zbieżna z prawdopodobieństwem 1 do jedynego punktu równowagi uśrednionego ewolucyjnego układu (3.2):

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

W dowodzie twierdzenia 3.1 rozważymy dwuskładnikowy proces Markowa

$$u^\varepsilon(t), \quad x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon), \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

**Lemat 3.1.** *Proces Markowa (3.3) jest zdefiniowany wzorem*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-1} Q \varphi(u, x) + \varepsilon^{-1} q(x) \mathbf{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(u, x), \quad (3.4)$$

gdzie

$$\mathbf{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(u, x) = \int_{\mathcal{X}} P(x, dy) [\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y) - \varphi(u, y)]. \quad (3.5)$$

*Dowód.* Generator  $\mathbf{L}_t^\varepsilon$  procesu Markowa (3.3) jest określony przez relację

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \{E[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x] - \varphi(u, x)\} = \mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x). \quad (3.6)$$

Warunkowa wartość oczekiwana wynosi:

$$\begin{aligned} E[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x] &= \\ &= E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = \\ &= E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] [I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1} \Delta) + I(\theta_x > \varepsilon^{-1} \Delta)] = \\ &= E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1} \Delta) + \\ &+ E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] I(\theta_x > \varepsilon^{-1} \Delta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ponieważ  $I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1} \Delta) = 1 - e^{-\varepsilon^{-1} q(x) \Delta} = \varepsilon^{-1} q(x) \Delta + o(\Delta)$ , to dla pierwszego składnika w (3.7):

$$\begin{aligned} E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1} \Delta) &= \\ &= E_{u,x}[\varphi(u + \Delta u^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] \varepsilon^{-1} q(x) \Delta + o(\Delta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie przyrosty ewolucji  $\Delta u^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t + \Delta) - u^\varepsilon(t)$  są określone przez procedurę (3.1) w wartości oczekiwanej (3.7)

$$\Delta u^\varepsilon(t) = \varepsilon a(t) C(u, x).$$

Ponieważ  $I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta) = e^{-\varepsilon^{-1}q(x)\Delta} = 1 - \varepsilon^{-1}q(x)\Delta + o(\Delta)$ , to dla drugiego składnika z (3.7) mamy

$$\begin{aligned} & E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)]I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta) = \\ & = E_{u,x}[\varphi(u + \Delta u^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)][1 - \varepsilon^{-1}q(x)\Delta + o(\Delta)]. \end{aligned}$$

Ponieważ  $\Delta \rightarrow 0$ , to  $\Delta u^\varepsilon(t) \rightarrow 0$  i  $x_{t+\Delta}^\varepsilon \rightarrow x$ , a stąd

$$\begin{aligned} & E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)]I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta) = \\ & = \varphi(u, x)[1 - \varepsilon^{-1}q(x)\Delta] + o(\Delta). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Zatem, biorąc pod uwagę (3.8), (3.9), i podstawiając  $x_{t+\Delta}^\varepsilon = y \in X$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} & E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = \\ & = \varphi(u, x) - \varepsilon^{-1}q(x)\varphi(u, x)\Delta + \\ & + \varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x}\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u, x), y)\Delta + o(\Delta). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Stosując (3.10) w (3.6) otrzymujemy postać generatora  $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} [\varphi(u, x) - \varepsilon^{-1}q(x)\varphi(u, x)\Delta + \\ & + \varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x}\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u, x), y)\Delta - \varphi(u, x) + o(\Delta)] = \\ & = \varepsilon^{-1}q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u, x), y) - \varphi(u, x)] = \\ & = \varepsilon^{-1}q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(u, y) - \varphi(u, x)] + \\ & + \varepsilon^{-1}q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u, x), y) - \varphi(u, y)]. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymujemy (3.4), co kończy dowód. □

**Wniosek 3.1.** Dla funkcji testowych  $\varphi(u, \cdot) \in C^2(R^d)$ , generator  $L_t^\varepsilon$  ma reprezentację asymptotyczną

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon \varphi(u, x) = & \varepsilon^{-1} Q \varphi(u, x) + a(t) Q_1(x) \varphi(u, x) + \\ & + \varepsilon a^2(t) \theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x), \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie

$$Q_1(x) \varphi(u, x) = C(u, x) Q_0 \varphi'_u(u, x), \quad (3.12)$$

$$\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x) = \frac{1}{2} C^2(u, x) Q_0 \varphi''_u(\theta u, x), \quad \text{dla pewnego } \theta \in [0, 1] \quad (3.13)$$

oraz

$$\begin{aligned} Q_0 \varphi(x) & := q(x) \mathbf{P} \varphi(x), \\ \mathbf{P} \varphi(x) & := \int_X P(x, dy) \varphi(y). \end{aligned}$$

*Dowód.* Korzystając z regularności funkcji  $\varphi(u, x)$  oraz z równości (3.5) wyznaczamy postać operatora  $L_t^\varepsilon(x)$ :

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon \varphi(u, x) & = \int_X P(x, dy) [\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y) - \varphi(u, y)] = \\ & = \int_X P(x, dy) [\varepsilon a(t) C(u, x) \varphi'_u(u, y) + \varepsilon^2 a^2(t) \frac{1}{2} C^2(u, x) \varphi''_u(\theta u, y)], \\ & \text{dla pewnego } \theta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Stąd mamy postać (3.11). □

**Uwaga 3.1.** W (3.11) pozostały składnik resztowy  $\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x)$  spełnia warunek

$$\|\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x)\| \leq C, \quad \text{dla pewnego } C > 0,$$

to znaczy

$$\varepsilon a^2(t) \|\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

*Dowód.* (3.14) wynika z (3.13) i regularności funkcji  $\varphi(u, x)$ . □

Rozwiążemy teraz problem zaburzenia dla operatora  $L_t^\varepsilon$  na zaburzonej funkcji Lapunowa

$$V^\varepsilon(u, x) = V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u, x), \quad (3.15)$$

gdzie  $V(u)$  jest funkcją Lapunowa dla uśrednionego układu (3.2).

**Lemat 3.2.** *Generator  $L_t^\varepsilon$  na zaburzonej funkcji Lapunowa  $V^\varepsilon(u, x)$  takiej, że  $V(u) \in C^3(\mathbb{R}^d)$ , ma reprezentację asymptotyczną*

$$L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u), \quad (3.16)$$

gdzie

$$\theta_L^\varepsilon(x)V(u) = \theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \theta_1^\varepsilon(x)V(u), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \theta_0^\varepsilon(x)V(u) = C(u, x)[[q(x)R_0 - I]\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \\ + \Pi\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \end{aligned}$$

$$+ [q(x)R_0 - I]\tilde{C}(u, x)V''(u)]\varphi''_u(\theta u, y)], \text{ dla pewnego } \theta \in [0, 1], \quad (3.18)$$

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u, x)q(x)V''(\theta u), \text{ dla pewnego } \theta \in [0, 1]. \quad (3.19)$$

*Dowód.* Najpierw rozwiązujemy problem zaburzenia dla operatora  $L_t^\varepsilon$  oraz dla operatora

$$L_{t_0}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + a(t)Q_1(x).$$

Operator  $L_{t_0}^\varepsilon$  na funkcjach  $V^\varepsilon(u, x)$  zostanie przedstawiony w formie

$$\begin{aligned} L_{t_0}^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) &= [\varepsilon^{-1}Q + \varepsilon a(t)Q_1(x)][V(u) + a(t)V_1(u, x)] = \\ &= \varepsilon^{-1}QV(u) + a(t)[QV_1(u, x) + Q_1(x)V(u)] + \varepsilon a^2(t)Q_1(x)V_1(u, x). \end{aligned}$$

Rozwiązanie zagadnienia zaburzenia osobliwego jest możliwe, gdy spełniony jest warunek

$$QV_1(u, x) + Q_1(x)V(u) = \hat{Q}_1V(u), \quad (3.20)$$

gdzie

$$\widehat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1(x) \Pi. \quad (3.21)$$

Przedstawimy teraz prawą część (3.21). Korzystając z wzorów (3.12) oraz (3.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Pi Q_1(x) \Pi V(u) &= \Pi C(u, x) Q_0 \Pi V'(u) = \\ &= \Pi C(u, x) q(x) \mathbf{P} \Pi V'(u) = \\ &= \Pi C(u, x) q(x) V'(u) = \\ &= \int_X \pi(dx) q(x) C(u, x) V'(u) = \\ &= q \int_X \rho(dx) C(u, x) V'(u) = \\ &= C(u) V'(u). \end{aligned}$$

Z warunku (3.20) otrzymujemy

$$Q V_1(u, x) = (\widehat{Q}_1 - Q_1(x)) V(u).$$

Biorąc pod uwagę własność potencjału  $R_0$  [36] otrzymujemy rozwiązanie

$$V_1(u, x) = R_0 \widetilde{Q}_1(x) V(u), \quad (3.22)$$

gdzie

$$\widetilde{Q}_1(x) = Q_1(x) - \widehat{Q}_1. \quad (3.23)$$

Rozważmy prawą część (3.23). Uwzględniając (3.12) i (3.21), otrzymujemy

$$\begin{aligned} [Q_1(x) - \widehat{Q}_1] V(u) &= [C(u, x) Q_0 - C(u)] V'(u) = \\ &= [C(u, x) q(x) \mathbf{P} - C(u)] V'(u) = [C(u, x) q(x) - C(u)] V'(u). \end{aligned}$$

Tak więc, dla zaburzenia  $V_1(u, x)$  funkcji Lapunowa  $V(u)$  z (3.22), dostajemy równość

$$V_1(u, x) = R_0 \widetilde{\mathbf{C}}(x) V(u), \quad (3.24)$$



gdzie

$$\begin{aligned}\tilde{C}(x)V(u) &= \tilde{C}(u, x)V'(u), \\ \tilde{C}(u, x) &= C(u, x)q(x) - C(u).\end{aligned}$$

Stosujemy wzór (3.24) do wyznaczania reszty

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) := Q_1(x)V_1(u, x).$$

Mamy:

$$\begin{aligned}\theta_0^\varepsilon(x)V(u) &= C(u, x)Q_0[R_0\tilde{C}(x)V(u)]' = \\ &= C(u, x)q(x)\mathbf{P}R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)]' = \\ &= C(u, x)q(x)\mathbf{P}R_0[\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \tilde{C}(u, x)V''(u)].\end{aligned}\quad (3.25)$$

Następnie, biorąc pod uwagę relację  $q(x)\mathbf{P}R_0 = q(x)R_0 + \Pi - I$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\theta_0^\varepsilon(x)V(u) &= C(u, x)[q(x)R_0 + \Pi - I][\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \tilde{C}(u, x)V''(u)] = \\ &= C(u, x)[q(x)R_0\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + q(x)R_0\tilde{C}(u, x)V''(u)] + \\ &+ C(u, x)[\Pi\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \Pi\tilde{C}(u, x)V''(u)] - \\ &- C(u, x)[\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \tilde{C}(u, x)V''(u)] = \\ &= C(u, x)[[q(x)R_0 - I]\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \Pi\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + \\ &+ [q(x)R_0 - I]\tilde{C}(u, x)V''(u)].\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\mathbf{L}_{t_0}^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^\varepsilon(x)V(u),\quad (3.26)$$

gdzie  $\theta_0^\varepsilon(x)V(u)$  jest dana wzorem (3.18).

Zauważamy, że z regularności funkcji  $C(u, x)$ ,  $V(u)$  i ograniczenia operatora  $R_0$  z (3.18) wynika istnienie takiej stałej  $C > 0$ , że:

$$\|\theta_0^\varepsilon(x)V(u)\| < C, \quad x \in X.\quad (3.27)$$

Wracając do pełnej postaci generatora  $L_t^\varepsilon$ , będziemy go przedstawiać w formie

$$L_t^\varepsilon = L_{t0}^\varepsilon + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x).$$

Mamy więc postać (3.15)

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) &= L_{t0}^\varepsilon[V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u, x)] + \\ &+ \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u, x)], \end{aligned} \quad (3.28)$$

gdzie  $V_1(u, x)$  wyznaczamy za pomocą wzoru (3.24).

Biorąc pod uwagę (3.26) oraz (3.28), otrzymujemy

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) &= a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \\ &+ \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)V(u) + \varepsilon^2 a^3(t)\theta_1^\varepsilon(x)R_0\tilde{C}(u, x)V'(u). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Wyznaczamy dwa ostatnie składniki w (3.29):

$$\theta_1^\varepsilon(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u, x)q(x)V''(\theta u), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)R_0\tilde{C}(u, x)V'(u) = \frac{1}{2}C^2(u, x)Q_0R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)]''|_{u=\theta u}.$$

Z regularności funkcji  $C(u, x)$ ,  $V(u)$ , a także z ograniczenia operatorów  $R_0$  i  $Q_0$  wynika, że

$$\|\theta_1^\varepsilon(x)R_0\tilde{C}(u, x)V'(u)\| \leq M, \quad \text{dla pewnego } M > 0 \text{ i dla każdego } x \in X.$$

Ta ostatnia nierówność pozwala pominąć odpowiednie składniki we wzorze (3.29).

W rezultacie, z (3.29) wynika (3.16).  $\square$

Dowód twierdzenia (3.1) zostanie przeprowadzony w kilku etapach. Pierwszym etapem jest wykazanie kluczowej nierówności.

**Lemat 3.3.** *Generator  $L_t^\varepsilon$  na zaburzonej funkcji Lapunowa (3.15) jest ograniczony, bo istnieje taka stała  $\delta > 0$ , że:*

$$L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) \leq -\delta a(t)V(u). \quad (3.30)$$

*Dowód.* Używając oszacowań C2 dla reszty  $\theta_L^\varepsilon(x)V(u)$ , warunku C1 wykładniczej stabilności systemu (3.2), a także monotoniczności i ograniczenia funkcji  $a(t)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) &= a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u) \leq \\ &\leq -a(t)(\delta^* - \varepsilon c)V(u) \leq -a(t)\delta V(u), \text{ dla pewnego } \delta > 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdego  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , gdzie  $\varepsilon_0 < \delta^*/c$ .  $\square$

Po drugie, ze względu na warunek (3.23), zaburzona funkcja  $V^\varepsilon(u, x)$  jest ograniczona:

$$0 < (1 - \varepsilon a(t)c)V(u) \leq V^\varepsilon(u, x) \leq (1 + \varepsilon a(t)c)V(u).$$

Po trzecie, definiujemy proces

$$V_n^\varepsilon := V^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), \quad n \geq 0, \quad (3.32)$$

będący całkowym supermartyngałem. Zauważmy, że proces Markowa (3.6) generuje na funkcjach testowych  $\varphi(u, x)$ ,  $u \in R^d$ ,  $x \in X$ , martyngał

$$\mu_{n+1} = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u_0, x_0) - \varepsilon \sum_{k=0}^n \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon \varphi(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), \quad (3.33)$$

na filtracji  $\sigma$ -algebry  $F_n^\varepsilon = \sigma\{u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon, 0 \leq k \leq n\}$ ,  $n \geq 0$ . Rzeczywiście, przyjmując  $\varphi_n^\varepsilon := \varphi(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon)$  otrzymamy

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n | F_n^\varepsilon] = E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] - E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon \theta_{n+1} \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon]. \quad (3.34)$$

Biorąc pod uwagę definicję operatora (3.7) wyznaczamy drugi składnik w (3.34):

$$\begin{aligned} E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon \theta_{n+1} \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon] &= \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon = \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \varepsilon^{-1} q(x_n^\varepsilon) E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] = \\ &= E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon]. \end{aligned}$$

Właściwość martyngałowa (3.33) jest wyrażona równaniem:

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n | F_n^\varepsilon] = 0, n \geq 0. \quad (3.35)$$

Wzoru (3.35), użyjemy w dowodzie następnego lematu.

W (3.33) rozważmy zamiast funkcji testowej  $\varphi(u, x)$ ,  $u \in R^d$ ,  $x \in X$ , zaburzoną funkcję Lapunowa  $V^\varepsilon(u, x)$ .

**Lemat 3.4.** *Proces (3.32) jest nieujemnym supermartyngałem.*

*Dowód.* Korzystając z wzoru (3.32) otrzymujemy:

$$E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon E\left[\sum_{k=0}^n \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon\right] + \mu_n^\varepsilon. \quad (3.36)$$

Z (3.35) wynika równość  $E[\mu_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = \mu_n^\varepsilon$ . Dodatkowo we wzorze (3.36) wstawiamy w miejsce  $\mu_n^\varepsilon$  jego wartość z równania (3.33) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] &= V_0^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon + \varepsilon \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon \right] + \\ &+ V_n^\varepsilon - V_0^\varepsilon - \varepsilon \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Stąd dostajemy  $E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = V_n^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon$  i wraz z kluczową nierównością (3.30) otrzymujemy nierówność  $E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] \geq V_n^\varepsilon, n \geq 0$ , co dowodzi lematu.  $\square$

Korzystając z oszacowań (3.30) i (3.31), a także (3.32) i twierdzeniu Koroliuka [25], otrzymujemy dowód Twierdzenia 3.1.

## 4 Dyfuzyjna PAS w schemacie aproksymacji dyfuzyznej

Rozważamy skokową PAS w schemacie aproksymacji dyfuzyznej, określoną wzorem:

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} a_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, \quad (4.1)$$

gdzie z definicji  $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) := 0$ . Dyskretną PAS badamy w przestrzeni euklidesowej  $R^d$  w postaci :

$$u_{n+1}^\varepsilon = u_n^\varepsilon + \varepsilon a_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), \quad n \geq 0, \quad (4.2)$$

gdzie funkcja  $a(t)$  generuje ciąg  $a_n = a(\tau_n), n \geq 1$  i ciąg punktów  $u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n) \in R^d$  taki, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^\varepsilon = u_0$  prawie wszędzie dla wystarczająco małych  $\varepsilon > 0$ .

Funkcja regresji

$$C^\varepsilon(u, x) = C_0(u, x) + \varepsilon^{-1} C(u, x) \quad (4.3)$$

jest zależna od stanów środowiska zewnętrznego  $x \in X$ , którego zmiany opisane są ergodycznym łańcuchem Markowa  $x_n, n \geq 0$ .

Dalej badamy zbieżność PAS (4.1) z zaburzoną funkcją regresji (4.3), której zaburzająca funkcja spełnia warunek bilansu:

$$\int_X \rho(dx) C_0(u, x) \equiv 0. \quad (4.4)$$

Uśredniona PAS w warunkach bilansu (4.4) określona jest stochastycznym równaniem różniczkowym

$$du(t) = a(t)C(u(t))dt + a^2(t)d\zeta(t),$$

gdzie

$$d\zeta(t) = b(u(t))dt + \sigma((u(t)))dw_t$$

jest procesem dyfuzyjnym z przenoszeniem  $b(u)$  i macierzą kowariacyjną  $B(u) = \sigma(u)\sigma^T(u)$ , gdzie  $w_t$  jest procesem Wienera, zaś uśredniana funkcja regresji  $C(u)$  jest określona wzorem  $C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u, x)$ .

Uśredniony układ dynamiczny spełnia równanie:

$$du(t)/dt = C(u(t)). \quad (4.5)$$

Współczynniki zaburzenia dyfuzyjnego  $\zeta(t), t \geq 0$ , i  $b(u)$  macierz kowariancji  $B(u)$ , są zdefiniowane przez równania:

$$b(u) = q \int_X \rho(dx) b(u, x), \quad (4.6)$$

$$B(u) = q \int_X \rho(dx) B(u, x), \quad (4.7)$$

gdzie

$$b(u, x) := C_0(u, x) R_0 q(x) C_0'(u, x); \quad (4.8)$$

$$B(u, x) := 2C_0(u, x) R_0 q(x) C_0(u, x) - C_0^2(u, x). \quad (4.9)$$

Dla otrzymania rezultatu głównego rozpatrzmy funkcje majoryzujące: funkcja majoryzująca regresji  $C(u, x)$  i zaburzenia  $C_0(u, x)$

$$\bar{C}(u) := \max_{x \in X} (|C(u, x)| + |C_0(u, x)|) \quad (4.10)$$

oraz funkcje pomocnicze:

$$w_k(u) := \bar{C}(u) w'_{k-1}(u), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (4.11)$$

$$w_0(u) := \bar{C}(u) V'(u), \quad (4.12)$$

gdzie  $V(u)$  jest funkcją Lapunowa dla układu uśrednionego dynamicznego (4.3).

Zbieżność PAS (4.1) otrzymano przy założeniu stabilności wykładniczej rozwiązania  $u(t)$  układu (4.5), to znaczy istnieje jeden punkt równowagi  $u_0$  taki, że  $C(u_0) = 0$ , dla którego mamy zbieżność układu trajektorii (4.5).

**Twierdzenie 4.1.** *Niech funkcja Lapunowa  $V(u)$  dla uśrednionego dynamicznego układu (4.5), ma ograniczone pochodne (do piątego rzędu włącznie) i spełnia warunki:*

$$C1 : C(u) V'(u) \leq -c V(u) \quad \text{dla pewnego } c > 0$$

$$C2 : w_k(u) \leq c_k (1 + V(u)), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{dla pewnych } c_k > 0.$$

Dodatkowo, niech funkcja regresji  $C(u, x)$  i  $C_0(u, x)$  PAS (4.1) będzie czterokrotnie różniczkowalna względem  $u$ , ograniczona i ciągła na  $x \in X$ , a funkcja  $C_0(u, x)$  niech spełnia warunek bilansu (4.5).

Funkcja sterowania  $a(t) > 0$  spełnia następujące warunki:

$$\int_0^{\infty} a(t) dt = \infty, \quad \int_0^{\infty} a^2(t) dt < \infty.$$

Wtedy skokowa PAS (4.1), (także zawarta w niej procedura dyskretna (4.2)), jest zbieżna do punktu równowagi układu dynamicznego (4.5) z prawdopodobieństwem 1.

## 5 PAS dla procesu dyfuzyjnego w przestrzeni semi-markowskiej

Szerokie zastosowanie procesów stochastycznych powoduje zainteresowanie warunkami stabilności i sterowaniem takich układów. W pracy [6] rozważane są warunki stabilności układów stochastycznych wyznaczone przez własności funkcji Lapunowa oraz oszacowanie dużych odchyłeń liniowych układów dyfuzyjnych. Problem optymalnej kontroli procesu dyfuzyjnego opisanego przez stochastyczne równanie różniczkowe z akceptowalnym poziomem sterowania jest rozważany w [31]. Generator zastosowany w tej pracy jest zastosowany na procesie dyfuzyjnym do własności Markowa oraz do charakteryzacji martyngałowej procesu do testowej funkcji typu Lapunowa. Z drugiej strony ważne jest asymptotyczne zachowanie procesu dyfuzyjnego rozważanego w [37] oraz [38]. Autorzy prac [17, 19, 25] używają metody małego parametru i rozwiązania problemu pojedynczej perturbacji do konstrukcji generatora ograniczającego proces. Ta metoda jest używana w schemacie uśrednienia dyfuzyjnego przybliżenia i asymptotycznie małej dyfuzji. W szczególności w pracy [25] przetestowano losowe ewolucje z przełączeniami Markowa i semi-Markowa.

Konstrukcja procesu semi-Markowa oraz badanie asymptotycznych własności procesów losowych z przełączeniami semi-Markowa są rozważane w [1–4].

Warto zaznaczyć, że w pracy [30], w której analizowano asymptotyczne własności procesu semi-Markowa z liniowo zaburzonym operatorem, zastosowano własności półgrupy z procesem Markowa. Ostatnie rezultaty są opisane w [21]. Klasyfikacja problemu rozwiązywania pojedynczej perturbacji procesu losowego z przełączeniami semi-Markowa jest opisana w [25] oraz [22], wraz z użyciem operatora kompensującego [39]. Wraz z operatorem kompensującym [8] możemy otrzymać warunki do zbieżności losowej ewolucji z przełączeniem semi-Markowa do procesu dyfuzyjnego w schemacie uśrednienia [20]. Wyniki tych badań zostały użyte w różnych pracach [9, 10, 26, 27].

W tej części pracy rozpatrujemy dynamiczny układ z przełączeniami semi-Markowa i stosujemy metodę małego parametru. Niech  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  oznacza proces semi-Markowa w standardowej przestrzeni stanów  $(X, \mathcal{E})$ . Proces odnowy Markowa  $x_n, \tau_n, n \geq 0$  jest definiowany następująco:

$$Q(t, x, B) = P(x, B)G_x(t),$$

gdzie jądro stochastyczne

$$P(x, B) := P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\}, \quad B \in \mathcal{E}$$

definiuje wbudowany łańcuch Markowa  $x_n = x(\tau_n)$  w momentach odnowy:

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad n \geq 0, \quad \tau_0 = 0,$$

z przedziałami  $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$  pomiędzy momentami odnowy.  $\theta_n$  są zdefiniowane przez funkcję dystrybuanty

$$G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t | x_n = x\} =: P\{\theta_x \leq t\}.$$

Proces semi-Markowa jest zdefiniowany wzorem:

$$x(t) = x_{\nu(t)}, \quad t \geq 0,$$



gdzie proces liczenia  $\nu(t)$  jest dany wzorem:

$$\nu(t) := \max \{n : \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Rozważamy proces semi-Markowa  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , który jest regularny i jednostajnie ergodyczny z rozkładem stacjonarnym  $\pi(B)$ ,  $B \in \mathcal{E}$ :

$$\pi(dx) = \rho(dx)m(x)/m.$$

Tutaj  $\rho(B)$ ,  $B \in \mathcal{E}$ , jest rozkładem stacjonarnym wbudowanego łańcucha Markowa.

Proces dyfuzji  $u^\varepsilon(t) \in R^d$  w schemacie uśrednienia z małym parametrem  $\varepsilon > 0$  jest zdefiniowany przez stochastyczne równanie różniczkowe:

$$du^\varepsilon(t) = a(t) \left[ C \left( u^\varepsilon(t); x \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right) dt + \sigma(u^\varepsilon(t); x \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)) dw(t) \right], \quad (5.1)$$

gdzie:

$u^\varepsilon(t)$ ,  $t \geq 0$ , jest losową ewolucją z procesem dyfuzyjnym (5.1) [2, 22, 25, 39];

$x(t)$ ,  $t \geq 0$ , jest procesem semi-Markowa [1, 21, 25, 30];

$w(t)$  jest procesem Wienera [17, 37, 38];

$a(t)$  jest funkcją sterującą i spełnia warunki:  $\int_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty$ ,  $\int_{t_0}^{\infty} a^2(t)dt < \infty$ .

Półgrupa  $\mathbf{C}_{t+s}^t(x)$ ,  $t \geq 0$ ,  $s \geq 0$ ,  $x \in X$  stowarzyszonych układów

$$du_x(t) = a(t) [C(u_x(t); x)dt + \sigma(u_x(t); x)dw(t)], \quad u_x(0) = u, \quad (5.2)$$

jest zdefiniowana przez relację

$$\mathbf{C}_{t+s}^t(x)\phi(u) = \phi(u_x(t+s)), \quad u_x(t) = u, \quad (5.3)$$

gdzie

$$u_x(t+s, u) := u_x(s, u_x(t, u)) \quad (5.4)$$

przy czym (5.4) jest własnością półgrupy.

Operator generujący  $\mathbf{C}_t(x)$  półgrupę  $\mathbf{C}_{t+s}^t(x)$  jest zdefiniowany przez równanie

$$\mathbf{C}_t(x)\phi(u) = a(t)C(u, x)\phi'(u) + a(t)\frac{1}{2}\sigma^2(u)\phi''(u), \quad (5.5)$$

gdzie  $\phi(u) \in C^2(R^d)$ .

**Twierdzenie 5.1.** *Jeżeli funkcja Lapunowa  $V(u)$  danego układu  $\frac{du}{dt} = C(u)$  spełnia warunki:*

$$C1: C(u)V'(u) \leq -c_0V(u), \text{ dla pewnego } c > 0,$$

$$C2: |R_0C(u, x)V'(u)| \leq c_1(1 + V(u)) \text{ dla pewnego } c_1 > 0,$$

$$C3: [C(u, x)R_0[C(u, x)V'(u)]] \leq c_2(1 + V(u)) \text{ dla pewnego } c_2 > 0,$$

$$C4: |C(u, x)[C(u, x)[C(u, x)V'(u)]'| \leq c_3(1 + V(u)) \text{ dla pewnego } c_3 > 0,$$

$$C5: \sup_{x \in X} \int_0^{\infty} e^{ht} G_x(t) dt \leq H < \infty, \text{ dla pewnego } h > 0,$$

$$C6: \int_0^{\infty} a(t) dt = \infty, \quad \int_0^{\infty} a^2(t) dt < \infty,$$

to rozwiązanie  $u^\varepsilon(t)$ ,  $t \geq 0$  równania (5.1) jest zbieżne do punktu  $u^*$ :

$$P \left( \lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t) = u^* \right) = 1,$$

gdzie  $u^* \in \mathbb{R}$ .

Ze względu na poglądowy charakter pracy, to twierdzenie pozostawiamy bez dowodu.

## 6 Wnioski

Uzyskano warunki wystarczające dla zbieżności procesu dyskretnej PAS do punktu równowagi w przestrzeni Markowa i zbieżności procesu dyfuzyjnego w przestrzeni semi-Markowa do procesu dyfuzyjnego. Dla procesu dyfuzyjnego rozpatrzono dwa przypadki: wariancja jest niezależna od przełączeń semi-Markowa i wariancja zależy od przełączeń. Proces graniczny jest asymptotyczną aproksymacją procesu początkowego w sensie probabilistycznym. Otrzymany rezultat może być zastosowany w schemacie aproksymacji Poissona [26, 27, 36] dla procesu dyfuzyjnego z przełączeniami semi-Markowa.

## Literatura

- [1] V. V. Anisimov, Limit Theorems for Switching Processes and their Applications. *Cybernetics*, 14(6), 1978, 917–929.
- [2] V. V. Anisimov, Limit Theorems for Switching Processes, *Theory Probab. and Math. Statist.*, 37, 1988, 1–5.
- [3] V. V. Anisimov, Switching Processes: Averaging Principle, Diffusion Approximation and Applications, *Acta Applicandae Mathematicae*, 40, 1995, 95–141.
- [4] V. V. Anisimov, Averaging Methods for Transient Regimes in Overloading Retrieval Queuing Systems. *Mathematical and Computing Modelling*, 30(3/4), 1999, 65–78.
- [5] V. V. Anisimov, *Switching Processes in Queueing Models*, Wiley, Sons, ISTE, London, 2008.
- [6] G. L. Blankenship, G. C. Papanicolaou, Stability and Control of stochastic systems with wide band noise disturbances, *SIAM. Appl. Math.*, 34, 1978, 437–476.
- [7] M. M. Bogolubow, O pewnych metodach statystycznych fizyki matematycznej, *Wyd. AN USSR. Lwów.*, 1945. (w języku rosyjskim)
- [8] Y. M. Chabanyuk, Stability of a dynamical system with semi-Markov switchings under conditions of diffusion approximation, *Ukrainian Mathematical Journal*, 59, 2007, 1441–1452.
- [9] Y. M. Chabanyuk, Continuous stochastic approximation with semi-Markov switchings in the diffusion approximation scheme, *Cybernetics and Systems Analysis*, 43, 2007, 605–612.

- 
- [10] Y. M. Chabanyuk, Convergence of a jump procedure in a semi-Markov environment in diffusion-approximation scheme, *Cybernetics and Systems Analysis*, 43, 2007, 866–875.
- [11] Y. M. Chabanyuk, U. T. Khimka, A difference stochastic optimization procedure with impulse perturbation. *Cybernetics and Systems Analysis*, 49(5), 2013, 768–773.
- [12] M. Driml, J. Nedoma, Stochastic approximations for continuous random processes, *Trans. of the second Prague conference on Information theory*, 1960, 145–158.
- [13] P. P. Gorun, Y. M. Chabanyuk, Asymptotic Behavior of a Modified Stochastic Optimization Procedure in an Averaging Scheme. *Cybernetics and Systems Analysis*, 51(6), 2015, 956–964.
- [14] R. Griego, R. Hersh, Random evolutions, Markov chains, and Systems of partial differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 62, 1969, 305–308.
- [15] E. Kiefer, J. Wolfowitz, Stochastic estimation of the maximum of a regression function *Ann. Math. Statist.*, 23(3), 1952, 462–466.
- [16] A. Kinash, Y. M. Chabanyuk, U. T. Khimka. Asymptotic dissipativity of the diffusion process in the asymptotic small diffusion scheme. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 14(4), 2015, 93–103.
- [17] V. S. Korolyuk, Stability of stochastic systems in the diffusion-approximation scheme, *Ukrainian Mathematical Journal*, 50, 1998, 40–54.
- [18] V. S. Korolyuk, Stabilność systemów stochastycznych w schemacie aproksymacji dyfuzyjnej, *Ukr. mat. zurn*, 50(1), 1998, 36–47. (w języku ukraińskim)
- [19] V. S. Korolyuk, Problem of large deviations for Markov random evolutions with independent increments in the scheme of asymptotically small. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62, 2010, 739–747.

- [20] V. S. Korolyuk, Y. M. Chabanyuk, Stability of a Dynamical System with Semi-Markov Switchings under Conditions of Stability of the Averaged System. *Ukrainian Mathematical Journal*, 54, 2002, 239–252.
- [21] V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk, *Stochastic Models of Systems* Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [22] V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk, N. Limnios, Queueing Systems with Semi-Markov Flow in Average and Diffusion Approximation Schemes. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 11, 2009, 201–209.
- [23] V. S. Korolyuk, N. Limnios, Evolutionary systems in an asymptotic split state space, *Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice and Inference*, N. Limnios M. Nikulin (Eds), Birkhauser, Boston, 2000, 145–161.
- [24] V. S. Korolyuk, N. Limnios, Average and diffusion approximation of stochastic evolutionary systems in an asymptotic split phase space, *Annals of Applied Probability*, 14(1), 2004, 489–516.
- [25] V. S. Korolyuk, N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific Publishing, Singapore, 2005.
- [26] V. S. Korolyuk, N. Limnios, I.V. Samoilenko, Poisson Aproximation of Recurrent Process with Locally Independent Increments and Semi-Markov Switching – Toward Application in Reliability. *Advances in Degradation Modeling*, 2010, 105–116.
- [27] V. S. Korolyuk, N. Limnios, I.V. Samoilenko, Poisson Aproximation of Recurrent Process with Semi-Markov Switching. *Stochastic Analysis and Applications*, 29, 2011, 769–778.
- [28] V. S. Korolyuk, N. Portenko, H. Syta (Eds.), *Skorokhod's Ideas in Probability Theory*, Institute of Mathematics, Kiev, 2000.

- 
- [29] V. S. Korolyuk, A. Swishchuk, *Evolution of System in Random Media*, CRC Press, 1995.
- [30] V. S. Korolyuk, A. V. Swishchuk, *Random Evolutions.*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [31] H. J. Kushner, Optimality conditions for the average cost per unit time problem with a diffusion model. *Siam J. Control and Optimization.*, 16(2), 1978, 330–346.
- [32] L. Ljung, G. Pflug, H. Walk, *Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems*, Birkhauser Verlag Basel., 1992.
- [33] U. O. Mytropolski, A. M. Samojlenko, Problemy matematyczne mechaniki nieliniowej. *Nauk. dumka.* , 1987. (w języku rosyjskim)
- [34] E. B. Nevelson, R. Hasminski, Stochastic Approximation and Recursive Estimation, *American Mathematical Society*, 1972.
- [35] H. Robbins, S. Monro, A stochastic approximation method, *Ann. Math. Statist.*, 22, 1951, 400–407.
- [36] I. V. Samoilenko, Y. M. Chabanyuk, A. V. Nikitin, U. T. Himka, Differential Equations with Small Stochastic Additions Under Poisson Approximation Conditions. *Cybernetics and Systems Analysis.*, 53(3), 2017, 410–416.
- [37] A. V. Skorokhod, Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations, *AMS*, 78, Providence, 1989.
- [38] D. W. Stroock, S.R.S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [39] M. N. Sviridenko, Martingale approach to limit theorems for semi-Markov processes, *Theor. Probab. Appl.*, 1986, 540–545.



# Prognozowanie kursu EURO/USD w oparciu nie tylko o szare modele

Witold Rzymowski<sup>1</sup>  
Agnieszka Surowiec<sup>2</sup>  
Tomasz Warowny<sup>3</sup>

## Streszczenie

W ostatnich latach można obserwować dużą różnorodność metod analizy danych finansowych, a w szczególności metod analizy finansowych szeregów czasowych. W niniejszej pracy porównano prognozy wygasłe dla kursu Euro/USD uzyskane na podstawie wybranych typów modeli. Wykorzystano szare modele typu GM(1,1), prosty model autoregresji rzędu I, modele liniowe, wielomianowe oraz modele potęgowe. Jako miarę użyteczności konstruowanych modeli przyjęto procentowy błąd względny prognoz wygasłych. Ponadto zbadano wpływ liczby obserwacji na wartości tego błędu.

---

<sup>1</sup>Katedra Matematyki Stosowanej; Politechnika Lubelska  
e-mail: w.rzymowski@pollub.pl

<sup>2</sup>Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu; Politechnika Lubelska  
e-mail: a.surowiec@pollub.pl

<sup>3</sup>Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu; Politechnika Lubelska  
e-mail: t.warowny@pollub.pl



### Abstract

Being able to forecast time series accurately has been quite a popular subject for researchers. In this article various forecasting models such as gray models GM(1,1), autoregressive models, linear models, polynomial models and power models for highly noisy data on the euro to the United States dollar parity are tested to compare the performances of those different models. A relative percentage error is used to examine the accuracy of the models. The simulation results show that the very simple autoregressive model is the best.

**Słowa kluczowe:** kurs Euro/USD, szare modele, estymacja parametrów, błąd względny, predykcja

## 1 Wstęp

Dzienne kursy walut w danym okresie czasu są przykładem finansowego szeregu czasowego. Można je zapisać jako skończony ciąg par  $\{t, x_t\}$ , gdzie  $t$  przybiera wartości ze zbioru liczb całkowitych ( $t \in Z$ ) i każdemu  $t$  przyporządkowana jest liczba  $x_t$  ze zbioru liczb rzeczywistych ( $x_t \in R$ ). Analizując dany szereg czasowy można wykryć naturę zjawiska reprezentowanego przez sekwencję obserwacji, ponadto można prognozować przyszłe wartości szeregu czasowego, co jest nader ważne w wielu procesach decyzyjnych. Raz ustalony wzorzec na podstawie danych finansowych mógłby zostać zastosowany do innych danych. Niezależnie od trafności teoretycznego uzasadnienia postaci modelu, zawsze można przewidywać przyszłe wartości szeregu czasowego na drodze ekstrapolacji, co w niniejszej pracy czynimy.

Przewidywanie przyszłych wartości finansowych szeregów czasowych, w tym dziennych kursów walut, wiąże się z błędem. Ponieważ szeregi dziennych kursów walut są losowe, niestacjonarne i wysoce nieliniowe badacze uciekają się do testowania różnych technik i metod [16], nie zawsze mających dobre uzasadnienie teoretyczne.

Obecnie dobrze znanymi narzędziami analizy szeregów czasowych są metody statystyczne oraz metody sztucznej inteligencji. Statystyczne metody obejmują analizę modeli autoregresyjnych (AR), modeli średniej ruchomej (MA), autoregresyjnych modeli średniej ruchomej (ARMA), autoregresyjnych zintegrowanych modeli średniej ruchomej (ARIMA) i ich dalsze modyfikacje [3, 11]. Wykorzystanie metod sztucznej inteligencji w modelowaniu finansowych szeregów czasowych jest stosowane przez wielu badaczy [4, 17]. Niektórzy z nich stosują modele hybrydowe: połączenie sztucznej inteligencji z algorytmami genetycznymi [2, 14]. Wspomniane metody analizy szeregów czasowych wymagają olbrzymich zbiorów danych uczących. Z uwagi na niewielką ilość informacji potrzebną do zbudowania modelu, ostatnio dużym zainteresowaniem cieszą się metody oparte na teorii szarych systemów wprowadzonej przez Deng Julonga [6–9]. Ostatnio, wielu badaczy analizując nie tylko finansowe szeregi czasowe stosuje teorię szarych systemów [1, 10, 12, 13, 15, 18].

W teorii szarych systemów zakłada się, że już na podstawie czterech realizacji szeregu czasowego [5], można zbudować model dobrze przewidujący zachowanie się analizowanego zjawiska.

Kolor w teorii szarych systemów reprezentuje ilość dostępnej informacji. System jest zwany „czarną skrzynką” jeśli jego wewnętrzne charakterystyki lub matematyczne równania, które opisują dynamikę systemu są całkowicie nieznaną. Z drugiej strony, jeśli opis systemu jest pełny, to taki system nazywamy białym. Szarym systemem nazywamy system z częściowo znaną informacją. Kursy walut mogą być rozpatrywane jako szare systemy. Trudno jest dokładnie przewidywać przyszłe ich wartości, ponieważ różne czynniki o charakterze losowym zarówno społeczne jak i ekonomiczne wpływają na nie. Można powiedzieć, że kursy walut charakteryzują się niepewną informacją. Ważnym jest też to, że wartości tego finansowego szeregu czasowego spełniają wymagania metody: prognozowana zmienna musi przyjmować jedynie wartości dodatnie [9].

W niniejszej pracy analizujemy kurs EURO/USD. Zmienna do analizy oraz okres analizy zostały wybrane na podstawie artykułu Kayacana, Ulutasa oraz Kay-

naka [10], którzy badali kurs EURO/USD w okresie 1 I 2005 do 31 XII 2007 wykorzystując teorię szarych systemów. Celem artykułu jest porównanie wybranych modeli: prostego modelu autoregresyjnego rzędu I, modelu liniowego, modeli wielomianowych stopnia 2 oraz 3 oraz modelu potęgowego z szarym modelem. W analogii do teorii szarych modeli, inne testowane w pracy modele są budowane na podstawie wektorów danych początkowych o niewielkich długościach. Pomijamy w ten sposób problem związany z nieliniowością i niestacjomnarnością szeregu. Badając, który z przedstawionych modeli może być stosowany z większym powodzeniem w prognozowaniu kursu Euro/USD, jako miarę wykorzystujemy średnie błędy prognoz wygasłych o różnych zasięgach uzyskiwanych na podstawie różnych długości wektorów danych początkowych.

Dla wszystkich analizowanych w pracy modeli wprowadzamy następujące oznaczenia. Niech  $(x_t)_{t=1}^N$ , gdzie  $N \geq 4$  będzie ciągiem liczb dodatnich - tutaj wartości kursu EUR/ USD. Symbolem

$$x_t^{[n,p]}, \text{ gdzie } p, n \in \mathbb{N}, 5 \leq p+n \leq t \leq N,$$

oznaczamy prognozę wartości  $x_t$  uzyskaną na podstawie danych wybranych ze zbioru

$$\{x_{t-p-n+1}, x_{t-p-n+2}, \dots, x_{t-p}\},$$

gdzie  $n, n \geq 4$  [9] jest szerokością okna, zaś  $p$  zasięgiem prognozy. W niniejszej pracy  $4 \leq n \leq 15$ , zaś  $p = 1, 2, 3, 4, 5$ . Liczbę

$$\delta_t^{[n,p]} = 100 \frac{|x_t - x_t^{[n,p]}|}{x_t} \quad [\%]$$

nazywamy procentowym błędem względnym prognozy, zaś

$$\delta_{\text{srd}}^{[n,p]} = \frac{1}{N - n - p + 1} \sum_{t=n+p}^N \delta_t^{[n,p]} \quad (1.1)$$

nazywamy średnim błędem prognoz wygasłych w całym analizowanym okresie.

## 2 Prognoza z użyciem teorii szarych modeli GM(1,1)

W niniejszej pracy rozpatrywane będą jedynie szare modele typu  $GM(1,1)$  – modele opisywane za pomocą równania różniczkowego rzędu pierwszego z jedną zmienną zależną od czasu o parametrach  $a, b$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \quad (2.1)$$

Przyszłe wartości szeregów czasowych są wyznaczane z wykorzystaniem niewielkiego zbioru danych zwanym oknem. Liczbę elementów tego zbioru oznaczamy w pracy przez  $n$ ,  $n \geq 4$  i nazywamy szerokością okna.

Niech  $X^{(0)}$  oznacza ciąg pierwotnych danych przyjmujących jedynie wartości dodatnie:

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)), \quad n \geq 4,$$

gdzie

$$x^{(0)}(1) = x_{t-p-n+1}, \quad x^{(0)}(2) = x_{t-p-n+2}, \quad \dots, \quad x^{(0)}(n) = x_{t-p}.$$

Zastosowanie operatora AGO (Accumulating Generator Operator [9]) powoduje wygładzenie danych i prowadzi do uzyskania ciągu rosnącego o wartościach:

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)), \quad n \geq 4$$

gdzie

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Następnie tworzymy ciąg  $Z^{(1)}$  na podstawie ciągu  $X^{(1)}$ :

$$Z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)), \quad n \geq 4,$$

gdzie

$$z^{(1)}(k) = 0, 5x^{(1)}(k) + 0, 5x^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Równanie różniczkowe (2.1) w tych oznaczeniach ma postać [9]:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

gdzie parametry  $a, b$  wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów z równania

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Użycie operatora IAGO - (Inverse Accumulating Generator Operator [9]) pozwala otrzymać wartości prognozowane danego szeregu czasowego  $x_t^{[n,p]}$  dla  $t = n + p$ :

$$x_t^{[n,p]} = x^{(0)}(n+p) = \left[ x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-a(n+p-1)} (1 - e^a)$$

### 3 Inne wybrane typy modeli

#### Model liniowy

Dla  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, 5\}$  i każdego  $t = n + p, n + p + 1, \dots, N$  szacujemy (MNK) parametry  $c, a \in \mathbb{R}$  modelu

$$x_{t-p-n+s} = c + as + \varepsilon_s, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

i wyznaczamy prognozy

$$x_t^{[n,p]} = c + a(n+p) \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, 4, 5.$$

#### Model wielomianowy stopnia 2

Dla  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$ ,  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i każdego  $t = n + p, n + p + 1, \dots, N$  szacujemy (MNK) parametry  $c, b, a \in \mathbb{R}$  modelu

$$x_{t-p-n+s} = c + bs + as^2 + \varepsilon_s, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

i wyznaczamy prognozy

$$x_t^{[n,p]} = c + b(n+p) + a(n+p)^2 \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, 4, 5.$$

**Model wielomianowy stopnia 3**

Dla  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$ ,  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i każdego  $t = n + p, n + p + 1, \dots, N$  szacujemy (MNK) parametry  $d, c, b, a \in \mathbb{R}$  modelu

$$x_{t-p-n+s} = d + cs + bs^2 + as^3 + \varepsilon_s, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

i wyznaczamy prognozy

$$x_t^{[n,p]} = d + c(n+p) + b(n+p)^2 + a(n+p)^3 \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, 4, 5.$$

**Modele potęgowe****Model potęgowy I**

Dla  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$ ,  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i każdego  $t = n + p, n + p + 1, \dots, N$  wyznaczamy

$$a = \frac{\ln x_{t-p} - \ln x_{t-p-n+1}}{\ln(t-p) - \ln(t-p-n+1)}, \quad c = \sqrt{\frac{x_{t-p} x_{t-p-n+1}}{(t-p)^a (t-p-n+1)^a}},$$

a następnie

$$x_t^{[n,p]} = ct^a.$$

**Model potęgowy II**

Dla  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$ ,  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i każdego  $t = n + p, n + p + 1, \dots, N$  wyznaczamy

$$a = \frac{\ln x_{t-p} - \ln x_{t-p-n+1}}{\ln(n-1)}, \quad c = n^{-a} x_{t-p},$$

a następnie

$$x_t^{[n,p]} = c(n+p)^a.$$

**Pochodzenie:** Dla każdego ciągu

$$\xi_s = cs^a, \quad \text{gdzie } s \in \mathbb{N}, \quad c > 0 \neq a$$

mamy

$$\frac{\ln \xi_s - \ln \xi_1}{\ln s} = \frac{\ln c + a \ln s - \ln c}{\ln s} = a \text{ oraz } s^{-a} \xi_s = c.$$

### Model potęgowy III (jednoparametrowy)

Dla  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$ ,  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i każdego  $t = n + p, n + p + 1, \dots, N$  wyznaczamy

$$a = \frac{\ln x_{t-p} - \ln x_{t-p-n+1}}{\ln n},$$

a następnie

$$x_t^{[n,p]} = x_{t-p-n+1} (n+p)^a.$$

**Pochodzenie:** Dla każdego ciągu

$$\xi_s = cs^a, \text{ gdzie } s \in \mathbb{N}, c > 0 \neq a$$

mamy

$$\xi_1 = c1^a = c, \quad \frac{\xi_s}{\xi_1} = s^a, \quad \xi_s = \xi_1 s^a \text{ dla } s \in \mathbb{N},$$

$$a = \frac{\ln \xi_s - \ln \xi_1}{\ln s} \text{ dla } s \geq 2.$$

### Modele autoregresyjne

#### Model autoregresyjny I

Dla  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$ ,  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i każdego  $t = n + p, n + p + 1, \dots, N$  wyznaczamy

$$x_t^{[1,p]} = x_{t-p}, \text{ gdy } 1 \leq t-p \leq N,$$

$$x_t^{[2,p]} = x_{t-p} + x_{t-p} - x_{t-p-1} = 2x_{t-p} - x_{t-p-1}, \text{ gdy } 2 \leq t-p \leq N,$$

$$x_t^{[3,p]} = x_{t-p} + \frac{x_{t-p} - x_{t-p-2}}{2} = \frac{3x_{t-p} - x_{t-p-2}}{2}, \text{ gdy } 3 \leq t-p \leq N,$$

$\vdots$

$$x_t^{[n,p]} = x_{t-p} + \frac{x_{t-p} - x_{t-p-n+1}}{n-1} = \frac{nx_{t-p} - x_{t-p-n+1}}{n-1}, \text{ gdy } n \leq t-p \leq N.$$

**Model autoregresyjny II (bez parametrów)**

Dla  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i każdego  $t = 4 + p, 4 + p + 1, \dots, N$  wyznaczamy

$$x_t^{[p]} = x_{t-p}.$$

**4 Ocena jakości wybranych modeli**

Oceny jakości wybranych modeli dokonujemy na podstawie średniego procentowego błędu względnego danego wzorem (1.1). Ponadto wyznaczamy procentowy udział błędów o wartościach mniejszych niż  $m\%$  dla  $m = 1, 2, \dots, 5$ :

$$\frac{\ell_m^{[n,p]}}{N - n - p + 1},$$

gdzie

$$\ell_m^{[n,p]} = \# \left\{ t \in \{n + p + 1, n + p + 2, \dots, N\} : \delta_t^{[n,p]} \leq m \right\}.$$

**5 Wyniki**

W niniejszym rozdziale zostały przedstawione wybrane wyniki dla analizowanych w pracy modeli opisujących kurs EUR/USD na podstawie danych z okresu 1 I 2005 - 30 XII 2007. Wyznaczono średnie procentowe błędy względne prognoz w zakresie od  $t + 1$  do  $t + 5$  dla różnych szerokości okien od  $n = 4$  do  $n = 15$ . Po pierwsze, wybrane modele zostały przebadane pod względem wyznaczenia optymalnych wartości  $n, p$ , czyli takich, dla których uzyskuje się najmniejszą możliwą wartość średniego procentowego błędu względnego. Wartości te wraz z odpowiadającymi im wartościami średniego procentowego błędu względnego prognoz zebrano w tabeli 1.

Na podstawie zebranych wyników można stwierdzić, że najmniejsze procentowe średnie błędy względne prognoz odpowiadają prognozom jednodniowym dla wszystkich analizowanych w pracy modeli. Dla  $p = 1$  w przypadku szarych modeli oraz modeli liniowych wystarczy niewielka liczba obserwacji do budowy tych



**Tabela 1:** Wartości parametrów  $n, p$  odpowiadające najmniejszym wartościom  $\delta_{srd}^{[n,p]}$  dla wybranych modeli

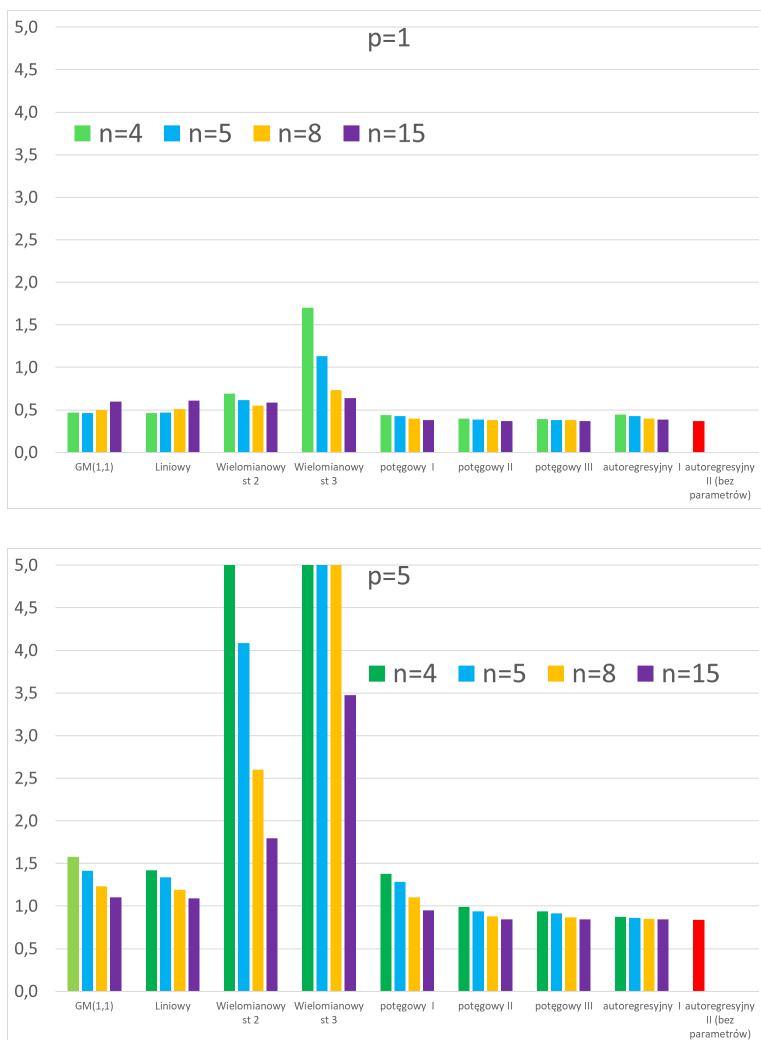
Nazwa modelu	$n$	$p$	$\delta_{srd}^{[n,p]}$
$GM(1, 1)$	5	1	0,46
liniowy	4	1	0,46
wielomianowy st 2	8	1	0,55
wielomianowy st 3	15	1	0,64
potęgowy I	15	1	0,38
potęgowy II	15	1	0,37
potęgowy III	15	1	0,37
autoregresyjny I	15	1	0,38
autoregresyjny II	–	1	0,37

modeli. Do budowy modeli potęgowych i autoregresyjnych potrzeba większej liczby obserwacji. Najmniejsze wartości błędów osiąga się dla modeli potęgowych i autoregresyjnych.

W przypadku prognoz długoterminowych potrzeba większej liczby obserwacji w przypadku wszystkich analizowanych w pracy modeli. Stosowne wyniki zebrano w tabeli 2. Również i w tym przypadku modele potęgowe i autoregresyjne okazały się lepsze niż szare modele.

**Tabela 2:** Najmniejsze wartości parametru  $n$  odpowiadające  $p = 5$  oraz najmniejszej wartości  $\delta_{srd}^{[n,5]}$ 

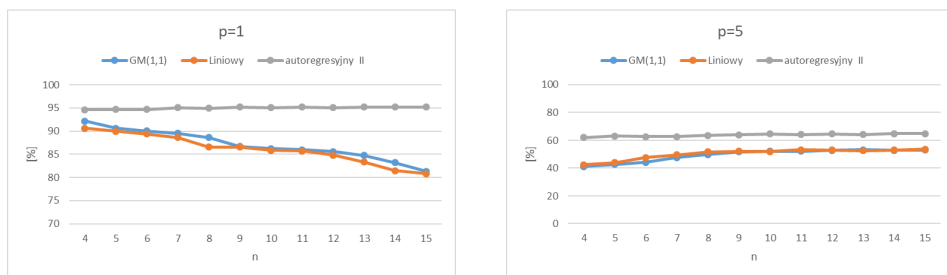
Nazwa modelu	$n_{min}$	$\delta_{srd}^{[n,5]}$
$GM(1, 1)$	15	1,10
liniowy	15	1,09
wielomianowy st 2	15	1,80
wielomianowy st 3	15	3,47
potęgowy I	15	0,95
potęgowy II	15	0,85
potęgowy III	13	0,85
autoregresyjny I	14	0,84
autoregresyjny II	–	0,84



**Rysunek 1:** Średnie błędy prognoz dla  $p = 1$  (na górze) i dla  $p = 5$  (na dole) przy różnych  $n$

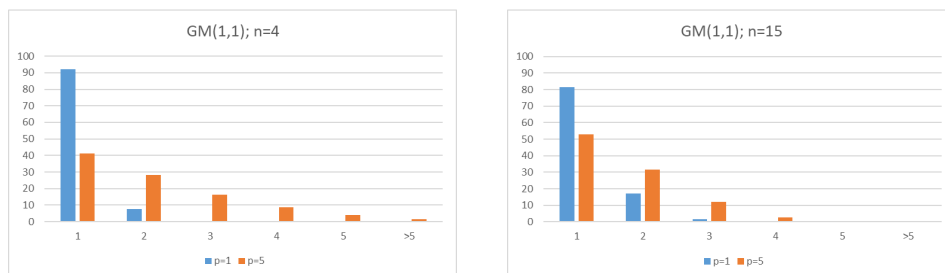
Na rysunku 1 przedstawiono wpływ szerokości okna na wartości średnich błędów względnych prognoz wygasłych dla analizowanych w pracy modeli dla  $p = 1$  (na górze) oraz dla  $p = 5$  (na dole). Na podstawie rysunku można stwierdzić, że

w przypadku prognoz jednodniowych wpływ szerokości okna jest nieznaczny dla niemalże wszystkich analizowanych w pracy modeli. W przypadku zaś prognozy pięciodniowej jedynie dla modeli potęgowych, za wyjątkiem potęgowego I, i autoregresyjnych nie obserwuje się wpływu szerokości okna na wartość średnich błędów prognoz. Modele wielomianowe nie powinny być stosowane do wyznaczenia prognozy, zwłaszcza prognozy długoterminowej. Wartości średniego błędu względnego dla modelu wielomianowego stopnia 3 znacząco przekraczają 5% dla małej szerokości okien, w przypadku modelu wielomianowego stopnia 2 granica 5% została przekroczona dla  $n = 4$ .

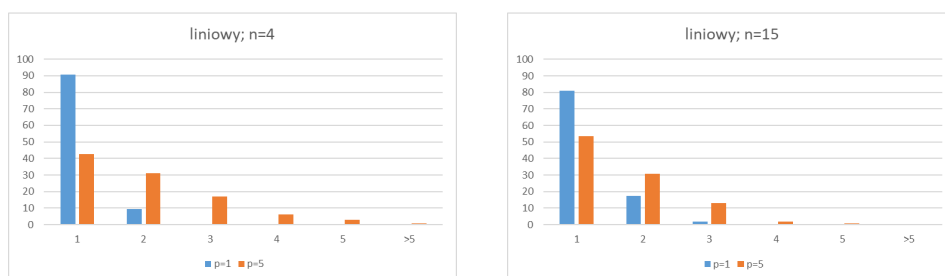


**Rysunek 2:** Udział jednocentowych błędów względnych prognoz  $p = 1$  (po lewej) i dla  $p = 5$  (po prawej) w zależności od  $n$

Na rysunku 2 przedstawiono wpływ szerokości okna na udział jednocentowych błędów względnych prognoz dla  $p = 1$  (po lewej) i  $p = 5$  (po prawej) dla wybranych modeli dających zbliżone wartości średniego procentowego błędu względnego. Na podstawie rysunku można stwierdzić, że wyniki dla modelu  $GM(1,1)$  oraz modelu liniowego są podobne: w przypadku prognozy jednodniowej wraz ze wzrostem szerokości okna procentowy udział błędów jednocentowych maleje, w przypadku prognozy pięciodniowej na odwrót. W przypadku modelu potęgowe procentowy udział jednocentowych błędów względnych prognoz niemalże nie zależy od szerokości okna  $n$ .

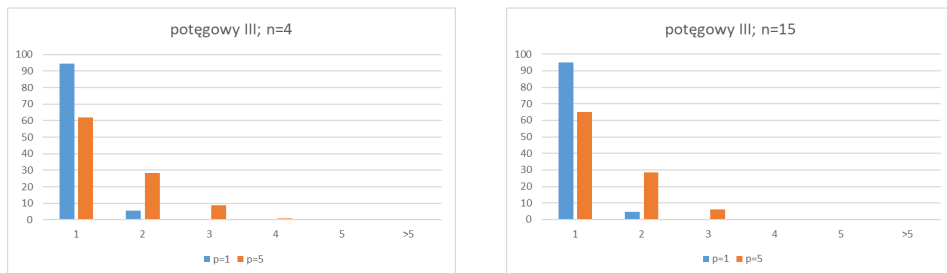


**Rysunek 3:** Rozkłady błędów względnych prognoz dla  $n = 4$  (po lewej) i dla  $n = 15$  (po prawej) dla  $p = 1$  oraz  $p = 5$  dla modelu  $GM(1,1)$

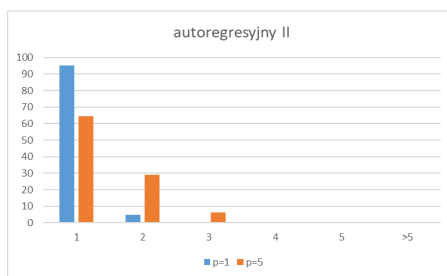


**Rysunek 4:** Rozkłady błędów względnych prognoz dla  $n = 4$  (po lewej) i dla  $n = 15$  (po prawej) dla  $p = 1$  oraz  $p = 5$  dla modelu liniowego

Na rysunkach 3, 4, 5, 6 przedstawiono porównanie rozkładów procentowych błędów względnych dla prognozy jednodniowej oraz dla prognozy pięciodniowej dla modeli  $GM(1,1)$  (rys. 3), liniowego (rys. 4), potęgowego III (rys. 5) oraz autoregresyjnego II (rys. 6). Na podstawie rysunku można stwierdzić, że dla prognozy jednodniowej większy udział jednoprognoznych błędów względnych prognoz dla modeli  $GM(1,1)$  oraz modelu liniowego obserwuje się dla szerokości okna  $n = 4$



**Rysunek 5:** Rozkłady błędów względnych prognoz dla  $n = 4$  (po lewej) i dla  $n = 15$  (po prawej) dla  $p = 1$  oraz  $p = 5$  dla modelu potęgowego III



**Rysunek 6:** Rozkłady błędów względnych prognoz dla  $p = 1$  oraz  $p = 5$  dla modelu autoregresyjnego

niż dla  $n = 15$ . Im większa liczba obserwacji, na podstawie której budowany jest model szarego szeregu, tym udział błędów względnych prognoz jednodniowych mniejszych niż 1% jest mniejszy. W przypadku przedstawionych na rysunku modeli nie obserwuje się błędów prognoz jednodniowych równych lub większych niż 5%. Bardzo podobne wyniki jak w przypadku modelu  $GM(1, 1)$  otrzymuje się dla modelu liniowego.

Wyniki dla modelu potęgowego nie zależą od szerokości okna i są podobne jak w przypadku modelu autoregresyjnego. W przypadku tych modeli dla prognoz jednodniowych nie obserwuje się błędów większych niż 2%, w przypadku prognoz pięciodniowych niż 3%. Największy udział jednocentowych błędów względnych prognoz obserwuje się dla modelu autoregresyjnego bez parametrów.

## 6 Wnioski

Na podstawie uzyskanych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- Stosowanie szarych modeli do prognozowania kursu EUR/USD jest uzasadnione. Można zauważyć, że prognozy są najtrafniejsze dla modeli z oknami o małej szerokości, czyli wystarczy niewielka liczba obserwacji do dokonania predykcji.
- $GM(1, 1)$  i model liniowy dają porównywalne wyniki.
- Dla modelu  $GM(1, 1)$  optymalne wartości parametrów są równe  $n = 5$ ,  $p = 1$ . Dla  $n = 5$  oraz  $p = 1$  rozważane modele potęgowe oraz autoregresyjne są obciążone mniejszym błędem.
- Błędy prognoz zależą od szerokości okna. Im mniejsze okno tym mniejsze błędy prognozy jednodniowej dla modeli  $GM(1, 1)$  oraz modelu liniowego, dla pozostałych modeli na odwrót. Z kolei im większe okno tym mniejsze błędy prognozy pięciodniowej dla wszystkich analizowanych w pracy modeli.
- Modele wielomianowe zarówno stopnia 2 jak i 3 nie powinny być stosowane w prognozowaniu kursów EUR/ USD.
- Najlepszym modelem spośród wszystkich analizowanych w pracy modeli jest model autoregresyjny bez parametrów.

Inspiracją do powstania tej pracy był przede wszystkim artykuł [10]. Autorzy wspomnianej pracy posługując się szarymi modelami z różnymi poprawkami wyznaczali średnie błędy prognoz dla kursu EUR/USD. W niniejszej pracy pokazujemy, że można zastosować dużo prostsze modele uzyskując lepsze wyniki.

## Literatura

- [1] S. Barczak, Zastosowania modeli szarych klasy GM(1, 1) w analizie finansowych szeregów czasowych. Badania symulacyjne, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 862, Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, 75, 2015, 31–39.
- [2] R. Bauer, *Genetic Algorithms and Investment Strategies*, John Wiley & Sons, Inc, New York 1994.
- [3] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, *Time series analysis: Forecasting and control*, CA: Holden Day, San Francisco, 1976.
- [4] Gately E., *Sieci neuronowe. Prognozowanie finansowe i projektowanie systemów transakcyjnych*, WIG-Press, Warszawa 1999.
- [5] Che-Chiang Hsu, Chia-Yon Chen (2003), Applications of improved grey prediction model for power demand forecasting, *Energy Conversion and Management*, 44, 2003, 2241–2249.
- [6] J. L. Deng, Control Problems of Grey System, *Systems and Controls Letters*, 1, 1982, 288–294.
- [7] J. L. Deng, Grey System Fundamental Metod, *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, Wuhan, China, 1982.
- [8] J. L. Deng, Grey Systems Control, *Journal of Huazhong University of Science and Technology China*, 1982.

- 
- [9] J. L. Deng, Introduction to Grey System Theory, *The Journal of Grey System*, (1), 1989, 1–24.
- [10] E. Kayacan, B. Ulutas, O. Kaynak, Grey system theory-based models in time series prediction, *Expert Systems with Applications*, 37, 2010, 1784–1789.
- [11] E. Kozłowski, *Analiza i identyfikacja szeregów czasowych*, Politechnika Lubelska, Lublin, 2015.
- [12] Liu S., Lin Y., *Grey Systems. Theory and Applications*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2010.
- [13] M. Nowak, Zastosowanie szarego modelu GM(1,1) w predykcji krótkich szeregów finansowych na przykładzie przedsiębiorstw sektora produkcji materiałów budowlanych, *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej*, 70, 2016, 155–163.
- [14] D. Rutkowska, M. Piliński, L. Rutkowski, *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, PWN, Warszawa 1997.
- [15] G. Sun, Prediction of Vegetable Yields by Grey Model GM(1,1), *The Journal of Grey System*, 2, 1991.
- [16] R. Tsay, *Analysis of Financial Time Series*, Wiley&Sons, Chicago, 2002.
- [17] D. Witkowska, *Sztuczne sieci neuronowe i metody statystyczne. Wybrane zagadnienia finansowe*, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa 2002.
- [18] CL. Yue, L. Wang, Grey-Markov Forecast of the Stock Price, *Syst Eng*, 16, 2000, 54–59.





# Wielomian chromatyczny jako narzędzie klasyfikacji hipergrafów

Ewa Łazuka<sup>1</sup>

## Streszczenie

W rozdziale tym przeanalizowano problem klasyfikacji hipergrafów poprzez ich wielomiany chromatyczne. Przedstawiono większość znanych wyników z zakresu chromatyczności hipergrafów. Zaprezentowano interpretację współczynników wielomianów chromatycznych oraz postacie tych wielomianów w przypadku konkretnych rodzajów hipergrafów. Opisano również klasy hipergrafów chromatycznie jednoznacznych i  $h$ -chromatycznie jednoznacznych.

## Abstract

The chapter deals with the problem of hypergraphs classification by their chromatic polynomials. Most of the known results dealing with the chromaticity of hypergraphs are presented. The interpretation of chromatic coefficients and the chromatic polynomials of different types of hypergraphs are described. Classes of chromatic unique and  $h$ -chromatic unique hypergraphs are also discussed.

**Słowa kluczowe:** chromatyczność hipergrafów, hipergrafy chromatycznie jednoznaczne

---

<sup>1</sup>Katedra Matematyki Stosowanej; Wydział Podstaw Techniki; Politechnika Lubelska  
e-mail: e.lazuka@pollub.pl

## 1 Wstęp

Jednym z działów matematyki, który znalazł bardzo szerokie zastosowania w innych dziedzinach nauk jest niewątpliwie teoria grafów. Wobec coraz to nowych sposobów wykorzystywania teorii związanej z grafami, w ostatnich stuleciach zainteresowanie naukowców tymi obiektami rosło w bardzo szybkim tempie. Do chwili obecnej wiele problemów, które można było przenieść na grunt teorii grafów, zostało rozwiązanych. Równocześnie sformułowano liczne problemy otwarte, których nie można opisać i rozwiązać przy pomocy grafów, gdyż są one trudniejsze od dotychczasowych i wymagają bardziej skomplikowanych modeli matematycznych. Dlatego naukowcy coraz częściej jako temat swoich badań wybierają hipergrafy.

Literatura naukowa z ostatnich dwudziestu lat jest dowodem na to, że hipergrafy znajdują szerokie zastosowania w praktyce. Główną siłą napędową badań dotyczących hipergrafów była przez długie lata chemia molekularna i fizyka kwantowa. Okazało się bowiem, że grafy nie są w stanie w adekwatny sposób opisać związków chemicznych o nieklasycznej strukturze, np. molekuł z wiązaniami policentrycznymi, w tym również związków organiczno-metalicznych. Problemy z opisem takich struktur przestają istnieć, jeżeli do ich opisu użyjemy hipergrafów. Różne sposoby reprezentacji hipergrafowej struktur molekularnych były rozważane m.in. w [12, 14–17]. Dostarczają one dodatkowych argumentów, oprócz naturalnej ciekawości poznawczej matematyka, aby prowadzić badania nad teorią hipergrafów.

Wiemy także, że hipergrafy okazały się pomocne w rozwiązywaniu problemów w informatyce czy też budowie maszyn. Do najciekawszych zastosowań hipergrafów w technice należą między innymi: redukcja liczby zmiennych w bazach danych, redukcja pojemności pamięci w sterownikach mikroprogramowych, szeregowanie zadań wieloprosesowych czy też ustalanie kolejności montażu części maszyn [9, 18]. Ciągłe odkrywane są nowe pola do wykorzystania teorii hipergrafów, dlatego badanie ich własności staje się zarówno ciekawym, jak i użytecznym zadaniem.

Jedną z metod analizy hipergrafów jest ich kolorowanie oraz związany z tym zagadnieniem wielomian chromatyczny. Określa on liczbę wszystkich możliwych

$\lambda$ -kolorowań konkretnego hipergrafu. Jednak, jak się okazuje, może być on również wykorzystany w celu klasyfikacji hipergrafów.

Pojęcie wielomianu chromatycznego grafu pojawiło się w matematyce stosunkowo niedawno. Wyłoniło się przy okazji prób udowodnienia hipotezy czterech kolorów. W swojej pracy z 1912 roku zatytułowanej „*A determinant formula for the number of ways of colouring a map*” Birkhoff zdefiniował funkcję  $f(M, \lambda)$ , która wszystkim całkowitym dodatnim liczbom  $\lambda$  przyporządkowuje liczbę  $\lambda$ -kolorowań mapy  $M$ . Przy pomocy funkcji  $f(M, \lambda)$  próbowano udowodnić, iż dla każdej mapy  $M$  zachodzi  $f(M, 4) > 0$ , co dawałoby potwierdzenie hipotezy czterech kolorów. Okazało się, iż funkcja  $f(M, \lambda)$  jest w istocie wielomianem.

W roku 1932 Whitney podał wiele ciekawych rezultatów dotyczących wielomianów chromatycznych grafów [28, 29]. W latach sześćdziesiątych Read próbował odpowiedzieć na pytanie, jakie warunki musi spełniać wielomian, aby był wielomianem chromatycznym pewnego grafu [19]. Zastanawiał się on również, czy postać wielomianu chromatycznego zależy w jakiś sposób od liczby jego wierzchołków i krawędzi oraz czy współczynniki tego wielomianu muszą być liczbami całkowitymi. W późniejszych latach tematyka z zakresu chromatyczności grafów rozwinęła się w szybkim tempie i obecnie jest bardzo rozległa.

Zainteresowanie matematyków przyciągnęła również tematyka hipergrafów, która rozwinęła się w latach sześćdziesiątych XX wieku. Wiele znanych zagadnień dotyczących grafów przeniesiono na hipergrafy, jednak niektórych problemów nie dało się łatwo uogólnić.

Pojęcie  $\lambda$ -kolorowania hipergrafu pojawiło się w publikacji Tomescu z 1968 roku „*Sur le problème du coloriage des graphes généralisés*”. Natomiast Jones w [13] jako pierwszy poruszył tematykę wielomianów chromatycznych hipergrafów. W artykule tym rozwiązał on kilka problemów dotyczących hipergrafów za pomocą ich redukcji do grafów. Pierwsze własności wielomianów chromatycznych hipergrafów zostały podane przez Dohmena [10, 11] w latach 1993-1995. Tomescu [20] wyznaczył kilka klas liniowych hipergrafów chromatycznie jednoznacznych. Natomiast pierwsze nieliniowe hipergrafy chromatycznie jednoznaczne wskazali Borowiecki

i Łazuka w publikacji [7]. Hipergrafy te nazwane zostały słonecznikami. W późniejszych latach Tomescu [22] uogólnił pojęcie słoneczników oraz udowodnił kilka twierdzeń dotyczących chromatycznej jednoznaczności tych hipergrafów. Znanych jest kilka klas hipergrafów chromatycznie jednoznacznych, ale, jak stwierdził Tomescu [21], nietrywialne klasy hipergrafów chromatycznie jednoznacznych są bardzo rzadkie. Obecnie tematyka z zakresu chromatyczności hipergrafów ciągle się rozwija.

Wielomian chromatyczny i sposoby klasyfikacji hipergrafów poprzez ten wielomian są głównym przedmiotem rozważań niniejszego rozdziału, który składa się z czterech zasadniczych części.

W części pierwszej zaprezentowane zostały podstawowe definicje wykorzystywane w dalszej części pracy oraz twierdzenia pozwalające wyznaczyć wielomiany chromatyczne grafów i hipergrafów. Podany został również przykład praktycznego wyznaczania wielomianu chromatycznego hipergrafu.

Część druga dotyczy współczynników wielomianów chromatycznych hipergrafów. Na wstępie podane zostały w nim własności hipergrafów wynikające z postaci ich wielomianów chromatycznych. Następnie zaprezentowano warunki, które determinują wartości pewnych współczynników. Dodatkowo przedstawiono zagadnienia dotyczące współczynników wielomianów chromatycznych liniowych hipergrafów jednorodnych.

W części trzeciej przedstawione zostały postaci wielomianów chromatycznych konkretnych klas hipergrafów, jak również klasy hipergrafów chromatycznie charakteryzowalnych oraz chromatycznie zamkniętych.

Część czwarta prezentuje kluczowe zagadnienia dotyczące klasyfikacji hipergrafów z wykorzystaniem wielomianu chromatycznego. Przedstawione zostały w nim znane klasy hipergrafów chromatycznie jednoznacznych oraz rodzaje hipergrafów, które nie są chromatycznie jednoznaczne.

W prezentowanym rozdziale uwzględniono wszystkie najważniejsze artykuły naukowe dotyczące wielomianów chromatycznych hipergrafów.

## 2 Wprowadzenie do teorii grafów i hipergrafów

W podrozdziale tym podamy wstępne definicje i twierdzenia dotyczące grafów i hipergrafów oraz ich wielomianów chromatycznych. Zagadnienia dotyczące grafów podane zostaną wybiórczo, gdyż temat niniejszej pracy skupia się wokół hipergrafów. Zaprezentowane zostaną zatem tylko te definicje i twierdzenia, które są niezbędne w dalszych rozważaniach.

### 2.1 Grafy

*Grafem prostym*  $G$  nazywamy parę  $(V, E)$ , gdzie  $V$  jest dowolnym, niepustym i skończonym zbiorem obiektów, zaś  $E$  zbiorem dwuelementowych, parami różnych podzbiorów zbioru  $\{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ . Najczęściej zamiast  $V$  i  $E$  będziemy pisać  $V(G)$  oraz  $E(G)$ , aby wskazać konkretny graf, do którego odnoszą się owe zbiory. Elementy zbioru  $V(G)$  nazywamy *wierzchołkami* grafu  $G$ , natomiast elementy zbioru  $E(G)$  nazywamy *krawędziami* tego grafu. Krawędź  $e$  oznaczać będziemy jako zbiór  $\{u, v\}$  lub jako parę  $uv$ . W dalszej części pracy przez graf rozumieć będziemy graf prosty.

Jeżeli istnieje krawędź  $uv \in E(G)$ , to mówimy, że wierzchołki  $u$  i  $v$  są *sąsiednie*. Mówimy również, że krawędź  $uv$  łączy wierzchołki  $u$  i  $v$  oraz że wierzchołki te są *incydentne* z krawędzią  $uv$ . *Stopniem wierzchołka*  $u$  nazywamy liczbę krawędzi z nim incydentnych. Wierzchołek stopnia zero nazywamy wierzchołkiem *izolowanym*.

Jeżeli  $E(G) = \emptyset$ , to graf  $G$  nazywamy *grafem bezkrawędziowym*. Graf bezkrawędziowy zawierający  $n$  wierzchołków oznaczamy przez  $O_n$ .

*Grafem pełnym* nazywamy graf, w którym każde dwa różne wierzchołki są sąsiednie. Graf pełny o  $n$  wierzchołkach oznaczamy symbolem  $K_n$ .

Wszystkie wymienione definicje zostały zaczerpnięte z [30].

## 2.2 Hipergrafy

*Hipergrafem*  $H$  nazywamy parę  $H = (V, E)$ , gdzie  $V$  jest dowolnym niepustym i skończonym zbiorem, zaś  $E$  rodziną dowolnych niepustych podzbiorów zbioru  $V$ . Hipergrafy stanowią więc naturalne rozszerzenie pojęcia grafów. Analogicznie jak w przypadku grafów stosujemy oznaczenia:

- $V(H)$  – zbiór wierzchołków hipergrafu  $H$ ;
- $E(H)$  – zbiór krawędzi hipergrafu  $H$ .

Elementy zbioru  $E(H)$  niekiedy nazywane są również *hiperkrawędziami*. Przez  $H - e$  rozumieć będziemy hipergraf powstały z  $H$  poprzez usunięcie ze zbioru  $E(H)$  krawędzi  $e$ .

Jeżeli liczba wierzchołków należących do krawędzi  $e$  jest równa  $r$ , tzn.  $|e| = r$ , to krawędź  $e$  nazywamy  *$r$ -krawędzią*. 1-krawędź nazywamy pętlą. Przez  $E_r(H)$  oznaczać będziemy zbiór wszystkich  $r$ -krawędzi hipergrafu  $H$ . Równość  $e_i = e_j$  dla  $i \neq j$  oznacza, że krawędzie  $e_i$  oraz  $e_j$  są krawędziami *wielokrotnymi*.

Hipergraf nazywamy *prostym*, jeśli nie ma on pętli ani krawędzi wielokrotnych.

Hipergraf  $H$  nazywamy  *$r$ -jednorodnym* lub  *$r$ -hipergrafem*, jeżeli każda jego krawędź  $e \in E(H)$  jest  $r$ -krawędzią. Taki hipergraf oznaczać będziemy symbolem  $H^r$ .

Jeżeli w hipergrafie każde dwie krawędzie nie przecinają się w więcej niż jednym wierzchołku, to hipergraf ten nazywamy *liniowym*.

*Stopniem wierzchołka*  $u \in V(H)$  nazywamy liczbę krawędzi zawierających ten wierzchołek i oznaczamy symbolem  $d_H(u)$ . Wierzchołek o stopniu jeden nazywamy *wiszącym*.

*Rzędem* hipergrafu  $H$  nazywamy liczbę  $n(H) = |V(H)|$  jego wierzchołków, natomiast jego *rozmiarem* liczbę  $m(H) = |E(H)|$  jego krawędzi. Jeżeli z kontekstu wynika jednoznacznie, o jakim grafie jest mowa, to piszemy krótko  $n$  oraz  $m$ .

*Sumą hipergrafów*  $H_1$  i  $H_2$  nazywamy hipergraf  $H_3 = H_1 \cup H_2$  o tej własności, że  $V(H_3) = V(H_1) \cup V(H_2)$  oraz  $E(H_3) = E(H_1) \cup E(H_2)$ . Iloczyn  $H_1 \cap H_2$  hipergrafów definiujemy analogicznie.

Jeśli  $V(H_2) \subseteq V(H_1)$  oraz  $E(H_2) \subseteq E(H_1)$ , to hipergraf  $H_2$  nazywamy *podhipergrafem* hipergrafu  $H_1$ . W takiej sytuacji piszemy  $H_2 \subseteq H_1$ . Jeżeli w szczególności zachodzi równość  $V(H_2) = V(H_1)$ , to podhipergraf  $H_2$  nazywamy *podhipergrafem rozpinającym* hipergrafu  $H_1$ .

Jeżeli zbiór  $E(H_2)$  zawiera pewne krawędzie należące do  $E(H_1)$  takie, że do zbioru  $V(H_2)$  należą wszystkie wierzchołki zawarte w tych krawędziach oraz nie należą do niego żadne inne wierzchołki, to  $H_2$  nazywamy *podhipergrafem indukowanym krawędziowo* hipergrafu  $H_1$ . *Hipergraf indukowany wierzchołkowo* definiujemy analogicznie. Przez symbol  $H[W]$  rozumiemy podhipergraf hipergrafu  $H$  indukowany przez zbiór  $W$  ( $W$  może być podzbiorem zbioru wierzchołków bądź zbioru krawędzi hipergrafu  $H$ ).

Mówimy, że dwa hipergrafy  $H_1$  oraz  $H_2$  są *izomorficzne*, jeśli istnieje taka bijekcja  $\psi: V(H_1) \rightarrow V(H_2)$ , że dla dowolnej krawędzi  $e \in E(H_1)$  prawdziwa jest równoważność  $e \in E(H_1) \Leftrightarrow \psi(e) \in E(H_2)$ , gdzie  $\psi(e) = \bigcup_{u \in e} \psi(u)$ .

*Cyklem* długości  $p$  w hipergrafie  $H$  nazywamy podhipergraf tego hipergrafu, składający się z  $p$  różnych krawędzi  $e_1, e_2, \dots, e_p \in E(H)$  oraz wszystkich wierzchołków w nich zawartych, przy czym istnieje  $p$  różnych wierzchołków  $v_1, v_2, \dots, v_p$  należących do zbioru  $V(H)$  takich, że  $v_i, v_{i+1} \in e_i$  dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  oraz  $v_1, v_p \in e_p$ . Cykl  $C$  jest *elementarny*, jeżeli  $d_C(v_i) = 2$  dla wszystkich  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  oraz  $d_C(u) = 1$  dla każdego innego wierzchołka  $u \in \bigcup_{i=1}^k e_i$ . Cykl długości  $p$  oznaczać będziemy symbolem  $C_p$ .

Jeżeli hipergraf  $H$  nie zawiera cykli, to nazywamy go *acyklicznym*. W przeciwnym razie jest on *cykliczny*.

Niech  $H$  będzie  $h$ -hipergrafem, który zawiera cykl. *Obwodem*  $g = g(H)$  hipergrafu  $H$  nazywamy długość najkrótszego cyklu, który jest w nim zawarty. Symbol  $c_g(H)$  oznaczać będzie liczbę cykli długości  $g$  zawartych w  $H$ .

*Ścieżką* długości  $p$  w hipergrafie  $H$  nazywamy jego podhipergraf, składający się z  $p$  różnych krawędzi  $e_1, e_2, \dots, e_p$  należących do zbioru  $E(H)$  oraz wszystkich wierzchołków w nich zawartych, przy czym istnieje  $p+1$  różnych wierzchołków  $u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_p = v \in V(H)$  takich, że  $x_{i-1}, x_i \in e_i$  dla wszystkich  $i$ , gdzie



$1 \leq i \leq p$ . Mówimy, że ścieżka łączy wierzchołki  $u$  i  $v$  oraz że wierzchołki te są końcami ścieżki. Ścieżkę nazywamy *elementarną*, gdy spełnia warunki analogiczne jak w przypadku cyklu elementarnego. Ścieżkę długości  $p$  oznaczamy symbolem  $P_p$ .

Hipergraf  $H$  nazywamy *spójnym*, jeżeli każde jego dwa wierzchołki można połączyć ścieżką. Maksymalnie spójne (w sensie zawierania się zbiorów) podhipergrafy hipergrafu  $H$  nazywamy jego *składowymi spójnościami* lub po prostu *składowymi*. Liczbę składowych spójności hipergrafu  $H$  oznaczamy przez  $c(H)$ .

*Hiperdrzewem* nazywamy spójny hipergraf liniowy, który nie zawiera cykli. Hiperdrzewo 2-jednorodne nazywamy *drzewem*. *Hiperlasem* nazywamy hipergraf, którego każda składowa spójności jest hiperdrzewem.

*Hipergrafem jednocyklicznym* nazywamy spójny hipergraf zawierający dokładnie jeden cykl.

Podane w tej części pracy definicje pozyskane zostały z [3, 8, 10, 20].

### 2.3 Wybrane własności wielomianów chromatycznych grafów

Zdefiniujemy teraz pojęcie  $\lambda$ -kolorowania grafu oraz jego wielomianu chromatycznego. Podamy także wybrane twierdzenia dotyczące tego wielomianu, które użyte zostaną w późniejszych rozważaniach dotyczących hipergrafów.

Niech  $G$  będzie grafem oraz niech  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Odwzorowanie  $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$  nazywamy  $\lambda$ -kolorowaniem (*właściwym*) grafu  $G$ , jeżeli dla jego dowolnych sąsiednich wierzchołków  $u$  i  $v$  zachodzi  $f(u) \neq f(v)$  [4]. Elementy zbioru  $\{1, \dots, \lambda\}$  nazywamy *kolorami* lub *barwami*.

Wielomian zmiennej  $\lambda$  określający liczbę  $\lambda$ -kolorowań grafu  $G$  nazywamy *wielomianem chromatycznym* tego grafu [4]. Wielomian ten oznaczamy przez  $f(G, \lambda)$ .

Pierwsze z zaprezentowanych twierdzeń pokazuje, jak w ogólnym przypadku, poprzez zsumowanie wielomianów chromatycznych odpowiednich grafów bezkrawędziowych lub grafów pełnych, można wyznaczyć wielomian chromatyczny dowolnego grafu.

**Twierdzenie 2.1** ([19]). *Dla dowolnego grafu  $G$  prawdziwy jest związek*

$$f(G, \lambda) = f(G', \lambda) + f(G'', \lambda), \quad (2.1)$$

gdzie  $G'$  oznacza graf powstały z  $G$  przez dodanie krawędzi łączącej dowolne dwa niesąsiednie wierzchołki  $u$  i  $v$ , zaś  $G''$  to graf otrzymany z  $G$  poprzez utożsamienie tych wierzchołków (powstałe krawędzie wielokrotne traktujemy jako jedną krawędź).

*Dowód.* Niech dany będzie graf  $G$  oraz jego dwa niesąsiednie wierzchołki  $u$  i  $v$ . Liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań grafu  $G$  jest sumą  $\lambda$ -kolorowań takich, że wierzchołki  $u$  i  $v$  mają różne kolory oraz takich, że rozważane wierzchołki mają takie same kolory.

- i) Jeżeli wierzchołki  $u$  i  $v$  mają różne kolory, to dodanie do zbioru krawędzi grafu  $G$  krawędzi  $uv$  nie zmieni liczby wszystkich możliwych  $\lambda$ -kolorowań tego grafu. Zatem w takim przypadku liczba  $\lambda$ -kolorowań grafów  $G$  i  $G'$  jest identyczna.
- ii) Jeśli wierzchołki  $u$  i  $v$  mają takie same barwy, to wybór koloru dla jednego z tych wierzchołków pociąga za sobą wybór koloru dla drugiego wierzchołka. Wierzchołki  $u$  i  $v$  możemy zatem w takim przypadku traktować jako jeden wierzchołek. Grafy  $G$  i  $G''$  mają wtedy identyczną liczbę  $\lambda$ -kolorowań.

Ostatecznie więc  $f(G, \lambda) = f(G', \lambda) + f(G'', \lambda)$ . □

Wielomiany chromatyczne grafów pełnych i bezkrawędziowych możemy wyznaczyć stosując dwa kolejne twierdzenia.

**Twierdzenie 2.2** ([19]). *Dla grafu pełnego  $K_n$  mamy*

$$f(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - n + 1). \quad (2.2)$$

*Dowód.* Wierzchołki grafu numerujemy dowolnie liczbami naturalnymi od 1 do  $n$ . Pierwszy wierzchołek możemy pokolorować na  $\lambda$  sposobów, drugi na  $\lambda - 1$  sposobów, gdyż jest on sąsiedni z pierwszym. Trzeci wierzchołek możemy pokolorować

na  $\lambda - 2$  sposobów, ponieważ jest on sąsiedni z dwoma poprzednimi wierzchołkami. Kontynuujemy to rozumowanie do chwili, aż dojdziemy do  $n$ -tego wierzchołka, dla którego mamy  $\lambda - (n - 1)$  możliwości pokolorowania go. Ostatecznie zatem

$$f(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - n + 1).$$

□

**Twierdzenie 2.3** ([4]). *Wielomian chromatyczny grafu bezkrawędziowego  $O_n$  jest postaci*

$$f(O_n, \lambda) = \lambda^n. \quad (2.3)$$

*Dowód.* Teza twierdzenia jest konsekwencją tego, iż graf bezkrawędziowy  $O_n$  składa się z  $n$  izolowanych wierzchołków, z których każdy możemy pokolorować na  $\lambda$  sposobów. □

## 2.4 Własności wielomianów chromatycznych hipergrafów

W paragrafie tym podamy definicję  $\lambda$ -kolorowania oraz wielomianu chromatycznego hipergrafu. Podane zostaną także twierdzenia pozwalające wyznaczyć ten wielomian w przypadku ogólnym.

Niech dany będzie hipergraf prosty  $H$ . Dla dowolnej liczby  $\lambda \in \mathbb{N}$  przez  $\lambda$ -kolorowanie (właściwe) hipergrafu  $H$  rozumiemy dowolną funkcję  $f: V(H) \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$  taką, że dla dowolnej krawędzi  $e \in E(H)$  istnieją wierzchołki  $u, v \in e$ , dla których spełniony jest warunek  $f(u) \neq f(v)$  [20]. Jeżeli dodatkowo funkcja  $f$  jest różnowartościowa na każdej krawędzi hipergrafu  $H$ , to takie  $\lambda$ -kolorowanie nazywamy *silnym*. Elementy zbioru  $\{1, \dots, \lambda\}$  nazywamy *kolorami* lub *barwami*. Liczbę wszystkich  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu  $H$  oznaczamy symbolem  $f(H, \lambda)$ . W dalszych rozważaniach przez słowo *kolorowanie* (w odróżnieniu od  $\lambda$ -kolorowania) rozumiemy funkcję  $f$ , która niekoniecznie spełnia warunek  $f(u) \neq f(v)$  dla pewnych wierzchołków  $u, v \in e$ .

Jeżeli w hipergrafie żadna krawędź nie jest podzbiorem innej krawędzi, to hipergraf ten nazywamy *hipergrafem Spernera*. Pierwsze z prezentowanych twier-

dzeń pokazuje, że możemy ograniczyć się wyłącznie do takich hipergrafów, dlatego w dalszych rozważaniach będziemy mówić wyłącznie o hipergrafach Spernera.

**Twierdzenie 2.4** ([13]). *Niech dany będzie hipergraf  $H$ , dla którego  $\dot{e}, \ddot{e} \in E(H)$  oraz  $\dot{e} \subseteq \ddot{e}$ . Istnieje jednoznaczna odpowiedniość między  $\lambda$ -kolorowaniem hipergrafu  $H$  oraz  $\lambda$ -kolorowaniem hipergrafu  $H - \ddot{e}$ .*

*Dowód.* Niech  $\dot{e}$  i  $\ddot{e}$  będą dwoma krawędziami hipergrafu  $H$  takimi, że  $\dot{e} \subseteq \ddot{e}$ . Rozważmy dowolne  $\lambda$ -kolorowanie  $f$  hipergrafu  $H$ . Ponieważ krawędź  $\dot{e}$  jest podzbiorem krawędzi  $\ddot{e}$ , to z faktu, że warunek  $f(u) \neq f(v)$  spełniony jest na krawędzi  $\dot{e}$  wynika, że jest on spełniony również na krawędzi  $\ddot{e}$ . Dlatego rozważane  $\lambda$ -kolorowanie  $f$  hipergrafu  $H$  odpowiada jednoznacznie  $\lambda$ -kolorowaniu hipergrafu  $H - \ddot{e}$ , w którym jego wierzchołki pokolorowane są identycznie jak w przypadku  $\lambda$ -kolorowania  $f$  hipergrafu  $H$ .  $\square$

Niech  $e$  będzie dowolną krawędzią hipergrafu  $H$  taką, że  $|e| > 2$  oraz  $u, v \in e$ . Przez  $H'$  rozumiemy hipergraf powstały z hipergrafu  $H$  przez zastąpienie krawędzi  $e$  2-krawędzią  $\{u, v\}$ . Natomiast  $H''$  oznaczać będzie hipergraf otrzymany z  $H$  przez utożsamienie wierzchołków  $u$  i  $v$  w nowy wierzchołek  $w$ .

Na podstawie poniższego twierdzenia Jones [13] pokazał, iż  $f(H, \lambda)$  jest wielomianem, gdyż daje się zapisać w postaci skończonej sumy wielomianów chromatycznych odpowiednich grafów. Twierdzenie 2.5 jest często bardzo wygodne w praktyce, gdyż obecnie wiemy znacznie więcej o wielomianach chromatycznych grafów niż o wielomianach chromatycznych hipergrafów.

**Twierdzenie 2.5** ([13]). *Dla wielomianu chromatycznego hipergrafu  $H$  prawdziwy jest związek*

$$f(H, \lambda) = f(H', \lambda) + f(H'', \lambda). \quad (2.4)$$

*Dowód.* Niech  $H$  będzie hipergrafem oraz niech  $e$  będzie jego dowolną krawędzią taką, że  $|e| > 2$ . Wybierzmy dwa dowolne wierzchołki  $u, v \in e$ . Liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu  $H$  jest sumą takich  $\lambda$ -kolorowań, w których wierzchołki  $u$  i  $v$  mają takie same barwy oraz takich, w których mają one różne barwy.

- i) Jeśli  $u$  i  $v$  mają różne barwy, to pozostałe wierzchołki należące do krawędzi  $e$  możemy pokolorować dowolnie. Wynika z tego, że liczba  $\lambda$ -kolorowań takich, że wierzchołki  $u$  i  $v$  mają różne barwy, wynosi tyle ile liczba  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu powstałego z  $H$  poprzez zastąpienie krawędzi  $e$  2-krawędzią  $\{u, v\}$ . Takich  $\lambda$ -kolorowań jest więc  $f(H', \lambda)$ .
- ii) Jeżeli  $u$  i  $v$  mają jednakowe barwy, to wybór koloru dla jednego z tych wierzchołków pociąga za sobą wybór koloru dla drugiego wierzchołka. Zatem liczba  $\lambda$ -kolorowań takich, że wierzchołki  $u$  i  $v$  mają jednakowe barwy, wynosi tyle ile liczba  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu powstałego z  $H$  poprzez utożsamienie wierzchołków  $u$  i  $v$  w jeden wierzchołek. Takich  $\lambda$ -kolorowań jest więc  $f(H'', \lambda)$ .

Ostatecznie zatem  $f(H, \lambda) = f(H', \lambda) + f(H'', \lambda)$ .  $\square$

Kolejne dwa twierdzenia pokazują, jak w ogólności wyznaczyć wielomian chromatyczny dowolnego hipergrafu.

**Twierdzenie 2.6** ([10]). *Dla dowolnego hipergrafu  $H$  zachodzi równość*

$$f(H, \lambda) = \sum_{S \subseteq E(H)} (-1)^{m(H[S])} \lambda^{n(H) - n(H[S]) + c(H[S])}. \quad (2.5)$$

*Dowód.* Niech  $S \subseteq E(H)$ . Przez  $\mathcal{C}(H)$  oznaczmy zbiór wszystkich kolorowań (niekoniecznie właściwych) hipergrafu  $H$ , przy użyciu co najwyżej  $\lambda$  kolorów. Dla każdej funkcji  $f \in \mathcal{C}(H)$  i wszystkich  $e \in E(H)$  definiujemy  $\hat{f}(e) := 0$ , jeżeli funkcja  $f$  jest stała na zbiorze  $e$  oraz  $\hat{f}(e) := 1$  w przypadku przeciwnym. Zauważmy, że  $\prod_{e \in E(H)} \hat{f}(e) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  jest  $\lambda$ -kolorowaniem właściwym. Mamy zatem

$$\begin{aligned} f(H, \lambda) &= \sum_{f \in \mathcal{C}(H)} \prod_{e \in E(H)} \hat{f}(e) = \sum_{f \in \mathcal{C}(H)} \prod_{e \in E(H)} \left( (\hat{f}(e) - 1) + 1 \right) \\ &= \sum_{f \in \mathcal{C}(H)} \sum_{S \subseteq E(H)} \prod_{e \in S} (\hat{f}(e) - 1) \\ &= \sum_{S \subseteq E(H)} \lambda^{n(H) - n(H[S])} \sum_{f \in \mathcal{C}(H[S])} \prod_{e \in S} (\hat{f}(e) - 1). \end{aligned}$$

Jeżeli odwzorowanie  $f$  jest funkcją stałą na każdej składowej spójności hipergrafu  $H[S]$ , to  $\prod_{e \in S} (\hat{f}(e) - 1) = (-1)^{m(H[S])}$ . W przeciwnym przypadku zachodzi warunek  $\prod_{e \in S} (\hat{f}(e) - 1) = 0$ . Ponieważ istnieje  $\lambda^{c(H[S])}$  kolorowań hipergrafu  $H[S]$  spełniających warunek  $\prod_{e \in S} (\hat{f}(e) - 1) = (-1)^{m(H[S])}$ , to mamy

$$\begin{aligned} f(H, \lambda) &= \sum_{S \subseteq E(H)} \lambda^{n(H) - n(H[S])} \lambda^{c(H[S])} (-1)^{m(H[S])} \\ &= \sum_{S \subseteq E(H)} (-1)^{m(H[S])} \lambda^{n(H) - n(H[S]) + c(H[S])}. \end{aligned}$$

□

**Twierdzenie 2.7** ([20]). *Niech  $H$  będzie hipergrafem zawierającym  $n$  wierzchołków. Wtedy  $f(H, \lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda$ , gdzie*

$$a_{n-i} = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(i, j) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq n-1, \quad (2.6)$$

przy czym symbol  $N(i, j)$  oznacza liczbę podhipergrafów rozpinających  $G$  hipergrafu  $H$  takich, że  $m(G) = j$  oraz  $c(G) = i$ .

*Dowód.* Niech  $H$  będzie hipergrafem o rzędzie  $n$ . Kolorowanie hipergrafu  $H$  o tej własności, że wierzchołki zawarte w każdej składowej spójności hipergrafu  $H$  pokolorowane są jednakowym kolorem, nazywać będziemy kolorowaniem *wysoce niewłaściwym*. Zauważmy, że dla hipergrafu składającego się z  $i$  składowych spójności istnieje  $\lambda^i$  kolorowań wysoce niewłaściwych, które są kolorowaniami co najwyżej  $\lambda$  kolorami. Dodatkowo łatwo zauważyć, że każde kolorowanie hipergrafu  $H$  jest kolorowaniem wysoce niewłaściwym dla co najmniej jednego z jego podhipergrafów rozpinających. W przypadku  $\lambda$ -kolorowania jest to podhipergraf bezkrawędziowy. W przypadku kolorowania niewłaściwego jest to pewien podhipergraf zawierający tylko jedną krawędź.

Zatem, aby wyznaczyć wszystkie  $\lambda$ -kolorowania hipergrafu  $H$ , od wszystkich  $\lambda^n$  kolorowań odejmiemy te kolorowania, które są wysoce niewłaściwe na jego

pewnym podhipergrafie rozpinającym, zawierającym jedną krawędź. Jednak jeśli odejmiemy wszystkie  $\sum_{i=1}^{n-1} N(i, 1) \lambda^i$  takie kolorowania, to pewne kolorowania odejmiemy więcej niż jeden raz.

Aby zauważyć, o których kolorowaniach mowa, rozważmy dwie krawędzie  $e_1$  i  $e_2$  należące do zbioru krawędzi hipergrafu  $H$ . Kolorowanie wysoce niewłaściwe na podhipergrafie zawierającym tylko krawędź  $e_1$ , w którym wierzchołki zawarte w krawędzi  $e_2$  mają identyczne kolory jest tym samym kolorowaniem, które jest wysoce niewłaściwe na podhipergrafie zawierającym tylko krawędź  $e_2$ , w którym wierzchołki zawarte w krawędzi  $e_1$  mają identyczne kolory. Kolorowanie to odjęliśmy jednak dwa razy. Dodatkowo zauważmy, że jest to również to samo kolorowanie, które jest wysoce niewłaściwe na podhipergrafie zawierającym tylko krawędzie  $e_1$  oraz  $e_2$ .

Musimy zatem teraz dodać kolorowania, które odjęliśmy dwukrotnie. W tym celu dodamy składnik  $\sum_{i=1}^{n-1} N(i, 2) \lambda^i$ . Jednak, jak łatwo zauważyć, dodaliśmy niepotrzebnie pewne kolorowania. Prowadząc analogiczne rozważania jak poprzednio, zauważamy, że musimy teraz odjąć składnik  $\sum_{i=1}^{n-1} N(i, 3) \lambda^i$ . Kontynuując takie rozumowanie stwierdzamy, iż liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań (właściwych) hipergrafu  $H$  wynosi

$$\lambda^n - \sum_{i=1}^{n-1} N(i, 1) \lambda^i + \sum_{i=1}^{n-1} N(i, 2) \lambda^i - \sum_{i=1}^{n-1} N(i, 3) \lambda^i + \dots$$

Stąd

$$f(H, \lambda) = \lambda^n + \sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^j N(i, j) \lambda^i = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(i, j) \right] \lambda^i.$$

Zatem

$$a_{n-i} = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(i, j) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq n-1.$$

□

Warto zauważyć, iż wzory na współczynniki wielomianu chromatycznego, podawane w literaturze w postaci  $a_{n-i} = \sum_{j \geq 0} (-1)^j N(i, j)$  dla  $1 \leq i \leq n-1$ , moż-

na ograniczyć do przypadku wskaźnika  $j \geq 1$ . Jest to możliwe, gdyż dla hipergrafu o rzędzie  $n$ , wielkość  $N(i, 0)$  może być niezerowa tylko w przypadku  $i = n$ . Zatem nie jest ona składnikiem żadnego współczynnika  $a_{n-i}$  dla  $1 \leq i \leq n - 1$ .

Wielomian chromatyczny hipergrafu, który ma kilka składowych spójności, może zostać wyznaczony na podstawie poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.8.** *Niech  $H$  będzie hipergrafem składającym się z  $k \geq 2$  składowych spójności  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Wtedy*

$$f(H, \lambda) = \prod_{i=1}^k f(C_i, \lambda).$$

*Dowód.* Oczywiście jest, że dla dowolnych  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ , zachodzą następujące równości:  $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$  oraz  $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$ . Sposób kolorowania dowolnej składowej spójności hipergrafu  $H$  nie wpływa więc na sposób kolorowania innej składowej. Dlatego liczba  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu  $H$  może być przedstawiona jako iloczyn liczby  $\lambda$ -kolorowań wszystkich jego składowych spójności.  $\square$

Ostatnie z prezentowanych w tym podrozdziale twierdzeń pokazuje, w jaki sposób można wyznaczyć wielomian chromatyczny w przypadku, kiedy hipergraf  $H$  jest szczególną sumą pewnych hipergrafów  $H_i$ . Często w istotny sposób przyspiesza ono wyznaczanie wielomianu chromatycznego, zwłaszcza gdy korzystamy z twierdzenia 2.5 w przypadku hipergrafu o dużej liczbie wierzchołków i krawędzi.

**Twierdzenie 2.9** ([7]). *Niech  $H$  będzie hipergrafem takim, że  $H = \bigcup_{i=1}^k H_i$  dla  $k \geq 2$ .*

*Założmy, że  $H_i \cap H_j = K_p$  dla  $i \neq j$  oraz  $\bigcap_{i=1}^k H_i = K_p$ . Wtedy*

$$f(H, \lambda) = [f(K_p, \lambda)]^{1-k} \prod_{i=1}^k f(H_i, \lambda).$$



*Dowód.* Liczba  $\lambda$ -kolorowań grafu pełnego  $K_p$  wynosi  $f(K_p, \lambda)$ . Skoro  $\bigcap_{i=1}^k H_i = K_p$ , to jeżeli ustalimy kolory  $p$  wierzchołków grafu  $K_p$ , pozostałe wierzchołki hipergrafu  $H_i$  będziemy mogli pokolorować na  $f(H_i, \lambda) / f(K_p, \lambda)$  sposobów dla każdego  $i = 1, 2, \dots, k$ . Zatem

$$\begin{aligned} f(H, \lambda) &= f(K_p, \lambda) \cdot \frac{f(H_1, \lambda)}{f(K_p, \lambda)} \cdot \frac{f(H_2, \lambda)}{f(K_p, \lambda)} \cdots \frac{f(H_k, \lambda)}{f(K_p, \lambda)} \\ &= [f(K_p, \lambda)]^{1-k} \prod_{i=1}^k f(H_i, \lambda). \end{aligned}$$

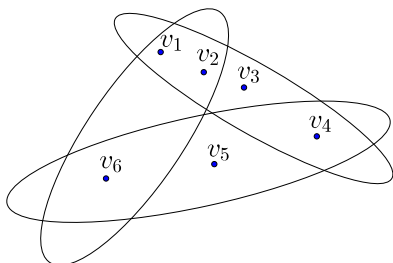
□

## 2.5 Praktyczne sposoby wyznaczania wielomianów chromatycznych hipergrafów

Przedstawimy teraz przykład praktycznego wyznaczania wielomianu chromatycznego konkretnego hipergrafu. Przeanalizujemy hipergraf nieliniowy zawierający sześć wierzchołków oraz trzy hiperkrawędzie.

**Przykład 2.1.** Wyznaczyć wielomian chromatyczny hipergrafu widocznego na rysunku 1.

**Rozwiązanie.** Odczytujemy z rysunku, że  $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  oraz



**Rysunek 1:** Hipergraf  $H_1$

$E(H_1) = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1, v_5, v_6\}\}$ . Rozwiązanie przeprowadzimy trzema sposobami, opierając się na trzech różnych twierdzeniach.

1. Najpierw skorzystamy z twierdzenia 2.6. Rozważmy wszystkie możliwe podzbiory zbioru  $E(H_1)$ . Są to:  $E_1 = \emptyset$ ,  $E_2 = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$ ,

$$E_3 = \{\{v_2, v_3, v_4, v_5\}\}, E_4 = \{\{v_1, v_5, v_6\}\},$$

$$E_5 = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}\},$$

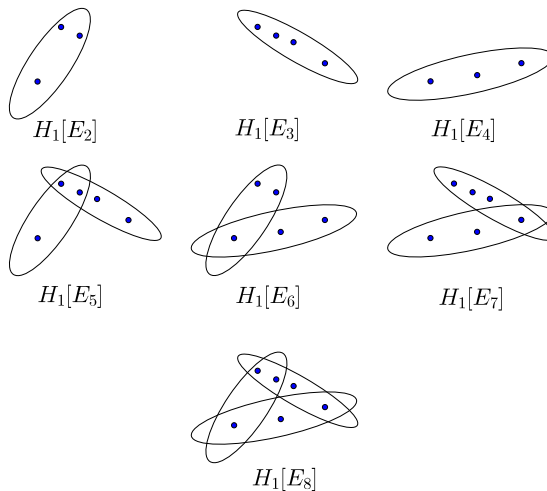
$$E_6 = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_5, v_6\}\},$$

$$E_7 = \{\{v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1, v_5, v_6\}\}, E_8 = E(H_1).$$

Na rysunku 2 zaprezentowane zostały podhipergrafy hipergrafu  $H_1$  indukowane przez zbiory  $E_2, E_3, \dots, E_8$ .

Z rysunku tego odczytujemy wielkości, o których mowa w twierdzeniu:

- $n(H_1[E_2]) = 3$ ,  $m(H_1[E_2]) = 1$ ,  $c(H_1[E_2]) = 1$ ;
- $n(H_1[E_3]) = 4$ ,  $m(H_1[E_3]) = 1$ ,  $c(H_1[E_3]) = 1$ ;
- $n(H_1[E_4]) = 3$ ,  $m(H_1[E_4]) = 1$ ,  $c(H_1[E_4]) = 1$ ;



**Rysunek 2:** Podhipergrafy hipergrafu  $H_1$  indukowane przez podzbiory zbioru  $E(H_1)$

- $n(H_1[E_5]) = 5$ ,  $m(H_1[E_5]) = 2$ ,  $c(H_1[E_5]) = 1$ ;
- $n(H_1[E_6]) = 5$ ,  $m(H_1[E_6]) = 2$ ,  $c(H_1[E_6]) = 1$ ;
- $n(H_1[E_7]) = 6$ ,  $m(H_1[E_7]) = 2$ ,  $c(H_1[E_7]) = 1$ ;
- $n(H_1[E_8]) = 6$ ,  $m(H_1[E_8]) = 3$ ,  $c(H_1[E_8]) = 1$ .

Dodatkowo, ponieważ zbiór  $E_1$  jest zbiorem pustym, dla hipergrafu  $H_1[E_1]$  przyjmujemy, że:  $n(H_1[E_1]) = 0$ ,  $m(H_1[E_1]) = 0$ ,  $c(H_1[E_1]) = 0$ .

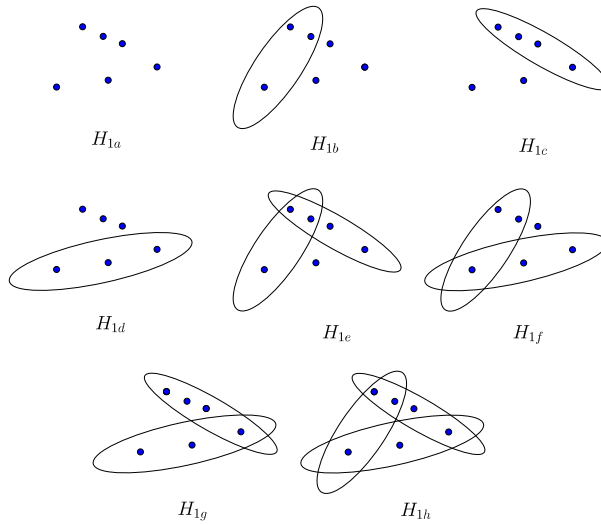
Wzór (2.5) pozwala nam zapisać, że

$$\begin{aligned}
 f(H_1, \lambda) &= \sum_{S \subseteq E(H_1)} (-1)^{m(H_1[S])} \lambda^{n(H_1) - n(H_1[S]) + c(H_1[S])} \\
 &= \sum_{i=1}^8 (-1)^{m(H_1[E_i])} \lambda^{n(H_1) - n(H_1[E_i]) + c(H_1[E_i])} \\
 &= (-1)^0 \lambda^{6-0+0} + (-1)^1 \lambda^{6-3+1} + (-1)^1 \lambda^{6-4+1} + (-1)^1 \lambda^{6-3+1} \\
 &\quad + (-1)^2 \lambda^{6-5+1} + (-1)^2 \lambda^{6-5+1} + (-1)^2 \lambda^{6-6+1} + (-1)^3 \lambda^{6-6+1} \\
 &= \lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2.
 \end{aligned}$$

2. Rozważymy teraz twierdzenie 2.7. Musimy przeanalizować wszystkie podhipergrafy rozpinające hipergrafu  $H_1$ . Zaprezentowane zostały one na rysunku 3.

Odczytujemy teraz liczbę składowych spójności i liczbę krawędzi każdego podhipergrafu rozpinającego:

- $c(H_{1a}) = 6$ ,  $m(H_{1a}) = 0$ ;
- $c(H_{1b}) = 4$ ,  $m(H_{1b}) = 1$ ;
- $c(H_{1c}) = 3$ ,  $m(H_{1c}) = 1$ ;
- $c(H_{1d}) = 4$ ,  $m(H_{1d}) = 1$ ;
- $c(H_{1e}) = 2$ ,  $m(H_{1e}) = 2$ ;
- $c(H_{1f}) = 2$ ,  $m(H_{1f}) = 2$ ;



**Rysunek 3:** Podhipergrafy rozpinające hipergrafu  $H_1$

- $c(H_{1g}) = 1$ ,  $m(H_{1g}) = 2$ ;
- $c(H_{1h}) = 1$ ,  $m(H_{1h}) = 3$ .

Zatem  $N(1,2) = 1$ ,  $N(1,3) = 1$ ,  $N(2,2) = 2$ ,  $N(3,1) = 1$ ,  $N(4,1) = 2$  oraz  $N(6,0) = 1$ . Na podstawie formuły (2.6) możemy zapisać, iż:

$$a_5 = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(1, j) = 1 - 1 = 0;$$

$$a_4 = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(2, j) = 2;$$

$$a_3 = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(3, j) = -1;$$

$$a_2 = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(4, j) = -2;$$

$$a_1 = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(5, j) = 0.$$

Ostatecznie więc wielomian chromatyczny hipergrafu  $H_1$  jest postaci

$$f(H_1, \lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2.$$

3. Na zakończenie wykorzystamy twierdzenie 2.5. Posłużymy się również twierdzeniem 2.1 (dla grafów). W przypadku hipergrafów mających więcej niż jedną składową spójności, skorzystamy również z twierdzenia 2.8. Na rysunkach 4 i 5 przedstawione zostały wszystkie potrzebne związki między wielomianami chromatycznymi odpowiednich grafów i hipergrafów. Równości hipergrafów i grafów na rysunkach oznaczają równości ich wielomianów chromatycznych.

Na mocy rozważanych twierdzeń możemy zapisać, że:

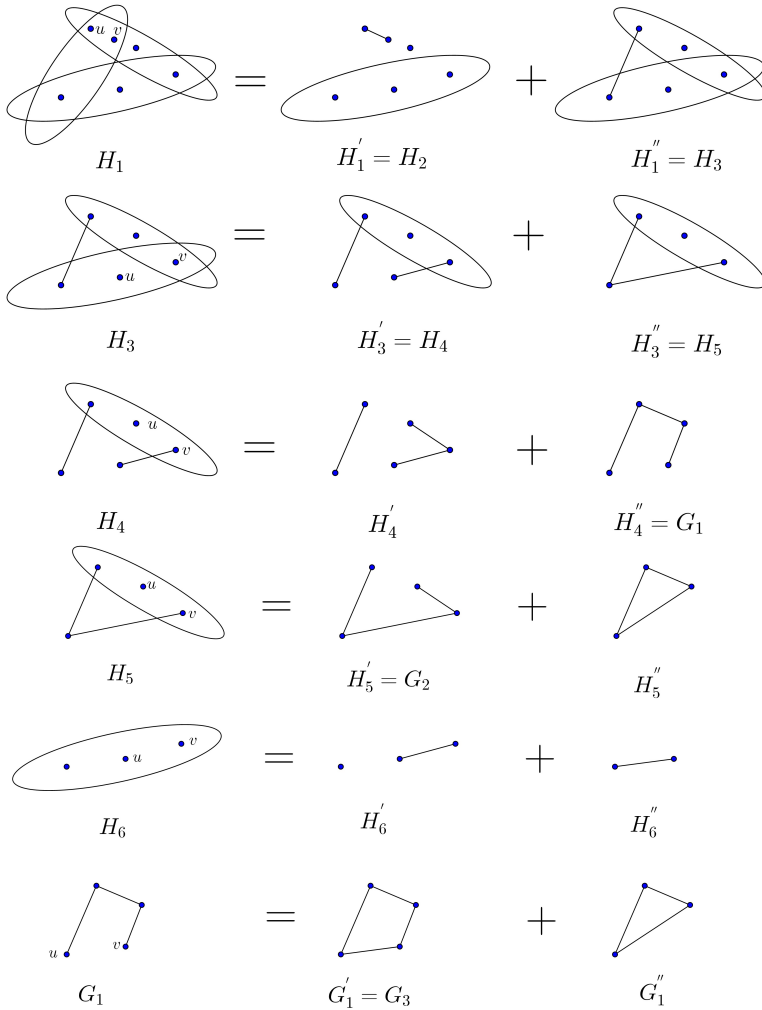
$$\begin{aligned} f(G_5, \lambda) &= f(G'_5, \lambda) + f(G''_5, \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + \lambda(\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(G_4, \lambda) &= f(G'_4, \lambda) + f(G''_4, \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(G_3, \lambda) &= f(G'_3, \lambda) + f(G''_3, \lambda) = f(G_4, \lambda) + f(G_5, \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 + \lambda(\lambda - 1)^2 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3); \end{aligned}$$

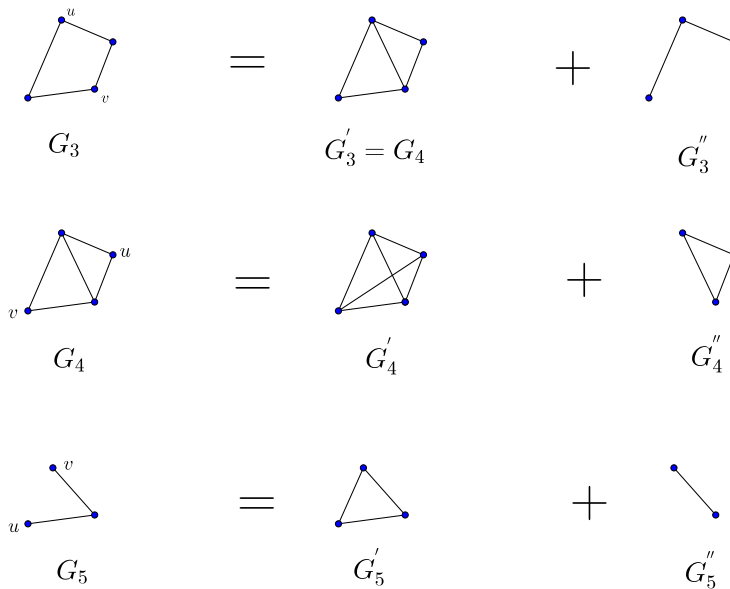
$$\begin{aligned} f(G_1, \lambda) &= f(G'_1, \lambda) + f(G''_1, \lambda) = f(G_3, \lambda) + f(G''_1, \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(H_6, \lambda) &= f(H'_6, \lambda) + f(H''_6, \lambda) \\ &= \lambda\lambda(\lambda - 1) + \lambda(\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1); \end{aligned}$$



**Rysunek 4:** Związki między wielomianami chromatycznymi grafów i hipergrafów z przykładu 2.1, część 1

$$\begin{aligned}
 f(H_5, \lambda) &= f(H'_5, \lambda) + f(H''_5, \lambda) \\
 &= f(G_2, \lambda) + f(H''_5, \lambda) = f(G_1, \lambda) + f(H''_5, \lambda) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1);
 \end{aligned}$$



**Rysunek 5:** Związki między wielomianami chromatycznymi grafów i hipergrafów z przykładu 2.1, część 2

$$\begin{aligned}
 f(H_4, \lambda) &= f(H_4', \lambda) + f(H_4'', \lambda) = \lambda(\lambda - 1)f(G_5, \lambda) + f(G_1, \lambda) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)\lambda(\lambda - 1)^2 + \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda + 1);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(H_3, \lambda) &= f(H_3', \lambda) + f(H_3'', \lambda) = f(H_4, \lambda) + f(H_5, \lambda) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda + 1) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda^3 - 2\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(H_1, \lambda) &= f(H'_1, \lambda) + f(H''_1, \lambda) = f(H_2, \lambda) + f(H_3, \lambda) \\
&= \lambda(\lambda - 1)\lambda f(H_6, \lambda) + f(H_3, \lambda) \\
&= \lambda^2(\lambda - 1)\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) + \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2) \\
&= \lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2.
\end{aligned}$$

Zatem wielomian chromatyczny hipergrafu  $H_1$  jest postaci

$$f(H_1, \lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2,$$

co potwierdza poprawność wyników otrzymanych wcześniej dwiema innymi metodami.

### 3 Współczynniki wielomianów chromatycznych hipergrafów

W tym podrozdziale zebrane zostaną wiadomości na temat współczynników wielomianów chromatycznych hipergrafów. Analizę współczynników zajmował się już Dohmen [10]. Wykazał on, że na podstawie liczby wierzchołków zawartych w krawędziach hipergrafu można wskazać, ile wynoszą pewne współczynniki jego wielomianu chromatycznego. Tomescu w pracy [20] podał pewne własności współczynników w przypadku hipergrafów  $h$ -jednorodnych. Natomiast Tomescu i Bokhary [25] rozszerzyli myśl na temat współczynników wielomianów chromatycznych hipergrafów  $h$ -jednorodnych zawartą w [20] i wskazali, ile wynosi wartość współczynnika  $a_{gh-g+1}$ . Ciekawe informacje na temat współczynników wielomianów chromatycznych hipergrafów liniowych można znaleźć w publikacji Borowieckiego i Łazuki [8]. Okazuje się, że przy pewnych warunkach, z postaci współczynnika można wywnioskować niektóre własności krawędzi hipergrafu. Również wiadomości dotyczące cykli zawartych w hipergrafie mogą być uzyskane bezpośrednio z wielomianu chromatycznego.

Analizowane w poprzednim podrozdziale twierdzenia podają ogólną postać wielomianu chromatycznego. Oczywiście w przypadku wielomianu chromatycz-



nego dowolnego hipergrafu współczynnik przy najwyższej potędze i wyraz wolny wynoszą odpowiednio 1 oraz 0. W dalszej części pracy będziemy zatem rozważać wielomian chromatyczny hipergrafu  $H$ , który jest postaci

$$f(H, \lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda. \quad (3.1)$$

### 3.1 Własności hipergrafów wynikające z postaci wielomianu chromatycznego

Jak już wcześniej wspomnieliśmy, niektóre własności hipergrafu mogą być odczytane bezpośrednio z jego wielomianu chromatycznego. Przedstawimy dwa twierdzenia, które pokazują, w jaki sposób możemy te własności uzyskać. Twierdzenia te prezentują pierwszy sposób klasyfikacji hipergrafów poprzez wielomian chromatyczny. Będą one również niezwykle przydatne w dalszej części rozdziału.

Pierwsze z przywoływanych w tym podrozdziale twierdzeń jest dość oczywiste. Pozwala ono w pewnych przypadkach na łatwe stwierdzenie, czy dany hipergraf jest spójny.

**Twierdzenie 3.1** ([8]). *Niech  $H$  będzie hipergrafem o rzędzie  $n \geq 1$  oraz wielomianie chromatycznym danym zależnością (3.1). Jeżeli w wielomianie tym współczynnik  $a_{n-1} \neq 0$ , to  $H$  jest hipergrafem spójnym.*

*Dowód.* Z twierdzenia 2.7 wynika, że  $a_{n-1} = (-1)^j N(1, j)$ . Zatem na podstawie założenia  $a_{n-1} \neq 0$  można stwierdzić, iż musi istnieć co najmniej jeden podhipergraf rozpinający hipergrafu  $H$ , który jest spójny. Fakt ten oznacza, że  $H$  jest hipergrafem spójnym.  $\square$

Przytoczone twierdzenie 3.1 jest mało ogólne, gdyż pozwala na określenie spójności hipergrafu tylko w niektórych przypadkach. Na przykład, gdyby dla pewnego hipergrafu spełniony był warunek  $a_{n-1} = 0$ , to nie możemy stwierdzić, iż hipergraf ten nie jest spójny. Należy dodać, że obecnie nie są znane twierdzenia, które w ogólności pozwalałyby odczytać z wielomianu chromatycznego, czy dany hipergraf jest spójny czy też nie.

Przy odpowiednich warunkach z postaci wielomianu chromatycznego hipergrafu możemy odczytać informacje na temat liczby jego pewnych  $h$ -krawędzi. Poniższe twierdzenie pokazuje, w jaki sposób możemy to uczynić.

**Twierdzenie 3.2** ([8]). *Niech  $H$  będzie hipergrafem o rzędzie  $n \geq 3$  oraz wielomianie chromatycznym danym zależnością (3.1). Jeżeli dla pewnego  $h \geq 3$  oraz pewnego  $p \geq 0$  prawdziwe są równości:*

$$a_k = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, h-2 \quad \text{oraz} \quad a_{h-1} = -p,$$

*to  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla wszystkich  $j \in \{2, 3, \dots, h-1\}$  oraz zawiera dokładnie  $p$   $h$ -krawędzi.*

*Dowód.* Najpierw pokażemy indukcyjnie, że hipergraf  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla  $2 \leq j \leq h-1$ .

1. Z twierdzenia 2.7 wynika, że  $a_1 = \sum_{k \geq 1} (-1)^k N(n-1, k)$ , gdzie symbol  $N(n-1, k)$  oznacza liczbę takich podhipergrafów rozpinających hipergrafu  $H$ , które mają  $k$  krawędzi oraz  $n-1$  składowych spójności. Podhipergraf o tej własności musi składać się z jednej 2-krawędzi oraz  $n-2$  izolowanych wierzchołków. Ze względu na warunek  $a_1 = 0$  stwierdzamy, że  $H$  nie zawiera 2-krawędzi.
2. Wiadomo, że  $a_2 = a_3 = \dots = a_{h-2}$ . Załóżmy, że  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla  $2 \leq j \leq t$ , gdzie  $t \leq h-2$ . Na podstawie twierdzenia 2.7 wnioskujemy, że  $a_t = \sum_{k \geq 1} (-1)^k N(n-t, k)$ . Z założenia indukcyjnego wynika, że  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla  $2 \leq j \leq t < h-1$  zatem musi być, że  $a_t = (-1)^1 N(n-t, 1)$ . Symbol  $N(n-t, 1)$  oznacza liczbę podhipergrafów rozpinających hipergrafu  $H$  zawierających jedną  $(t+1)$ -krawędź oraz  $n-(t+1)$  izolowanych wierzchołków. Ponieważ z założenia twierdzenia  $a_t = 0$ , więc  $H$  nie zawiera  $(t+1)$ -krawędzi.

Udowodniliśmy, że  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla wszystkich  $j \in \{2, 3, \dots, h-1\}$ .

Z twierdzenia 2.7 wynika, że  $a_{h-1} = \sum_{k \geq 1} (-1)^k N(n - (h-1), k)$ . Ponieważ współczynnik  $a_{h-1} = -p$  oraz  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla  $2 \leq j \leq h-1$ , to musi zachodzić warunek

$$a_{h-1} = (-1)^1 N(n - (h-1), 1) = -N(n - (h-1), 1) = -p.$$

$N(n - (h-1))$  zlicza podhipergrafy hipergrafu  $H$ , które mają tylko jedną krawędź oraz  $n - (h-1)$  składowych spójności. Podhipergrafy o tej własności składają się z jednej  $h$ -krawędzi oraz  $n - h$  wierzchołków izolowanych. Zatem liczba  $h$ -krawędzi hipergrafu  $H$  wynosi  $p$ .  $\square$

Kolejne twierdzenie jest w pewnym sensie rozszerzeniem poprzedniego. Stosowane może być ono tylko dla hipergrafów liniowych. Wymaga również specyficznej postaci odpowiednich współczynników w wielomianie chromatycznym. Jednak przy spełnieniu odpowiednich warunków pozwala na uzyskanie pewnych informacji odnośnie krawędzi oraz cykli zawartych w hipergrafie.

**Twierdzenie 3.3** ([8]). *Niech  $H$  będzie hipergrafem liniowym o rzędzie  $n \geq 3$  oraz wielomianie chromatycznym danym zależnościami (3.1). Jeżeli dla pewnego  $l \geq 1$ , pewnego  $2 \leq z \leq l$  oraz pewnego  $h \geq 3$  zachodzi*

$$a_{k(h-1)} = (-1)^k \binom{l}{k} \quad \text{dla } k \in \{0, 1, \dots, z\},$$

gdzie  $k(h-1) < n$ , a dodatkowo  $a_i = 0$  dla każdego

$$i \in \{i \in \mathbb{N} : i < z(h-1) \wedge i \neq k(h-1) \quad \text{dla } k \in \{0, 1, \dots, z-1\}\},$$

to  $H$  nie ma  $j$ -krawędzi dla  $j \in \{2, 3, \dots, z(h-1) + 1\} \setminus \{h\}$ , zawiera dokładnie  $l$   $h$ -krawędzi oraz nie zawiera  $j$ -jednorodnych cykli o długości nieprzekraczającej  $z$ .

### 3.2 Współczynniki zdeterminowane strukturą hipergrafu

Wiemy już, że na podstawie postaci pewnych współczynników można określić niektóre własności hipergrafów. W tej części rozdziału pokażemy, iż możliwa

jest również sytuacja odwrotna. Twierdzenie 3.4 prezentuje rozumowanie zupełnie przeciwne niż twierdzenie 3.2. Zostało one udowodnione przez Dohmena [10] i mówi, ile wynoszą niektóre współczynniki wielomianu chromatycznego hipergrafu o zadanych własnościach.

**Twierdzenie 3.4** ([10]). *Niech  $H$  będzie hipergrafem o  $n$  wierzchołkach. Jeżeli  $h \in \{2, 3, \dots, n\}$  jest taką liczbą, że każda krawędź hipergrafu  $H$  zawiera co najmniej  $h$  wierzchołków, to:*

$$a_k = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, h-2 \quad \text{oraz} \quad a_{h-1} = -p,$$

gdzie  $p$  jest liczbą  $h$ -krawędzi hipergrafu  $H$ .

*Dowód.* Z twierdzenia 2.6 wynika, że

$$a_k = \sum_{\substack{S \subseteq E(H) \\ n(H[S]) - c(H[S]) = k}} (-1)^{m(H[S])} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Niech  $k \in \{1, 2, \dots, h-2\}$ . Wtedy  $n(H[\emptyset]) - c(H[\emptyset]) < k$  oraz dla wszystkich  $S \subseteq E(H)$ ,  $S \neq \emptyset$  zachodzi  $n(H[S]) - c(H[S]) \geq h-1 > k$ . Nie istnieje zatem taka liczba  $k$ , że zachodziłoby  $n(H[S]) - c(H[S]) = k$ . Suma w zależności (3.2) nie zawiera więc żadnego składnika. Stąd  $a_k = 0$  dla  $k = 1, 2, \dots, h-2$ . Ponadto, równość  $n(H[S]) - c(H[S]) = h-1$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $S = e$  dla pewnej krawędzi  $e \in E(H)$  takiej, że  $|e| = h$ . Ponieważ istnieje  $p$  takich krawędzi, to ze wzoru (3.2) dostajemy

$$a_{h-1} = \sum_{\substack{S \subseteq E(H) \\ n(H[S]) - c(H[S]) = h-1}} (-1)^{m(H[S])} = p \cdot (-1)^1 = -p.$$

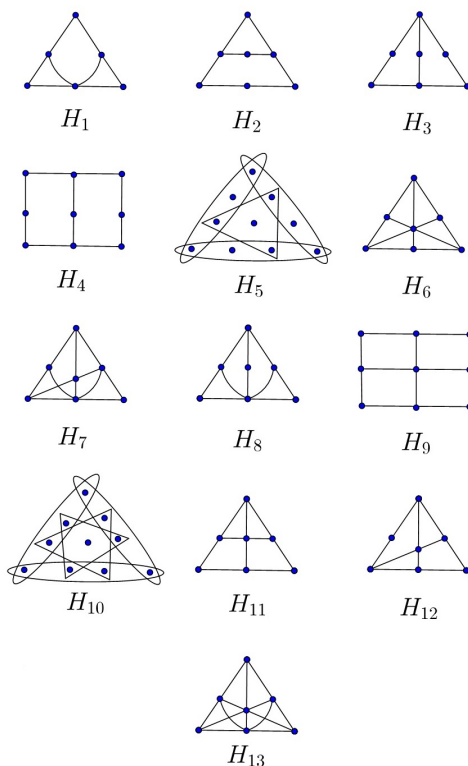
□

### 3.3 Współczynniki wielomianów dla liniowych hipergrafów $h$ -jednorodnych

Wyznaczanie współczynników wielomianów chromatycznych liniowych hipergrafów  $h$ -jednorodnych jest znacznie łatwiejsze niż w przypadku innych hipergra-

fów. Już Tomescu [20] zauważył, że wzory na pewne współczynniki wielomianów chromatycznych takich hipergrafów mogą zostać podane w sposób jawny. Podał on listę 13 hipergrafów, dzięki którym wyprowadził wspomniane zależności. Bokhary wspólnie z Tomescu w [25] przedstawili kontynuację myśli zawartej w [20]. W publikacji tej znajdziemy kilka kolejnych własności współczynników odnoszących się do wielomianów rozważanych hipergrafów.

Na wstępie przedstawimy twierdzenie udowodnione przez Tomescu [20], które wskazuje, jaka jest postać wielomianu chromatycznego  $h$ -jednorodnych hipergrafów liniowych. Dzięki temu twierdzeniu można wyznaczyć wszystkie współczyn-



**Rysunek 6:** 13 hipergrafów liniowych z twierdzenia 3.5

niki wielomianu chromatycznego przy potęgach  $\lambda$  wyższych niż  $n - gh + g - 1$ .

Na rysunku 6 przedstawionych zostało 13 hipergrafów liniowych:  $H_1, \dots, H_{13}$ . Hipergrafy  $H_5$  i  $H_{10}$  są 4-jednorodne, pozostałe są 3-jednorodne. Hipergraf  $H_i$  ma obwód równy 3, jeżeli  $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12$  lub 13 oraz obwód równy 4, jeśli  $i = 4$  lub 9. Dodajmy, że jeżeli wierzchołki leżą na linii prostej lub łuku, to należą do jednej hiperkrawędzi odpowiedniego hipergrafu. Dla hipergrafów tych  $\alpha(H, H_i)$  ( $1 \leq i \leq 13$ ) wynosi tyle, ile liczba podhipergrafów hipergrafu  $H$  izomorficznych do  $H_i$ , jeżeli  $H$  i  $H_i$  mają taki sam obwód oraz 0, w przeciwnym wypadku. Zauważmy, że  $\alpha(H, H_i) = 0$ , jeżeli dla hipergrafu  $H$  zachodzi:

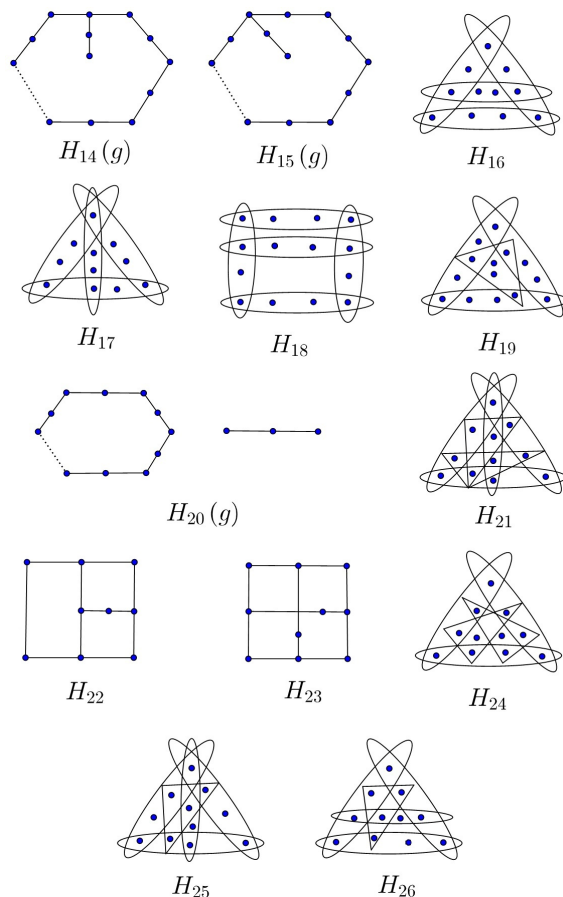
- i)  $g = 3$  oraz  $h = 3$  w przypadku  $i = 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12$  lub 13;
- ii)  $g = 4$  oraz  $h = 3$  w przypadku  $i = 4$  lub 9;
- iii)  $g = 3$  oraz  $h = 4$  w przypadku  $i = 5$  lub 10.

**Twierdzenie 3.5** ([20]). *Niech  $H$  będzie  $h$ -hipergrafem liniowym o rzędzie  $n$ , rozmiarze  $m$  oraz obwodzie  $g$ . Jeżeli  $h \geq 3$ , to*

$$\begin{aligned}
 f(H, \lambda) = & \lambda^n - \binom{m}{1} \lambda^{n-h+1} + \binom{m}{2} \lambda^{n-2h+2} - \dots \\
 & + (-1)^{g-1} \binom{m}{g-1} \lambda^{n-(g-1)(h-1)} \\
 & + (-1)^g [c_g(H) - \alpha(H, H_1)] \lambda^{n-g(h-1)+1} \\
 & + (-1)^g \left[ \binom{m}{g} - c_g(H) - \sum_{i=2}^7 \alpha(H, H_i) + \sum_{i=8}^{13} \alpha(H, H_i) \right] \lambda^{n-gh+g} \\
 & + Q(\lambda),
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie  $Q(\lambda)$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n - gh + g - 1$ .

Bokhary i Tomescu [25] zauważyli, że wartości pewnych współczynników wielomianu chromatycznego  $h$ -hipergrafu liniowego, takich jak na przykład  $a_{gh-g-1}$



**Rysunek 7:** 13 hipergrafów liniowych z twierdzenia 3.6

oraz  $a_{gh-g}$ , zależą od struktury cykli zawartych w tym hipergrafie. W tej samej publikacji pokazali, jak można wyznaczyć współczynnik  $a_{gh-g+1}$ , o ile  $(g, h) \neq (3, 3)$ . W tym celu lista hipergrafów widocznych na rysunku 6 została rozszerzona o 13 kolejnych. Zostały one przedstawione na rysunku 7. Hipergraf  $H_{19}$  jest 5-jednorodny, hipergrafy  $H_{16}, H_{17}, H_{18}, H_{21}, H_{24}, H_{25}$  i  $H_{26}$  są 4-jednorodne, pozostałe są 3-jednorodne. Hipergraf  $H_i$  ma obwód równy 3, jeżeli  $i = 16, 17, 19, 21, 24, 25$

lub 26, obwód równy 4, jeśli  $i = 18, 22$  lub 23 oraz obwód  $g \geq 4$ , jeżeli  $i = 14, 15$  lub 20.

Przez  $\alpha(H, C_{g+1}^3)$  oraz  $\alpha(H, H_i)$  dla  $i = 14, 15, \dots, 26$ , rozumieć będziemy wielkości analogiczne jak w twierdzeniu 3.5. Również podobnie jak poprzednio, jeżeli wierzchołki pewnego hipergrafu z rysunku 7 leżą na linii prostej lub łuku, to należą do jednej hiperkrawędzi. Liczba wierzchołków i krawędzi w hipergrafach  $H_{14}(g)$ ,  $H_{15}(g)$  oraz  $H_{20}(g)$  zależna jest od wartości obwodu  $g$  w przypadku konkretnego hipergrafu  $H$ . Liczby te wynoszą tyle, aby wymienione hipergrafy miały obwód o długości równej  $g$ . Poniższe twierdzenie podaje jawny wzór na współczynnik  $a_{gh-g+1}$ .

**Twierdzenie 3.6** ([25]). *Niech  $H$  będzie liniowym  $h$ -hipergrafem o rzędzie  $n$  i obwodzie  $g$ . Jeżeli  $h \geq 3$  i  $(g, h) \neq (3, 3)$ , to*

$$a_{gh-g+1} = (-1)^{g+1} \left[ \alpha(H, C_{g+1}^3) + \sum_{i=14}^{21} \alpha(H, H_i) - \sum_{i=22}^{26} \alpha(H, H_i) \right].$$

Zauważmy, że jeżeli w twierdzeniu 3.6 przyjmiemy pewne wartości  $h$  i  $g$ , to uzyskamy wzory na konkretne współczynniki, które są niekiedy bardzo proste. Dla przykładu, dla  $h = 4$  oraz  $g = 4$  otrzymujemy  $a_{13} = -\alpha(H, H_{18})$ . Innym przykładem może być  $h = 5$  oraz  $g = 3$ , co daje  $a_{13} = \alpha(H, H_{19})$ .

## 4 Chromatyczność pewnych klas hipergrafów

W tym podrozdziale zajmiemy się zagadnieniami dotyczącymi wielomianów chromatycznych konkretnych klas hipergrafów. Pokażemy również, że  $h$ -jednorodne drzewa oraz  $h$ -jednorodne hipergrafy jednocykliczne są chromatycznie charakteryzowalne w klasie hipergrafów liniowych. Zagadnienia przedstawione w tym podrozdziale prezentują kolejne sposoby tytułowej klasyfikacji hipergrafów poprzez wielomian chromatyczny. Poniżej zaprezentowane zostały definicje chromatycznej równoważności oraz chromatycznej charakteryzacji hipergrafów. Są one zaczerpnięte z [8, 20, 27].



Mówimy, że dwa hipergrafy  $H$  i  $H'$  są *chromatycznie równoważne* albo  $\chi$ -*równoważne*, jeżeli  $f(H, \lambda) = f(H', \lambda)$ . Piszemy wtedy  $H \sim H'$ . Klasa równoważności, która zawiera wszystkie hipergrafy chromatycznie równoważne z  $H$ , jest oznaczana przez  $\langle H \rangle$ .

Klasa  $\mathcal{H}$  hipergrafów nazywana jest *chromatycznie charakteryzowalną*, jeżeli dla każdego hipergrafu  $H \in \mathcal{H}$  zachodzi równość  $\langle H \rangle = \mathcal{H}$ . Dodatkowo klasa  $\mathcal{H}$  jest *chromatycznie zamknięta*, jeśli dla każdego hipergrafu  $H \in \mathcal{H}$  prawdziwy jest związek  $\langle H \rangle \subseteq \mathcal{H}$ .

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą dwoma klasami hipergrafów. Klasa  $\mathcal{H}$  jest *chromatycznie charakteryzowalna w klasie  $\mathcal{K}$* , jeżeli dla każdego hipergrafu  $H \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$  prawdziwa jest równość  $\langle H \rangle \cap \mathcal{K} = \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ .

Na wstępie przedstawimy twierdzenie, które w dalszej części pracy umożliwi wyciągnięcie wniosków odnośnie chromatycznej charakteryzacji hiperdrzew oraz hipergrafów jednocyklicznych.

**Twierdzenie 4.1** ([20]). *Jeżeli dwa  $h$ -hipergrafy  $H$  i  $H'$  są chromatycznie równoważne oraz  $H$  jest liniowy, to  $H'$  również jest liniowy.*

*Dowód.* Skoro  $H$  i  $H'$  są chromatycznie równoważne, to mają ten sam rząd. Niech będzie to  $n$ . Przypuśćmy, że  $H'$  nie jest liniowy. Niech  $r$  będzie największą liczbą wierzchołków, w których przecinają się krawędzie hipergrafu  $H'$ . Oczywiście zachodzi  $2 \leq r \leq h - 1$ . Zauważmy, że jeżeli  $|e_1 \cap e_2| = r$ , to  $|e_1 \cup e_2| = 2h - r$ . Niech  $\mathcal{S}$  będzie zbiorem wszystkich podzbiorów  $S$  zbioru  $V(H')$ , które mogą być przedstawione jako suma krawędzi hipergrafu  $H'$  takich, że  $|S| = 2h - r$ . Niech  $m(S) \geq 2$  będzie liczbą krawędzi hipergrafu  $H'$  zawartych w  $S$ . Zatem każde dwie krawędzie hipergrafu  $H'$  zawarte w zbiorze  $S$  muszą mieć sumę  $S$ . Dlatego dla hipergrafu  $H'$  otrzymujemy  $N(n - 2h + r + 1, j) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \binom{m(S)}{j}$  jeżeli  $j \geq 2$  oraz 0 jeśli  $j \leq 1$ . Zatem z twierdzenia 2.7 wynika, że współczynnik przy  $\lambda^{n-2h+r+1}$  w wielomianie chromatycznym hipergrafu  $H'$  wynosi

$$\sum_{j \geq 1} (-1)^j N(n - 2h + r + 1, j) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \sum_{j=2}^{m(S)} (-1)^j \binom{m(S)}{j} = \sum_{S \in \mathcal{S}} (m(S) - 1) > 0.$$

Ale na podstawie twierdzenia 3.5 współczynnik ten w wielomianie chromatycznym hipergrafu  $H$  wynosi zero. Hipergrafy  $H$  i  $H'$  nie są więc chromatycznie równoważne. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem twierdzenia, dlatego  $H'$  musi być hipergrafem liniowym.  $\square$

## 4.1 Hiperdrzewa

W analizie chromatyczności różnych klas hipergrafów jedną z podstawowych ról pełnią wielomiany chromatyczne hiperdrzew. Na ich podstawie możemy analizować hipergrafy o bardziej złożonych strukturach. W paragrafie tym przedstawimy informacje na temat wielomianów chromatycznych hiperdrzew jednorodnych oraz hiperdrzew o dowolnych krawędziach. Podamy również twierdzenia dotyczące chromatycznej charakteryzacji tych hipergrafów.

W pierwszej kolejności przedstawimy jednak twierdzenie, które prezentuje zależność między rzędem, rozmiarem i liczbą składowych spójności acyklicznych hipergrafów  $h$ -jednorodnych. Będzie ono przydatne w dalszych rozważaniach.

**Twierdzenie 4.2** ([20]). *Niech  $H$  będzie liniowym  $h$ -hipergrafem bez cykli. Jeżeli  $H$  ma rząd  $n$ , rozmiar  $m$  oraz  $c$  składowych spójności, to  $n = c + m(h - 1)$ .*

*Dowód.* Skoro hipergraf  $H$  nie zawiera cykli oraz ma  $c$  składowych spójności, to może być przedstawiony jako suma  $c$  rozłącznych  $h$ -hiperdrzew  $H_i$  o rzędzie  $n_i$  oraz rozmiarze  $m_i$  takich, że  $n = \sum_{i=1}^c n_i$  oraz  $m = \sum_{i=1}^c m_i$ . Oczywiście jest, że dla  $h$ -hiperdrzewa o  $n_i$  wierzchołkach i  $m_i$  krawędziach zachodzi warunek  $n_i = 1 + m_i(h - 1)$ . Zatem

$$n = \sum_{i=1}^c n_i = \sum_{i=1}^c [1 + m_i(h - 1)] = c + (h - 1) \sum_{i=1}^c m_i = c + m(h - 1).$$

$\square$

### 4.1.1 Hiperdrzewa $h$ -jednorodne

Hiperdrzewa jednorodne są jedną z najbardziej przydatnych klas hipergrafów. Stanowią one podstawę w analizach chromatyczności wielu innych hipergrafów.

Postać ich wielomianu chromatycznego podał już Dohmen na początku lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Poniższe twierdzenie przedstawia tę postać.

**Twierdzenie 4.3** ([11]). *Niech  $T_m^h$  będzie  $h$ -jednorodnym hiperdrzewem o rozmiarze  $m$ . Jeżeli  $h \geq 2$  oraz  $m \geq 0$ , to*

$$f(T_m^h, \lambda) = \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^m. \quad (4.1)$$

*Dowód.* Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem liczby krawędzi hiperdrzewa  $T_m^h$ .

1. Jeżeli  $m = 0$ , to hiperdrzewo musi zawierać tylko jeden wierzchołek, który możemy pokolorować na  $\lambda$  sposobów. Zatem wzór (4.1) jest oczywiście prawdziwy.
2. Załóżmy, że wzór (4.1) jest prawdziwy dla  $h$ -hiperdrzewa  $T_m^h$  o  $m \geq 1$  krawędziach,  $h \geq 2$ . Do hiperdrzewa  $T_m^h$  dołączamy jedną  $h$ -krawędź, tak aby miała z nim jeden wspólny wierzchołek. Otrzymaliśmy w ten sposób  $h$ -hiperdrzewo o  $m + 1$  krawędziach. Dołączoną  $h$ -krawędź możemy pokolorować na  $\lambda (\lambda^{h-1} - 1)$  sposobów. Zatem na mocy twierdzenia 2.9

$$f(T_{m+1}^h) = \frac{\lambda (\lambda^{h-1} - 1)^m \cdot \lambda (\lambda^{h-1} - 1)}{\lambda} = \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^{m+1}.$$

□

**Wniosek 4.1.** *Wielomian chromatyczny  $h$ -jednorodnego hiperlasu  $H$  jest postaci*

$$f(H, \lambda) = \lambda^{c(H)} (\lambda^{h-1} - 1)^{m(H)}.$$

*Dowód.* Wniosek jest konsekwencją twierdzeń 2.8 oraz 4.3. □

**Wniosek 4.2.** *Wielomian chromatyczny  $h$ -jednorodnej ścieżki elementarnej o długości  $p$  jest postaci*

$$f(P_p^h, \lambda) = \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^p. \quad (4.2)$$

*Dowód.* Powyższy wniosek wynika z faktu, iż ścieżka elementarna  $P_p^h$  jest szczególnym przypadkiem  $h$ -jednorodnego drzewa o rozmiarze  $p$ .  $\square$

Kolejne twierdzenie prezentuje rozumowanie odwrotne niż w twierdzeniu 4.3. Z postaci wielomianu chromatycznego pewnego hipergrafu liniowego możemy wywnioskować, że jest on hiperdrzewem.

**Twierdzenie 4.4** ([8]). *Jeżeli  $H$  jest hipergrafem liniowym oraz*

$$f(H, \lambda) = \lambda \left( \lambda^{h-1} - 1 \right)^m, \quad \text{gdzie } h \geq 3 \text{ i } m \geq 1, \quad (4.3)$$

*to  $H$  jest  $h$ -jednorodnym hiperdrzewem o rozmiarze  $m$ .*

*Dowód.* Niech  $h \geq 3$  i  $m \geq 1$ . Przypuśćmy, że hipergraf liniowy  $H$  ma wielomian chromatyczny dany zależnością (4.3). Wzór ten możemy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} f(H, \lambda) &= (-1)^0 \binom{m}{0} \lambda^{m(h-1)+1} + (-1)^1 \binom{m}{1} \lambda^{(m-1)(h-1)+1} + \dots \\ &+ (-1)^k \binom{m}{k} \lambda^{(m-k)(h-1)+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \lambda. \end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia 4.2 zachodzi równość  $n = 1 + m(h-1)$ . Współczynniki wielomianu chromatycznego danego wzorem (4.3) są niezerowe tylko przy potęgach  $\lambda^{(m-k)(h-1)+1}$  dla  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Z równości  $(m-k)(h-1)+1 = n - k(h-1)$  wynika, że

$$a_{k(h-1)} = (-1)^k \binom{m}{k} \quad \text{dla } k \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Analizując współczynniki wielomianu  $f(H, \lambda)$  otrzymujemy następujące wnioski:

1.  $a_0 = (-1)^0 \binom{m}{0} = 1$ , dlatego rząd hipergrafu  $H$  wynosi  $n = 1 + m(h-1)$ ;
2.  $a_{n-1} = a_{m(h-1)} = (-1)^m \binom{m}{m} \neq 0$ , stąd na mocy twierdzenia 3.1 hipergraf  $H$  jest spójny.

Jak widać, dla  $h \geq 3$  i  $m \geq 1$  prawdziwa jest nierówność  $1 + m(h - 1) \geq 3$ . Na mocy twierdzenia 3.3, dla  $n = 1 + m(h - 1)$ ,  $l = m$  oraz  $z = m$  stwierdzamy, że hipergraf  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla  $j \in \{2, 3, \dots, 1 + m(h - 1)\} \setminus \{h\}$ , zawiera  $m$   $h$ -krawędzi oraz nie zawiera  $h$ -jednorodnych cykli o długości nieprzekraczającej  $m$ . Oznacza to, że  $H$  jest  $h$ -jednorodnym hiperdrzewem.  $\square$

Zatem  $h$ -jednorodne drzewa są chromatycznie charakteryzowalne w klasie hipergrafów liniowych. Dodatkowo na podstawie twierdzenia 4.1 wnioskujemy, że żaden inny  $h$ -hipergraf nie może być chromatycznie równoważny z  $h$ -jednorodnymi hiperdrzewami. Jednak nie istnieje twierdzenie, które mówiłoby, że  $h$ -jednorodne drzewa są chromatycznie charakteryzowalne w przypadku ogólnym.

#### 4.1.2 Hiperdrzewa o dowolnych krawędziach

Pokazaliśmy już, jaka jest postać wielomianu chromatycznego hiperdrzewa  $h$ -jednorodnego. Teraz zajmiemy się hiperdrzewami, które mogą mieć krawędzie zawierające dowolną liczbę wierzchołków.

**Twierdzenie 4.5** ([7]). *Jeżeli  $T_{m_1, m_2, \dots, m_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  jest hiperdrzewem o  $m_s$   $i_s$ -krawędziach dla  $1 \leq s \leq k$ , gdzie  $i_s \geq 2$  dla każdego  $s$  oraz  $m_1 + m_2 + \dots + m_k \geq 0$ , to*

$$f\left(T_{m_1, m_2, \dots, m_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}, \lambda\right) = \lambda \left(\lambda^{i_1-1} - 1\right)^{m_1} \left(\lambda^{i_2-1} - 1\right)^{m_2} \dots \left(\lambda^{i_k-1} - 1\right)^{m_k}. \quad (4.4)$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy w oparciu o zasadę indukcji matematycznej względem liczby krawędzi hiperdrzewa.

1. W pierwszym kroku indukcyjnym zakładamy, że hiperdrzewo nie zawiera żadnej krawędzi. Ze wzoru (4.4) mamy  $f(T, \lambda) = \lambda$ , co jest prawdą na mocy twierdzenia 4.3 dla  $m = 0$ .
2. Załóżmy teraz, że dla pewnej, większej bądź równej 1, liczby krawędzi, hiperdrzewo  $T_{m_1, m_2, \dots, m_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  ma wielomian chromatyczny dany zależnością (4.4). Do hiperdrzewa tego dołączamy jedną krawędź, tak aby miała ona z nim

dokładnie jeden wspólny wierzchołek. Bez utraty ogólności przyjmijmy, iż dołączamy  $i_1$ -krawędź. W każdym innym przypadku rozumowanie jest analogiczne. Na mocy twierdzenia 2.9 mamy

$$\begin{aligned} & f\left(T_{m_1+1, m_2, \dots, m_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}, \lambda\right) \\ &= \frac{\lambda(\lambda^{i_1-1}-1)^{m_1}(\lambda^{i_2-1}-1)^{m_2} \dots (\lambda^{i_k-1}-1)^{m_k} \cdot \lambda(\lambda^{i_1-1}-1)}{\lambda} \\ &= \lambda(\lambda^{i_1-1}-1)^{m_1+1}(\lambda^{i_2-1}-1)^{m_2} \dots (\lambda^{i_k-1}-1)^{m_k}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Walter [27], badając własności hipergrafów niejednorodnych, udowodnił niżej przedstawione twierdzenie. Charakteryzuje ono klasę hiperdrzew (niekoniecznie jednorodnych) jako klasę chromatycznie zamkniętą.

**Twierdzenie 4.6** ([27]). *Klasa  $\mathcal{T}$  hiperdrzew o rozmiarze  $m$ , w których  $m_s$  krawędzi zawiera  $s$  wierzchołków,  $s \geq 2$ , jest chromatycznie zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą warunki:  $m \leq 4$  oraz  $m_2 \geq m - 1$ .*

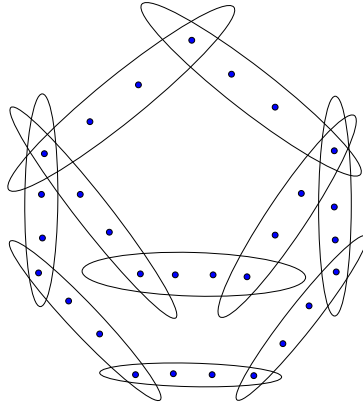
**Wniosek 4.3** ([27]). *Klasa hiperdrzew o rzędzie  $n$  jest chromatycznie zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy  $n \leq 5$ .*

*Dowód.* Wniosek jest konsekwencją twierdzeń 4.2 i 4.6. □

## 4.2 Hipergrafy wielomostowe

Tematykę hipergrafów wielomostowych poruszyli Bokhary, Tomescu i Bhatti w pracy [6]. Jej kontynuację i rozwinięcie możemy znaleźć w [24].

*Hipergrafem  $k$ -mostowym* [6] nazywamy hipergraf składający się z  $k$   $h$ -jednorodnych ścieżek elementarnych o długościach odpowiednio  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , które mają wspólne końce. Zakładamy, że  $h \geq 2$  oraz  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ . Hipergraf taki nazywamy również *wielomostowym* i oznaczamy symbolem  $\theta(h; a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Na rysunku 8 możemy zobaczyć przykładowy hipergraf wielomostowy.



**Rysunek 8:**  $\theta(4; 2, 3, 5)$

#### 4.2.1 $\lambda$ -kolorowania ścieżki

Hipergrafy wielomostowe składają się z pewnej ilości ścieżek, dlatego oczywistym jest, iż liczba  $\lambda$ -kolorowań, a więc i wielomian chromatyczny, tych hipergrafów jest w bardzo dużym stopniu uzależniona od liczby  $\lambda$ -kolorowań poszczególnych ścieżek. Podamy więc najpierw kilka własności  $\lambda$ -kolorowań ścieżek, które wykorzystamy w dalszej części pracy.

**Twierdzenie 4.7** ([6]). *Niech  $P_p^h$  będzie  $h$ -jednorodną ścieżką elementarną o długości  $p \geq 1$ , która łączy wierzchołki  $x$  i  $y$ . Niech  $E(P_p^h) = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  oraz  $x \in e_1, y \in e_p$ . Wtedy:*

$$C_1(\lambda, p, h) = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1)$$

oraz

$$C_2(\lambda, p, h) = (\lambda - 1) \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^{p+1} \right],$$

gdzie  $C_1(\lambda, p, h)$  i  $C_2(\lambda, p, h)$  są liczbami wszystkich możliwych  $\lambda$ -kolorowań  $f$  ścieżki  $P_p^h$  takich, że  $f(x) = f(y)$  oraz  $f(x) \neq f(y)$  odpowiednio.

*Dowód.* Łatwo zauważyć, że liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań ścieżki elementarnej  $P_p^h$  jest sumą  $C_1(\lambda, p, h)$  oraz  $C_2(\lambda, p, h)$ . Na podstawie wzoru (4.2) liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań takiej ścieżki wynosi

$$\lambda(\lambda^{h-1} - 1)^p = C_1(\lambda, p, h) + C_2(\lambda, p, h).$$

Niech  $\{z\} = e_{p-1} \cap e_p$  oraz niech  $L_1$  będzie podhipergrafem indukowanym przez zbiór krawędzi  $\{e_1, e_2, \dots, e_{p-1}\}$ . Liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $L_1$  takich, że  $f(x) = f(z)$  względnie  $f(x) \neq f(z)$  wynosi odpowiednio  $C_1(\lambda, p-1, h)$  oraz  $C_2(\lambda, p-1, h)$ . Mamy zatem

$$\begin{aligned} C_1(\lambda, p, h) &= C_1(\lambda, p-1, h) (\lambda^{h-2} - 1) + C_2(\lambda, p-1, h) \lambda^{h-2} \\ &= C_1(\lambda, p-1, h) (\lambda^{h-2} - 1) + \left[ \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} - C_1(\lambda, p-1, h) \right] \lambda^{h-2} \\ &= \lambda^{h-1} (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} - C_1(\lambda, p-1, h). \end{aligned}$$

Powtarzając powyższe rozumowanie  $p-2$  razy otrzymujemy

$$\begin{aligned} C_1(\lambda, p, h) &= \lambda^{h-1} (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} - C_1(\lambda, p-1, h) = \dots \\ &= \lambda^{h-1} (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} - \lambda^{h-1} (\lambda^{h-1} - 1)^{p-2} + \dots + (-1)^{p-1} C_1(\lambda, 1, h). \end{aligned}$$

Oczywiście  $C_1(\lambda, 1, h) = f(T_1^{h-1}, \lambda) = \lambda(\lambda^{h-2} - 1) = \lambda^{h-1} - \lambda$ , więc

$$\begin{aligned} C_1(\lambda, p, h) &= \\ &= \lambda^{h-1} (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} - \lambda^{h-1} (\lambda^{h-1} - 1)^{p-2} + \dots + (-1)^{p-1} [\lambda^{h-1} - \lambda] \\ &= \lambda^{h-1} \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} - (\lambda^{h-1} - 1)^{p-2} + \dots + (-1)^{p-2} (\lambda^{h-1} - 1) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{p-1} \right] + (-1)^p \lambda = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} C_2(\lambda, p, h) &= \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^p - C_1(\lambda, p, h) \\ &= \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^p - (\lambda^{h-1} - 1)^p - (-1)^p (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1) \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^{p+1} \right]. \end{aligned} \quad \square$$



Twierdzenie 4.7 podaje liczbę  $\lambda$ -kolorowań ścieżki elementarnej w przypadkach gdy wierzchołki, które łączy ta ścieżka mają takie same lub różne kolory. Informacja ta będzie dla nas przydatna w dalszej części pracy, kiedy badać będziemy własności cykli. Kolejne z prezentowanych twierdzeń przedstawia kilka dodatkowych własności  $\lambda$ -kolorowań ścieżek.

**Twierdzenie 4.8** ([6]). *Niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą dwoma ustalonymi kolorami takimi, że  $\alpha \neq \beta$  oraz  $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$ . Liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań  $f$  ścieżki elementarnej  $P_p^h$  takich, że:*

- 1)  $f(x) = f(y) = \alpha$  wynosi  $\frac{1}{\lambda}C_1(\lambda, p, h)$ ;
- 2)  $f(x) = \alpha$  i  $f(y) \neq \alpha$  wynosi  $\frac{1}{\lambda}C_2(\lambda, p, h)$ ;
- 3)  $f(x) = \alpha$  i  $f(y) = \beta$  wynosi  $\frac{1}{\lambda(\lambda-1)}C_2(\lambda, p, h)$ ;
- 4)  $f(x) \neq \alpha$ ,  $f(y) \neq \alpha$  oraz  $f(x) \neq f(y)$  wynosi  $\frac{\lambda-2}{\lambda}C_2(\lambda, p, h)$ .

*Dowód.* Kolor  $\alpha$  możemy wybrać na  $\lambda$  sposobów, dlatego dwa pierwsze przypadki wynikają wprost z określenia symboli  $C_1(\lambda, p, h)$  i  $C_2(\lambda, p, h)$ .

Parę  $(\alpha, \beta)$  (kolejność kolorów nie ma znaczenia) możemy wybrać na  $\lambda(\lambda-1)$  sposobów. Przypadek trzeci jest więc również oczywisty.

Rozważmy przypadek czwarty. Niech  $I$  oznacza liczbę  $\lambda$ -kolorowań spełniających założenia punktu czwartego. Liczba  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $P_p^h$  takich, że  $f(x) \neq \alpha$  oraz  $f(x) \neq f(y)$  równa się

$$C_2(\lambda, p, h) - \frac{1}{\lambda}C_2(\lambda, p, h) = \frac{\lambda-1}{\lambda}C_2(\lambda, p, h).$$

Zauważmy, że powyższa wielkość jest sumą wielkości  $I$  oraz liczby wszystkich  $\lambda$ -kolorowań ścieżki  $P_p^h$  takich, że  $f(x) \neq \alpha$  oraz  $f(y) = \alpha$ , która wynosi (przypadek drugi)  $\frac{1}{\lambda}C_2(\lambda, p, h)$ . Zatem wnioskujemy, iż

$$I = \frac{\lambda-1}{\lambda}C_2(\lambda, p, h) - \frac{1}{\lambda}C_2(\lambda, p, h) = \frac{\lambda-2}{\lambda}C_2(\lambda, p, h).$$

□

Niech  $H^*$  będzie hipergrafem składającym się z dwóch hipergrafów  $H_1$  i  $H_2$  takich, że  $V(H_1) \cap V(H_2) = \{x, y\}$ . Dla  $i = 1, 2$  przez symbole  $C_1(H_i, \lambda, h)$  oraz  $C_2(H_i, \lambda, h)$  rozumiemy liczbę wszystkich  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $H_i$  takich, że zachodzi  $f(x) = f(y)$  oraz  $f(x) \neq f(y)$  odpowiednio.

**Twierdzenie 4.9** ([6]). *Wielomian chromatyczny hipergrafu  $H^*$  jest postaci*

$$f(H^*, \lambda) = \frac{1}{\lambda} C_1(H_1, \lambda, h) C_1(H_2, \lambda, h) + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} C_2(H_1, \lambda, h) C_2(H_2, \lambda, h).$$

*Dowód.* Jeżeli  $\alpha \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$  jest ustalonym kolorem, to liczba  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $H_i$  takich, że  $f(x) = f(y) = \alpha$  wynosi  $\frac{1}{\lambda} C_1(H_i, \lambda, h)$ . Zatem liczba  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $H^*$  spełniających warunek  $f(x) = f(y) = \alpha$  wynosi  $\frac{1}{\lambda^2} C_1(H_1, \lambda, h) C_1(H_2, \lambda, h)$ . Oznacza to, że przy warunku  $f(x) = f(y)$  liczba  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $H^*$  równa się

$$\lambda \frac{1}{\lambda^2} C_1(H_1, \lambda, h) C_1(H_2, \lambda, h) = \frac{1}{\lambda} C_1(H_1, \lambda, h) C_1(H_2, \lambda, h).$$

Prowadząc analogiczne rozumowanie dowodzimy, że liczba  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $H^*$  takich, że  $f(x) \neq f(y)$  wynosi

$$\frac{1}{\lambda(\lambda-1)} C_2(H_1, \lambda, h) C_2(H_2, \lambda, h).$$

Zatem

$$f(H^*, \lambda) = \frac{1}{\lambda} C_1(H_1, \lambda, h) C_1(H_2, \lambda, h) + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} C_2(H_1, \lambda, h) C_2(H_2, \lambda, h).$$

□

#### 4.2.2 Ogólna postać wielomianu chromatycznego hipergrafów wielomostowych

Znamy już potrzebne własności  $\lambda$ -kolorowania ścieżek. Wiedza ta pozwala w prosty sposób wyznaczyć wielomian chromatyczny hipergrafów wielomostowych w przypadku ogólnym.

**Twierdzenie 4.10** ([6]). *Jeżeli  $h \geq 2$  oraz  $k, a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1$ , to*

$$f(\theta(h; a_1, a_2, \dots, a_k), \lambda) = \frac{1}{\lambda^{k-1}} \prod_{i=1}^k \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^{a_i} + (-1)^{a_i} (\lambda - 1) \right] \\ + \frac{\lambda - 1}{\lambda^{k-1}} \prod_{i=1}^k \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^{a_i} + (-1)^{a_i+1} \right].$$

*Dowód.* Ponieważ hipergraf  $\theta(h; a_1, a_2, \dots, a_k)$  składa się z  $k$  ścieżek, to na podstawie twierdzenia 4.9 łatwo zauważyć, że

$$f(\theta(h; a_1, a_2, \dots, a_k), \lambda) = \frac{1}{\lambda^{k-1}} \prod_{i=1}^k C_1(\lambda, a_i, h) \\ + \frac{1}{\lambda^{k-1} (\lambda - 1)^{k-1}} \prod_{i=1}^k C_2(\lambda, a_i, h).$$

Wstawiając wielkości  $C_1(\lambda, a_i, h)$  i  $C_2(\lambda, a_i, h)$  z twierdzenia 4.7, otrzymujemy tezę.  $\square$

### 4.3 Cykle

Podobnie jak hiperdrzewa, ważną klasę hipergrafów stanowią cykle. Są one również bardzo przydatne w badaniu chromatyczności bardziej złożonych hipergrafów. W paragrafie tym zajmiemy się wielomianami chromatycznymi cykli jednorodnych oraz ich uogólnieniem.

#### 4.3.1 Postać wielomianu chromatycznego jednorodnego cyklu

Wyznaczenie wielomianu chromatycznego  $h$ -jednorodnego cyklu elementarnego nie jest trudnym zadaniem. Postać takiego wielomianu prezentuje poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 4.11** ([11]). *Niech  $p \geq 2$  oraz  $h \geq 2$ . Wówczas wielomian chromatyczny  $h$ -jednorodnego cyklu elementarnego o długości  $p$  ma postać*

$$f(C_p^h, \lambda) = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1). \quad (4.5)$$

Powyższe twierdzenie udowodnimy w inny sposób niż ten, który znaleźć możemy w literaturze.

*Dowód.* Rozważmy  $h$ -jednorodną ścieżkę elementarną o długości  $p \geq 2$ , która łączy wierzchołki  $x$  i  $y$ ,  $h \geq 2$ . Oczywiście wielomian chromatyczny tej ścieżki jest sumą wszystkich takich  $\lambda$ -kolorowań, że wierzchołki  $x$  i  $y$  mają identyczne barwy oraz takich, że mają one różne barwy. Jeżeli wierzchołki te muszą mieć identyczne barwy, to utożsamiając je i zastępując jednym wierzchołkiem nie zmienimy liczby wszystkich możliwych  $\lambda$ -kolorowań tej ścieżki. Dodatkowo zauważmy, że po utożsamieniu wierzchołków  $x$  i  $y$  ścieżka ta staje się  $h$ -jednorodnym cyklem elementarnym o długości  $p$ . Zatem wielomian chromatyczny cyklu elementarnego  $C_p^h$  jest liczbą wszystkich  $\lambda$ -kolorowań ścieżki  $P_p^h$  takich, że wierzchołki  $x$  i  $y$  mają identyczne barwy. Mamy więc

$$f(C_p^h, \lambda) = C_1(\lambda, p, h).$$

Dodatkowo, na podstawie twierdzenia 4.7

$$C_1(\lambda, p, h) = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p(\lambda - 1).$$

Zatem

$$f(C_p^h, \lambda) = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p(\lambda - 1).$$

□

### 4.3.2 Uogólnienie wielomianu chromatycznego cyklu

Wiemy już, jak wygląda wielomian chromatyczny  $h$ -jednorodnego cyklu elementarnego. W literaturze dodatkowo możemy znaleźć informacje na temat postaci tego wielomianu w przypadku hipergrafu, który jest rozszerzeniem pojęcia cyklu. Allagan [1] zauważył, że w prosty sposób możemy uzyskać postać wielomianu chromatycznego hipergrafu, który powstał przez dodanie do pewnej krawędzi 2-jednorodnego cyklu określonej liczby wierzchołków.

Niech  $C = (V, E)$  będzie 2-jednorodnym cyklem, zawierającym  $n \geq 3$  wierzchołków oraz niech  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Rozważmy krawędź  $e = \{x_1, x_2\}$  należąca do zbioru krawędzi tego cyklu. Do krawędzi  $e$  dodajemy  $k$  wierzchołków w taki sposób, aby były one wiszące (miały stopień jeden). Tak powstała krawędź oznaczymy przez  $e'$ . Niech  $S_k$  oznacza zbiór wierzchołków, które dodaliśmy do krawędzi  $e$ . Niech będzie to  $S_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ . Dodatkowo niech  $E'$  oznacza zbiór powstały z  $E$  poprzez zastąpienie krawędzi  $e$  krawędzią  $e'$ . Rozważmy hipergraf  $H_k = (V \cup S_k, E')$ . Poniższe twierdzenie, udowodnione przez Allagana, pozwala wyznaczyć wielomian chromatyczny hipergrafu  $H_k$ .

**Twierdzenie 4.12** ([1]). *Wielomian chromatyczny hipergrafu  $H_k$  jest postaci*

$$f(H_k, \lambda) = (\lambda - 1)^n \cdot \sum_{i=0}^k \lambda^i + (-1)^n (\lambda - 1). \quad (4.6)$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy w oparciu o zasadę indukcji względem liczby dodanych wierzchołków. Zauważmy, że

$$f(H_0, \lambda) = (\lambda - 1)^n \cdot \lambda^0 + (-1)^n (\lambda - 1) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n (\lambda - 1) = f(C_n^2, \lambda).$$

Ostatnia równość zachodzi na mocy równania (4.5) dla  $h = 2$  i  $p = n$ . Zatem wzór (4.6) jest prawdziwy dla hipergrafu  $H_0$ .

Przyjmijmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla hipergrafu  $H_k$ . Rozważmy hipergraf  $H_{k+1}$ . Powstał on z cyklu  $C = (V, E)$  poprzez zastąpienie pewnej krawędzi  $e = \{x_1, x_2\} \in E$  krawędzią  $e' = e \cup S_{k+1}$ , gdzie  $S_{k+1} = \{y_1, y_2, \dots, y_{k+1}\}$ . Dla hipergrafu  $H_{k+1}$  zastosujemy twierdzenie 2.5, przyjmując za  $u$  jeden z wierzchołków należących do krawędzi  $e$ , natomiast za  $v$  jeden z wierzchołków należących do zbioru  $S_{k+1}$ . Łatwo zauważyć, że jeśli zastąpimy hiperkrawędź  $e'$  2-krawędzią  $\{u, v\}$ , to otrzymamy hipergraf, który składa się z drzewa  $T$  o  $n + 1$  wierzchołkach oraz  $k$  wierzchołków izolowanych. Jeżeli zaś utożsamimy wierzchołki  $u$  i  $v$ , to otrzymamy hipergraf  $H_k$ . Na podstawie twierdzenia 2.8 i wzoru (2.4) możemy zapisać, że

$$f(H_{k+1}, \lambda) = f(T, \lambda) \lambda^k + f(H_k, \lambda).$$

Postać wielomianu chromatycznego drzewa o  $n$  wierzchołkach możemy wyznaczyć na podstawie twierdzenia 4.3, przyjmując  $h = 2$  oraz  $m = n - 1$ . Stąd

$$f(T, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^n.$$

Wielomian chromatyczny hipergrafu  $H_k$  znamy z założenia indukcyjnego, zatem ostatecznie

$$\begin{aligned} f(H_{k+1}, \lambda) &= \lambda(\lambda - 1)^n \lambda^k + (\lambda - 1)^n \cdot \sum_{i=0}^k \lambda^i + (-1)^n (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^n \left[ \lambda^{k+1} + \sum_{i=0}^k \lambda^i \right] + (-1)^n (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^n \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \lambda^i + (-1)^n (\lambda - 1). \end{aligned}$$

□

Warto dodać, że wzór (4.6) może być zapisany w postaci

$$f(H_k, \lambda) = (\lambda - 1)^{n-1} (\lambda^{k+1} - 1) + (-1)^n (\lambda - 1).$$

#### 4.4 Hipergrafy jednocykliczne

Zajmiemy się teraz zagadnieniem chromatyczności  $h$ -hipergrafów jednocyklicznych. Metodę wyznaczania wielomianu chromatycznego takich hipergrafów znaleźć możemy w kilku różnych pracach. Jednak w pozycji [8] odnajdziemy znacznie więcej interesujących nas informacji na temat tej klasy hipergrafów.

Przypomnijmy, że hipergrafem jednocyklicznym nazywamy spójny hipergraf zawierający dokładnie jeden cykl. Podamy teraz dwa twierdzenia, z których pierwsze wskazuje na postać wielomianu chromatycznego  $h$ -jednorodnego hipergrafu jednocyklicznego, natomiast drugie podaje chromatyczną charakteryzację  $h$ -hipergrafów jednocyklicznych w klasie hipergrafów liniowych.

**Twierdzenie 4.13** ([5]). *Wielomian chromatyczny liniowego,  $h$ -jednorodnego hipergrafu jednocyklicznego  $H$  zawierającego cykl elementarny  $C_p^h$  oraz  $m$  krawędzi jest postaci*

$$f(H, \lambda) = \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1) \right] (\lambda^{h-1} - 1)^{m-p},$$

przy czym  $p \geq 2$ ,  $m \geq 2$  oraz  $h \geq 2$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $p \geq 2$ ,  $m \geq 2$  oraz  $h \geq 2$ . Niech  $H$  będzie liniowym,  $h$ -jednorodnym hipergrafem jednocyklicznym. Przypuśćmy, że  $H$  zawiera cykl elementarny  $C_p^h$  oraz  $k$  różnych  $h$ -hiperdrzew o rozmiarach  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , które mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek z cyklem  $C_p^h$ . Użyjemy indukcji względem  $k$ , czyli liczby hiperdrzew.

1. Jeżeli  $k = 0$ , to  $H = C_p^h$ , zatem na podstawie twierdzenia 4.11

$$f(H, \lambda) = f(C_p^h, \lambda) = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1),$$

więc wzór jest prawdziwy, gdyż  $m = p$  dla cyklu  $C_p^h$ .

2. Niech  $k \geq 1$ . Przypuśćmy, że teza twierdzenia jest prawdziwa dla hipergrafu zawierającego  $k - 1$  hiperdrzew. Niech  $H$  będzie liniowym,  $h$ -jednorodnym hipergrafem jednocyklicznym o rozmiarze  $m$ , zdefiniowanym za pomocą cyklu elementarnego  $C_p^h$  oraz  $k$  hiperdrzew  $T_{m_1}^h, T_{m_2}^h, \dots, T_{m_k}^h$ . Jeżeli przez  $H'$  oznaczymy hipergraf powstały z  $H$  przez usunięcie krawędzi należących do hiperdrzewa  $T_{m_k}^h$  oraz wierzchołków, które należą do tego hiperdrzewa, ale nie należą do cyklu, to zawiera on  $k - 1$  hiperdrzew. Ponieważ  $H'$  oraz  $T_{m_k}^h$  mają jeden wspólny wierzchołek, więc na podstawie twierdzenia 2.9

$$f(H, \lambda) = \frac{f(H', \lambda) \cdot f(T_{m_k}^h, \lambda)}{\lambda}.$$

Stosując założenie indukcyjne oraz twierdzenie 4.3 stwierdzamy, iż

$$\begin{aligned} f(H, \lambda) &= \\ &= \frac{\left[ (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1) \right] (\lambda^{h-1} - 1)^{m-p-m_k} \cdot \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^{m_k}}{\lambda} \\ &= \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1) \right] (\lambda^{h-1} - 1)^{m-p}. \end{aligned}$$

□

Warto dodać, że Allagan [2] doszedł niezależnie do rezultatów zaprezentowanych w twierdzeniu 4.13. Zastosował on jednak inny sposób dowodu. W tej samej pracy podał on również alternatywne sposoby wyznaczenia wielomianu chromatycznego  $h$ -jednorodnego hiperdrzewa oraz  $h$ -jednorodnego cyklu.

Twierdzenie 4.14 jest rozszerzeniem informacji o hipergrafach jednocyklicznych.

**Twierdzenie 4.14** ([8]). *Hipergraf liniowy  $H$  jest  $h$ -jednorodnym hipergrafem jednocyklicznym zawierającym cykl elementarny  $C_p^h$  oraz  $m$  krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(H, \lambda) = \left[ (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1) \right] (\lambda^{h-1} - 1)^{m-p},$$

gdzie  $h \geq 3$ ,  $m \geq 3$  oraz  $p \geq 3$ .

Hipergrafy jednocykliczne są więc charakteryzowalne w obrębie klasy hipergrafów liniowych, ale nie są chromatycznie charakteryzowalne w przypadku ogólnym. Podobnie jak w przypadku hiperdrzew, na mocy twierdzenia 4.1 nie mogą istnieć  $h$ -hipergrafy chromatycznie równoważne z hipergrafami jednocyklicznymi. Mogą istnieć jednak hipergrafy niejednorodne, które są z nimi chromatycznie równoważne.

## 4.5 Hipergrafy quasi-liniowe

W tej części pracy przedstawimy zagadnienia dotyczące wielomianów chromatycznych hipergrafów quasi-liniowych. Zagadnienie quasi-liniowości hipergrafów



pojawiło się w literaturze niedawno. Jest ono rozszerzeniem pojęcia liniowości hipergrafów. Zagadnienia dotyczące hipergrafów quasi-liniowych studiowali wspólnie Tomescu i Javed w [26]. Jednym z rezultatów, jaki otrzymali, był wniosek, iż jeżeli dwa  $h$ -hipergrafy są chromatycznie równoważne i jeden z nich jest  $r$ -quasi-liniowy, to każde dwie krawędzie drugiego hipergrafu przecinają się w  $0, 1$  lub  $r$  wierzchołkach. Wniosek ten jest uogólnieniem na hipergrafy quasi-liniowe twierdzenia 4.1. Poniżej przedstawimy dwa twierdzenia dotyczące wielomianów chromatycznych hipergrafów quasi-liniowych. Jednak najpierw zdefiniujemy pojęcie quasi-liniowości.

Niech  $r \geq 1$  oraz  $h \geq 2r + 1$ . Hipergraf  $H$  nazywamy  $r$ -quasi-liniowym [26], jeżeli każde dwie jego krawędzie przecinają się w  $0$  lub  $r$  wierzchołkach. Jeżeli z kontekstu znane jest  $r$ , to o hipergrafie  $H$  mówimy krótko *quasi-liniowy*. Z definicji wynika, że hipergrafy 1-quasi-liniowe to hipergrafy liniowe.

#### 4.5.1 Ogólna postać wielomianu chromatycznego hipergrafu quasi-liniowego

Podamy teraz twierdzenie, które wskazuje na ogólną postać wielomianu chromatycznego w przypadku hipergrafów quasi-liniowych. Na jego podstawie możemy wywnioskować, jakie współczynniki wielomianu chromatycznego zanikają w przypadku konkretnego hipergrafu.

**Twierdzenie 4.15** ([26]). *Niech  $H$  będzie  $r$ -quasi-liniowym  $h$ -hipergrafem o rzędzie  $n$ . Dla  $h \geq 3r - 1$  jego wielomian chromatyczny ma postać*

$$f(H, \lambda) = \lambda^n + a_{h-1} \lambda^{n-h+1} + a_{2h-r-1} \lambda^{n-2h+r+1} + a_{2h-2} \lambda^{n-2h+2} + \dots$$

*Dowód.* Skorzystamy z twierdzenia 2.7. Rozważymy wszystkie podhipergrafy rozpinające  $h$ -jednorodnego,  $r$ -quasi-liniowego hipergrafu  $H$  o  $j \geq 0$  krawędziach.

1. Dla  $j = 0$  istnieje tylko jeden podhipergraf rozpinający, który ma  $n$  składowych spójności, co pozostaje w zgodzie ze współczynnikiem przy  $\lambda^n$ .

2. Dla  $j = 1$  istnieją podhipergrafy rozpinające, które składają się z jednej krawędzi oraz  $n - h$  wierzchołków izolowanych. Zatem

$$a_{h-1} = \sum_{j \geq 1} (-1)^j N(n-h+1, j) = -N(n-h+1, 1) = -|E(H)|.$$

3. Niech teraz  $j = 2$ . Każde dwie krawędzie hipergrafu  $H$  przecinają się w 0 lub  $r$  wierzchołkach, więc liczba składowych spójności wynosi  $n - 2h + 2$ , gdy krawędzie są rozłączne oraz  $n - 2h + r + 1$ , gdy krawędzie przecinają się w  $r$  wierzchołkach. Zatem w wielomianie chromatycznym hipergrafu  $H$  mogą wystąpić niezerowe współczynniki  $a_{2h-r-1}$  oraz  $a_{2h-2}$ .
4. Przeanalizujmy teraz przypadek  $j = 3$ . Rozważmy trzy krawędzie  $e_1, e_2, e_3 \in E(H)$  oraz podhipergraf indukowany przez te krawędzie. Jeżeli są one parami rozłączne, to liczba składowych spójności podhipergrafu jest równa  $n - 3h + 3$ . Jeśli zaś będzie, że  $|e_1 \cap e_2| = r$  i  $e_1 \cap e_3 = e_2 \cap e_3 = \emptyset$ , to podhipergraf będzie miał  $n - 3h + r + 2$  składowych spójności. W przypadku, gdy  $|e_1 \cap e_2| = |e_2 \cap e_3| = r$  oraz  $e_1 \cap e_3 = \emptyset$ , rozważany podhipergraf ma  $n - 3h + 2r + 1$  składowych. Ostatni przypadek to sytuacja, gdy  $|e_1 \cap e_2| = |e_1 \cap e_3| = |e_2 \cap e_3| = r$ . Mamy wtedy  $|e_1 \cup e_2 \cup e_3| \geq |e_1| + |e_2| + |e_3| - |e_1 \cap e_2| - |e_1 \cap e_3| - |e_2 \cap e_3| = 3h - 3r$ . Maksymalna liczba składowych spójności wyniesie więc  $n - 3h + 3r + 1$ . Zatem w przypadku gdy podhipergraf rozpinający ma 3 krawędzie, to jego liczba składowych spójności maksymalnie może wynosić  $n - 3h + 3r + 1$ .
5. Liczba składowych spójności w przypadku podhipergrafu indukowanego przez 4 krawędzie będzie nie większa niż  $n - 3h + 3r + 1$ , gdyż zwiększając liczbę krawędzi zmniejszamy liczbę składowych.

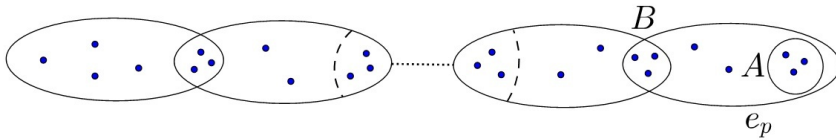
Zatem ostatecznie wielomian chromatyczny hipergrafu  $H$  zawiera jednomiany  $\lambda^n$ ,  $\lambda^{n-h+1}$ ,  $\lambda^{n-2h+r+1}$ ,  $\lambda^{n-2h+2}$ ,  $\lambda^{n-3h+3r+1}$ ,  $\lambda^{n-3h+2r+1}$ ,  $\lambda^{n-3h+r+2}$ ,  $\lambda^{n-3h+3}$  oraz mniejsze potęgi zmiennej  $\lambda$ . Oczywiście w pewnych przypadkach współczynniki przy tych potęgach mogą się zerować.  $\square$

### 4.5.2 Ścieżka quasi-liniowa

Jednym z najprostszych w analizie chromatyczności przykładów hipergrafów quasi-liniowych jest ścieżka. Podamy teraz jej definicję oraz twierdzenie, które pozwala w sposób rekurencyjny wyznaczyć wielomian chromatyczny ścieżki quasi-liniowej o dowolnej liczbie krawędzi.

Ścieżką  $r$ -quasi-liniową [26] nazywamy  $h$ -jednorodny hipergraf  $P_p^{h,r}$  o rozmiarze  $p$ , którego zbiór krawędzi  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  spełnia warunki:  $|e_1| = |e_2| = \dots = |e_p| = h$  oraz

$$|e_k \cap e_l| = \begin{cases} r & \text{dla } \{k, l\} = \{i, i + 1\} \text{ oraz wszystkich } 1 \leq i \leq p - 1; \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$



Rysunek 9: Ścieżka 3-quasi-liniowa

Rysunek 9 prezentuje ścieżkę 3-quasi-liniową. Oznaczenia  $A$ ,  $B$ ,  $e_p$  oraz rysunek 9 wykorzystane zostaną w dalszych rozważaniach.

**Twierdzenie 4.16** ([26]). *Wielomian chromatyczny hipergrafu  $P_p^{h,r}$  jest postaci*

$$f(P_p^{h,r}, \lambda) = f_p(\lambda) + g_p(\lambda),$$

gdzie

$$f_p(\lambda) = (\lambda^{h-2r+1} - 1) f_{p-1}(\lambda) + \lambda^{h-2r+1} g_{p-1}(\lambda),$$

$$g_p(\lambda) = (\lambda^{h-r} - \lambda^{h-2r+1}) (f_{p-1}(\lambda) + g_{p-1}(\lambda)),$$

przy czym  $f_1(\lambda) = \lambda^{h-r+1} - \lambda$  oraz  $g_1(\lambda) = \lambda^h - \lambda^{h-r+1}$ .

*Dowód.* Rozważmy rysunek 9. Niech  $|A| = |B| = r$ . Niech  $f_p(\lambda)$  i  $g_p(\lambda)$  będą odpowiednio liczbą  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu  $P_p^{h,r}$  w przypadku, gdy zbiór  $A$  jest monochromatyczny, to znaczy kiedy wszystkie wierzchołki ze zbioru  $A$  mają jednakowe kolory, oraz gdy nie jest on monochromatyczny. Liczba wszystkich  $\lambda$ -kolorowań wynosi więc  $f_p(\lambda) + g_p(\lambda)$ . Jeżeli  $p = 1$ , to wystąpić mogą dwa przypadki opisane poniżej.

- i) Zbiór  $A$  jest monochromatyczny. Wierzchołki zbioru  $A$  możemy więc pokolorować na  $\lambda$  sposobów, a pozostałe wierzchołki hipergrafu (hiperdrzewo  $T_1^{h-r}$  lub zbiór monochromatyczny o kolorze innym niż kolor wierzchołków ze zbioru  $A$ ) na  $\lambda^{h-r} - 1$  sposobów. Zatem  $f_1(\lambda) = \lambda(\lambda^{h-r} - 1) = \lambda^{h-r+1} - \lambda$ .
- ii) Zbiór  $A$  nie jest monochromatyczny. Wierzchołki tego zbioru (hiperdrzewo  $T_1^r$ ) możemy więc pokolorować na  $\lambda^r - \lambda$  sposobów, a pozostałe wierzchołki hipergrafu na  $\lambda^{h-r}$  sposobów. Zatem  $g_1(\lambda) = (\lambda^r - \lambda)\lambda^{h-r} = \lambda^h - \lambda^{h-r+1}$ .

Liczba  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu  $P_p^{h,r} - e_p$  wynosi  $f_{p-1}(\lambda)$ , jeżeli zbiór  $B$  jest monochromatyczny oraz  $g_{p-1}(\lambda)$ , w przeciwnym razie. Przeanalizujemy teraz kilka przypadków  $\lambda$ -kolorowań hipergrafu  $P_p^{h,r}$ .

1. Zbiory  $A$  i  $B$  są monochromatyczne oraz wierzchołki w nich zawarte pokolorowane są tym samym kolorem. Liczba takich  $\lambda$ -kolorowań wynosi  $I_1 = (\lambda^{h-2r} - 1)f_{p-1}(\lambda)$ .
2. Zbiory  $A$  i  $B$  są monochromatyczne, ale wierzchołki w nich zawarte pokolorowane są różnymi kolorami. Liczba takich  $\lambda$ -kolorowań wynosi  $I_2 = (\lambda - 1)\lambda^{h-2r}f_{p-1}(\lambda)$ .
3. Zbiór  $A$  jest monochromatyczny,  $B$  nie jest monochromatyczny. Liczba takich  $\lambda$ -kolorowań wynosi  $I_3 = \lambda^{h-2r+1}g_{p-1}(\lambda)$ .
4. Zbiór  $A$  nie jest monochromatyczny, natomiast  $B$  jest. Liczba takich  $\lambda$ -kolorowań wynosi  $I_4 = f_{p-1}(\lambda)\lambda(\lambda^{r-1} - 1)\lambda^{h-2r} = (\lambda^{h-r} - \lambda^{h-2r+1})f_{p-1}(\lambda)$ .

5. Zbiory  $A$  i  $B$  nie są monochromatyczne. Liczba  $\lambda$ -kolorowań spełniających ten warunek wynosi

$$I_5 = g_{p-1}(\lambda) \lambda (\lambda^{r-1} - 1) \lambda^{h-2r} = (\lambda^{h-r} - \lambda^{h-2r+1}) g_{p-1}(\lambda).$$

Ostatecznie więc:

$$\begin{aligned} f_p(\lambda) &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= (\lambda^{h-2r} - 1) f_{p-1}(\lambda) + (\lambda - 1) \lambda^{h-2r} f_{p-1}(\lambda) + \lambda^{h-2r+1} g_{p-1}(\lambda) \\ &= (\lambda^{h-2r+1} - 1) f_{p-1}(\lambda) + \lambda^{h-2r+1} g_{p-1}(\lambda) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} g_p(\lambda) &= I_4 + I_5 \\ &= (\lambda^{h-r} - \lambda^{h-2r+1}) f_{p-1}(\lambda) + (\lambda^{h-r} - \lambda^{h-2r+1}) g_{p-1}(\lambda) \\ &= (\lambda^{h-r} - \lambda^{h-2r+1}) (f_{p-1}(\lambda) + g_{p-1}(\lambda)). \end{aligned}$$

□

## 5 Chromatyczna jednoznaczność hipergrafów

Klasyfikacja hipergrafów poprzez wielomian chromatyczny w głównym stopniu oznacza ich chromatyczną jednoznaczność. Hipergrafy, które są chromatycznie jednoznaczne w przypadku ogólnym, występują jednak niezwykle rzadko. Oczywiście odnosimy się tylko do hipergrafów, które nie są grafami. Aby wprowadzić szersze pole badań chromatycznej jednoznaczności hipergrafów, zdefiniowano również pojęcie  $h$ -chromatycznej jednoznaczności, które jest w pewnym sensie osłabionym warunkiem pełnej jednoznaczności chromatycznej. W większości przypadków jesteśmy w stanie podać klasy hipergrafów, które są jedynie  $h$ -chromatycznie jednoznaczne. W odróżnieniu od grafów, znamy tylko kilka rodzajów hipergrafów chromatycznie bądź  $h$ -chromatycznie jednoznacznych. Fakt ten może wynikać jednak z tego, iż zainteresowanie naukowców tematyką chromatyczności hipergrafów pojawiło się stosunkowo niedawno. Wyznaczaniem klas hipergrafów chromatycznie

jednoznacznych zajmowali się: Bhatti w [5], Bokhary, Tomescu i Bhatti w [6], Borowiecki i Łazuka w [7], Tomescu w [20, 22, 23] oraz Tomescu i Bokhary w [24]. Do tej pory udało się wyznaczyć niewiele klas hipergrafów chromatycznie jednoznacznych, jednak ciągle prowadzone są badania w tym zakresie.

W tym podrozdziale podamy definicję chromatycznej i  $h$ -chromatycznej jednoznaczności hipergrafów. Przedstawimy znane klasy hipergrafów chromatycznie i  $h$ -chromatycznie jednoznacznych. Udowodnimy również, że pewne hipergrafy nie są chromatycznie jednoznaczne.

Hipergraf  $H$  jest *chromatycznie jednoznaczny* [20], jeżeli  $H$  jest izomorficzny z każdym innym hipergrafem  $H'$  takim, że  $H' \sim H$ . Oznacza to, że struktura hipergrafu  $H$  jest jednoznacznie wyjaśniona przez jego wielomian chromatyczny z dokładnością do izomorfizmu.

Dodatkowo mówimy, że  $h$ -hipergraf  $H$  jest  *$h$ -chromatycznie jednoznaczny* [5], jeżeli  $H$  jest izomorficzny z każdym innym  $h$ -hipergrafem  $H'$  takim, że  $H' \sim H$ .

## 5.1 Cykle

Najprostszym rodzajem hipergrafów  $h$ -chromatycznie jednoznacznych są cykle elementarne. W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, jaka jest postać wielomianu chromatycznego  $h$ -jednorodnego cyklu elementarnego o długości  $p$ . W tej części pracy udowodnimy, że cykl taki jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny. Udowodnimy również, że w ogólności nie ma on własności chromatycznej jednoznaczności. Podane zostaną także informacje odnoszące się do cykli quasi-liniowych.

Tomescu [20] pokazał, że przy założeniu  $p, h \geq 3$  cykl elementarny  $C_p^h$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny. Rezultat ten był prostym wnioskiem z kilku innych rozwiązanych w tej pracy problemów. Poniżej przedstawione zostało jedno z kluczowych w dowodzie wspomnianego faktu twierdzeń. Natomiast twierdzenie 5.2 gwarantuje  $h$ -chromatyczną jednoznaczność cykli.

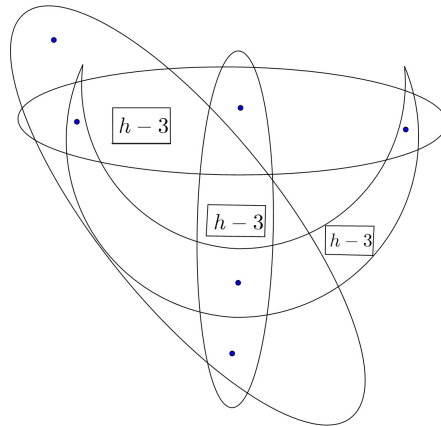
**Twierdzenie 5.1** ([20]). *Niech  $H$  będzie  $h$ -hipergrafem liniowym o rzędzie  $n$ , rozmiarze  $m$  oraz obwodzie  $g$ . Jeżeli  $h$ -hipergraf  $H'$  jest chromatycznie równoważny*

z hipergrafem  $H$  oraz  $(g, h) \neq (3, 3)$ , to  $H'$  ma ten sam rząd, rozmiar i obwód co  $H$  oraz zachodzi równość  $c_g(H') = c_g(H)$ .

*Dowód.* Skoro hipergraf  $H$  jest liniowy, to z twierdzenia 4.1 wynika, że  $H'$  również jest liniowy. Z założenia  $(g, h) \neq (3, 3)$ , więc we wzorze (3.3) dla hipergrafu  $H$  mamy  $\alpha(H, H_1) = 0$ . Ponieważ  $f(H, \lambda) = f(H', \lambda)$ , więc stosując wzór (3.3) dla hipergrafów  $H$  i  $H'$  wnioskujemy, że mają one ten sam rząd, rozmiar i obwód oraz  $c_g(H') = c_g(H)$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.2** ([20]). *Cykl elementarny  $C_p^h$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny dla wszystkich  $p, h \geq 3$ .*

*Dowód.* Niech  $H$  będzie  $h$ -hipergrafem chromatycznie równoważnym z cyklem elementarnym  $C_p^h$ . Z twierdzenia 4.1 wynika, że musi być on liniowy. Zauważmy, że  $g(C_p^h) = p$ . Zatem w przypadku  $(p, h) \neq (3, 3)$  cykl elementarny  $C_p^h$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny na mocy twierdzenia 5.1. Natomiast  $h$ -chromatyczna jednoznaczność cyklu elementarnego  $C_3^3$  wynika wprost z twierdzenia 4.1.  $\square$



**Rysunek 10:** Hipergraf chromatycznie równoważny z  $C_3^h$





Pokażemy, że  $X \sim C_p^h$ . Z twierdzenia 4.11 wiemy, że wielomian chromatyczny  $h$ -jednorodnego cyklu elementarnego o długości  $p$  jest postaci

$$f(C_p^h, \lambda) = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1).$$

Oznaczmy przez  $f_1(X, \lambda)$  i  $f_2(X, \lambda)$  liczbę wszystkich  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $X$  takich, że zbiór  $A$  jest monochromatyczny i nie jest monochromatyczny, odpowiednio. Oczywiście  $f(X, \lambda) = f_1(X, \lambda) + f_2(X, \lambda)$ . Rozważmy dowolne  $\lambda$ -kolorowanie hipergrafu  $X$ . Jeżeli zbiór  $A$  nie jest monochromatyczny, to wierzchołki należące do krawędzi  $e_p$  i  $e_{p+1}$ , ale nienależące do zbioru  $A$ , będą mogły mieć dowolne kolory. Zatem, aby wyznaczyć  $f_2(X, \lambda)$ , wystarczy pomnożyć wielomian chromatyczny ścieżki  $P_{p-1}^h$ , który znamy na podstawie wniosku 4.2, oraz liczbę  $\lambda$ -kolorowań właściwych zbioru  $A$ , która wynosi  $\lambda^{h-2} - \lambda$ . Mamy więc

$$f_2(X, \lambda) = \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} (\lambda^{h-2} - \lambda). \quad (5.1)$$

Wyznamy teraz wielkość  $f_1(X, \lambda)$ . Niech  $\alpha \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$  będzie ustalonym kolorem. Rozważymy kilka przypadków  $\lambda$ -kolorowań  $f$  hipergrafu  $X$  takich, że zbiór  $A$  jest monochromatyczny i wierzchołki w nim zawarte mają kolor  $\alpha$ . Są nimi:

1.  $Col_1: f(x) = \alpha$ ;
2.  $Col_2: f(x) \neq \alpha$ ;
3.  $Col_3: f(x) \neq \alpha$  oraz  $f(y) \neq \alpha$ ;
4.  $Col_4: f(x) \neq \alpha, f(y) = \alpha$  oraz  $f(z) \neq \alpha$ ;
5.  $Col_5: f(x) \neq \alpha, f(y) \neq \alpha$  oraz  $f(x) = f(y)$ ;
6.  $Col_6: f(x) \neq \alpha, f(y) \neq \alpha$  oraz  $f(x) \neq f(y)$ ;
7.  $Col_7: f(x) = \alpha$  oraz  $f(y) \neq \alpha$ ;
8.  $Col_8: f(x) = \alpha, f(y) = \alpha$  oraz  $f(z) \neq \alpha$ ;

9.  $Col_9$ :  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) \neq \alpha$  oraz  $f(z) = \alpha$ ;  
 10.  $Col_{10}$ :  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) \neq \alpha$  oraz  $f(z) \neq \alpha$ ;  
 11.  $Col_{11}$ :  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) \neq \alpha$ ,  $f(z) \neq \alpha$  oraz  $f(y) = f(z)$ ;  
 12.  $Col_{12}$ :  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) \neq \alpha$ ,  $f(z) \neq \alpha$  oraz  $f(y) \neq f(z)$ .

Oczywiste jest, że:

1.  $f_1(X, \lambda) = \lambda Col_1 + \lambda Col_2$ ;
2.  $Col_1 = Col_7 + Col_8$ ;
3.  $Col_2 = Col_3 + Col_4$ ;
4.  $Col_3 = Col_5 + Col_6$ ;
5.  $Col_7 = Col_9 + Col_{10}$ ;
6.  $Col_{10} = Col_{11} + Col_{12}$ .

Zatem

$$f_1(X, \lambda) = \lambda(Col_4 + Col_5 + Col_6 + Col_8 + Col_9 + Col_{11} + Col_{12}). \quad (5.2)$$

Wyznamy teraz wielkość  $Col_4$ . Zauważmy, że na podstawie twierdzenia 4.8 ścieżka elementarna składająca się z krawędzi  $e_1, e_2, \dots, e_{m-3}$  może być pokolorowana na  $\frac{1}{\lambda}C_2(\lambda, p-3, h)$  sposobów. Wierzchołek  $z$  może być pokolorowany na  $\lambda-1$  sposobów, wierzchołki ze zbioru  $B$  na  $\lambda^{h-2}$  sposobów, a wierzchołki ze zbioru  $C$  na  $\lambda^{h-1} - 1$  sposobów. Mamy więc

$$Col_4 = \frac{1}{\lambda}C_2(\lambda, p-3, h)\lambda^{h-2}(\lambda-1)(\lambda^{h-1}-1).$$

Podobnie

- $Col_5 = \frac{\lambda-1}{\lambda}C_1(\lambda, p-3, h)(\lambda^{h-1}-1)^2$ ;

- $Col_6 = \frac{\lambda-2}{\lambda} C_2(\lambda, p-3, h) (\lambda^{h-1} - 1)^2$ ;
- $Col_8 = \frac{1}{\lambda} C_1(\lambda, p-3, h) (\lambda-1) \lambda^{h-2} (\lambda^{h-1} - 2)$ ;
- $Col_9 = \frac{1}{\lambda} C_2(\lambda, p-3, h) \lambda^{h-2} (\lambda^{h-1} - 1)$ ;
- $Col_{11} = \frac{1}{\lambda} C_2(\lambda, p-3, h) (\lambda^{h-2} - 1) (\lambda^{h-1} - 2)$ ;
- $Col_{12} = \frac{1}{\lambda} C_2(\lambda, p-3, h) (\lambda-2) \lambda^{h-2} (\lambda^{h-1} - 2)$ .

Z równości (5.2) dostajemy

$$\begin{aligned} f_1(X, \lambda) &= \\ &= \lambda \left\{ C_1(\lambda, p-3, h) \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda} (\lambda^{h-1} - 1)^2 + \frac{1}{\lambda} (\lambda-1) \lambda^{h-2} (\lambda^{h-1} - 2) \right] \right. \\ &+ C_2(\lambda, p-3, h) \left[ \frac{1}{\lambda} \lambda^{h-2} (\lambda-1) (\lambda^{h-1} - 1) + \frac{\lambda-2}{\lambda} (\lambda^{h-1} - 1)^2 + \frac{1}{\lambda} \lambda^{h-2} \right. \\ &\cdot \left. \left. (\lambda^{h-1} - 1) + \frac{1}{\lambda} (\lambda^{h-2} - 1) (\lambda^{h-1} - 2) + \frac{1}{\lambda} (\lambda-2) \lambda^{h-2} (\lambda^{h-1} - 2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Po zastosowaniu twierdzenia 4.7 i wykonaniu obliczeń stwierdzamy, że

$$f_1(X, \lambda) = (\lambda^2 - 1) (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} + (-1)^p (\lambda - 1). \quad (5.3)$$

Dodając równości (5.1) i (5.3) otrzymujemy

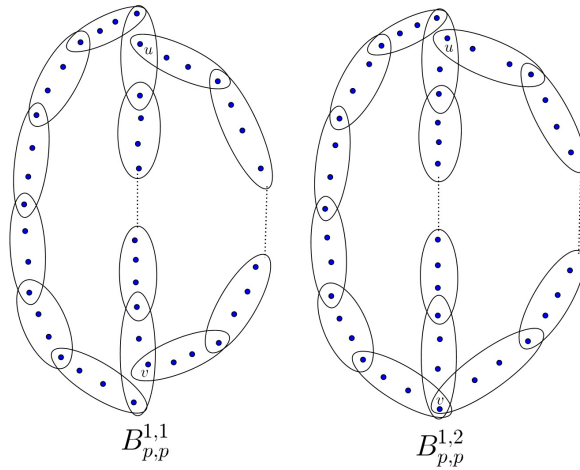
$$\begin{aligned} f(X, \lambda) &= \lambda (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} (\lambda^{h-2} - \lambda) + (\lambda^2 - 1) (\lambda^{h-1} - 1)^{p-1} \\ &+ (-1)^p (\lambda - 1) = (\lambda^{h-1} - 1)^p + (-1)^p (\lambda - 1) = f(C_p^h, \lambda). \end{aligned}$$

Zatem cykl elementarny  $C_p^h$  nie jest chromatycznie jednoznaczny dla  $p, h \geq 3$ .  $\square$

Tomescu [21] dodatkowo pokazał, że cykl quasi-liniowy  $C_3^{h,r}$  nie jest chromatycznie jednoznaczny dla  $r \geq 2$ . Mając na uwadze ten fakt oraz powyżej udowodnione twierdzenie 5.3, możemy podejrzewać, iż cykl quasi-liniowy  $C_p^{h,r}$  w ogólności nie jest chromatycznie jednoznaczny dla wszystkich  $p, h \geq 3$  oraz  $r \geq 1$ . Hipoteza ta do tej pory nie została jeszcze udowodniona. Stanowi ona jednak ciekawy, lecz złożony problem, który jest godny zainteresowania w dalszych badaniach nad chromatyczną jednoznacznością hipergrafów.

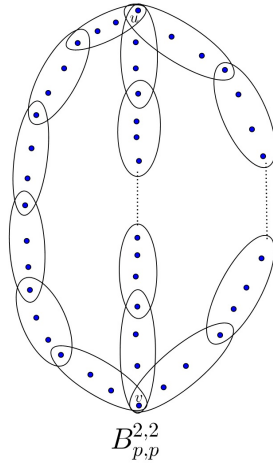
## 5.2 Bicykle

W literaturze znaleźć możemy informacje o ciekawej klasie hipergrafów, które są pewnego rodzaju połączeniem  $h$ -jednorodnych cykli i ścieżek. Hipergrafy takie zostały nazwane bicyklami. Tomescu [20] zauważył, że szczególnego rodzaju bicykle mogą być  $h$ -chromatycznie jednoznaczne. Dowód tego faktu pozostawił on jednak jako problem otwarty. Problem ten rozwiązał Bhatti w [5]. Dodatkowo udowodnił on, że pewnego rodzaju bicykle nie są chromatycznie równoważne. Poniżej przedstawiona została definicja bicykli.



**Rysunek 12:** Bicykle  $B_{p,p}^{1,1}$  i  $B_{p,p}^{1,2}$

Rozważmy elementarny,  $h$ -jednorodny cykl  $C_p^h$  ( $p \geq 4, h \geq 3$ ) zdefiniowany poprzez krawędzie  $e_1, e_2, \dots, e_p$  oraz elementarną,  $h$ -jednorodną ścieżkę  $P_{p-r}^h$ , przy czym  $r \geq 2$ , która łączy wierzchołki  $u$  i  $v$ . Załóżmy, że  $V(C_p^h) \cap V(P_{p-r}^h) = \emptyset$ . Bicyklem  $B_{p,p}^{i,j}$  nazywamy hipergraf powstały przez utożsamienie wierzchołków  $u$  i  $v$  z dwoma różnymi wierzchołkami cyklu  $C_p^h$  o stopniach  $i$  oraz  $j$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq 2$ , które należą do krawędzi  $e_1$  oraz  $e_r$ , odpowiednio [5]. Bicykle widoczne są na rysunkach 12 i 13. Twierdzenie 5.4 odnosi się do chromatycznej równoważności konkretnych bicykli.



**Rysunek 13:** Bicykl  $B_{p,p}^{2,2}$

**Twierdzenie 5.4** ([5]). *Bicykle  $B_{p,p}^{1,1}$  oraz  $B_{p,p}^{1,2}$  nie są chromatycznie równoważne dla wszystkich  $r \geq 2$  i  $h \geq 3$ .*

*Dowód.* Wprost z definicji bicykli wnioskujemy natychmiast, że ich rząd wynosi  $n = (2p - r)(h - 1) - 1$ , rozmiar  $m = 2p - r$  oraz obwód  $g = p$ . Liczba składowych spójności ich podhipergrafów rozpinających  $H$ , zawierających  $j$  krawędzi wynosi  $c(H) = n - j(h - 1)$ , gdzie  $0 \leq j \leq p - 1$ . Jeżeli natomiast  $p \leq j \leq m - 1$ , to  $c(H) = n - j(h - 1)$  lub  $c(H) = n - j(h - 1) + 1$ . Korzystając z twierdzenia 2.7 zauważmy, że jeżeli  $r \geq 2$  i  $h \geq 3$ , to współczynnik przy  $\lambda^{h-2}$  w wielomianie chromatycznym bicyklu  $B_{p,p}^{1,2}$  wynosi  $(-1)^{r-1}$ , zaś w przypadku  $B_{p,p}^{1,1}$  współczynnik ten równa się  $2(-1)^{r-1}$ . Wynika to z faktu, że wybierając podhipergraf rozpinający zawierający  $h - 2$  składowych spójności oraz  $2p - r - 1$  krawędzi, mamy jedną taką możliwość wyboru w przypadku bicyklu  $B_{p,p}^{1,2}$  oraz dwie możliwości dla  $B_{p,p}^{1,1}$ . Dlatego bicykle te nie mogą być chromatycznie równoważne.  $\square$

Jak już wspominaliśmy, pewnego rodzaju bicykle są  $h$ -chromatycznie jednoznaczne. Hipergrafy te są po cyklach elementarnych drugą klasą hipergrafów, które

mają wymienioną własność. Jednak, podobnie jak cykle elementarne, bicykle nie są w pełni chromatycznie jednoznaczne.

**Twierdzenie 5.5** ([5]). *Bicykl  $B_{p,p}^{2,2}$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny dla wszystkich  $r \geq 2$ ,  $p \geq 4$  i  $h \geq 3$ .*

*Dowód.* Wprost z definicji wynika, że  $B_{p,p}^{2,2}$  ma rząd  $n = (2p - r)(h - 1) - 1$ , rozmiar  $m = 2p - r$  oraz obwód  $g = p \geq 4$ . Niech  $H$  będzie  $h$ -jednorodnym hipergrafem, który jest chromatycznie równoważny z bicyklem  $B_{p,p}^{2,2}$ . Z twierdzenia 4.1 wynika, że jest on liniowy. Ponieważ  $(p, h) \neq (3, 3)$ , to na podstawie twierdzenia 5.1 możemy stwierdzić, że hipergraf  $H$  ma ten sam rząd, rozmiar i obwód co  $B_{p,p}^{2,2}$  oraz  $c_p(H) = 2$ . Zatem  $H$  jest izomorficzny z bicyklem  $B_{p,p}^{1,1}$ ,  $B_{p,p}^{1,2}$  lub  $B_{p,p}^{2,2}$ . W dowodzie twierdzenia 5.4 pokazaliśmy, że w wielomianie chromatycznym bicyklu  $B_{p,p}^{1,2}$  współczynnik przy  $\lambda^{h-2}$  wynosi  $(-1)^{r-1}$ , natomiast w przypadku  $B_{p,p}^{1,1}$  wielkość ta równa się  $2(-1)^{r-1}$ . Prowadząc analogiczne rozumowanie dla bicyklu  $B_{p,p}^{2,2}$  stwierdzamy, że współczynnik w jego wielomianie chromatycznym przy  $\lambda^{h-2}$  wynosi zero. Ten sam współczynnik w przypadku hipergrafu  $H$  wynosi również zero. Dlatego hipergrafy  $H$  i  $B_{p,p}^{2,2}$  są izomorficzne. Wniosek ten oznacza, że bicykl  $B_{p,p}^{2,2}$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny.  $\square$

### 5.3 Słoneczniki

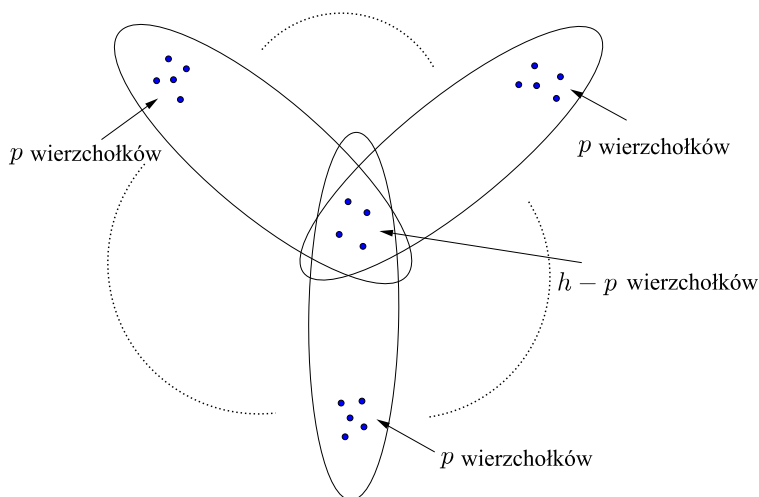
Zajmiemy się teraz zagadnieniami związanymi z chromatyczną jednoznacznością hipergrafów, które Tomescu w [23] nazwał słonecznikami. Poniżej przedstawiona została definicja rozważanych hipergrafów.

*Słonecznikiem* [22]  $SH(n, p, h)$  nazywamy  $h$ -hipergraf  $H$  ( $h \geq 3$ ) zdefiniowany w następujący sposób:

- $|V(H)| = n = h + (k - 1)p \quad (1 \leq p \leq h - 1)$ ;
- $|E(H)| = k$ ;
- istnieje taki zbiór  $X \subset V(H)$ , że  $|X| = h - p$ ;

- $V(H) \setminus X = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k$ , gdzie  $|Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_k| = p$ ;
- $E(H) = (X \cup Y_i)_{1 \leq i \leq k}$ .

Krawędzie słonecznika nazywamy *płatkami*, natomiast wierzchołki zawarte w zbiorze  $X$  *ziarnem*. Dla uproszczenia zapisu hipergraf  $SH(n, 1, h)$  oznaczać będziemy przez  $SH(n, h)$ . Struktura słonecznika zaprezentowana została na rysunku 14.



**Rysunek 14:** Hipergraf  $SH(n, p, h)$

Słoneczniki  $SH(n, p, h)$  są przy pewnych warunkach  $h$ -chromatycznie jednoznaczne. Natomiast hipergrafy  $SH(n, h)$  są jedyną znaną do tej pory klasą hipergrafów w pełni chromatycznie jednoznacznych.

### 5.3.1 Chromatyczna jednoznaczność hipergrafu $SH(n, h)$

W tej części pracy udowodnimy, że słonecznik  $SH(n, h)$  jest chromatycznie jednoznaczny. Klasa słoneczników  $SH(n, h)$  została scharakteryzowana przez Borowieckiego i Łazukę w artykule [7]. Dowód chromatycznej jednoznaczności tej klasy hipergrafów został uzupełniony przez Tomescu w [23].

**Twierdzenie 5.6** ([7]).

$$f(SH(n, h), \lambda) = \lambda^n - \binom{n-h+1}{1} \lambda^{n-h+1} + \binom{n-h+1}{2} \lambda^{n-h} - \dots \\ + (-1)^{n-h+1} \lambda. \quad (5.4)$$

*Dowód.* Każdy podhipergraf rozpinający hipergrafu  $SH(n, h)$ , który ma  $i$  składowych spójności ( $i \leq n-h+1$ ), musi zawierać dokładnie  $i-1$  wierzchołków izolowanych oraz  $j = n-h-i+2$  krawędzi. Jest  $n-h+1$  wszystkich krawędzi, dlatego  $N(i, j) = \binom{n-h+1}{n-h-i+2}$  dla  $i \leq n-h+1$ . Ponieważ wszystkie krawędzie rozważanego hipergrafu przecinają się w  $h-1$  wierzchołkach, to łatwo zauważyć, że nie istnieje taki podhipergraf rozpinający, który ma  $i$  składowych spójności dla  $n-h+2 \leq i \leq n-1$ . Z tego powodu stwierdzamy, iż  $N(i, j) = 0$  dla  $n-h+2 \leq i \leq n-1$ . Zatem na mocy twierdzenia 2.7 prawdziwy jest wzór (5.4).  $\square$

**Twierdzenie 5.7** ([23]). *Hipergraf  $SH(n, h)$  jest chromatycznie jednoznaczny.*

*Dowód.* Niech  $H$  będzie hipergrafem o rzędzie  $n$ , dla którego

$$f(H, \lambda) = \lambda^n + \sum_{r=1}^{n-h+1} (-1)^r \binom{n-h+1}{r} \lambda^{n-h-r+2}.$$

Skoro  $a_1 = a_2 = \dots = a_{h-2}$  oraz  $a_{h-1} = -(n-h+1)$ , to na podstawie twierdzenia 3.2  $H$  nie zawiera  $j$ -krawędzi dla  $2 \leq j \leq h-1$  oraz zawiera dokładnie  $n-h+1$   $h$ -krawędzi.

Zachodzi równość

$$\binom{n-h+1}{2} = a_h = -|E_{h+1}(H)| + \sum_{j \geq 2} (-1)^j N(n-h, j). \quad (5.5)$$

$N(n-h, j)$  jest liczbą podhipergrafów hipergrafu  $H$  składających się z pewnego podzbioru  $Y$  oraz  $n-h-1$  wierzchołków izolowanych, gdzie  $Y \subset V(H)$ ,  $|Y| = h+1$  oraz  $Y$  zawiera dokładnie  $j$   $h$ -krawędzi. Zatem zachodzi warunek  $2 \leq j \leq \binom{h+1}{h} = h+1$ , ponieważ  $E_2(H) = E_3(H) = \dots = E_{h-1}(H) = \emptyset$ . Jeżeli zbiór  $Y \subset V(H)$  zawiera  $j$   $h$ -krawędzi, to jego wkład w sumie (5.5) wynosi



dokładnie  $\sum_{r=2}^j (-1)^r \binom{j}{r} = j - 1$ , gdyż dla każdego  $r \geq 2$  suma dowolnych  $r$   $h$ -krawędzi zawartych w  $Y$  wynosi  $Y$ . Jeżeli przez  $r(Y)$  oznaczymy liczbę  $h$ -krawędzi zawartych w  $Y$ , to

$$-|E_{h+1}(H)| + \sum_{\substack{|Y|=h+1 \\ r(Y) \geq 2}} (r(Y) - 1) = \binom{n-h+1}{2}. \quad (5.6)$$

Ale  $j - 1 \leq \binom{j}{2}$  implikuje, że  $r(Y) - 1 \leq p(Y)$ , gdzie  $p(Y)$  oznacza liczbę nieuporządkowanych par  $h$ -krawędzi zawartych w  $Y$ . Zatem

$$\sum_{\substack{|Y|=h+1 \\ r(Y) \geq 2}} (r(Y) - 1) \leq \sum_{|Y|=h+1} p(Y) \leq \binom{n-h+1}{2}, \quad (5.7)$$

gdź każda para  $h$ -krawędzi  $b_1, b_2$  dla której  $|b_1 \cup b_2| = h + 1$  jest liczona tylko raz dla zbioru  $Y = b_1 \cup b_2$ . Zatem z (5.6) i (5.7) wnosimy, że:  $E_{h+1}(H) = \emptyset$ ,  $r(Y) = 2$  dla każdego  $Y \subseteq V(H)$ ,  $|Y| = h + 1$ ,  $r(Y) \geq 2$ . Dodatkowo wnioskujemy, że dla każdych dwóch krawędzi  $e_1, e_2 \in E_h(H)$  mamy  $|e_1 \cup e_2| = h + 1$ .

Udowodnimy, że zbiór  $h$ -krawędzi hipergrafu  $H$  indukuje hipergraf izomorficzny z hipergrafem  $SH(n, h)$ . W tym celu rozważmy dwie  $h$ -krawędzie  $e_1$  i  $e_2$ . Zachodzi oczywiście  $|e_1 \cup e_2| = h + 1$ . Zatem istnieje zbiór  $Z \subset V(H)$ ,  $|Z| = h - 1$  oraz  $x, y \notin Z$ ,  $x \neq y$  tak, że  $e_1 = Z \cup \{x\}$  oraz  $e_2 = Z \cup \{y\}$ . Zachodzi również  $r(Z \cup \{x, y\}) = 2$ , stąd  $Z \cup \{x, y\}$  zawiera tylko krawędzie  $e_1$  oraz  $e_2$ . Niech  $e_3$  będzie inną  $h$ -krawędzią hipergrafu  $H$ . Ponieważ  $|e_1 \cup e_3| = h + 1$ , to istnieją  $t \notin Z \cup \{x, y\}$  oraz  $w \in Z$  takie, że mogą wystąpić trzy przypadki:

1.  $e_3 = Z \cup \{t\}$ ;
2.  $e_3 = (Z \setminus \{w\}) \cup \{x, t\}$ ;
3.  $e_3 = (Z \setminus \{w\}) \cup \{x, y\}$ .

W przypadku drugim zachodzi  $|e_2 \cup e_3| = h + 2$ , co zaprzecza warunkowi, że każde dwie krawędzie zawierają razem  $h + 1$  wierzchołków. W przypadku trzecim zbiór

$Z \cup \{x, y\}$  zawiera krawędzie  $e_1, e_2, e_3$ , więc  $r(Z \cup \{x, y\}) = 3$ , co jest sprzeczne z warunkiem  $r(Z \cup \{x, y\}) = 2$ . Prawdziwy jest zatem warunek pierwszy.

W taki sam sposób możemy wywnioskować, że jeżeli  $E_h(H)$  zawiera wyłącznie krawędzie  $(Z \cup \{x_i\})_{1 \leq i \leq s}$ , gdzie  $Z \subset V(H)$  oraz  $|Z| = h - 1$ , wierzchołki  $x_i \notin Z$  są różne dla  $1 \leq i \leq s$ , to warunek  $s < n - h + 1$  implikuje, że każda inna krawędź  $e$ , różna od krawędzi ze zbioru  $Z \cup \{x_i\}$ , ma postać  $Z \cup \{x_{s+1}\}$ , gdzie wierzchołek  $x_{s+1}$  jest różny od wierzchołków  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Ostatecznie zatem otrzymujemy wniosek, że zbiór  $h$ -krawędzi hipergrafu  $H$  indukuje podhipergraf izomorficzny z  $SH(n, h)$  oraz  $E_{h+1}(H) = \emptyset$ .

Możemy więc zapisać, że

$$\begin{aligned} a_{h+1} &= -|E_{h+2}(H)| + \sum_{j \geq 2} (-1)^j N(n-h-1, j) \\ &= -|E_{h+2}(H)| - N(n-h-1, 3) = -|E_{h+2}(H)| - \binom{n-h+1}{3}. \end{aligned}$$

Ponieważ  $a_{h+1} = -\binom{n-h+1}{3}$ , to  $E_{h+2}(H) = \emptyset$ . Zatem korzystając z zasady indukcji matematycznej łatwo dowieść, że  $E_k(H) = \emptyset$  dla  $h+1 \leq k \leq n$ .

Na mocy wszystkich otrzymanych wniosków hipergrafy  $H$  i  $SH(n, h)$  są izomorficzne, co kończy dowód.  $\square$

Warto dodać, że słoneczniki  $SH(n, 3)$  są jedynym rodzajem hipergrafów wielomostowych, które są chromatycznie jednoznaczne. Fakt ten udowodnili Tomescu i Bokhary w [24].

### 5.3.2 $h$ -chromatyczna jednoznaczność hipergrafu $SH(n, p, h)$

W tej części pracy pokażemy, że hipergraf  $SH(n, p, h)$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny dla odpowiednich wartości parametrów  $n, p$  i  $h$ . Dowód tego faktu w 2007 roku przedstawił Tomescu w [22]. W pracy tej udowodnił on również, że dla  $p, k \geq 2$  rozważany hipergraf nie jest chromatycznie jednoznaczny, gdyż istnieje pewien hipergraf, który nie jest  $h$ -jednorodny, ale jest z nim chromatycznie równoważny.

Pierwsze z prezentowanych twierdzeń wskazuje, jaka jest postać wielomianu chromatycznego hipergrafu  $SH(n, p, h)$ . Natomiast drugie obrazuje, kiedy rozważane hipergrafy są, a kiedy nie są  $h$ -chromatycznie jednoznaczne.

**Twierdzenie 5.8** ([22]). *Dla hipergrafu  $SH(n, p, h)$ ,*

$$f(SH(n, p, h), \lambda) = \lambda(\lambda^p - 1)^k + \lambda^{pk} (\lambda^{h-p} - \lambda). \quad (5.8)$$

*Dowód.* Z twierdzenia 2.7 wynika, że

$$a_{h+(r-1)p-1} = (-1)^r \binom{k}{r} \quad \text{dla } 1 \leq r \leq k,$$

a pozostałe współczynniki są równe zero. Zatem

$$\begin{aligned} f(SH(n, p, h), \lambda) &= \lambda^n + \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} \lambda^{n-h-(r-1)p+1} \\ &= \lambda^n + \lambda^{n-h+p+1} \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} \lambda^{-pr}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru na  $n$ -tą potęgę różnicy dwóch liczb możemy zapisać, że

$$\sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} \lambda^{-pr} = \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} 1^{k-r} (\lambda^{-p})^r = (1 - \lambda^{-p})^k - 1.$$

A skoro  $n = h + (k - 1)p$ , to ostatecznie

$$\begin{aligned} f(SH(n, p, h), \lambda) &= \lambda^n + \lambda^{n-h+p+1} \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} \lambda^{-pr} \\ &= \lambda^n + \lambda^{n-h+p+1} \left( (1 - \lambda^{-p})^k - 1 \right) \\ &= \lambda^{h+pk-p} + \lambda^{pk+1} \left( (1 - \lambda^{-p})^k - 1 \right) \\ &= \lambda^{h+pk-p} - \lambda^{pk+1} + \lambda(\lambda^p - 1)^k \\ &= \lambda^{pk} (\lambda^{h-p} - \lambda) + \lambda(\lambda^p - 1)^k. \end{aligned}$$

□

**Twierdzenie 5.9** ([22]). *Niech  $n = h + (k - 1)p$ , gdzie  $h \geq 3$ ,  $k \geq 1$  oraz  $1 \leq p \leq h - 1$ . Wtedy hipergraf  $SH(n, p, h)$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny dla każdego  $1 \leq p \leq h - 2$ . Jeżeli  $p = h - 1$ , to jest on  $h$ -chromatycznie jednoznaczny dla  $k = 1$  lub  $k = 2$ , ale nie jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny dla  $k \geq 3$ .*

*Dowód.* Niech  $H$  będzie  $h$ -hipergrafem takim, że

$$f(H, \lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-h+p+1} \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} \lambda^{-pr}.$$

Oczywiście hipergraf  $H$  jest rzędu  $n$ . Każdy podhipergraf rozpinający hipergrafu  $H$ , który zawiera  $n - h + 1$  składowych spójności ma jedynie jedną krawędź. Na podstawie twierdzenia 2.7  $a_{h-1} = -N(n - h + 1, 1) = -|E(H)|$ , więc  $H$  ma dokładnie  $k$  krawędzi. Przypadek  $p = 1$  został rozpatrzony w twierdzeniu 5.7. Niech  $p$  będzie taką liczbą, że  $2 \leq p \leq h - 2$ . Każdy podhipergraf rozpinający hipergrafu  $H$  ma dwa rodzaje składowych spójności: wierzchołki izolowane oraz składowe zawierające co najmniej  $h$  wierzchołków. Składowe spójności zawierające co najmniej  $h$  wierzchołków nazywać będziemy składowymi *głównymi*. Jeżeli hipergraf ma przynajmniej 2 składowe główne, to zawiera co najwyżej  $n - 2h + 2$  składowych spójności, przy czym górna granica jest osiągnięta dla hipergrafu, którego składowymi spójności są dwie rozłączne krawędzie oraz  $n - 2h$  izolowane wierzchołki. Stąd, jeśli  $p \leq h - 2$ , to mamy  $n - h - p + 1 > n - 2h + 2$ , co oznacza, że wszystkie współczynniki  $a_{h-1}, a_h, \dots, a_{h+p-1}$  można wyznaczyć przy pomocy twierdzenia 2.7, gdzie wszystkie podhipergrfy rozpinające hipergrafu  $H$  mają tylko jedną składową główną. Jest to również prawdą dla  $p = h - 1$ , ale tylko w przypadku współczynników  $a_{h-1}, a_h, \dots, a_{h+p-2}$ . Ta uwaga będzie użyteczna w późniejszym etapie dowodu.

Symbol  $N(n - h, j)$  oznacza liczbę podhipergrafów rozpinających, składających się z pewnego podzbioru  $Y$  zbioru wierzchołków (składowa główna) oraz  $n - h - 1$  wierzchołków izolowanych, gdzie  $Y \subset V(H)$ ,  $|Y| = h + 1$ . Przypuśćmy, że  $Y$  zawiera dokładnie  $j$  krawędzi ( $j \geq 2$ ). W tym przypadku jego wkład w sumie definiującej współczynnik  $a_h$  wynosi dokładnie  $\sum_{r=2}^j (-1)^r \binom{j}{r} = j - 1$ , gdyż dla

każdego  $r \geq 2$  suma dowolnych  $r$  krawędzi zawartych w  $Y$  wynosi  $Y$ . Jeśli przez  $r(Y)$  oznaczymy liczbę krawędzi zawartych w  $Y$ , to możemy zapisać, że

$$\sum_{\substack{|Y|=h+1 \\ r(Y) \geq 2}} (r(Y) - 1) = a_h = 0. \quad (5.9)$$

Oznacza to, że nie może istnieć taki zbiór  $Y$ , albo równoważnie, dla każdych dwóch różnych krawędzi  $d_1$  i  $d_2$  mamy  $|d_1 \cup d_2| \geq h + 2$ . Rozważmy teraz zbiór  $Y \subset V(H)$ ,  $|Y| = h + 2$ . Jeżeli  $d_1, d_2 \in E(H)$ ,  $d_1 \neq d_2$  oraz  $d_1, d_2 \subset Y$ , to mamy  $d_1 \cup d_2 = Y$ , gdyż  $|d_1 \cup d_2| \geq h + 2$ . Ponieważ  $a_{h+1} = 0$ , to możemy w analogiczny sposób wywnioskować, że  $|d_1 \cup d_2| \geq h + 3$ . Przez indukcję otrzymujemy wniosek, iż dla każdych dwóch różnych krawędzi  $d_1, d_2 \in E(H)$  zachodzi  $|d_1 \cup d_2| \geq h + p$ .

Niech teraz  $Y$  będzie takim zbiorem, że:  $Y \subset V(H)$ ,  $|Y| = h + p$  oraz  $Y$  zawiera dokładnie  $j \geq 2$  krawędzi. Ponieważ dowolne dwie różne krawędzie  $d_1, d_2 \subset Y$  spełniają warunek  $d_1 \cup d_2 = Y$ , to możemy zapisać, że

$$\sum_{\substack{|Y|=h+p \\ r(Y) \geq 2}} (r(Y) - 1) = \binom{k}{2}. \quad (5.10)$$

Mamy  $j - 1 \leq \binom{j}{2}$  dla każdego  $j \geq 2$ , przy czym równość zachodzi tylko dla  $j = 2$ . Dlatego  $r(Y) - 1 \leq p(Y)$ , gdzie  $p(Y)$  oznacza liczbę nieuporządkowanych par krawędzi zawartych w  $Y$ . Zatem

$$\sum_{\substack{|Y|=h+p \\ r(Y) \geq 2}} (r(Y) - 1) \leq \sum_{|Y|=h+p} p(Y) \leq \binom{k}{2}, \quad (5.11)$$

gdyż każda para krawędzi  $b_1, b_2$  o tej własności, że  $b_1 \cup b_2 = Y$  jest liczona tylko raz dla zbioru  $Y = b_1 \cup b_2$ . Z zależności (5.10) i (5.11) możemy wywnioskować, że równość  $r(Y) = 2$  zachodzi dla każdego zbioru  $Y \subset V(H)$ ,  $|Y| = h + p$ , który spełnia warunek  $r(Y) \geq 2$ . Dodatkowo dla każdych dwóch różnych krawędzi  $e_1, e_2 \in E(H)$  mamy  $|e_1 \cup e_2| = h + p$ . Oznacza to, że każdy hipergraf rozpinający hipergrafu  $H$  ma tylko jedną główną składową.

Zauważmy, że  $a_{h+p} = 0$ . Rozważmy zbiór  $Y \subset V(H)$  spełniający warunek  $|Y| = h+p+1$ . Symbol  $N(h+p+1, j)$  oznacza liczbę podhipergrafów hipergrafu  $H$  składających się z podzbioru  $Y$  jego zbioru wierzchołków (główna składowa) oraz  $n-h-p-1$  wierzchołków izolowanych, gdzie  $|Y| = h+p+1$  i  $Y$  zawiera dokładnie  $j$  krawędzi. Mamy zatem  $r(Y) = j \geq 3$ , ponieważ dla każdych dwóch różnych krawędzi  $e_1, e_2$  zachodzi  $|e_1 \cup e_2| = h+p$ . Ponadto, dla każdych trzech różnych krawędzi  $e_1, e_2, e_3 \subset Y$  mamy  $e_1 \cup e_2 \cup e_3 = Y$ , gdyż w przeciwnym przypadku  $|e_1 \cup e_2 \cup e_3| = h+p$  i oznaczając  $Z = e_1 \cup e_2 \cup e_3$  wnioskujemy, że  $r(Z) = 3$ , co jest sprzecznością. Jak wyżej, wkład zbioru  $Y$  do współczynnika  $a_{h+p}$  wynosi

$$\sum_{r=3}^j (-1)^r \binom{j}{r} = j-1 - \binom{j}{2} \leq -1$$

dla każdego  $j \geq 3$ . Zatem

$$a_{h+p} = \sum_{\substack{|Y|=h+p+1 \\ r(Y) \geq 3}} \left( r(Y) - 1 - \binom{r(Y)}{2} \right) = 0.$$

Stąd dla każdego podzbioru zbioru  $Y$  zachodzi  $r(Y) = 0$ , ponieważ w przeciwnym razie mielibyśmy  $a_{h+p} < 0$ . Zatem każde trzy różne krawędzie  $e_1, e_2, e_3$  hipergrafu  $H$  mają tę własność, że

$$|e_1 \cup e_2 \cup e_3| > h+p+1. \quad (5.12)$$

Indukcyjnie, z równości  $a_{h+p} = a_{h+p+1} = \dots = a_{h+2p-2} = 0$  wnosimy, że dla każdych trzech różnych krawędzi  $e_1, e_2, e_3 \in E(H)$  spełniona jest nierówność

$$|e_1 \cup e_2 \cup e_3| > h+2p-1. \quad (5.13)$$

Jeżeli  $p = 2$ , to warunki (5.12) i (5.13) są identyczne. Niech  $p \geq 3$  i przypuśćmy, że dla wszystkich  $s$  takich, że  $p \leq s \leq 2p-3$  i każdych trzech różnych krawędzi  $e_1, e_2, e_3$  hipergrafu  $H$  spełniony jest warunek

$$|e_1 \cup e_2 \cup e_3| > h+s+1. \quad (5.14)$$

Rozważmy podhipergraf rozpinający hipergrafu  $H$  zawierający  $n - h - s - 1$  składowych spójności: jedną składową główną  $Y$ ,  $|Y| = h + s + 2$ ,  $r(Y) > 0$  oraz  $n - h - s - 2$  izolowanych wierzchołków. Jeżeli  $Y$  zawiera dokładnie  $j$  krawędzi, to wnioskujemy, że  $j \geq 3$ , ponieważ dla każdych dwóch różnych krawędzi  $e_1, e_2 \in E(H)$  mamy  $|e_1 \cup e_2| = h + p < h + s + 2$ . Również dla każdych trzech różnych krawędzi  $e_1, e_2, e_3 \subset Y$  mamy  $e_1 \cup e_2 \cup e_3 = Y$ , gdyż  $|e_1 \cup e_2 \cup e_3| > h + s + 1$ . Zatem

$$a_{h+s+1} = \sum_{\substack{|Y|=h+s+2 \\ r(Y) \geq 3}} \left( r(Y) - 1 - \binom{r(Y)}{2} \right) = 0,$$

co oznacza, że  $r(Y) = 0$ . Zatem dla każdych trzech różnych krawędzi  $e_1, e_2, e_3 \in E(H)$  mamy  $|e_1 \cup e_2 \cup e_3| > h + s + 2$ . Dla  $s = 2p - 3$  otrzymujemy wzór (5.13).

Udowodnimy teraz, że zbiór krawędzi hipergrafu  $H$  indukuje hipergraf izomorficzny z  $SH(n, p, h)$ . W tym celu rozważmy dwie krawędzie tego hipergrafu:  $e_1$  oraz  $e_2$ . Mamy zatem  $|e_1 \cup e_2| = h + p$ , istnieją więc zbiory  $Z \subset V(H)$ ,  $|Z| = h - p$ ,  $X_1 \subset e_1$  oraz  $X_2 \subset e_2$  takie, że  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ,  $|X_1| = |X_2| = p$ ,  $e_1 = Z \cup X_1$  oraz  $e_2 = Z \cup X_2$ . Niech  $e_3 \in E(H)$ ,  $e_3 \neq e_1$  oraz  $e_3 \neq e_2$ . Mamy  $|e_1 \cap e_3| = |e_2 \cap e_3| = h - p$ . Wprowadźmy oznaczenia:  $q = |Z \cap e_3|$  oraz  $k = |e_3 \setminus (e_1 \cup e_2)|$ . Wtedy  $|e_3 \cap X_1| = |e_3 \cap X_2| = h - p - q$ . Ponieważ  $|e_3| = h$ , to możliwe są dwa przypadki:  $q + 2(h - p - q) + k = h$  lub  $k = 2p + q - h$ . Ponieważ  $h - 2p \leq q \leq h - p$ , to otrzymujemy, że  $0 \leq k \leq p$ . Niech  $k \leq p - 1$ . W takim przypadku dostajemy równość  $|e_1 \cup e_2 \cup e_3| = h + p + k \leq h + 2p - 1$ , co zaprzecza równości (5.13). Implikuje to, że  $k = p$  oraz  $q = h - p$ , a stąd  $e_3 = Z \cup X_3$ , gdzie  $|X_3| = p$  oraz  $X_3 \cap (e_1 \cup e_2) = \emptyset$ . W taki sam sposób dowodzi się, że jeżeli  $E(H)$  zawiera krawędzie  $(Z \cup X_i)_{1 \leq i \leq s}$ , gdzie  $Z \subset V(H)$ ,  $|Z| = h - p$ ,  $|X_1| = |X_2| = \dots = |X_s| = p$  oraz  $Z, X_1, X_2, \dots, X_s$  są rozłączne, to warunek  $s < k$  implikuje wniosek, że każda inna krawędź, różna od wszystkich krawędzi ze zbioru  $Z \cup X_i$  jest postaci  $Z \cup X_{s+1}$ , gdzie  $|X_{s+1}| = p$  oraz zbiór  $X_{s+1}$  jest rozłączny ze wszystkimi zbiorami  $Z, X_1, X_2, \dots, X_s$ . Ostatecznie, zbiór krawędzi hipergrafu  $H$  indukuje hipergraf izomorficzny z hipergrafem  $SH(n, p, h)$ .

Niech teraz  $p = h - 1$ . Jeżeli  $k = 1$ , to  $n = h$ , gdyż hipergraf  $H$  ma tylko jed-

ną krawędź zawierającą wszystkie wierzchołki. Hipergraf taki jest izomorficzny z hipergrafem  $SH(h, h-1, h)$ . Rozważmy teraz przypadek  $k = 2$ . Jak pokazaliśmy, wszystkie współczynniki  $a_{h-1} = a_h = \dots = a_{h+p-2}$  mogą być wyznaczone za pomocą twierdzenia 2.7 oraz podhipergrafy wchodzące w skład odpowiedniej sumy mają tylko jedną główną składową. Wynika z tego, że dla dowolnych dwóch różnych krawędzi  $e_1, e_2 \in E(H)$  mamy  $|e_1 \cup e_2| \geq 2h - 1$ . Ale warunek  $k = 2$  implikuje, że  $n = 2h - 1$ , stąd  $e_1 \cup e_2 = V(H)$ . Zatem hipergraf  $H$  jest izomorficzny z  $SH(2h - 1, h - 1, h)$ . Zatem dla  $p = h - 1$  oraz  $k = 1$  lub  $k = 2$  hipergraf  $SH(n, p, h)$  jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny.

Niech teraz  $k \geq 3$ . Dla  $k = 3$  istnieje jedno, a dla  $k \geq 4$  co najmniej trzy nieizomorficzne  $h$ -jednorodne hiperdrzewa, zawierające  $k$  krawędzi, które nie są izomorficzne z hipergrafem  $SH(n, h - 1, h)$ . Jednak na podstawie twierdzenia 4.3 wszystkie mają taki sam wielomian chromatyczny. Dlatego dla  $k \geq 3$  hipergraf  $SH(n, h - 1, h)$  nie jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczny, co kończy dowód.  $\square$

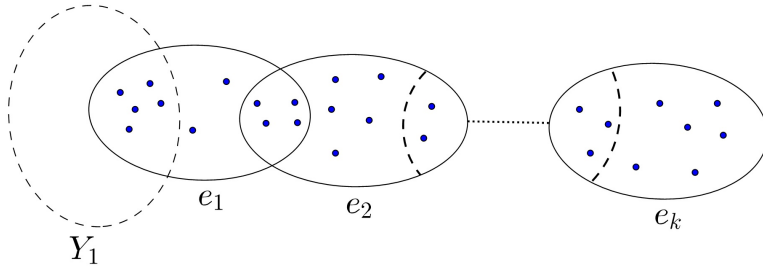
#### 5.4 Hipergrafy zawierające wiszące ścieżki

Zaprezentowaliśmy już znane do tej pory klasy hipergrafów chromatycznie jednoznacznych. Na zakończenie podamy dodatkowo informacje o tak zwanych hipergrafach z wiszącymi ścieżkami.

Rozważmy hipergraf  $Y$  widoczny na rysunku 15.  $Y_1$  jest podhipergrafem hipergrafu  $Y$ , natomiast  $e_1, e_2, \dots, e_k$  są krawędziami hipergrafu  $Y$ . Spełnione są przy tym następujące warunki:  $e_1 \cap V(Y_1) \neq \emptyset$  oraz  $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$  dla wszystkich  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , a ponadto  $e_j \cap V(Y_1) = \emptyset$  dla wszystkich  $j \in \{2, 3, \dots, k\}$ . Ścieżka składająca się z krawędzi  $e_1, e_2, \dots, e_k$  nazywana jest *wiszącą ścieżką* o długości  $k$ , natomiast o hipergrafie  $Y$  mówi się, że jest *hipergrafem z wiszącą ścieżką* lub że zawiera wiszącą ścieżkę [21].

Tomescu [21] pokazał, że hipergrafy zawierające wiszącą ścieżkę o długości co najmniej 2 nie są chromatycznie jednoznaczne. W tym celu zdefiniował on hipergraf chromatycznie równoważny z hipergrafem zawierającym wiszącą ścieżkę



Rysunek 15: Hipergraf  $Y$ 

o długości 2, który nie jest z nim izomorficzny. Oczywiście, jeżeli pewien hipergraf zawiera wiszącą ścieżkę o długości  $k > 2$ , to zawiera on również wiszącą ścieżkę o długości równej dokładnie 2.

Z faktu, iż hipergrafy zawierające wiszącą ścieżkę o długości co najmniej 2 nie są chromatycznie jednoznaczne, w prosty sposób wynika wniosek o braku chromatycznej jednoznaczności ścieżek quasi-liniowych  $P_p^{h,r}$  dla  $p \geq 3$ ,  $r \geq 1$  oraz  $h \geq 2r + 1$ . Oczywiście w przypadku  $p = 2$  ścieżka quasi-liniowa  $P_2^{h,r}$  jest słowniczkiem  $SH(2h - r, h - r, h)$ , zatem jest  $h$ -chromatycznie jednoznaczna.

Praca [21] zawiera jeszcze jedną ciekawą hipotezę. Tomescu przypuszcza, że ścieżki quasi-liniowe  $P_p^{h,r}$  i cykle quasi-liniowe  $C_p^{h,r}$  mogą być  $h$ -chromatycznie jednoznaczne dla wszystkich  $m \geq 3$  oraz  $r \geq 2$ . Przypuszczenie to stanowi kolejny ciekawy problem otwarty i wymaga głębszych analiz w najbliższej przyszłości. Jeżeli okazałoby się ono prawdziwe, to ścieżki i cykle takie stałyby się kolejnymi znanymi klasami hipergrafów  $h$ -chromatycznie jednoznacznych.

## 6 Podsumowanie i wnioski

Rozważana w niniejszym rozdziale klasyfikacja hipergrafów poprzez wielomiany chromatyczne ukazana została na kilka różnych sposobów.

Jako pierwszy sposób klasyfikacji przedstawione zostały twierdzenia, które pozwalają na odczytanie pewnych własności hipergrafów wprost z postaci ich wielomianów chromatycznych. Są nimi twierdzenia 3.1, 3.2 oraz 3.3.

Drugim sposobem klasyfikacji była chromatyczna charakteryzowalność oraz chromatyczna zamkniętość pewnych klas hipergrafów. Przedstawione zostały twierdzenia, które gwarantują, iż klasy hiperdrzew jednorodnych oraz hipergrafów jednocyklicznych zawierających cykl elementarny są chromatycznie charakteryzowalne w obrębie hipergrafów liniowych. Dodatkowo klasa hiperdrzew o rozmiarze  $m$ , które zawierają  $m_s$   $s$ -krawędzi jest chromatycznie zamknięta, jeśli  $m \leq 4$  oraz  $m_2 \geq m - 1$ .

Ostatnim, ale zarazem najważniejszym sposobem klasyfikacji hipergrafów poprzez ich wielomian chromatyczny było wykorzystanie pojęcia chromatycznej jednoznaczności. Okazało się, że do tej pory znane są tylko trzy klasy hipergrafów  $h$ -chromatycznie jednoznacznych. Są nimi:

- cykle elementarne  $C_p^h$  dla  $p, h \geq 3$ ;
- bicykle  $B_{p,p}^{2,2}$  dla  $r \geq 2, p \geq 4$  i  $h \geq 3$ ;
- słoneczniki  $SH(n, p, h)$  dla  $k \geq 1, h \geq 3$  oraz  $1 \leq p \leq h - 2$  lub dla  $p = h - 1$  oraz  $k \in \{1, 2\}$ .

Z literatury wynika, że słoneczniki  $SH(n, p)$  są jedyną znaną klasą hipergrafów w pełni chromatycznie jednoznacznych. Dodatkowo znane są pewne klasy hipergrafów, które nie są chromatycznie jednoznaczne.

W ramach podsumowania niniejszego rozdziału można przedstawić również kilka problemów otwartych z omawianego zakresu.

Po pierwsze, nadal nie istnieją twierdzenia, które potwierdzałyby hipotezę o pełnej chromatycznej charakteryzacji jednorodnych hiperdrzew i hipergrafów jednocyklicznych. Nie znamy również przykładów, które by jej zaprzeczały. Należałoby więc przedstawić dowód potwierdzający tę hipotezę bądź podać przykłady hipergrafów, które nie są liniowe i  $h$ -jednorodne, ale są chromatycznie równoważne z jednorodnymi hiperdrzewami lub hipergrafami jednocyklicznymi.

Po drugie, istnieją podstawy do tego, aby twierdzić, iż cykle quasi-liniowe  $C_p^{h,r}$  nie są chromatycznie jednoznaczne dla wszystkich  $p, h \geq 3$  oraz  $r \geq 1$ . Należałoby jednak podać formalny dowód tej hipotezy, jeżeli jest ona prawdziwa.

Po trzecie, istnieje hipoteza mówiąca o tym, że ścieżki quasi-liniowe  $P_p^{h,r}$  oraz cykle quasi-liniowe  $C_p^{h,r}$  są  $h$ -chromatycznie jednoznaczne dla wszystkich  $m \geq 3$  oraz  $r \geq 2$ . Także i ta hipoteza wymaga dowodu, który by ją potwierdzał bądź odrzucał.

Dodatkowo, ponieważ znanych jest niewiele hipergrafów chromatycznie jednoznacznych, to dalsze szukanie takich hipergrafów lub klas hipergrafów stanowi szerokie pole do przyszłych badań naukowych. Hipergrafy, a zwłaszcza problem ich chromatyczności, ze względu na rozległe, czasami być może jeszcze nieznanne zastosowania, są interesującym, choć trudnym kierunkiem badań. Inspiracji szukać należy we wspomnianych już pracach dotyczących zastosowań hipergrafów, jak również w najnowszych artykułach, np. w [31], w których analizowane są kolejne własności wielomianów chromatycznych hipergrafów.

## Literatura

- [1] J.A. Allagan, A generalization of the chromatic polynomial of a cycle, *Computer Science Journal of Moldova*, 13, 2005, 9–12.
- [2] J.A. Allagan, The chromatic polynomials of some linear uniform hypergraphs, *Congressus Numerantium*, 187, 2007, 156–160.
- [3] C. Berge, *Hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [4] A.A. Bhatti, *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs and hypergraphs*, VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken, 2010.
- [5] A.A. Bhatti, On  $h$ -chromatic uniqueness of two linear uniform cycles having some edges in common, *Ars Combinatoria*, 85, 2007, 331–339.

- 
- [6] S.A. Bokhary, I. Tomescu, A.A. Bhatti, On the chromaticity of multi-bridge hypergraphs, *Graphs and Combinatorics*, 25, 2009, 145–152.
- [7] M. Borowiecki, E. Łazuka, Chromatic polynomials of hypergraphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 20, 2000, 293–301.
- [8] M. Borowiecki, E. Łazuka, On chromaticity of hypergraphs, *Discrete Mathematics*, 307, 2007, 1418–1429.
- [9] A. Bretto, *Applications of hypergraph theory: A brief overview*, *Hypergraph Theory*, Springer, 2013, 111–116.
- [10] K. Dohmen, A broken-circuits-theorem for hypergraphs, *Arch. Math.*, 64, 1995, 159–162.
- [11] K. Dohmen, *Chromatische Polynome von Graphen und Hypergraphen*, praca doktorska, Düsseldorf, 1993.
- [12] I. Gutman, E.V. Konstantinova, V.A. Skorobogatov, Molecular hypergraphs and Clar structural formulas of benzenoid hydrocarbons, *Acta Chimica Hungaria - Models in Chemistry*, 136, 1999, 539–548.
- [13] R.P. Jones, Some results of chromatic hypergraph theory proved by 'reduction to graphs', *Colloques internationaux C.N.R.S. Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, 260, 1976, 249–250.
- [14] E.V. Konstantinova, V.A. Skorobogatov, Application of hypergraph theory in chemistry, *Discrete Mathematics*, 235, 2001, 365–383.
- [15] E.V. Konstantinova, V.A. Skorobogatov, Graph and hypergraph models of molecular structure: a comparative analysis of indices, *Zh. Strukt. Khim.*, 6, 1998, 958–966.
- [16] E.V. Konstantinova, V.A. Skorobogatov, Molecular hypergraphs: the new representation of nonclassical molecular structures with polycentric delocalized bonds, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 3, 1995, 472–478.

- [17] E.V. Konstantinova, V.A. Skorobogatov, Molecular structures of organoelement compounds and their representation by the labelled molecular hypergraphs, *Zh. Strukt. Khim.*, 2, 1998, 328–337.
- [18] B. Molnár, Applications of hypergraphs in informatics: a survey and opportunities for research, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, 42, 2014, 261–282.
- [19] R.C. Read, An introduction to chromatic polynomials, *Journal of Combinatorial Theory*, 4, 1968, 52–71.
- [20] I. Tomescu, Chromatic coefficients of linear uniform hypergraphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 72, 1998, 229–235.
- [21] I. Tomescu, Hypergraphs with pendant paths are not chromatically unique, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 34, 2014, 23–29.
- [22] I. Tomescu, On chromaticity of sunflower hypergraphs  $SH(n, p, h)$ , *Discrete Mathematics*, 307, 2007, 781–786.
- [23] I. Tomescu, Sunflower hypergraphs are chromatically unique, *Discrete Mathematics*, 285, 2004, 355–357.
- [24] I. Tomescu, S.A. Bokhary, Series parallel chromatic hypergraphs, *Discrete Applied Mathematics*, 158, 2010, 198–203.
- [25] I. Tomescu, S.A. Bokhary, Some properties of chromatic coefficients of linear uniform hypergraphs, *Graphs and Combinatorics*, 25, 2009, 639–646.
- [26] I. Tomescu, S. Javed, On the chromaticity of quasi linear hypergraphs, *Graphs and Combinatorics*, 29, 2013, 1921–1926.
- [27] M. Walter, Some results on chromatic polynomials of hypergraphs, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16, 2009, #R94.

- 
- [28] H. Whitney, A logical expansion in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38, 1932, 572–579.
- [29] H. Whitney, The coloring of graphs, *Ann. Math.*, 33, 1932, 688–718.
- [30] R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa, 1985.
- [31] R. Zhang, F.M. Dong, Properties of chromatic polynomials of hypergraphs not held for chromatic polynomials of graphs, *European Journal of Combinatorics*, 64, 2017, 138–151.



# Planarna liczba Ramseya

Izolda Gorgol<sup>1</sup>

## Streszczenie

Twierdzenie Ramseya jest jednym z dobrze znanych twierdzeń podziałowych. Zastosowane w ujęciu kolorowania krawędziowego grafów prowadzi do pojęcia liczby Ramseya, której wyznaczenie dla różnych par grafów stanowi nie lada wyzwanie. Łatwiejszą, choć nietrywialną odmianą tej liczby jest planarna liczba Ramseya, pojęcie stosunkowo nowe, lecz cieszące się sporym zainteresowaniem. Przedstawimy tutaj definicję oraz przegląd wyników dotyczących planarnej liczby Ramseya.

## Abstract

Ramsey's theorem is one of well known partition theorems. When applied to edge-colorings of graphs it leads to a notion of the Ramsey number. Determining Ramsey numbers is a very difficult task. The planar Ramsey number is easier, but nontrivial version of the classical one. It is now widely studied. We present here a definition and a survey of results on planar Ramsey numbers.

**Słowa kluczowe:** planarna liczba Ramseya, liczba Ramseya, graf planarny

---

<sup>1</sup>Katedra Matematyki Stosowanej; Wydział Podstaw Techniki; Politechnika Lubelska  
e-mail: i.gorgol@pollub.pl



## 1 Wstęp

Na wstępie naświetlimy pokrótce zagadnienie klasycznej liczby Ramseya, jako tło dla dalszych rozważań. Swoje źródło ma ona w szeroko znanym twierdzeniu Ramseya<sup>2</sup>, które przytoczymy tutaj w wersji dwukolorowej.

**Twierdzenie 1.1** ([19](Twierdzenie Ramseya)). *Dla dowolnych liczb naturalnych  $p, q \geq 1$  istnieje liczba naturalna  $n$  taka, że każde kolorowanie krawędzi grafu pełnego  $K_n$  przy użyciu dwóch barw  $c_1$  i  $c_2$  musi zawierać podgraf  $K_p$  z wszystkimi krawędziami pokolorowanymi na  $c_1$  lub podgraf  $K_q$  z wszystkimi krawędziami pokolorowanymi na  $c_2$ .*

W literaturze przyjęło się, że kolory  $c_1$  i  $c_2$  to czerwony i niebieski, a wyznaczenie najmniejszego  $n$  spełniającego warunki z twierdzenia Ramseya legło u podstaw zdefiniowania klasycznej liczby Ramseya.

**Definicja 1.1.** *Klasyczną liczbą Ramseya  $R(p, q)$  nazywamy najmniejszą liczbę  $n$  wierzchołków grafu pełnego  $K_n$  takiego, że w dowolnym kolorowaniu dwoma kolorami (powiedzmy: czerwonym i niebieskim) jego krawędzi jest zawarty podgraf  $K_p$  o wszystkich krawędziach w kolorze czerwonym lub podgraf  $K_q$  o wszystkich krawędziach w kolorze niebieskim.*

Pojęcie to zostało szybko uogólnione poprzez zastąpienie poszukiwanych jednokolorowych grafów pełnych dowolnymi ustalonymi z góry podgrafami. Niech  $G, H$  będą grafami o co najmniej dwóch wierzchołkach.

**Definicja 1.2.** *Liczbą Ramseya  $R(G, H)$  nazywamy najmniejszą liczbę  $n$  wierzchołków grafu pełnego  $K_n$  takiego, że w dowolnym kolorowaniu dwoma kolorami (czerwonym i niebieskim) jego krawędzi jest zawarta kopia grafu  $G$  w kolorze czerwonym lub kopia grafu  $H$  w kolorze niebieskim.*

Zauważmy tutaj, że definicja 1.2 jest poprawna, gdyż każdy graf jest podgrafem pewnego grafu pełnego. Stwierdzamy zatem, że  $R(G, H) \leq R(|V(G)|, |V(H)|)$ .

---

<sup>2</sup>Frank Plumpton Ramsey (ur. 22 lutego 1903 w Cambridge, zm. 19 stycznia 1930 w Londynie) – brytyjski filozof, ekonomista i matematyk.

W dalszej części tekstu liczbę Ramseya z definicji 1.2 nazywać będziemy czasem zwykłą liczbą Ramseya.

Wyznaczenie dokładnej wartości klasycznej liczby Ramseya jest niezwykle trudne. Wystarczy przytoczyć tutaj opinię znakomitego matematyka węgierskiego Paula Erdősa<sup>3</sup>. Jak podaje Joel Spencer [37], stwierdził on mianowicie, że gdyby kosmici chcieli zniszczyć Ziemię, a jedynym warunkiem odstąpienia od ataku byłoby podanie dokładnej wartości  $R(5, 5)$ , to ludzkość powinna rzucić wszystkie siły i środki, aby tę wartość wyznaczyć. Gdyby natomiast warunkiem było podanie dokładnej wartości  $R(6, 6)$ , to ludzkość powinna rzucić wszystkie siły i środki, aby zniszczyć kosmitów.

Najnowszy wynik w tym kierunku pochodzi od Angeltveita i McKaya [1], a dotyczy zmniejszenia ograniczenia górnego  $R(5, 5)$  z 49 na 48. Wyznaczenie dokładnych wartości liczby Ramseya dla pary grafów, z których co najmniej jeden nie jest grafem pełnym, jest niekiedy zagadnieniem o wiele łatwiejszym. Istnieje wiele prac dotyczących tego problemu, a prezentacja wyników znacznie przekracza ramy niniejszego opracowania. Doskonałą skarbnicą wiedzy na ten temat jest opracowany w 1994 roku przez S. Radziszowskiego i co kilka lat przez niego aktualizowany artykuł przeglądowy [35]. Za tym artykułem podajemy tabelę 1, w której zebrano część wyników dotyczących klasycznej liczby Ramseya.

W ciągu lat badań nad liczbą Ramseya powstało wiele jej modyfikacji. Omówimy tutaj planarną wersję tej liczby. Jest to zagadnienie stosunkowo nowe. Co prawda samo pojęcie liczby planarnej Ramseya pojawiło się po raz pierwszy w pracy K. Walkera [42] już w 1969 roku, czyli prawie pół wieku temu, ale wzrost zainteresowania tym zagadnieniem nastąpił znacznie później, bo po roku 1993, kiedy to niezależnie od K. Walkera planarną liczbę Ramseya zdefiniowali R. Steinberg i C. A. Tovey [38]. Zapewne wiąże się to z tym, że w roku 1969 Twierdzenie o Czterech Kolorach było jeszcze Hipotezą o Czterech Kolorach. Twierdzenie to

---

<sup>3</sup>Paul Erdős, (ur. 26 marca 1913 w Budapeszcie, zm. 20 września 1996 w Warszawie w czasie konferencji matematycznej w Centrum Banacha) – węgierski matematyk. Był jednym z najwybitniejszych matematyków XX w., autorem ponad 1500 artykułów, głównie z teorii liczb, kombinatoryki i teorii grafów, twórcą metody probabilistycznej.

pozwoiliło całkowicie rozwiązać zagadnienie klasycznej liczby Ramseya w wersji planarnej. Należy zauważyć, że juź Walker, zwrócił uwagę na to, że prawdziwość Hipotezy o Czterech Kolorach pozwoliłaby na pełne rozwiązanie zagadnienia.

Prawdopodobną motywacją zdefiniowania i rozważania takiej modyfikacji liczby Ramseya jest fakt, że wiele zagadnień w teorii grafów znacznie się upraszcza, gdy ograniczymy się do rozważania grafów planarnych.

Duża część wyników zawartych w tym rozdziale została zebrana przez Pana Andrzeja Januszkiewicza w ramach jego pracy magisterskiej napisanej pod kierunkiem autorki i obronionej w Wydziale Podstaw Techniki Politechniki Lubelskiej [28].

## 2 Podstawy teoretyczne

Używamy tu klasycznej terminologii stosowanej w teorii grafów (zob. np. [9, 16, 33]). Grafem  $G$  (grafem prostym) nazywamy uporządkowaną parę  $G = (V, E)$ , gdzie  $V$  oznacza skończony, niepusty zbiór obiektów, zwanych wierzchołkami grafu, a  $E$  rodzinę dwuelementowych podzbiorów zbioru  $V$ , zwanych krawędziami. Liczbę wierzchołków nazywamy rzędem grafu  $G$ , zaś liczbę krawędzi jego rozmiarem. Dwa wierzchołki należące do tej samej krawędzi nazywamy sąsiednimi lub sąsiadami. Mówi się również, że są to wierzchołki końcowe danej krawędzi. Liczbę sąsiadów danego wierzchołka nazywamy jego stopniem. Maksymalny stopień wierzchołka w grafie  $G$  oznaczamy przez  $\Delta(G)$  lub po prostu  $\Delta$ . Graf o rzędzie  $n$ , w którym występują wszystkie możliwe krawędzie nazywamy grafem pełnym i oznaczamy symbolem  $K_n$ . Jeśli  $e$  jest krawędzią grafu  $G$ , to przez  $G - e$  rozumiemy graf otrzymany z grafu  $G$  poprzez usunięcie krawędzi  $e$ . Graf  $K_n - e$  nazywamy grafem prawie pełnym. Symbolami  $P_n$  i  $C_n$  będziemy tradycyjnie oznaczać odpowiednio ścieżkę i cykl o  $n$  wierzchołkach, zaś  $K_{n,m}$  to pełny graf dwudzielny. Gwiazdą nazywamy graf  $K_{1,n}$ . Koło  $W_n$  jest to graf otrzymany z cyklu  $C_{n-1}$  poprzez dodanie jednego wierzchołka i połączenie go ze wszystkimi wierzchołkami cyklu. Rozłączną sumę dwóch grafów  $G$  i  $H$  oznaczamy przez  $G \cup H$ , zaś graf

złożony z  $k$  rozłącznych kopii grafu  $G$  przez  $kG$ . Dopełnieniem grafu  $G = (V, E)$  nazywamy graf  $\overline{G} = (V, \overline{E})$ , gdzie  $uv \in \overline{E}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $uv \notin E$ . Fakt, że graf  $H$  jest podgrafem grafu  $G$  oznaczamy symbolem  $H \subseteq G$ . Graf jest spójny, jeśli każdą parę wierzchołków łączy ścieżka. Podzbiór zbioru wierzchołków nazywamy zbiorem niezależnym, jeśli pomiędzy wierzchołkami z tego zbioru nie występuje żadna krawędź.

Jedną z metod reprezentacji grafu, prawdopodobnie najczęściej spotykaną, jest graficzna reprezentacja grafu, w szczególności reprezentacja grafu na płaszczyźnie. Wierzchołkom grafu odpowiadają punkty na płaszczyźnie, a krawędziom odcinki (prostych lub krzywych). Oczywiście, gdy umieszczamy graf na płaszczyźnie chcemy, aby jego prezentacja była możliwie jak najbardziej czytelna. Najbardziej oczywistą metodą na to, aby usunąć zbędny nieporządek w reprezentacji grafu jest unikanie przecinania się krawędzi. Naturalnie rodzi się więc pytanie, czy można tak narysować graf, by jego krawędzie nie przecinały się za wyjątkiem wierzchołków, z którymi są incydentne, a jeśli tak, to jakie warunki musi spełniać taki graf. Graf narysowany w ten sposób nazywa się grafem płaskim, a abstrakcyjny graf przedstawiony w ten sposób nazywa się grafem planarnym.

Jednym z bardziej znanych twierdzeń w teorii grafów jest twierdzenie Kuratowskiego<sup>4</sup> będące warunkiem koniecznym i wystarczającym dla planarności grafu. Zanim podamy to zadziwiająco proste w swojej wymowie, a niezwykle głębokie w treści twierdzenie, musimy przypomnieć jeszcze pojęcie homeomorfizmu grafów. Mianowicie, mówiąc nieformalnie, dwa grafy są homeomorficzne (lub identyczne z dokładnością do wierzchołków stopnia drugiego), jeżeli mogą być otrzymane z tego samego grafu poprzez umieszczenie nowych wierzchołków stopnia drugiego na jego krawędziach (lub usuwanie) [43].

---

<sup>4</sup>Kazimierz Kuratowski (ur. 2 lutego 1896 w Warszawie, zm. 18 czerwca 1980 roku w Warszawie) – polski matematyk. Był jednym z twórców Polskiej Szkoły Matematycznej, długoletnim profesorem Uniwersytetu Warszawskiego, po wojnie organizatorem i dyrektorem Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk.

**Twierdzenie 2.1** ([6, 31] Twierdzenie Kuratowskiego). *Graf  $F$  jest grafem planarnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z  $K_5$  ani z  $K_{3,3}$ .*

Drugą, równoważną, charakteryzację grafów planarnych podał Wagner. Do jej sformułowania potrzebne jest pojęcie minora. Mówimy, że ściągnęliśmy krawędź  $\{x, y\}$  w grafie  $G$ , jeżeli utożsamiliśmy jej wierzchołki końcowe, tzn. zastąpiliśmy je wierzchołkiem  $w$  w taki sposób, że jest on sąsiedni do wszystkich sąsiadów wierzchołka  $x$  i wszystkich sąsiadów wierzchołka  $y$ . Graf  $X$  jest minorem grafu  $Y$ , jeżeli powstał on z  $Y$  przez kolejne ściągnięcie krawędzi oraz usuwanie krawędzi i wierzchołków.

**Twierdzenie 2.2** ([9, 41] Twierdzenie Wagnera). *Graf  $G$  jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy ani  $K_5$  ani  $K_{3,3}$  nie są minorami grafu  $G$ .*

Te dwa twierdzenia wskazują, że w istocie istnieją dwa grafy, które stoją na przeszkodzie planarności grafu. Trudność polega na tym, że nie szukamy tych grafów jako podgrafów danego grafu, ale jako minorów lub podgrafów do nich homeomorficznych. Nie jest to zadanie łatwe, szczególnie, gdy rozpatrywane grafy mają duży rząd. Pomimo to, choć istnieje wiele innych warunków pozwalających stwierdzić nieplanarność grafu (np. zbyt duży minimalny stopień lub zbyt duża liczba krawędzi), te dwa warunki konieczne i wystarczające są bardzo często stosowane w twierdzeniach dotyczących planarnej liczby Ramseya, jako najlepiej odzwierciedlające strukturę grafu planarnego.

### 3 Planarna liczba Ramseya

Podobnie jak było to w przypadku liczby Ramseya najpierw zdefiniowana została planarna liczba Ramseya dla pary grafów pełnych, później rozszerzona została dla pary dowolnych grafów. Podamy tutaj ogólniejszą definicję.

Dwukolorowanie (na czerwono i niebiesko) krawędzi grafu nazwiemy dwukolorowaniem planarnym, jeśli graf indukowany przez krawędzie koloru czerwonego jest planarny.

**Definicja 3.1** ([5]). *Planarną liczbą Ramseya  $PR(G, H)$  nazywamy najmniejszą liczbę naturalną  $n$  taką, że w dowolnym planarnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego  $K_n$  jest zawarta czerwona kopia grafu  $G$  lub niebieska kopia grafu  $H$ .*

Zauważmy, że definicja ta w istocie może być wyrażona w terminach grafu planarnego i jego dopełnienia.

**Definicja 3.2** ([5]). *Planarną liczbą Ramseya  $PR(G, H)$  dla pary grafów  $(G, H)$  nazywamy najmniejszą liczbę naturalną  $n$  taką, że dowolny graf planarny  $F$  o  $n$  wierzchołkach zawiera kopię grafu  $G$  lub jego dopełnienie zawiera kopię grafu  $H$ .*

Dodatkowo, jeśli graf  $H$  jest grafem pełnym, to w istocie badamy strukturę grafów planarnych szukając w nich zadanego podgrafu  $G$ , bądź oceniając moc zbioru niezależnego.

Będziemy posługiwać się definicją 3.2, jako wygodniejszą w zastosowaniu. Zwróćmy uwagę na fakt, że znalezienie górnego oszacowania dla planarnej liczby Ramseya sprowadza się w rzeczywistości do wykazania, że istnieje taka liczba naturalna  $t$ , dla której każdy graf planarny  $F$  o  $t$  wierzchołkach zawiera albo graf izomorficzny z grafem  $G$  albo jego dopełnienie  $\bar{F}$  zawiera graf izomorficzny z grafem  $H$ . Natomiast znalezienie oszacowania dolnego polega na skonstruowaniu grafu planarnego o  $s \leq t - 1$  wierzchołkach, który nie zawiera grafu izomorficznego z grafem  $G$  oraz którego dopełnienie nie zawiera grafu izomorficznego z  $H$ .

Oczywiście, ponieważ liczba kolorowań jest ograniczona w stosunku do tej z definicji zwykłej liczby Ramseya, mamy natychmiastową nierówność

$$PR(G, H) \leq R(G, H), \quad (3.1)$$

a zatem planarna liczba Ramseya jest dobrze określona. Warto jednak podkreślić, że planarna liczba Ramseya, w przeciwieństwie do zwykłej liczby Ramseya, nie jest funkcją symetryczną, tzn. nie zawsze  $PR(G, H) = PR(H, G)$ . Przykłady par grafów, dla których ta równość nie zachodzi wskażemy w dalszej części rozdziału.

## 4 Planarna liczba Ramseya dla pary grafów pełnych

Jak wspomnieliśmy we wstępie, wyznaczenie klasycznej liczby Ramseya jest niezwykle trudne nawet w przypadku dwóch konkretnych grafów pełnych. Jeśli chodzi o zależności ogólne, to istnieje oszacowanie górne  $R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$ , którego łatwo dowieść stosując metodę indukcji. Stosując wzór Stirlinga otrzymujemy stąd, że  $R(r, r) \leq [1 + o(1)]4^{r-1}(\sqrt{\pi r})^{-\frac{1}{2}}$ . Znanе jest również ogółe oszacowanie dolne  $R(r, r) > [1 + o(1)]r2^{\frac{r}{2}}/(e\sqrt{2})$  otrzymane przez Erdősa jako jedno z pierwszych zastosowań wprowadzonej przez niego metody probabilistycznej. W tabeli 1 przytaczamy wykaz znanych wyników lub ich oszacowań dla klasycznej liczby Ramseya  $R(m, n)$ ,  $2 \leq m, n \leq 10$ . Zarówno w tej tabeli, jak i we wszystkich następnymy przyjmujemy następującą konwencję. Wartości dokładne zostały zaznaczone kolorem czarnym. Natomiast w przypadkach, gdy znane są tylko górne lub dolne oszacowania, zostały one oznaczone odpowiednio kolorem czerwonym i zielonym.

**Tabela 1:** Wykaz znanych wyników dla dla  $R(K_n, K_m)$ ,  $3 \leq m, n \leq 10$

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	$\begin{matrix} 40 \\ 42 \end{matrix}$
4	9	18	25	$\begin{matrix} 36 \\ 41 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 49 \\ 61 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 59 \\ 84 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 73 \\ 115 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 92 \\ 149 \end{matrix}$
5	14	25	$\begin{matrix} 43 \\ 48 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 58 \\ 87 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 80 \\ 143 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 101 \\ 216 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 126 \\ 316 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 144 \\ 442 \end{matrix}$
6	18	$\begin{matrix} 36 \\ 41 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 58 \\ 87 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 102 \\ 165 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 115 \\ 298 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 134 \\ 495 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 183 \\ 780 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 204 \\ 1171 \end{matrix}$
7	23	$\begin{matrix} 49 \\ 61 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 80 \\ 143 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 115 \\ 298 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 205 \\ 540 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 217 \\ 1031 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 241 \\ 1713 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 289 \\ 2826 \end{matrix}$
8	28	$\begin{matrix} 58 \\ 84 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 101 \\ 216 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 134 \\ 495 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 217 \\ 1031 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 282 \\ 1870 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 329 \\ 3583 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 343 \\ 6090 \end{matrix}$
9	36	$\begin{matrix} 73 \\ 115 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 126 \\ 316 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 183 \\ 780 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 241 \\ 1713 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 329 \\ 3583 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 565 \\ 6588 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 581 \\ 12677 \end{matrix}$
10	$\begin{matrix} 40 \\ 42 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 92 \\ 149 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 144 \\ 442 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 204 \\ 1171 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 289 \\ 2826 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 343 \\ 6090 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 581 \\ 12677 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 798 \\ 23556 \end{matrix}$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [35]

Na tym tle wyniki otrzymane przez Walkera [42] oraz Steinberga i Toveya [38] dotyczące (klasycznej) planarnej liczby Ramseya wydają się niewspółmiernie łatwe. Okazuje się, że (klasyczna) planarna liczba Ramseya jest funkcją liniową swoich argumentów, a dowód tego faktu zajmuje nie więcej niż stronę. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że narzędzia użyte do wykazania oszacowania górnego są wyjątkowo silne, a dotyczą liczby kolorów, na które można pokolorować graf planarny we właściwy sposób. Właściwy, czyli taki, w którym sąsiednie wierzchołki nie otrzymują tego samego koloru. W przypadku, gdy graf planarny nie zawiera trójkątów jest to twierdzenie Grötzscha i jego uogólnienie – twierdzenie Grünbauma, zaś dla dowolnego grafu planarnego jest to Twierdzenie o Czterech Kolorach.

**Twierdzenie 4.1** ([24, 25]). *Każdy graf planarny niezawierający trójkątów jest 3-kolorowalny. Ponadto ma on 3-kolorowanie, w którym nie wszystkie klasy kolorów są tej samej mocy.*

**Twierdzenie 4.2** ([2, 3, 36] Twierdzenie o Czterech Kolorach). *Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.*

Wyposażeni w takie narzędzia możemy prześledzić dowód twierdzenia dotyczącego klasycznej planarnej liczby Ramseya.

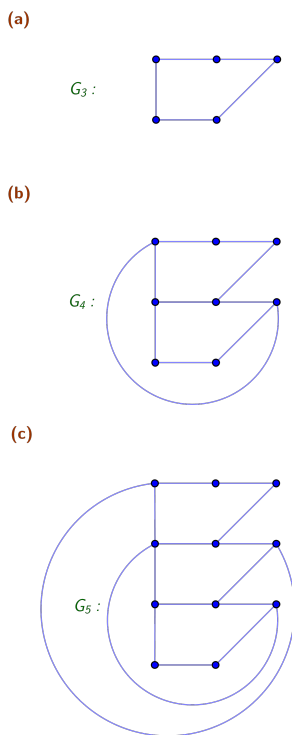
**Twierdzenie 4.3** ([38](Steinberg, Tovey), [42](Walker)). *Planarne liczby Ramseya  $PR(K_n, K_m)$  wynoszą odpowiednio:*

- (i)  $PR(K_2, K_m) = m$  dla  $m \geq 2$ ,
- (ii)  $PR(K_n, K_2) = n$  dla  $n \leq 4$ ,
- (iii)  $PR(K_3, K_m) = 3m - 3$  dla  $m \geq 2$ ,
- (iv)  $PR(K_n, K_m) = 4m - 3$  dla  $n \geq 4$  i  $(n, m) \neq (4, 2)$ .

*Dowód.* (i) i (ii) Wynika bezpośrednio z definicji planarnej liczby Ramseya.

(iii) Niech  $G$  będzie grafem planarnym o  $3m - 3$  wierzchołkach niezawierającym trójkątów. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem 4.1, graf  $G$  zawiera zbiór niezależny mocy  $\lfloor (3m - 3)/3 \rfloor + 1 = m$ , co jest równoważne temu, że  $K_m \subseteq$





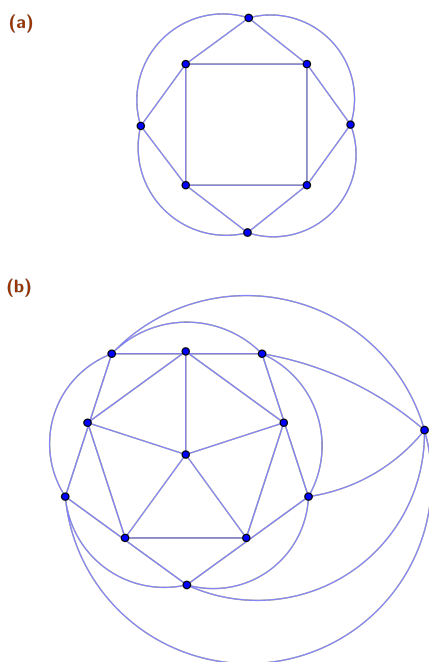
**Rysunek 1:** Konstrukcja Jones dla grafów planarnych  $G_m$  o  $3m - 4$  wierzchołkach nieposiadających trójkątów oraz nieposiadających niezależnego zbioru mocy  $m$  ( $m = 3, 4, 5, \dots$ )

$\overline{G}$ . Stąd  $PR(3, m) \leq 3m - 3$ . Pokażemy teraz, że  $PR(3, m) > 3m - 4$ . nierówność ta jest prawdziwa dla  $m = 2$ , ponieważ z punktu (ii) twierdzenia 4.3 wiemy, że  $PR(3, 2) = 3 > 3 \cdot 2 - 4$ . Pozostałe przypadki otrzymuje się bezpośrednio z konstrukcji Jones [29] dla grafów planarnych  $G_m$  o  $3m - 4$  wierzchołkach niezawierających trójkątów ani zbioru niezależnego mocy  $m$  dla  $m = 3, 4, \dots$ . Początkowe grafy  $G_3, G_4, G_5$  tej konstrukcji zostały pokazane na rysunku 1. Grafy dla większych  $m$  konstruuje się analogicznie. Zauważmy, że w każdym kroku rząd konstruowanego grafu wzrasta o 3, na-

tomiast moc zbioru niezależnego o 1, tym samym otrzymujemy:

$$|V(G_m)| = |V(G_{m-1})| + 3 = 3(m-1) - 4 + 3 = 3m - 4.$$

- (iv) Niech  $G$  będzie grafem planarnym o  $4m - 3$  wierzchołkach. Wówczas korzystając z Twierdzenia o Czterech Kolorach otrzymujemy, że dopełnienie grafu  $G$  zawiera graf izomorficzny do  $K_m$ , ponieważ  $\lceil (4m - 3)/4 \rceil = m$ . Stąd  $PR(n, m) \leq 4m - 3$ . Ponadto graf zaprezentowany na rysunku 2(a) ma 8 wierzchołków, nie zawiera  $K_4$ , a jego dopełnienie nie zawiera  $K_3$ . Stąd  $PR(4, 3) > 8$ . Podobnie wnioskujemy, że  $PR(4, 4) > 12$  na podstawie grafu z rysunku 2(b). Jeżeli  $m$  jest liczbą nieparzystą i  $m \geq 5$ , to bierzemy



**Rysunek 2:** Grafy rzędu 8 i 12 z dowodu twierdzenia 4.3 (iv)

$(m-1)/2$  kopii grafu z rysunku 2(a) i otrzymujemy graf rzędu  $\frac{m-1}{2} \cdot 8 = 4m-4$ . Natomiast jeżeli  $m$  jest liczbą parzystą i  $m \geq 6$  to bierzemy  $m/2-2$  kopii grafu z rysunku 2(a) oraz jedną kopię grafu z rysunku 2(b). Wówczas otrzymujemy graf rzędu  $(\frac{m}{2}-2) \cdot 8 + 12 = 4m-4$ . Zatem w obu przypadkach otrzymujemy graf planarny o  $4m-4$  wierzchołkach niezawierający  $K_4$ .

Co więcej, dopełnienie rozważanego grafu nie zawiera grafu izomorficznego do  $K_m$ . Stąd  $PR(4, m) \geq 4m-3$  dla  $m \geq 3$ . Z faktu tego wynika, że  $PR(n, m) \geq 4m-3$  dla  $m \geq 3$  i  $n \geq 5$ . Tym samym pozostało do pokazania, że  $PR(5, 2) \geq 5$ . Oczywiście, aby dopełnienie grafu planarnego zawierało graf izomorficzny do  $K_2$ , graf ten musi mieć przynajmniej 5 wierzchołków, gdyż  $K_4$  jest planarny, a jego dopełnienie nie zawiera  $K_2$ . To kończy dowód.  $\square$

Widzimy zatem, że twierdzenia o kolorowaniu grafów planarnych odgrywają kluczową rolę w wykazaniu oszacowań górnych, zaś odpowiednie konstrukcje pozwalają ustalić oszacowanie dolne. W przypadku pary grafów pełnych górne i dolne oszacowanie dają w efekcie wartość dokładną. Zwróćmy uwagę jeszcze, że wyznaczanie  $PR(K_n, K_m)$  dla  $n \geq 5$  jest w istocie pytaniem o maksymalną możliwą moc zbioru niezależnego w grafie planarnym. Nie możemy bowiem oczekiwać pojawienia się  $K_n$ ,  $n \geq 5$ , jako podgrafu w grafie planarnym.

## 5 Planarna liczba Ramseya dla grafu spójnego i grafu pełnego

Z twierdzenia 4.3 możemy łatwo wysnuć następujący wniosek.

**Wniosek 5.1.** [[21]] Jeżeli  $G$  jest grafem spójnym i  $|V(G)| \geq 5$ , to

$$PR(G, K_m) = 4m - 3.$$

*Dowód.* Ograniczenie górne wynika z twierdzenia 5.1(iv), zaś ograniczenie dolne daje graf planarny  $(n-1)K_4$ .  $\square$

Zwróćmy uwagę, że wniosek 5.1 wskazuje, że zostało niewiele przypadków do rozważenia, jeżeli pierwszy graf w parze jest spójny, zaś drugim grafem jest graf pełny. Interesujące są bowiem te pary grafów, w którym pierwszy ma nie więcej niż cztery wierzchołki i, oczywiście, nie jest pełny. Przegląd wyników dotyczących takich par zawiera ten podrozdział.

### 5.1 Łatwe przypadki

Łatwe przypadki to przede wszystkim małe drzewa. Mianowicie  $PR(P_3, K_m) = 2m - 1$ ,  $PR(P_4, K_m) = 3m - 2$  oraz  $PR(K_{1,3}, K_m) = 3m - 2$ . Ograniczenie górne dla tych liczb wynika z twierdzenia Chvátala o zwykłej liczbie Ramseya dla tych par [13] oraz nierówności (3.1). Ograniczenie dolne natomiast z tego, że planarny graf  $(m - 1)K_{t-1}$  nie zawiera ani drzewa o  $t$  wierzchołkach, ani  $n$ -wierzchołkowego zbioru niezależnego. W rozważanym przypadku z tej obserwacji należy skorzystać dla  $t = 3, 4$ .

Nieco więcej uwagi wymaga dowód równości  $PR(K_{1,3} + e, K_m) = 3m - 2$ , gdzie symbol  $K_{1,3} + e$  oznacza graf powstały z gwiazdy  $K_{1,3}$  poprzez dodanie jednej krawędzi pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami stopnia 1. Wystarczy się powołać na prosty argument indukcyjny, a zostało to zrobione w [20].

### 5.2 Graf $C_4$

Okazuje się, że dokładna wartość  $PR(C_4, K_m)$  jest znana dla kilku pierwszych  $m$ . Mianowicie  $PR(C_4, K_3) = 7$ ,  $PR(C_4, K_4) = 10$  i są to wartości równe zwykłym liczbom Ramseya dla tych par grafów. Pierwszą parą, dla której zwykła i planarna liczba Ramseya są różne, jest  $(C_4, K_5)$ . Zwykłą liczbą Ramseya  $R(C_4, K_5) = 14$  [15], zaś jej planarna wersja  $PR(C_4, K_5) = 13$ , co udowodniły Bielak i Gorgol w [5]. Następnie Bielak kontynuowała badania i w [4] udowodniła, że  $PR(C_4, K_6) = 17$ . Ponadto wskazała również ograniczenie dolne

$$PR(C_4, K_m) \geq 3m + \lfloor (m - 2)/5 \rfloor - 2 \quad \text{dla } m \geq 6. \quad (5.1)$$

W kolejnych latach temat podjęli Sun Yongqi i in. [39], dowodząc, że  $PR(C_4, K_7) = 20$  oraz stawiając hipotezę, że ograniczenie (5.1) podane przez Bielak jest w istocie wartością dokładną  $PR(C_4, K_m)$ . Hipotezę tę dla  $m = 8$  potwierdzili Y. Chen i in. [10], wykazując prawdziwość równości  $PR(C_4, K_8) = 23$ . Dotychczas nie jest znana dokładna wartość  $PR(C_4, K_m)$  dla pozostałych  $m$ .

Tabela 2 podsumowuje wszystkie opisane dotąd wyniki dla par (cykl, graf pełny). Pierwszy wiersz tabeli to twierdzenie 4.3, zaś trzeci i następne wynikają z wnioskami 5.1. Ograniczenie górne na  $PR(C_4, K_m)$  pochodzi z pracy Dudka i Rucińskiego [17]. Do tej ostatniej pracy jeszcze wielokrotnie wrócimy.

**Tabela 2:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(C_n, K_m)$

$n$	$m$	3	4	5	6	7	8	9	...
3		$3m - 3$							
4		7	10	13	17	20	23	$3m + \lfloor (m-2)/5 \rfloor - 5$ $\min\{29 + 5(m-9), 4m-3\}$	
5		$4m - 3$							
6									
⋮									

Należy tu zwrócić uwagę, że wszystkie dowody wartości dokładnych  $PR(C_4, K_m)$ ,  $m = 5, 6, 7, 8$  polegają na drobiazgowej analizie struktury grafów planarnych niezawierających cyklu  $C_4$ . Przypomnijmy, że interesuje nas moc zbioru niezależnego w takich grafach, a więc, pośrednio, występowanie, bądź nie pewnych krawędzi w rozważanym grafie. I tu bardzo często przywoływane są twierdzenia Kuratowskiego lub Wagnera wykluczające istnienie pewnych krawędzi w badanej strukturze. Często ta jedna krawędź decyduje o mocy maksymalnego zbioru niezależnego. Na obecnym etapie badań trudno wyobrazić sobie jakąś inną metodę

podejścia do tematu. Z drugiej strony nie wydaje się, aby opisywana metoda mogła doprowadzić do całkowitego rozwiązania zagadnienia.

### 5.3 Graf $K_4 - e$

Ostatnim nietrywialnym przypadkiem grafu spójnego rozważanego w parze z grafem pełnym jest graf prawie pełny  $K_4 - e$ . Sytuacja przedstawia się podobnie, jak w przypadku cyklu  $C_4$ . Nie wszystkie wartości dokładne planarnych liczb Ramseya są znane. O ile wykazanie, że  $PR(K_4 - e, K_3) = 7$  jest sprawą prostą, gdyż korzystamy tu znów ze zwykłej liczby Ramseya, o tyle wykazanie, że  $PR(K_4 - e, K_4) = 10$  wymaga nieco więcej wysiłku [20] i w tym przypadku planarna liczba Ramseya jest o 1 mniejsza od zwykłej liczby Ramseya dla tej pary. Natomiast dowiedzenie równości  $PR(K_4 - e, K_5) = 14$  wymaga znacznie większego nakładu pracy. Dowód ten przeprowadzili S. Yongqi i in. w [40], dzieląc rozumowanie na wiele przypadków. Tabela 3 podsumowuje wszystkie opisane dotąd wyniki dla par (graf prawie pełny, graf pełny). Ograniczenie dolne na  $PR(K_4 - e, K_6)$  pochodzi z pracy Dudka i Rucińskiego [17].

**Tabela 3:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(K_n - e, K_m)$

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9	...
3	$2m - 1$							
4	7	10	14	17				
5	$4m - 3$							
6								
⋮								

## 6 Wyniki otrzymane przy wykorzystaniu analizy komputerowej

W poprzednich paragrafach wspomnieliśmy, że dowody niektórych twierdzeń wymagały szczegółowej analizy przypadków. W dzisiejszych czasach do takiej analizy można w pewnych sytuacjach zaprząć komputery. Zwróćmy jednak uwagę, że liczba przypadków do rozważenia rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem rzędu grafu. Powoduje to, że w przypadku większej liczby wierzchołków metody te stają się nieefektywne, a wręcz niemożliwe do zastosowania. W obecnej chwili metody komputerowe pozwalają wspomóc wyliczenie planarnych liczb Ramseya jedynie w przypadku małych grafów.

W niniejszym podrozdziale prezentujemy wyniki dla planarnej liczby Ramseya otrzymane przez A. Dudka i A. Rucińskiego przy wykorzystaniu analizy komputerowej i zestawione w pracy „Planar Ramsey Numbers for Small Graphs” [17]. Ich metoda wyznaczania planarnych liczb Ramseya bazowała na programie plantri [32], napisanego przez G. Brinkmanna i B. McKaya, który generuje określony typ grafów planarnych. Napisany przez Dudka i Rucińskiego autorski program dla zadanej pary grafów 2-spójnych  $G$  i  $H$  sprawdza, czy graf planarny wygenerowany przez program plantri zawiera kopię grafu  $G$  lub jego dopełnienie zawiera kopię grafu  $H$ . Wykaz wyników otrzymanych przy wykorzystaniu poszukiwania komputerowego znajduje się w tabeli 4. W drugiej kolumnie zapisana jest liczba wierzchołków przeglądanych grafów, w trzeciej ich struktura, w czwartej graf poszukiwany w dopełnieniu, a w ostatniej wniosek płynący z przeszukiwania. W przypadkach badania triangulacji (czyli grafów maksymalnie planarnych) można było sformułować bardziej ogólne wnioski. Te ograniczenia górne wykorzystane zostały przez autorów do ustalenia wartości dokładnych dla niektórych par grafów. Wyniki te zostały zawarte w kolejnych podrozdziałach i paragrafach.

**Tabela 4:** Wykaz oszacowań dla planarnej liczby Ramseya otrzymanych przy wykorzystaniu analizy komputerowej

<i>Lp.</i>	<i>Rzqd G</i>	<i>Struktura G</i>	<i>Podgraf <math>\overline{G}</math></i>	<i>Wniosek</i>
1	7	$K_3 \not\subseteq G$	$K_4 - e$	$PR(K_3, K_4 - e) \leq 7$
2	7	$K_4 - e \not\subseteq G$	$C_3, C_4, C_5$	$PR(K_4 - e, C_n) \leq 7$ dla $n = 3, 4, 5$
3	7	$C_4 \not\subseteq G$	$K_4 - e$	$PR(C_4, K_4 - e) \leq 7$
4	8	triangulacja	$C_4$	$PR(G, C_4) \leq 8$
5	8	$K_4 \not\subseteq G$	$C_5$	$PR(K_4, C_5) \leq 8$
6	8	$K_4 - e \not\subseteq G$	$C_6$	$PR(K_4 - e, C_6) \leq 8$
7	9	triangulacja	$C_3, C_5, C_6, C_7$	$PR(G, C_n) \leq 9$ dla $n = 3, 5, 6, 7$
8	9	$K_3 \not\subseteq G$	$K_5 - e$	$PR(K_3, K_5 - e) \leq 9$
9	9	$K_4 - e \not\subseteq G$	$K_4 - e$	$PR(K_4 - e, K_4 - e) \leq 9$
10	9	$C_5 \not\subseteq G$	$K_4 - e$	$PR(C_5, K_4 - e) \leq 9$
11	10	triangulacja	$C_8$	$PR(G, C_8) \leq 10$
12	10	$K_4 - e \not\subseteq G$	$K_4$	$PR(K_4 - e, K_4) \leq 10$
13	11	triangulacja	$C_9$	$PR(G, C_9) \leq 11$
14	11	$C_4 \not\subseteq G$	$K_5 - e$	$PR(C_4, K_5 - e) \leq 11$
15	12	triangulacja	$C_{10}$	$PR(G, C_{10}) \leq 12$
16	12	$K_3 \not\subseteq G$	$K_6 - e$	$PR(K_3, K_6 - e) \leq 12$
17	13	triangulacja	$C_{11}$	$PR(G, C_{11}) \leq 13$
18	13	$K_4 - e \not\subseteq G$	$K_5 - e$	$PR(K_4 - e, K_5 - e) \leq 13$
19	13	$C_5 \not\subseteq G$	$K_5 - e$	$PR(C_5, K_5 - e) \leq 13$
20	14	$K_4 - e \not\subseteq G$	$K_5$	$PR(K_4 - e, K_5) \leq 14$
21	14	$C_4 \not\subseteq G$	$K_6 - e$	$PR(C_4, K_6 - e) \leq 14$
22	15	$K_3 \not\subseteq G$	$K_7 - e$	$PR(K_3, K_7 - e) \leq 15$
23	17	$C_5 \not\subseteq G$	$K_6 - e$	$PR(C_5, K_6 - e) \leq 17$

*Źródło:* Opracowanie własne na podstawie [17]

## 7 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i grafu spójnego

Wspomnieliśmy na początku, że planarna liczba Ramseya nie jest funkcją symetryczną. Dlatego też, nawet jeśli planarna liczba Ramseya  $PR(G_1, G_2)$  jest znana, warto rozważyć również  $PR(G_2, G_1)$ . W tym podrozdziale zebrane zostały



wyniki dla par  $(K_n, G)$ . Dodajmy, że w przypadku tych par nie jest znane bardzo ogólne twierdzenie podobne do wniosku 5.1. Badania ograniczają się więc do przypadków, gdy graf  $G$  pochodzi z jednej z najczęściej rozważanych klas, tj. gdy  $G$  jest cyklem, grafem prawie pełnym, kołem lub drzewem. Ponieważ wiadomo, że graf  $K_5$  nie jest planarny, to badanie  $PR(K_n, G)$  dla  $n \geq 5$  sprowadza się do poszukiwania grafu  $G$  w dopełnieniach grafów planarnych.

### 7.1 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i cyklu

Parę (graf pełny, cykl) rozważali Dudek i Ruciński w swojej pracy [17] i wyznaczyli wszystkie wartości planarnej liczby Ramseya dla takich par. Zostały one zebrane w tabeli 5. Porównując tabelę 5 z tabelą 2 pamiętajmy, że parametr  $m$  oznacza liczbę wierzchołków drugiego grafu w parze, a zatem występujących tam wartości nie możemy porównać bezpośrednio, jeśli zastanawiamy się nad symetrią planarnej liczby Ramseya dla tej pary. Zwróćmy na przykład uwagę na fakt, że planarna liczba Ramseya dla pary  $(K_s, C_4)$  jest znana we wszystkich przypadkach, zaś dla pary  $(C_4, K_s)$  tylko w sześciu, a dla pozostałych znane są jedynie oszacowania.

**Tabela 5:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(K_n, C_m)$

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	3	4	5	5	7	8	...				
3	6	7									
4											
5											
6											
7											
⋮											

## 7.2 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i grafu prawie pełnego

Również tę parę rozważali wspomniani już Dudek i Ruciński w [17]. Okazało się, że dla tej pary najtrudniejszy jest przypadek najmniejszego nietrywialnego grafu pełnego, czyli  $K_3$ . Ograniczenie dolne, widoczne w tabeli 6, wynika z monotoniczności planarnej liczby Ramseya i twierdzenia 4.3;  $PR(K_3, K_m - e) \geq PR(K_3, K_{m-1}) = 3m - 6$ . Ograniczenia górne, dające w konsekwencji wartości dokładne, pochodzą z poszukiwań komputerowych, których wyniki zawarte są w odpowiednich wierszach tabeli 4. W pozostałych przypadkach udało się uzasadnić ograniczenie górne korzystając z twierdzenia o maksymalnej liczbie krawędzi w grafie planarnym, zaś dla ograniczenia dolnego autorzy skonstruowali odpowiednie przykłady grafów planarnych o  $4m - 6$  wierzchołkach niezawierających  $K_n$ ,  $n \geq 4$ , ani  $K_m - e$  w dopełnieniu.

**Tabela 6:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(K_n, K_m - e)$

$n \backslash m$	3	4	5	6	7	8	9	...
3	5	7	9	12	15	$3m - 6$		
4	$4m - 5$							
5								
6								
$\vdots$								

## 7.3 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i koła

Planarną liczbę Ramseya dla par  $(K_3, W_m)$  wyznaczyli G. Zhou, Y. Chen, Z. Miao, S. Pirzada w [44]. Stanowią one pierwszy wiersz w tabeli 7. Pozostałe przedstawione w tabeli 7 wyniki są efektem pracy Y. Zhang, G. Zhou i Y. Chen [45].

Widzimy, że w przypadku tych par udało się kompletnie rozwiązać zagadnienie planarnej liczby Ramseya. W dowodach wykorzystywano twierdzenie Kuratowskiego oraz warunki dostateczne na hamiltonowskość i pancykliczność grafów.

**Tabela 7:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(K_n, W_m)$

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	4	5	6	7	8	9	10	...
3	9	$m + 4$			$m + 3$			
4	13				14		$m + 5$	
5								
6								
⋮								

#### 7.4 Planarna liczba Ramseya dla grafu pełnego i drzewa

Wspominaliśmy już twierdzenie Chvátala o zwykłej liczbie Ramseya dla pary (drzewo, graf pełny). Stwierdziliśmy w paragrafie 5.1, że jest ona równa planarnej liczbie Ramseya, gdy drzewo ma nie więcej niż cztery wierzchołki, zaś dla większych drzew planarna liczba Ramseya jest równa wartości z twierdzenia 5.1. Okazuje się, że jeśli zamienimy kolejność grafów w parze, sytuacja staje się bardziej skomplikowana. Co prawda wartość planarnej liczby Ramseya przewyższa liczbę wierzchołków drzewa tylko o stałą, ale wartość tej stałej nie zależy tylko od liczby wierzchołków drzewa, ale również od jego maksymalnego stopnia. Seria poniższych twierdzeń obejmuje wszystkie przypadki, a została udowodniona przez X. Hu i Y. Chen w [26].

**Twierdzenie 7.1.**  $PR(K_3, K_{1,m-1}) = m + \mu$ , gdzie  $\mu = 2$ , jeśli  $m \in \{3, 4, 5, 7\}$ , zaś  $\mu = 3$  w przeciwnym przypadku.

**Twierdzenie 7.2.** Niech  $T_m$  będzie drzewem o  $m \geq 3$  wierzchołkach innym niż gwiazda. Wtedy  $PR(K_3, T_m) = m + 2$ .

**Twierdzenie 7.3.** Niech  $n \geq 4$ , a  $T_m$  będzie drzewem o  $m \geq 3$  wierzchołkach takim, że  $\Delta(T_m) = m - k \geq m - 3$ . Wówczas  $PR(K_n, T_m) = m - k + \mu$ , gdzie  $\mu = 5$ , jeśli  $m \in \{k + 2, k + 3, k + 4, k + 5, k + 6, k + 8\}$  oraz  $\mu = 6$  w przeciwnym przypadku.

**Twierdzenie 7.4.** Niech  $n \geq 4$ , a  $T_m$  będzie drzewem o  $m \geq 3$  wierzchołkach takim, że  $\Delta(T_m) \leq m - 4$ . Wówczas  $PR(K_n, T_m) = m + 2$ .

## 8 Planarna liczba Ramseya dla innych par grafów

W tym podrozdziale zebrano wyniki dotyczące planarnej liczby Ramseya dla par grafów, w których żaden nie jest grafem pełnym. W dotychczasowych badaniach rozważane były głównie cykle, grafy prawie pełne oraz koła.

### 8.1 Planarna liczba Ramseya dla pary cykli

Jedną z pierwszych rozważanych par grafów, w których nie występuje graf pełny była para cykli [20, 22]. Jest to jedna z klas grafów, która jest badana w odniesieniu do różnych zagadnień w teorii grafów. Często cykle niosą w sobie ładunek jakościowy odróżniający je od innych klas grafów, często też wyniki zależą od parzystej bądź nieparzystej długości cyklu. Dodatkowo w rozważanym zagadnieniu znana jest dokładna wartość zwykłej liczby Ramseya dla pary cykli (por. tab. 8), co pozwoliło na porównanie z jej planarną wersją. Wyniki zawarte zostały w rozprawie doktorskiej autorki [20], zaś dowód uległ znacznemu uproszczeniu dzięki współpracy z A. Rucińskim, efektem której jest praca [22]. Wszystkie wartości planarnej liczby Ramseya zostały zebrane w tabeli 9. Dowody poszczególnych wartości, oprócz własności grafów planarnych, odwołują się do warunków dostatecznych na hamiltonowskość i pancykliczność grafów, a także do pojęcia liczby Turána. Kluczowym okazał się lemat, który mówi, że dopełnienie każdego grafu planarnego o rzędzie  $t \geq 9$  zawiera cykl  $C_{t-2}$ .

**Lemat 8.1** ([22]). *Niech  $G$  będzie grafem planarnym takim, że  $t = |V(G)| \geq 9$ . Wówczas  $C_{t-2} \subseteq G$ .*

**Tabela 8:** Wykaz znanych wyników dla liczby Ramseya  $R(C_n, C_m)$

Rozważany przypadek	Wynik	Źródło
$R(C_3, C_3)$	6	[23]
$R(C_4, C_4)$	6	[14]
$R(C_4, C_m)$ dla $m \geq 6$	$m + 1$	[8]
$R(C_6, C_6)$	8	[8]
$R(C_n, C_m)$ dla $3 \leq n \leq m$ , $n$ -nieparzystego i $(n, m) \neq (3, 3)$	$2m - 1$	[18, 30, 34]
$R(C_n, C_m)$ dla $4 \leq n \leq m$ , $m, n$ -parzystego i $(n, m) \neq (4, 4)$	$m - 1 + \frac{n}{2}$	[18, 30, 34]
$R(C_n, C_m)$ dla $4 \leq n < m$ , $n$ -parzystego i $m$ -nieparzystego	$\max\{m - 1 + \frac{n}{2}, 2n - 1\}$	[18, 30, 34]

Porównując tabele 8 i 9 łatwo zauważyć, że zwykła i planarna liczba Ramseya pokrywają się dla krótkich cykli, natomiast dla dłuższych cykli widoczna jest istotna różnica. Ma to związek z faktem, że liczba krawędzi w dopełnieniu grafu planarnego rośnie wraz z kwadratem liczby wierzchołków, a zatem dopełnienia grafów planarnych są stosunkowo gęste, a to wymusza istnienie cykli.

### 8.1.1 Planarna liczba Ramseya dla pary ścieżek

Ścieżki są podgrafami cykli, zatem ograniczenie górne na planarną liczbę Ramseya jest oczywiste. Wystarczyło zatem skonstruować odpowiednie grafy [20], by otrzymać, że  $PR(P_n, P_m) = m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  dla  $m \leq 5$  i  $n \leq m$  oraz  $PR(P_n, P_m) = m + 2$  dla  $m > 5$  i  $n \leq m$  [20].

**Tabela 9:** Wykaz znanych wyników dla dla  $PR(C_n, C_m)$ 

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9	...
3	6	7	$m+2$					
4	7	6	7	$m+1$				
5	9	7	9	8	$m+2$			
6		8						
7								
8								
9								
⋮								

## 8.2 Planarna liczba Ramseya dla pary grafów prawie pełnych

Podobnie jak w przypadku grafów pełnych zwykła liczba Ramseya dla pary grafów prawie pełnych jest znana tylko w nielicznych przypadkach. Okazuje się, że Dudek i Ruciński [17] wyznaczyli planarną liczbę Ramseya dla prawie wszystkich takich par. Połączyli oni poszukiwania komputerowe ze znanymi teoretycznymi rezultatami, a wyniki ich badań są zaprezentowane w tabeli 10. Należy zauważyć, że ponownie problematyczny okazał się graf czterowierzchołkowy ( $K_4 - e$ ) jako pierwszy element w parze. Dla takich par udało się określić dokładne wartości planarnej liczby Ramseya tylko dla kilku początkowych wartości  $m$ . Ciekawe jest również porównanie  $PR(K_n - e, K_m - e)$  z  $PR(K_n - e, K_m)$ . Dla wszystkich nietrywialnych  $n \neq 4$  pierwsza wartość jest o 2 mniejsza od drugiej, natomiast dla  $n = 4$  i znanych przypadków dla  $m \geq 4$  różnica wynosi 1.

**Tabela 10:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(K_n - e, K_m - e)$ 

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9	...
3	$2m - 3$							
4	5	9	13					
5	$4m - 5$							
6								
$\vdots$								

### 8.3 Planarna liczba Ramseya dla grafu prawie pełnego i cyklu

Ze względu na brak symetrii planarnej liczby Ramseya należy rozważyć dwa przypadki, uwzględniające kolejność grafów w parze.

#### 8.3.1 Graf prawie pełny i cykl

Dzięki własności monotoniczności

$$PR(K_{n-1}, C_m) \leq PR(K_n - e, C_m) \leq PR(K_n, C_m)$$

oraz wartościom zebranych w tabeli 5 Dudek i Ruciński [17] ustalili wartość planarnej liczby Ramseya dla  $n = 4$  i  $m \geq 7$  oraz  $n \geq 5$  i  $m \geq 6$ . Pozostałe małe przypadki zebrane w tabeli 11 rozważyli oddzielnie. Widzimy, że w tym przypadku znane są wszystkie wartości planarnych liczb Ramseya.

#### 8.3.2 Cykl i graf prawie pełny

Jeśli będziemy rozważać te grafy w tej kolejności, to w przeciwieństwie do pary (graf prawie pełny, cykl), nie znamy wartości planarnej liczby Ramseya we wszyst-

**Tabela 11:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(K_n - e, C_m)$ 

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9	...	
3	5	$m$							
4	7								
5									
6									
7	9	8	9	$m+2$					
8									
⋮									

**Tabela 12:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(C_n, K_m - e)$ 

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9	...
3	5	7	9	12	15	$3m - 6$		
4	4	7	11	14	$3m + \lfloor (m-2)/5 \rfloor - 5$			
5	5	9	13	17	$4m - 7$			
6	6	$4m - 6$						
7								
8	7							
⋮								

kich przypadkach. W tabeli 12 zebrano informacje znane do tej pory. Zawdzięczamy je ponownie Dudkowi i Rucińskiemu [17].



### 8.4 Planarna liczba Ramseya dla cyklu i koła

Para (cykl, koło) nie została jeszcze szeroko zbadana. Rozważana była do tej pory tylko dla cyklu  $C_4$  przez Y.J. Chen, Z.K. Miao i G.F. Zhou w [12]. Wyniki również prezentujemy w formie tabelarycznej (zob. tabela 13), gdyż charakteryzują się one ciekawą nieregularnością dla znacznej liczby początkowych przypadków, po czym planarna liczba Ramseya jest opisana tą samą funkcją począwszy od  $m = 41$ . W dowodzie autorzy najpierw określili minimalne stopnie w grafach planarnych o określonym rzędzie niezawierających cyklu  $C_4$  i na ich podstawie wyznaczyli wszystkie liczby z tabeli 13). Dodatkowo dla małych wartości  $m$  wspierali się również programem plantri [32].

**Tabela 13:** Wykaz znanych wyników dla  $PR(C_4, W_m)$

<i>Rozważany przypadek</i>	<i>Wynik</i>
$PR(C_4, W_4)$	8
$PR(C_4, W_5)$	9
$PR(C_4, W_6)$	10
$PR(C_4, W_7)$	9
$PR(C_4, W_m)$ dla $8 \leq m \leq 26$	$m + 3$
$PR(C_4, W_{27})$	31
$PR(C_4, W_m)$ dla $28 \leq m \leq 32$	$m + 3$
$PR(C_4, W_{33})$	37
$PR(C_4, W_{34})$	37
$PR(C_4, W_{35})$	38
$PR(C_4, W_{36})$	40
$PR(C_4, W_{37})$	40
$PR(C_4, W_{38})$	41
$PR(C_4, W_{39})$	43
$PR(C_4, W_{40})$	43
$PR(C_4, W_m)$ dla $m \geq 41$	$m + 4$

Zauważmy jeszcze na koniec, że w parze (trójkąt, koło) trójkąt może być traktowany zarówno jako graf pełny, jak i cykl. A zatem wartości  $PR(C_3, W_m)$  zawarte w pierwszym wierszu tabeli 7 mogą być również traktowane jako wartości dla pary (cykl, koło). Przypomnimy tylko, że autorami zawartych tam wyników są G. Zhou, Y. Chen, Z. Miao, S. Pirzada [44].

### 8.5 Planarna liczba Ramseya dla cyklu i drzewa

Stosując podobną technikę do opisanej w poprzednim podrozdziale, tzn. posługując się minimalnymi stopniami wierzchołków w grafach planarnych niezawierających cyklu  $C_4$ , X.L. Hu, Y.Q. Zhang, Y.B. Zhang w [27] określili wszystkie planarne liczby Ramseya dla pary  $(C_4, \text{drzewo})$ , dowodząc poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 8.1.** *Niech  $T_m$  będzie drzewem o  $m \geq 3$  wierzchołkach i maksymalnym stopniu  $k$ . Wówczas  $PR(C_4, T_n) = \max\{n + 1, PR(C_4, K_{1,k})\}$ .*

Widzimy zatem, że w przypadku drzewa ma znaczenie nie tylko liczba jego wierzchołków, ale również maksymalny stopień w drzewie, podobnie jak było to w przypadku pary (graf pełny, drzewo) w podrozdziale 7.4. Planarną liczbę Ramseya dla cyklu  $C_4$  i gwiazdy  $K_{1,k}$  autorzy wyznaczyli w sposób dokładny. Wyraża się ona zależnością

$$PR(C_4, K_{1,k}) = \begin{cases} 4 & \text{dla } k = 2, \\ k + 3 & \text{dla } 3 \leq k \leq 6, \\ k + 4 & \text{dla } 7 \leq k \leq 39, k \notin \{26, 32, 35, 38\}, \\ k + 5 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Twierdzenie 8.1 jest podobne w wypowiedzi do analogicznego twierdzenia dotyczącego zwykłych liczb Ramseya dla tej pary. Przy takich samych założeniach Burr i in. dowiedli mianowicie w [7], że  $R(C_4, T_n) = \max\{4, n + 1, R(C_4, K_{1,k})\}$ .

## 8.6 Planarna liczba Ramseya dla skojarzenia i grafu pełnego

Na koniec przytoczymy jeszcze wynik dotyczący jedynej pary, w którym jeden z grafów jest niespójny. Mianowicie planarna liczba Ramseya dla skojarzenia i grafu pełnego wynosi  $PR(tK_2, K_m) = m + 2t - 2$  dla  $t \geq 1$  i  $n \geq 2$  [20].

## 9 Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono jedną z modyfikacji liczby Ramseya, mianowicie planarną liczbę Ramseya. Zebrano wszystkie znane obecnie wyniki dotyczące tej liczby. Mamy nadzieję, że tabelaryczna forma prezentacji rezultatów ułatwi porównania między wartościami planarnej liczby Ramseya dla par grafów niewiele różniących się od siebie, jak również pomiędzy wartościami planarnej i zwykłej liczby Ramseya dla takich samych par. Dzięki takiej formie łatwo również odszukać te pary rozważanych klas grafów, dla których wartości planarnych liczb Ramseya nie są jeszcze znane.

## Literatura

- [1] V. Angelteit, B. D. McKay,  $R(5, 5) \leq 48$ , *J. Graph Theory*, 89(1), 2018, 5–13.
- [2] K. Appel i W. Haken, Every planar map is four colourable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math.*, 21, 1977, 429–490.
- [3] K. Appel, W. Haken i J. Koch, Every planar map is four colourable. Part II. Reducibility, *Illinois J. Math.*, 21, 1977, 491–567.
- [4] H. Bielak, A note on the Ramsey number and the planar Ramsey number for  $C_4$  and complete graphs, *Dissussiones Mathematicae, Graph Theory*, 19, 1999, 135–142.

- 
- [5] H. Bielak, I. Gorgol, The planar Ramsey number for  $C_4$  and  $K_5$  is 13, *Discrete Math.*, 236, 2001, 43–51.
- [6] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier Science Publishing Co., New York, 1982.
- [7] S. Burr, P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, R. H. Schelp, Some complete bipartite graph-tree Ramsey numbers, *Ann. Discrete Math.*, 41, 1988, 79–89.
- [8] G. Chartrand, S. Schuster, On the Existence of Specified Cycles in Complementary Graphs, *Bulletin of the American Math. Soc.*, 77, 1971, 995–998.
- [9] G. Chartrand, P. Zhang, *Graphs & Digraphs*, CRC Press, New York, 2011.
- [10] Y. Chen, T. C. E. Cheng, Y. Zhang, G. Zhou, The planar Ramsey number  $PR(C_4, K_8)$ , *Discrete Appl. Math.*, 171, 2014, 28–34
- [11] Y. Chen, Y. Zhang, Y. Zhang, The Ramsey numbers of wheels versus odd cycles, *Discrete Math.*, 323, 2014, 76–80.
- [12] Y.J. Chen, Z.K. Miao and G.F. Zhou, All quadrilateral-wheel planar Ramsey numbers, *Graphs Combin.*, 33, 2017, 335-346.
- [13] V. Chvátal, Tree-complete graph Ramsey number, *J. Graph Theory*, 1, 1977, 93.
- [14] V. Chvátal i F. Harary, Generalized Ramsey theory for graphs, III. Small Diagonal Numbers, *Proceedings of the American Math. Soc.*, 32, 1972, 389–394.
- [15] M. Clancy, Some small Ramsey numbers, *J. Graph Theory*, 1, 1977, 89–91.
- [16] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, New York, 1996.
- [17] A. Dudek, A Ruciński, Planar Ramsey numbers for small graphs, *Congress. Numeratum* 176, 2005, 201–220.

- [18] R.J. Faudree, R.H. Schelp, All Ramsey Numbers for Cycles in Graphs, *Discrete Mathematics*, 8, 1974, 313–329.
- [19] J. C. George, W. D. Wallis, *Introduction to Combinatorics*, CRC Press, 2011, New York, USA
- [20] I. Gorgol, *Planarne i indukowane liczby Ramseya*, rozprawa doktorska, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań, Lublin, 1999.
- [21] I. Gorgol, Planar Ramsey Numbers, *Discuss. Math. Graph Th.*, 25, 2005, 45–50.
- [22] I. Gorgol, A. Ruciński, The planar Ramsey number for cycles, *Discrete Math.*, 308, 2008, 4389–4395.
- [23] R.E. Greenwood, A.M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canad. J. Math.*, 7, 1955, 1–7.
- [24] H. Grötzsch, *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math. Natur. Reihe 8 (1958/1959), 109–120.
- [25] B. Grünbaum, Grötzsch's theorem on 3-colorings, *Michigan Math. J.*, 10, 1963, 303–310.
- [26] X.L. Hu, Y. Chen, Complete Graph-Tree Planar Ramsey Numbers, manuscript, 2018.
- [27] X.L. Hu, Y.Q. Zhang, Y.B. Zhang, Quadrilateral-tree planar Ramsey numbers, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 97, 2018, 194–199.
- [28] A. Januszkiewicz, *Planarne liczby Ramseya dla wybranych grafów*, praca magisterska, Politechnika Lubelska, Lublin, 2015.
- [29] K. Jones, Minimum independence graphs with maximum degree four, w "Graphs and Applications" (F. Harary and J. Maybee, Eds.), Wiley, New York, 1984.

- 
- [30] G. Karolyi, V. Rosta, Generalized and Geometric Ramsey Numbers for Cycles, *Theoretical Computer Science*, 263, 2001, 87–98.
- [31] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, 15, 1930, 271–283.
- [32] B. McKay, *plantri and fullgen*, <http://cs.anu.edu.au/~bdm/plantri/> Dostęp: 10.04.2015.
- [33] K. Pieńkosz, J. Wojciechowski, *Grafy i Sieci*, PWN, Warszawa, 2013.
- [34] C.C. Rousseau, J. Sheehan, On Ramsey Numbers for Books, *J. Graph Theory*, 2, 1978, 77–87.
- [35] S. P. Radziszowski, Small Ramsey Numbers, *Electron. J. Comb.*, DS1 (2017).
- [36] N. Robertson, D. Sanders, P.D. Seymour i R. Thomas, The Four-Colour Theorem, *J. Combin. Theory B*, 70, 1997, 145–161.
- [37] J. H. Spencer, *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, SIAM, 1994.
- [38] R. Steinberg, C. A. Tovey, Planar Ramsey Numbers, *J. Comb. Theory B* 59, 1993, 288–296.
- [39] Y.Q. Sun, Y.S. Yang, X.H. Lin, Y.N. Song, The planar Ramsey number  $PR(C_4; K_7)$ , *Discrete Math.*, 308, 2008, 5841–5848.
- [40] Y.Q. Sun, Y.S. Yang, X.H. Lin, Q. Jing, The planar Ramsey number  $PR(K_4 - e, K_5)$ , *Discrete Math.*, 307, 2007, 137–142.
- [41] K. Wagner, Über eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski, *Deutsche Math.*, 2, 1937, 280–285.
- [42] K. Walker, The analog of Ramsey numbers for planar graphs, *Bull. London Math. Soc.*, 1, 1969, 187–190.
- [43] R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa, 1985.

- [44] G. Zhou, S. Pirzada, Y. Chen, Z. Miao, A Note on Planar Ramsey Numbers for a Triangle Versus Wheels, *Discrete Math. Theor.*, 14(2), 2012, 255–260.
- [45] G. Zhou, Y. Zhang, Y. Chen, All Complete Graph - Wheel Planar Ramsey Numbers, *Graph Combin.*, 31, 2015, 2459–2465.