1. Liczby zespolone

1.1. Zadania podstawowe.

Zadanie 1.1. Podać część rzeczywistą i urojoną następujących liczb zespolonych:
$z_1 = (3+7i)(-2+i) + (-5-2i)(-1+7i)$, $z_2 = \dfrac{2}{1+3i}$,
$z_3 = \dfrac{1+3i}{1-\sqrt{2}i}$, $z_4 = \dfrac{2-i}{3+2i} - \dfrac{3+i}{3-2i}$.

Zadanie 1.2. Dla jakich liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:

(a) $(2+yi)(x-3i) = 7-i$;
(b) $\dfrac{1+yi}{x-2i} = 3i-1$;
(c) $\dfrac{(-1+2i)x^2 - (1+i)x + (-1+i)y}{(1+i)^2} = 1-i$?

Zadanie 1.3. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

(a) $z + 3\bar{z} = 2|\bar{z}| - i$;
(b) $\dfrac{1+i}{z} = \dfrac{2-3i}{\bar{z}}$;
(c) $\dfrac{2+i}{z-1+4i} = \dfrac{1-i}{2z+i}$;
(d) $z^2 - 4z + 13 = 0$;
(e) $z^2 + z + 1 = 0$;
(f) $4\bar{z} = z^2 + 4$;
(g) $z\bar{z} + (1-i)z = \overline{zi}$;
(h) $(1+i)\bar{z} + |z|^2 = \overline{z+1+i}$;
(i) $z(\bar{z}+1) - \mathrm{im}(\bar{z}) + 4i^6 = \frac{2-2i}{1+i}$;
(j) $|z+1|^2 - \bar{z} = (\mathrm{im} z)^2 + 3 - i$;
(k) $2i\bar{z} + 5 = |z+i|^2 - 2i$;
(l) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$;
(m) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;
(m) $z^4 + z^2 + 1 = 0$;
(o) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$;
(p) $(z^3+8)(z^2+1-i\sqrt{3}) = 0$;
(r) $(z^2 - 1 + i\sqrt{3})(z^3+27) = 0$;
(s) $z^4 + 8 - 8i\sqrt{3} = 0$;
(t) $z^3 + 1 - i\sqrt{3} = 0$;
(u) $z^3 + 3 = 0$.

Zadanie 1.4. Wyznaczyć miejsca geometryczne liczb zespolonych z spełniających warunki:

(a) $\dfrac{z-\bar{z}}{2i} = 5\dfrac{z+\bar{z}}{2} - 3$;
(b) $\mathrm{re}\,(iz+2) \geqslant 0$;
(c) $\mathrm{im}\,(z^2) < 0$;
(d) $\overline{z-i} = 2z - 1$;
(e) $\dfrac{4}{z} = \bar{z}$;
(f) $z\bar{z} + (5+i)\bar{z} + 1 = 0$;
(g) $\mathrm{im}\,\dfrac{1+iz}{1-iz} = 1$;
(h) $\mathrm{re}\dfrac{1}{z+zi} > 1$;
(i) $|z+1-2i| = 3$;
(j) $2 \leqslant |z+i| < 4$;
(k) $\left|\dfrac{z+3}{z-2i}\right| \geqslant 1$;
(l) $\dfrac{\pi}{6} < \mathrm{Arg}\, z \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$;
(m) $\mathrm{Arg}(z+2-i) = \pi$;
(n) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arg}[(-1+i)z] \leqslant \pi$;
(o) $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{i}{z}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$;
(p) $\mathrm{Arg}(-2+i) \leqslant \mathrm{Arg}\, z \leqslant$ Arg(-3-i).

Zadanie 1.5. Obliczyć:

(a) $(-1+i)^7$;
(b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{11}$;
(c) $(1+i)^{2004}$;
(d) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{9}$;
(e) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{16}$;
(f) $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-11}$;
(g) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$;
(h) $\left(1+\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{6}$.

Zadanie 1.6. Obliczyć:

(a) $\sqrt{1}$;
(b) $\sqrt[3]{-1}$;
(c) $\sqrt[4]{1}$;
(d) $\sqrt[3]{i}$;
(e) $\sqrt[3]{1-i}$;
(f) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$;
(g) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$.

Zadanie 1.7.
(a) Obliczyć $w=(-2+2i)^{14}$.
(b) Wyznaczyć $\sqrt[3]{w}$.

Zadanie 1.8.
(a) Obliczyć $w=(2-2i)^{10}$.
(b) Wyznaczyć $\sqrt[3]{w}$.

Zadanie 1.9. Liczba $1-i\sqrt{3}$ jest jednym z pierwiastków stopnia 3 z liczby zespolonej z. Znaleźć pozostałe pierwiastki i wyznaczyć z. Sporządzić rysunek.

Zadanie 1.10. Dane jest równanie: $(*)\ 3|z|-2z=2+i\sqrt{3}$.
(a) Znaleźć liczbę $(z_1)^{98}$, gdzie z_1 jest pierwiastkiem równania $(*)$ takim, że re $z_1<1$.
(b) Korzystając z definicji pierwiastka, znaleźć $\sqrt{z_2}$, gdzie z_2 jest tym pierwiastkiem $(*)$, że re $z_2>1$.

Zadanie 1.11. Znaleźć liczbę z_0^{15}, gdy z_0 jest pierwiastkiem równania: $|z|-2z=1+i\sqrt{3}$.

1.2. Zadania dodatkowe.

Zadanie 1.12. Niech $u=z^2$, $v=\frac{z+4}{z-2i}$, $w=\frac{z}{iz+4}$. Narysować zbiór wszystkich liczb zespolonych z, dla których:

(a) liczba u jest rzeczywista;
(b) liczba u jest czysto urojona;
(c) liczba v jest rzeczywista;
(d) liczba v jest czysto urojona;
(e) liczba w jest rzeczywista;
(f) liczba w jest czysto urojona.

Zadanie 1.13. Na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ zaznaczyć zbiór

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{re}[(z+1)(\bar{z}-1)]\leqslant 8\ \wedge\ |z+1+i|\geqslant 1\ \wedge\ \frac{3\pi}{2}\leqslant \mathrm{Arg}\,(3zi)\leqslant 2\pi\right\}.$$

Zadanie 1.14. Przedstawić interpretację geometryczną zbioru

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{re}(z^2)=2\wedge[\mathrm{im}(z+i)]^2=1\right\}.$$

Zadanie 1.15. Przedstawić interpretację geometryczną zbioru

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C}\colon |z - 2i| \geqslant 3 \wedge \operatorname{Arg}(z + 3) \geqslant \frac{\pi}{3} \right\}$$

Zadanie 1.16. Podać interpretację geometryczną zbioru liczb zespolonych o module równym 1, dla których $z^2 + (2 + 2i)z$ jest liczbą czysto urojoną.

Zadanie 1.17. Podać interpretację geometryczną zbioru

$$B = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| + \operatorname{re} z < 1\}.$$

Zadanie 1.18. Na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ zaznaczyć zbiór

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}\colon \frac{|z - 1 + i|}{|z + 2i|} \geqslant 1 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg} \frac{z}{i} \leqslant \pi \right\}.$$

Zadanie 1.19. Obliczyć $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-i}{-2+2i}}$.

2. Macierze i wyznaczniki

Zadanie 2.1. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$2\cdot\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}+3X=\begin{bmatrix}5&1\\-1&0\end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.2. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$2\left(X-\begin{bmatrix}2&i\\-i&0\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1+i&1\\1-i&-1\end{bmatrix}=3X-I.$$

Zadanie 2.3. Obliczyć następujące iloczyny:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&0&1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}-1&4&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3&1\\0&1&2\\-2&5&0\end{bmatrix}.$$

Napisać macierze transponowane do otrzymanych macierzy.

Zadanie 2.4. Dane są macierze : $A=\begin{bmatrix}-1&0&3\\3&2&1\\2&0&1\end{bmatrix}$ oraz $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\-2&1\end{bmatrix}$.
Które z iloczynów A^2B^T, BA^2, B^2A, B^TA^2 istnieją? Odpowiedź uzasadnić. Obliczyć te iloczyny, które istnieją.

Zadanie 2.5. Obliczyć następujące wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix}1-i&i\\-2i&1+i\end{vmatrix},\qquad\begin{vmatrix}0&\sin x&\operatorname{ctg}x\\\sin x&0&\sin x\\\operatorname{ctg}x&\sin x&0\end{vmatrix},\qquad\begin{vmatrix}7&21&-14\\-10&-30&20\\8&10&12\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\2&1&1&2\\2&1&0&2\\3&-1&-1&1\end{vmatrix},\qquad\begin{vmatrix}2&3&-2&1&1\\2&1&3&1&2\\3&4&-2&0&1\\2&3&1&5&2\\1&-1&1&-1&1\end{vmatrix}.$$

Zadanie 2.6. Dla jakich $x\in\mathbb{R}$ odwracalna jest macierz $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&x&1\\1&1&x+2\end{bmatrix}$?

Zadanie 2.7. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}$.

Zadanie 2.8. W zbiorze wszystkich macierzy nieosobliwych dana jest funkcja f taka, że jeśli $\mathbf{X}$ jest taką właśnie macierzą to: $f(\mathbf{X})=\mathbf{2X^2}-\mathbf{X}+\mathbf{X^{-1}}$. Obliczyć wartość tej funkcji dla $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&2&-1\\1&0&2\end{bmatrix}$

Zadanie 2.9. Znaleźć macierz X spełniającą równanie $AXB+C=D$, gdy

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&0\\3&-1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}-3&-1\\2&-1\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.10. Dla jakich $z \in \mathbb{C}$ odwracalna jest macierz $A = \begin{bmatrix} z^2 & z & 1 \\ 1 & z^2 & z \\ z & 1 & z^2 \end{bmatrix}$?

Wyznaczyć A^{-1} dla $z = i$.

****

Zadanie 2.11. Obliczyć wyznaczniki

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 9 & 28 & 19 \\ 1 & 27 & 19 & 82 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(a) $-7^2 \cdot 3^5$, (b) 1060, (c) 1060

Zadanie 2.12. Znaleźć macierz X spełniającą równanie $AXB + C = D$, gdy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{2} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.13. Znaleźć macierz X spełniającą równanie $AXB + C = D$, gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{35}{6} & 2 \\ -\frac{11}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.14. Obliczyć wartość funkcji $\quad f : X \mapsto X^3 - 3X^2 + 5X^{-1}, \quad$ gdy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.15. Niech $f(X) = \dfrac{I + X}{I - X}$ oraz $\dfrac{A}{B} = A \cdot B^{-1}$. Czy istnieje $[f(A)]^{-1}$, gdy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

Nie istnieje, gdyż $\det f(A) = 0$.

Zadanie 2.16. W zbiorze wszystkich macierzy nieosobliwych dana jest funkcja f taka, że jeśli X jest taką właśnie macierzą to:

$$f(X) = X^3 - 3X^2 + 2X^{-1}.$$

Obliczyć wartość tej funkcji, gdy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} -19\frac{1}{2} & 2\frac{1}{4} & 1\frac{3}{4} \\ 3 & 2\frac{1}{2} & -2\frac{1}{2} \\ -14\frac{1}{2} & 5\frac{3}{4} & 1\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.17. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 5-i & 2+i \\ 3+i & i \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{4} & \frac{1}{2}+\frac{i}{4} \\ \frac{3}{4}+\frac{i}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{i}{4} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.18. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $B = \begin{bmatrix} -i & 1-i \\ 4+i & 1+i \end{bmatrix}$.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i & \frac{3}{10}-\frac{1}{10}i \\ \frac{7}{10}+\frac{3}{5}i & -\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.19. Znaleźć macierz X spełniającą równanie: $AX + 2B = C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -9\frac{1}{2} & 16\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.20. W zbiorze wszystkich macierzy nieosobliwych dana jest funkcja f taka, że jeśli X jest taką właśnie macierzą to: $f(X) = X^2 + 3X - X^{-1}$. Obliczyć wartość tej funkcji, gdy $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

$$f(X) = \begin{bmatrix} -1 & 18 & 10 \\ 8 & 7 & 4 \\ 4 & 14 & 7 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.21. Wyznaczyć macierz X^{-1}, jeżeli $X = \begin{bmatrix} a & b-3 & c \\ 3b & c & 2a \\ b & a & 2c \end{bmatrix}$ spełnia równanie $X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.22. Wyznaczyć macierz X spełniającą równanie: $AX - 2B = C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{7}{3} \\ 16 & -9 & -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{7}{3} & 39\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.23. Dla jakich $z \in \mathbb{C}$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1+z & 0 \\ z & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa? Obliczyć A^{-1} dla $z = i$.

Macierz jest nieosobliwa dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. Wielomiany

Zadanie 3.1. Dla jakich wartości a oraz b wielomian $ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ jest podzielny przez wielomian $x^2 - 5x + 6$?

Zadanie 3.2. Dla jakich wartości p oraz q wielomian $x^4 + px^2 + q$ jest podzielny przez wielomian $x^2 + 2x + 5$?

Zadanie 3.3. Dla jakich wartości a oraz b liczba -1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax + 1$?

Zadanie 3.4. Liczba $x_1 = 1 + i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $w(x) = x^4 + bx + c$, gdzie $b, c \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć współczynniki b i c oraz rozłożyć otrzymany wielomian na rzeczywiste czynniki nierozkładalne.

Zadanie 3.5. Rozwiązać równanie:

(a) $27x^3 - 9x^2 - 3x + 1 = 0$,
(b) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$,
(c) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72 = 0$,
(d) $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0$,
(e) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$,
(f) $x^6 - 2x^4 + 4x^2 - 8 = 0$,
(g) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$,
(h) $2x^3 - 5x^2 + 12x - 5 = 0$.

Zadanie 3.6. Wiedząc, że z_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(z)$, obliczyć pozostałe pierwiastki tego wielomianu:

(a) $w(z) = z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 8^z + 20, \;\; z_1 = -1 - 2i$,
(b) $w(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10, \;\; z_1 = 1 + 2i$,
(c) $w(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1, \;\; z_1 = i$,
(d) $w(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4, \;\; z_1 = 1 + i$,
(e) $w(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10, \;\; z_1 = 2 + i$,
(f) $w(z) = z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 6z + 15, \;\; z_1 = -\sqrt{3}i$,
(g) $w(z) = z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25, \;\; z_1 = 2 - i$.

Zadanie 3.7. Obliczyć pierwiastki wielomianu $w(z)$:

(a) $w(z) = 3z^4 - 10z^3 + 10z - 3$,
(b) $w(z) = 5z^3 - 19z^2 - 38z + 40$,
(c) $w(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 3z - 2$,
(d) $w(z) = z^3 + 7z^2 + 7z + 6$,
(e) $w(z) = z^3 + 9z^2 + 9z - 10$,
(f) $w(z) = z^6 + z^4 + 2z^2 - 4$,
(g) $w(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$,
(h) $w(z) = z^3 - z + 6$,
(i) $w(z) = z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1$,
(j) $w(z) = z^5 - z^4 - z^3 + z^2 - 2z + 2$.

Powyższe wielomiany rozłożyć na:
(a) nierozkładalne czynniki rzeczywiste,
(b) czynniki liniowe.

4. Układy równań liniowych

Zadanie 4.1. Rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4.2. W zależności od parametrów $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$ podać warunki rozwiązalności układu równań: $\begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$.

Zadanie 4.3. Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ układ równań
$$\begin{cases} x + ky - 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + ky - z = 0 \end{cases}$$
ma rozwiązanie niezerowe? Wyznaczyć to rozwiązanie.

Zadanie 4.4. W zależności od parametru a przedyskutować rozwiązalność układu równań:
$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 6x + 5y - 4z = 0 \\ -x + 2y + az = 0 \\ -x - 2y + z - t = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4.5. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać następujące układy równań:

(1) $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z - t = -1 \\ -3x + 2y + t = -1 \\ -x - y + 2z + 3t = 3 \end{cases}$, (3) $\begin{cases} y - z - t = 1 \\ x + 2y - 3z - t = 4 \\ x - z + t = 2 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$,

(2) $\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ -3x - 5y + 3z - t = 5 \\ -x - 2y + 2z = 3 \\ -2x + 3z - 2t = 0 \end{cases}$, (4) $\begin{cases} 2x - y + z + 2t + 3u = 2 \\ 6x - 3y + 2z + 4t + 5u = 3 \\ 6x - 3y + 4z + 8t + 13u = 9 \\ 4x - 2y + z + t + 2u = 1 \end{cases}$.

****

Zadanie 4.6. Dla jakich wartości parametrów a i b zbiór rozwiązań układu równań:
$$\begin{cases} 9x + ay + 3z = 1 \\ 5x - 8y + 9z = b \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$
jest zbiorem niepustym?

Zadanie 4.7. W zależności od parametru a przedyskutować rozwiązalność układu równań:

(1) $\begin{cases} (1+a)x - ay = 1+a \\ ax + (1-a)y = a-1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} -ax_1 + x_2 - ax_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 - x_3 = -a \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + ay + z = 0 \\ 3x + y - az = a \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 + ax_2 + ax_3 = a \\ ax_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + ax_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ ay + (a+1)z = -1 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 8y + az = 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z + 4t = 3 \\ 4x - 2y + 3z + 7t = 1 \\ 8x - 6y - z - 5t = 9 \\ 7x - 3y + 7z + 17t = a \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 4t = 3 \\ 2x + 3y + 6z + 8t = 5 \\ -x + 6y + 9z + 20t = 11 \\ 4x + y + 4z + at = 2 \end{cases}$

Zadanie 4.8. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać następujące układy równań:

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ -x + 3y + 2z - t = 0 \\ 2x + 4y - t = 1, \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 4y - 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x_1 + 4y - z = 0, \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 6x + 5y - 4z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ -x - 2y + z - t = 1, \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x + y + z + t = \frac{1}{2} \\ 2x - 3z + 2t = 1 \\ -2x + 3y + 3t = -1 \\ 4x + y + 2z - t = 0, \end{cases}$

(6) $\begin{cases} y + 2z - 2t = -1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - y - z - t = -2 \\ x + y + z - t = 0, \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x + z - t + u = 1 \\ y + z - u = 0 \\ -x + 5u = -1 \\ x + y + 2z - t = 5, \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x + 2y - 3z - t = 4 \\ x - z + t = 2 \\ x + y - 2z = 3 \\ y - z - t = 1, \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x - z = 3 \\ 2x + y + z = 8 \\ x + 5z - t = 3 \\ 2z - t = 1, \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \end{cases}$

(12) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_2 = -6, \end{cases}$

(13) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \end{cases}$

5. Struktury algebraiczne

Zadanie 5.1. Wykazać, że para $(\mathcal{F}, \circ)$, gdzie $\mathcal{F}$ jest zbiorem funkcji różnowartościowych $(f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$, zaś $\circ$ operacją składania funkcji, tworzy grupę.

Zadanie 5.2. Niech $\mathcal{M}_n$ będzie zbiorem macierzy kwadratowych stopnia n, $\mathcal{M}'_n$ będzie zbiorem nieosobliwych macierzy kwadratowych stopnia n, zaś $+, \cdot$ odpowiednio dodawaniem i mnożeniem macierzy. Wykazać, że trójka $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$, tworzy pierścień z jednością, zaś trójka $(\mathcal{M}'_n, +, \cdot)$ tworzy ciało (nieprzemienne).

Zadanie 5.3. Dla dowolnych liczb wymiernych x, y określamy działania $x \circ y$ i $x * y$ w następujący sposób: $x \circ y = x + y + 1$ oraz $x \diamondsuit y = x + y + xy$. Sprawdzić, czy trójka $(\mathbb{Q}, \circ, \diamondsuit)$ jest ciałem.

****

Zadanie 5.4. Wykazać, że para $(\mathcal{O}, \circ)$, gdzie $\mathcal{O}$ jest zbiorem obrotów płaszczyzny o ustalonym środku O, zaś $\circ$ operacją składania obrotów, tworzy grupę.

Zadanie 5.5. Wykazać, że para $(\mathcal{T}, \circ)$, gdzie $\mathcal{P}$ jest zbiorem translacji płaszczyzny, zaś $\circ$ operacją składania translacji, tworzy grupę.

Zadanie 5.6. Sprawdzić, że zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ wraz z dodawaniem i mnożeniem liczb zespolonych ma strukturę ciała.

Zadanie 5.7. W zbiorze $A = \langle 1, \infty)$ określamy działanie

$$a \star b = ab - a - b + 2$$

Zbadać, czy $(A, \star)$ jest grupą.

Zadanie 5.8. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{2^s} \wedge p, s \in \mathbb{Z} \wedge s > 0\}$. Wykazać, że zbiór A wraz z działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych tworzy pierścień. Czy pierścień ten jest ciałem?

Zadanie 5.9. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem. Czy zbiór par (a, b) elementów ciała K wraz z działaniami

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \oplus (c,d) & = & (a+c, b+d) \\ (a,b) \odot (c,d) & = & (ac, bd) \end{array}$$

tworzy ciało?

Zadanie 5.10. W zbiorze Q^2 par liczb wymiernych określone jest działanie

$$(a,b) * (c,d) \ = \ \big(a + c + 1,\ b + d + bd\big).$$

Wyznaczyć, jeśli istnieją, element neutralny tego działania oraz element symetryczny dla dowolnego elementu z Q^2.

Zadanie 5.11. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określone jest następujące działanie

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Sprawdzić, czy $(\mathbb{R}^2, *)$ tworzy grupę.

Zadanie 5.12. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określone jest następujące działanie

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + 2y_2).$$

Sprawdzić, czy $(\mathbb{R}^2, *)$ tworzy grupę.

5.0.1. *Pierścienie* $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 5.13. Znaleźć elementy odwrotne względem mnożenia do wszystkich niezerowych elementów ciała $\mathbf{K} = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{9}, \mathbf{10}\}, \oplus_{\mathbf{11}}, \odot_{\mathbf{11}})$.

Zadanie 5.14. Znaleźć elementy odwrotne względem mnożenia do wszystkich niezerowych elementów ciała $\mathbf{K} = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{11}, \mathbf{12}\}, \oplus_{\mathbf{13}}, \odot_{\mathbf{13}})$.

Zadanie 5.15. W pierścieniu $\mathbb{Z}_{12}$ rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x & + & y & = & 5 \\ x & - & 2y & = & 4. \end{cases}$$

Zadanie 5.16. W pierścieniu $\mathbb{Z}_{15}$ rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 3. \end{cases}$$

Zadanie 5.17. W pierścieniu $\mathbb{Z}_8$ rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & 5 \\ x & - & 2y & = & 3. \end{cases}$$

Zadanie 5.18. W ciele $GF(5)$ znaleźć pierwiastki równania $x^2 + x + 3 = 0$.

Zadanie 5.19. W pierścieniu $\mathbb{Z}_{12}$ dany jest układ równań:

$$\begin{cases} 3x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & 2. \end{cases}$$

Pamiętając, że działania występujące w układzie są działaniami z $\mathbb{Z}_{12}$ wyznaczyć te warości parametru a ($a \in \mathbb{Z}_{12}$), dla których układ ma rozwiązania, a następnie dla każdej z uzyskanych wartości parametru a znaleźć zbiory rozwiązań układu.

Zadanie 5.20. W $\mathbb{Z}_3$ rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & z & = & 1 \\ y & + & 2z & = & 2. \end{cases}$$

Zadanie 5.21. W $\mathbb{Z}_5$ rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & z & = & 1 \\ y & + & 2z & = & 2. \end{cases}$$