1. Liczby zespolone

1.1. Definicje, twierdzenia, wzory.

(1) **Liczbą zespoloną** nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$, tzn.

$$\mathbb{C} \stackrel{def}{=} \{(x, y) \colon x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Niech $z_1 = (x_1, y_1)$ oraz $z_2 = (x_2, y_2)$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wtedy

(a) $(z_1 = z_2) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$;

(b) $z_1 + z_2 \stackrel{def}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

(c) $z_1 \cdot z_2 \stackrel{def}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

(3) Własności działań w zbiorze liczb zespolonych :

(a) dodawanie liczb zespolonych jest przemienne, tzn. dla każdych liczb zespolonych z_1 oraz z_2 spełniony jest warunek

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

(b) dodawanie liczb zespolonych jest łączne, tzn. dla każdych liczb zespolonych z_1, z_2 oraz z_3 spełniony jest warunek

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

(c) istnieje element neutralny dodawania; jest nim liczba zespolona $\mathbf{0} \stackrel{def}{=} (0, 0)$, która dla każdej liczby zespolonej z spełnia warunek

$$z + \mathbf{0} = z;$$

(d) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ istnieje liczba zespolona $-z \stackrel{def}{=} (-x, -y)$ spełniająca równość

$$z + (-z) = \mathbf{0};$$

liczbę $-z$ nazywamy elementem przeciwnym do z;

(e) mnożenie liczb zespolonych jest przemienne, tzn. dla każdych liczb zespolonych z_1 oraz z_2 spełniony jest warunek

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

(f) mnożenie liczb zespolonych jest łączne, tzn. dla każdych liczb zespolonych z_1, z_2 oraz z_3 spełniony jest warunek

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

(g) istnieje element neutralny mnożenia; jest nim liczba zespolona $\mathbf{1} \stackrel{def}{=} (1, 0)$, która dla każdej liczby zespolonej z spełnia warunek

$$z \cdot \mathbf{1} = z;$$

(h) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y) \neq (0, 0)$ istnieje liczba zespolona

$$\frac{1}{z} \stackrel{def}{=} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

spełniająca równość

$$z \cdot \frac{1}{z} = \mathbf{1};$$

liczbę $\frac{1}{z}$ nazywamy elementem odwrotnym do z;

(i) mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania, tzn. dla każdych liczb zespolonych z_1, z_2 oraz z_3 spełniony jest warunek

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

(4) Różnicę oraz iloraz liczb zespolonych z_1 i z_2 definiujemy następująco:

$$z_1 - z_2 \overset{def}{=} z_1 + (-z_2) \qquad \text{oraz} \qquad \frac{z_1}{z_2} \overset{def}{=} z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \quad \text{dla} \quad z_2 \neq (0,0).$$

(5) Zbiór liczb rzeczywistych jest podzbiorem zbioru liczb zespolonych. Zbiór $\{(x,0)\colon x \in \mathbb{R}\}$ będziemy utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.
Zamiast $(x,0)$ będziemy pisać krótko x.

(6) Liczbę zespoloną $(0,1)$ nazywamy **jednostką urojoną** i oznaczamy symbolem i:

$$i \overset{def}{=} (0,1).$$

Zauważmy, że $i^2 = -1$.

(7) Każdą liczbę zespoloną $z = (x,y)$ można jednoznacznie zapisać jako

$$z = x + iy, \quad \text{gdzie} \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Taką postać nazywamy **postacią algebraiczną liczby zespolonej.**

(8) Niech $z = x + iy$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}$ będzie liczbą zespoloną.

(a) Liczbę x nazywamy **częścią rzeczywistą liczby zespolonej** z, co zapisujemy następująco:

$$\operatorname{re} z \overset{def}{=} x.$$

(b) Liczbę y nazywamy **częścią urojoną liczby zespolonej** z, co zapisujemy następująco:

$$\operatorname{im} z \overset{def}{=} y.$$

(9) Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają one równe części rzeczywiste i równe części urojone.

(10) **Liczbę** zespoloną z nazywamy **rzeczywistą,** jeżeli $\operatorname{im} z = 0$.
Liczbę zespoloną z nazywamy **czysto urojoną,** jeżeli $\operatorname{re} z = 0$ oraz $\operatorname{im} z \neq 0$.

(11) **Liczbą sprzężoną do liczby zespolonej** $z = x + iy$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z}$ określoną wzorem:

$$\overline{z} \overset{def}{=} x - iy.$$

Niech z, z_1 oraz z_2 będą liczbami zespolonymi. Wtedy:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

(c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

(d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ dla $z_2 \neq 0$;

(e) $\overline{(\overline{z})} = z$.

(12) **Modułem liczby zespolonej** $z = x + iy$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Niech z, z_1 oraz z_2 będą liczbami zespolonymi. Wtedy:

(a) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;

(b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

(c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ dla $z_2 \neq 0$;

(e) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

(f) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$.

(13) **Argumentem liczby zespolonej** $z = x + iy \neq 0$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą warunki:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} \qquad \text{oraz} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby $z = 0$ jest każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$.
Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy ten argument φ liczby z, który spełnia warunek $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby $z = 0$ jest 0. Argument liczby z będziemy oznaczać symbolem $\arg z$, natomiast jej argument główny symbolem $\operatorname{Arg} z$.

(14) Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, zaś liczba φ jest jednym z jej argumentów.
Taką postać nazywamy **postacią trygonometryczną liczby zespolonej.**

(15) Liczby zespolone $z_1 = r_1\big(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\big)$ oraz $z_2 = r_2\big(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\big)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $r_1 = r_2$ oraz $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

(16) Niech $z_1 = r_1\big(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\big)$ oraz $z_2 = r_2\big(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\big)$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wtedy

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big] \qquad \text{oraz}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big] \quad \text{dla} \quad z_2 \neq 0.$$

(17) **Wzór de Moivre'a.**
Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ będzie dowolną liczbą zespoloną oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

(18) **Pierwiastkiem stopnia** $n \in \mathbb{N}$ **z liczby zespolonej** z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą warunek: $w^n = z$.

(19) **Twierdzenie o pierwiastkach z liczby zespolonej.**
Każda liczba zespolona $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n. Zbiór tych pierwiastków ma postać $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{dla} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

1.2. Przykłady.

Przykład 1.1. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie:
$\bar{z}(z+1) - \operatorname{im}(-z) + 4i^{10} = \dfrac{2+2i}{1-i}$.

$\bar{z}z + \bar{z} - \operatorname{im}(-z) + 4i^{10} = \dfrac{2+2i}{1-i}$.
$i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$
$\dfrac{2+2i}{1-i} = \dfrac{2(1+i)}{1-i} = \dfrac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2(\cancel{1}+2i+\cancel{i^2})}{1-i^2} = \dfrac{\cancel{2}\cdot 2i}{\cancel{2}} = 2i.$
Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Podstawiając do równania otrzymujemy:
$(x - iy)(x + iy) + x - iy - \operatorname{im}(-x - iy) - 4 = 2i$.
$x^2 + y^2 + x - iy - (-y) - 4 = 2i$
$x^2 + y^2 + x + y - 4 - iy = 2i$
Porównujemy części rzeczywiste i urojone.
$x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ oraz $-y = 2 \Leftrightarrow y = -2$,
czyli $x^2 + 4 + x - 2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longleftrightarrow (x = -2 \ \vee \ x = 1)$.
Rozwiązaniem równania są więc dwie liczby zespolone: $z = -2 - 2i$ lub $z = 1 - 2i$.

Przykład 1.2. Przedstawić interpretację geometryczną zbioru:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |iz + 1| \leqslant 2 \ \wedge \ \operatorname{Arg}(2i) \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \operatorname{Arg}(-3)\}.$$

Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.
$|iz + 1| = |i(x + iy) + 1| = |ix + i^2 y + 1| = |(-y + 1) + ix| = \sqrt{(-y+1)^2 + x^2}$.
Zatem $|iz + 1| \leqslant 2 \iff \sqrt{(-y+1)^2 + x^2} \leqslant 2 \iff (-y+1)^2 + x^2 \leqslant 4 \iff x^2 + (y-1)^2 \leqslant 4$.
Nierówność ta opisuje koło K o środku w punkcie $(0, 1)$ i promieniu 2.
$\operatorname{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arg}(-3) = \pi$, zatem nierówności $\operatorname{Arg}(2i) \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \operatorname{Arg}(-3)$ opisują drugą ćwiartkę układu współrzędnych.
Rozwiązaniem zadania jest więc część koła K zawarta w drugiej ćwiartce.

Przykład 1.3. Obliczyć $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{13}$.

Niech $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.
$|z| = \sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = 1$
$\cos\varphi = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Zatem $\varphi = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{4}\pi$.

Liczbę z można zapisać następująco w postaci trygonometrycznej:
$z = 1\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$
Mamy więc
$z^{13} = 1^{13}\left(\cos\left(13\cdot\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(13\cdot\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 1\left(\cos\frac{39}{4}\pi + i\sin\frac{39}{4}\pi\right) =$
$\cos\left(9\pi + \frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(9\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\pi + \frac{3}{4}\pi\right) =$
$\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$
Zatem $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Przykład 1.4. Rozwiązać równanie $z^3 = (1-i)^4,\ z \in \mathbb{C}$. Rozwiązania przedstawić w postaci trygonometrycznej i algebraicznej.

Najpierw obliczamy
$(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = [\cancel{1} - 2i + \cancel{i^2}]^2 = 4i^2 = -4.$
Rozwiązujemy więc równanie $z^3 = -4$, czyli musimy obliczyć pierwiastki trzeciego stopnia z liczby -4.
Zamieniamy liczbę -4 na postać trygonometryczną:
$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$
Stosujemy wzór na pierwiastki:
$z_0 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),$
$z_1 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}) = \sqrt[3]{4}(\cos\pi + i\sin\pi),$
$z_2 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}) = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi).$
Są to postacie trygonometryczne pierwiastków. Zamieniamy je na postacie algebraiczne.
$z_0 = \sqrt[3]{4}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2},$
$z_1 = \sqrt[3]{4}(-1 + 0i) = -\sqrt[3]{4},$
$z_2 = \sqrt[3]{4}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}.$

2. Macierze i wyznaczniki

2.1. Definicje, twierdzenia, wzory.

(1) **Macierzą rzeczywistą (zespoloną)** wymiaru $m \times n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z mn liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

Element macierzy A stojący w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie oznaczamy symbolem a_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(2) Macierze A i B są równe, gdy mają takie same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(3) Rodzaje macierzy.

(a) **Macierz zerowa** wymiaru $m \times n$ jest to macierz, której wszystkie elementy są równe 0; oznaczamy ją symbolem $\mathbf{0}_{m\times n}$ lub $\mathbf{0}$, gdy znamy jej wymiar.

(b) **Macierz kwadratowa** stopnia n jest to macierz wymiaru $n \times n$;
elementy a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} macierzy kwadratowej tworzą jej **główną przekątną**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(c) **Macierz trójkątna dolna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geqslant 2$, której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(d) **Macierz trójkątna górna** jest to macierz kwadratowa stopnia $n \geqslant 2$, której wszystkie elementy stojące pod główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(e) **Macierz diagonalna** jest to macierz kwadratowa stopnia n, której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(f) **Macierz jednostkowa** jest to macierz diagonalna stopnia n, której wszystkie elementy stojące na głównej przekątnej są równe 1; macierz jednostkową stopnia n oznaczamy symbolem I_n.

$$I_n \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Działania na macierzach.

(a) Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. **Sumą (różnicą) macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{def}{=} a_{ij} \pm b_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Piszemy $C = A \pm B$.

(b) Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$, zaś α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. **Iloczynem macierzy** A **przez liczbę** α nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{def}{=} \alpha a_{ij}$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Piszemy $C = \alpha A$.

(c) Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ ma wymiar $n \times k$. **Iloczynem macierzy** A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} \stackrel{def}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Piszemy $C = AB$.

UWAGA! **Mnożenie macierzy nie jest przemienne.**

(5) **Macierzą transponowaną** do macierzy $A = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, której elementy określone są wzorem

$$b_{ij} \stackrel{def}{=} a_{ji}$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy symbolem A^T.

(6) **Wyznacznikiem rzeczywistej (zespolonej) macierzy kwadratowej** $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę rzeczywistą (zespoloną) $\det A$, która określona jest wzorem rekurencyjnym:

(a) jeżeli macierz A ma stopień $n = 1$, to $\det A = a_{11}$;

(b) jeżeli macierz A ma stopień $n \geqslant 2$, to

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy A oznaczamy także symbolem $\det[a_{ij}]$ lub $|A|$.

(7) Reguła obliczania wyznaczników macierzy stopnia drugiego.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(8) **Reguła Sarrusa** obliczania wyznaczników macierzy stopnia trzeciego.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

UWAGA! **Reguła ta nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.**

(9) Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$. **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę

$$D_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A.

(10) **Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika.**
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$ oraz niech i, j będą ustalonymi liczbami naturalnymi takimi, że $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć na podstawie następujących wzorów:

(a) $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots + a_{in}D_{in}$; wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i-tego wiersza;

(b) $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \cdots + a_{nj}D_{nj}$; wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j-tej kolumny.

(11) Jeżeli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą diagonalną lub macierzą trójkątną dolną lub macierzą trójkątną górną stopnia n, to jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej tej macierzy, tzn. $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

(12) **Własności wyznaczników.**

(a) Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę złożoną z samych zer lub wiersz złożony z samych zer jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej dwie jednakowe kolumny lub dwa jednakowe wiersze jest równy 0, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_2 & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_n & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

(c) Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy w niej między sobą albo dwie kolumny albo dwa wiersze, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(d) Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny lub pewnego wiersza macierzy kwadratowej posiadają wspólny czynnik, to można go wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(e) Jeżeli elementy pewnej kolumny (lub pewnego wiersza) macierzy kwadratowej są sumami dwóch składników, to wyznacznik takiej macierzy jest równy sumie wyznaczników dwóch macierzy, w których elementy tej kolumny (lub tego wiersza) są zastąpione tymi składnikami, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(f) Wyznacznik macierzy kwadratowej nie zmieni się, jeżeli do dowolnej kolumny tej macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn lub do dowolnego jej wiersza dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy. (Kombinacją liniową wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nazywamy wektor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.)

(g) $\det A = \det A^T$ dla dowolnej macierzy kwadratowej A.

(h) **Twierdzenie Cauchy'ego.**
Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

(i) Dla dowolnej macierzy kwadratowej A oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość $\det(A^n) = (\det A)^n$.

(13) Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. **Macierzą odwrotną** do macierzy A nazywamy macierz A^{-1} spełniającą warunek $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n. Jeżeli macierz A posiada macierz odwrotną A^{-1}, to macierz A nazywamy **odwracalną**. Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie.

(14) Macierz kwadratową A nazywamy **macierzą nieosobliwą**, jeżeli $\det A \neq 0$. W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz A jest **osobliwa**.

(15) **Twierdzenie o macierzy odwrotnej.**
(a) Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.
(b) Jeżeli macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ jest nieosobliwa, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[D_{ij}]^T,$$

przy czym $[D_{ij}]$ oznacza macierz dopełnień algebraicznych elementów a_{ij} macierzy A.

(16) **Własności macierzy odwrotnych.**
Jeżeli macierze A i B są tego samego stopnia i są odwracalne oraz $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, to macierze A^{-1}, A^T, AB, αA, A^n są również odwracalne i zachodzą następujące równości:

(a) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$,
(b) $(A^{-1})^{-1} = A$,
(c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
(d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
(e) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$,
(f) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

2.2. Przykłady.

Przykład 2.1. Dane są macierze : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.
Które z iloczynów A^2B^T, B^TA^2, AB^2, $B^{-1}A^T$ istnieją? Odpowiedź uzasadnić. Obliczyć te iloczyny, które istnieją.

Jedynie iloczyn B^TA^2 istnieje. W iloczynie A^2B^T nie jest możliwe wymnożenie macierzy wymiaru 3×3 przez macierz wymiaru 1×3; w iloczynie AB^2 nie istnieje macierz B^2, a w iloczynie $B^{-1}A^T$ nie istnieje macierz B^{-1}.

$$B^TA^2 = B^TAA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1\cdot(-3)+0\cdot 2+(-2)\cdot(-3) & 1\cdot 2+0\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 3+0\cdot 0+(-2)\cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3\cdot(-3)+(-2)\cdot 2+1\cdot(-3) & 3\cdot 2+(-2)\cdot 1+1\cdot 2 & 3\cdot 3+(-2)\cdot 0+1)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Przykład 2.2. Dla jakich wartości parametrów $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & b & b \\ a & 1 & b \\ a & a & 1 \end{bmatrix}^2$ jest górnie trójkątna?

Elementy w macierzy znajdujące się pod główną przekątną muszą być równe 0. Obliczamy te elementy i piszemy odpowiedni układ równań.
$$\begin{bmatrix} 1 & b & b \\ a & 1 & b \\ a & a & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & b & b \\ a & 1 & b \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b & b \\ a & 1 & b \\ a & a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{coś} & \text{coś} & \text{coś} \\ a+a+ab & \text{coś} & \text{coś} \\ a+a^2+a & ab+a+a & \text{coś} \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} 2a+ab &= 0 \\ a^2+2a &= 0 \end{cases}$$
$a^2+2a=0 \Leftrightarrow (a=0 \vee a=-2)$
Po wstawieniu $a=0$ do pierwszego równania otrzymujemy, że b może być dowolną liczbą, zaś po wstawieniu $a=-2$ obliczamy, że $b=-2$.
Ostatecznie dana macierz jest górnie trójkątna, gdy $a=-2$ i $b=-2$ lub $a=0$ i $b\in\mathbb{R}$.

Przykład 2.3. Obliczyć wyznacznik $W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Korzystając z własności wyznacznika otrzymujemy:

$$W=\begin{vmatrix}1&2&-1&4\\-6&4&2&1\\1&5&3&-2\\2&-2&1&3\end{vmatrix}\overset{k_1+k_3}{=}\begin{vmatrix}0&2&-1&4\\-4&4&2&1\\4&5&3&-2\\3&-2&1&3\end{vmatrix}\overset{k_2+2k_3}{=}\begin{vmatrix}0&0&-1&4\\-4&8&2&1\\4&11&3&-2\\3&0&1&3\end{vmatrix}\overset{k_4+4k_3}{=}\begin{vmatrix}0&0&-1&0\\-4&8&2&9\\4&11&3&10\\3&0&1&7\end{vmatrix}.$$

Rozwijamy wyznacznik względem pierwszego wiersza i dalej korzystamy z własności wyznacznika.

$$W=(-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-4&8&9\\4&11&10\\3&0&7\end{vmatrix}\overset{k_3-k_2}{=}-\begin{vmatrix}-4&8&1\\4&11&-1\\3&0&7\end{vmatrix}\overset{w_1+w_2}{=}-\begin{vmatrix}0&19&0\\4&11&-1\\3&0&7\end{vmatrix}$$

Znów rozwijamy wyznacznik względem pierwszego wiersza:

$$W=-(-1)^{1+2}\cdot 19\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\3&7\end{vmatrix}=19\cdot(28+3)=19\cdot 31=589$$

Przykład 2.4. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$ oraz $B=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\\1&2\end{bmatrix}$. Czy odwracalna jest macierz $M=B^TA^{-1}B$?

Obliczamy wyznacznik macierzy A. $\det A=4$.

Tworzymy macierz dopełnień algebraicznych:

$$A^D=\begin{bmatrix}(-1)^2\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}&(-1)^3\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}&(-1)^4\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}\\(-1)^3\begin{vmatrix}-2&1\\2&1\end{vmatrix}&(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&(-1)^5\begin{vmatrix}1&-2\\1&2\end{vmatrix}\\(-1)^4\begin{vmatrix}-2&1\\1&-1\end{vmatrix}&(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}&(-1)^6\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\4&0&-4\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Macierz $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&4&1\\-1&0&1\\-1&-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&1&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-1&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$.

$$M=B^TA^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&1&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-1&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{9}{4}&-4&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy M jest równy 1, więc macierz M jest odwracalna.

3. Wielomiany

3.1. Definicje, twierdzenia, wzory.

(1) **Wielomianem rzeczywistym** stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem
$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
przy czym $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_n \neq 0$.

Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy **współczynnikami wielomianu,** zaś liczbę a_0 nazywamy też **wyrazem wolnym.** Liczbę n nazywamy **stopniem wielomianu** w i oznaczamy symbolem st.$w(x)$.

(2) Wielomian w, dla którego prawdziwy jest związek: $w(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, nazywamy **wielomianem zerowym.** Piszemy wówczas $w(x) \equiv 0$. Przyjmujemy, że wielomian zerowy jest wielomianem stopnia $-\infty$.

(3) **Wielomianem zespolonym** stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem
$$w(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$
przy czym $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ oraz $c_n \neq 0$.

Analogicznie przyjmujemy, że $w(z) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$.

(4) Każdy wielomian rzeczywisty można traktować jako wielomian zespolony rozszerzając jego dziedzinę z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$. Wielomian zespolony lub rzeczywisty będziemy krótko nazywać **wielomianem**.

(5) Liczbę rzeczywistą (zespoloną) x_0 nazywamy **pierwiastkiem rzeczywistym (zespolonym) wielomianu** w wtedy i tylko wtedy, gdy $w(x_0) = 0$.

(6) **Twierdzenie o rozkładzie wielomianu.**
Jeżeli w oraz p są takimi wielomianami, że st.$w(x) \geqslant$ st.$p(x)$ oraz $p(x) \not\equiv 0$, to istnieją wielomiany q oraz r takie, że $w(x) = q(x)p(x) + r(x)$, przy czym $r(x) \equiv 0$ albo st.$r(x) <$ st.$p(x)$.

Wielomian r nazywamy **resztą** z dzielenia wielomianu w przez wielomian p, natomiast q nazywamy **ilorazem**. Mówimy, że **wielomian** w jest **podzielny przez wielomian** p wtedy i tylko wtedy, gdy $r(x) \equiv 0$.

(7) **Twierdzenie Bézouta.**
Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - x_0$.

(8) **Twierdzenie o reszcie.**
Reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - x_0$ jest równa wartości tego wielomianu w punkcie x_0, tzn. $w(x_0)$.

(9) Liczbę x_0 nazywamy **pierwiastkiem k-krotnym** wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez $(x - x_0)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$.

Liczbę $k \in \mathbb{N}$ nazywamy **krotnością** pierwiastka.

(10) **Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu.**
Jeżeli liczba całkowita $p \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu w o współczynnikach całkowitych zdefiniowanego przy pomocy równości $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, przy czym $a_0 \neq 0$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

(11) **Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu.**
Jeżeli liczba wymierna $\dfrac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz p i q są liczbami względnie pierwszymi, jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

(12) **Zasadnicze twierdzenie algebry.**
Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

(13) **Wnioski z zasadniczego twierdzenia algebry.**
(a) Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne).
(b) Każdy wielomian rzeczywisty stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne).

(14) **Twierdzenie o rozkładzie wielomianu zespolonego na czynniki liniowe.**
Niech wielomian $w(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma pierwiastki zespolone z_j o krotnościach odpowiednio k_j, gdzie $k_j \in \mathbb{N}$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Wtedy

$$w(z) = c_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m}.$$

(15) **Twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego.**
Niech w będzie wielomianem rzeczywistym. Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\overline{z_0}$ jest k-krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.

(16) **Twierdzenie o rozkładzie wielomianu rzeczywistego na rzeczywiste czynniki nierozkładalne.**
Każdy wielomian rzeczywisty można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

4. Układy równań liniowych

4.1. Definicje, twierdzenia, wzory.

(1) **Układem** m **równań liniowych z** n **niewiadomymi** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $b_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ. Układ równań, który nie posiada rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

(2) Powyższy układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań liniowych, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, zaś macierz B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych.

(3) Jeżeli macierz główna układu jest kwadratowa stopnia n i nieosobliwa, to rozwiązanie układu równań dane jest następującymi **wzorami Cramera**:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \\ \quad\vdots \\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \end{cases},$$

gdzie macierz A_i otrzymujemy z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

(4) Jeżeli macierz główna układu jest kwadratowa stopnia n i osobliwa, to
- jeśli $\det A_1 = \det A_2 = \cdots = \det A_n = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań
- w przeciwnym przypadku ($\det A_1 \neq 0$ lub $\det A_2 \neq 0$ lub $\ldots$ lub $\det A_n \neq 0$) układ jest sprzeczny.

(5) Rzędem macierzy A nazywamy maksymalny stopień nieosobliwej podmacierzy macierzy A.

(6) Twierdzenie Kroneckera–Capellego.
Układ równań liniowych ma co najmniej jedno rozwiązanie, jeśli rząd r macierzy tego układu A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A|B]$. Wówczas jeżeli r jest równe liczbie niewiadomych n, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, zaś jeśli $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.
Jeżeli rzędy powyższych macierzy są różne, to układ jest sprzeczny.

(7) Do rozwiązywania układów równań liniowych zastosujemy **metodę eliminacji Gaussa**. Polega ona na przekształceniu macierzy rozszerzonej układu postaci:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

do macierzy $[A'|B']$, gdzie A' zawiera podmacierz trójkątną górną z jedynkami na głównej przekątnej. Otrzymana w ten sposób macierz $[A'|B']$ jest macierzą rozszerzoną równoważnego układu równań, tzn. układu, którego zbiór rozwiązań jest identyczny ze zbiorem rozwiązań układu o macierzy rozszerzonej $[A|B]$.

(8) Poniższe operacje na **wierszach** macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go w układ równoważny:

(a) zamiana wierszy między sobą; operację zamiany wiersza i-tego z j-tym będziemy oznaczać symbolem $w_i \leftrightarrow w_j$;

(b) mnożenie wiersza przez liczbę różną od zera; operację mnożenia i-tego wiersza przez liczbę $c \neq 0$ będziemy oznaczać symbolem $w_i \cdot c$;

(c) dodanie do wszystkich wyrazów ustalonego wiersza odpowiadających im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą c; operację dodania j-tego wiersza pomnożonego przez stałą c do i-tego wiersza będziemy oznaczać symbolem $w_i + c \cdot w_j$;

(d) usunięcie wiersza złożonego z samych zer; operację usunięcia i-tego wiersza będziemy oznaczać symbolem us.w_i;

(e) usunięcie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych.

Układ równoważny otrzymujemy również wtedy, gdy w macierzy A zamienimy miejscami dwie kolumny **przy jednoczesnej zamianie niewiadomych**. Operację zamiany kolumny i-tej z j-tą oznaczać będziemy symbolem $k_i \leftrightarrow k_j$.

4.2. Przykłady.

Przykład 4.1. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań $\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 3t = 3 \\ 3x - ay + z - t = 1 \\ x + 5z + t = 2 \\ -x + y - 2z + 3t = 5 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej układu równań:

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -a & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_3-5k_1 \\ k_4-k_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 & 1 \\ 3 & -a & -14 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -8 & 1 \\ -a & -14 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 178 - 35a.$$

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $W \neq 0 \Leftrightarrow 178 - 35a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{178}{35}$.

Przykład 4.2. Z układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ y + 2z + 3t = -2 \end{cases}$$

wyliczyć niewiadomą y.

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej układu równań:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{w_3-w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

Obliczamy wyznacznik W_y:

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{w_3-w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Czyli $y = \frac{W_y}{W} = 3$.

Przykład 4.3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 + 4x_3 - 10x_4 = -7 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Zastosujemy metodę eliminacji Gaussa.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 & -10 & -7 \\ -1 & 1 & -3 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2-2w_1 \\ w_3-w_1 \\ w_4-3w_1 \\ w_5+w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 8 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2\cdot(-\frac{1}{3})} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_3+3w_2 \\ w_4+3w_2 \\ w_5-2w_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{w_3\cdot\frac{1}{4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_4-3w_3 \\ w_5+\frac{13}{3}w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{us.} w_4, w_5}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Po tych przekształceniach otrzymujemy następujący, równoważny wyjściowemu, układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Traktując x_4 jako parametr, obliczamy x_3 z ostatniego równania: $x_3 = x_4 - 1$.
Następnie obliczamy x_2 wstawiając $x_3 = x_4 - 1$ do drugiego równania: $x_2 = -\frac{5}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_4 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}(x_4 - 1) + \frac{8}{3}x_4 + \frac{1}{3} = x_4 + 2$.

Podobnie, podstawiając $x_2 = x_4 + 2$ oraz $x_3 = x_4 - 1$ do pierwszego równania, obliczamy $x_1 = 2x_4 - 1$.

Rozwiązanie omawianego układu równań ma postać: $\begin{cases} x_1 = 2x_4 - 1 \\ x_2 = x_4 + 2 \\ x_3 = x_4 - 1 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$, co oznacza, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

5. Struktury algebraiczne

5.1. Podstawowe definicje i wzory.

(1) **Działaniem wewnętrznym** w zbiorze X nazywamy każdą funkcję f określoną na iloczynie kartezjańskim X^2 o wartościach w zbiorze X. ($f\colon X^2 \longrightarrow X$)

(2) **Grupą** nazywamy parę $(X, \circ)$, gdzie X jest zbiorem, zaś $\circ$ działaniem wewnętrznym w tym zbiorze spełniającym warunki:

(1) $\bigwedge\limits_{x\in X} \bigwedge\limits_{y\in X} \bigwedge\limits_{z\in X} (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ łączność

(2) $\bigvee\limits_{e\in X} \bigwedge\limits_{x\in X} e \circ x = x \circ e = x$ istnienie elementu neutralnego

(3) $\bigwedge\limits_{x\in X} \bigvee\limits_{x^*\in X} x \circ x^* = x^* \circ x = e$ istnienie elementu symetrycznego

Jeśli ponadto działanie $\circ$ jest przemienne, to grupę nazywamy **grupą przemienną** lub **abelową**.

(3) Dwie grupy $(X, \circ)$ i $(X', \bullet)$ nazywamy **izomorficznymi** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $f\colon X \longrightarrow X'$ takie, że $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) \bullet f(x_2)$. Mówimy wówczas, że odwzorowanie f zachowuje działanie.

(4) **Pierścieniem** nazywamy trójkę $(X, \circ, *)$, gdzie X jest zbiorem, para $(X, \circ)$ tworzy grupę abelową, zaś $*$ jest działaniem wewnętrznym i łącznym.
Jeśli ponadto:
- działanie $*$ posiada element neutralny, to pierścień nazywamy **pierścieniem z jednością**
- działanie $*$ jest przemienne, to pierścień nazywamy **pierścieniem przemiennym**

(5) **Ciałem** nazywamy trójkę $(X, \circ, *)$, gdzie X jest zbiorem, para $(X, \circ)$ tworzy grupę abelową, zaś para $(X \setminus \{e\}, *)$ (e jest elementem neutralnym działania $\circ$) tworzy grupę.
Jeśli ponadto działanie $*$ jest przemienne, to ciało nazywamy **ciałem przemiennym**.

Element neutralny działania $\circ$ często nazywamy *zerem*, zaś element neutralny działania $*$ *jedynką lub jednością* ciała. Element symetryczny względem działania $\circ$ nazywamy **elementem przeciwnym**, zaś element symetryczny względem działania $*$ nazywamy **elementem odwrotnym**.

5.2. Przykłady.

Przykład 5.1. Wykazać, że para $(\mathbb{Z}, +)$ tworzy grupę.
Działanie dodawania jest wewnętrzne i łączne. Elementem neutralnym dodawania jest 0, zaś elementen symetrycznym do dowolnej liczby całkowitej jest liczba do niej przeciwna.
Zauważmy, że para $(\mathbb{N}, +)$ nie ma struktury grupy, gdyż brak jest elementu symetrycznego.

Przykład 5.2. Sprawdzić jaką strukturę mają poszczególne zbiory liczbowe z działaniami dodawania i mnożenia liczb.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – pierścień przemienny z jednością
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ – ciało NAJMNIEJSZE CIAŁO LICZBOWE
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – ciało
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – ciało

Przykład 5.3. Niech $W[x]$ oznacza zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach należących do zbioru W.
Trójka $(W[x], +, \cdot)$ ma strukturę pierścienia, gdy W jest dowolnym ze zbiorów: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, zaś $+$, $\cdot$ odpowiednio dodawaniem i mnożeniem wielomianów.
W ogólności trójka ta ma strukturę pierścienia dla dowolnego zbioru W, w którym określono działania dodawania i mnożenia, tworząc strukturę pierścienia.

Przykład 5.4. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y określamy działanie $x \diamond y$ w następujący sposób: $x \diamond y = 2xy$. Sprawdzić, czy para $(\mathbb{R}, \diamond)$ jest grupą.
Niech x, y, z będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zauważmy, że działanie $\diamond$ jest wewnętrzne. Sprawdzimy, czy jest łączne.
$L = (x \diamond y) \diamond z = (2xy) \diamond z = 2(2xy)z = 4xyz$
$P = x \diamond (y \diamond z) = x \diamond (2yz) = 2x(2yz) = 4xyz$
A zatem $L = P$, czyli działanie jest łączne.
Szukamy elementu neutralnego:
$x \diamond e = x \;\Leftrightarrow\; 2xe = x$
Ostatnia równość musi być spełniona dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc $e = \frac{1}{2}$.
Szukamy elementu symetrycznego:
$x \diamond x^* = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2xx^* = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow x^* = \frac{1}{4x}$.
Ostatnia równość jest niemożliwa dla $x = 0$, zatem para $(\mathbb{R}, \diamond)$ nie jest grupą.
Zauważmy natomiast, że jest grupą para $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \diamond)$.

Przykład 5.5. *Pierścienie reszt*
Niech $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych od 0 do $p-1$ włącznie. W zbiorze tym określamy działania $\oplus_p$ i $\odot_p$ następująco:
$m \oplus_p n =$ reszta z dzielenia $m + n$ przez p
$m \odot_p n =$ reszta z dzielenia mn przez p
Działania te nazywamy działaniami **modulo** p.
TWIERDZENIE
Trójka $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ jest pierścieniem. Pierścień ten jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy p jest liczbą pierwszą.